

El concepto de métrica fuzzy a través del filtrado de imágenes digitales

Joan-Gerard Camarena, Valentín Gregori, Samuel Morillas, Almanzor Sapena
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
alsapie@mat.upv.es, joangerard@gmail.com, smorillas@mat.upv.es, vgregori@mat.upv.es

Abstract

La lógica fuzzy ha sido utilizada recientemente en numerosas aplicaciones de la ingeniería con resultados exitosos. En particular, las métricas fuzzy han sido aplicadas al filtrado de imágenes en color mejorando, en muchos casos, los resultados de los filtros clásicos. En este trabajo abordamos la noción de métrica fuzzy y presentamos un modelo de simulación que permite a los alumnos de postgrado conocer esta noción y acceder a las propiedades de las métricas fuzzy a través del filtrado de imágenes en color.

Fuzzy logic has been recently successfully used in several Engineering applications. In particular, fuzzy metrics have been applied to color image filtering improving, in many cases, classical filters results. In this work we study the notion of fuzzy metric and present a simulation model which allows postgraduate students to understand this notion and study the fuzzy metrics properties through color image filtering.

Keywords: Métrica fuzzy, filtrado de imágenes, ruido impulsivo, ruido gaussiano, peer group.
Fuzzy metric, image filtering, impulse noise, Gaussian noise, peer group

1 Introducción

Las denominadas métricas fuzzy proporcionan, a diferencia de las medidas de distancia clásicas, el grado de cercanía (en $[0,1]$) entre dos objetos x e y teniendo en cuenta el contexto mediante un parámetro t . Estas métricas son de gran interés en Ingeniería debido principalmente a dos ventajas significativas respecto a las métricas clásicas: En primer lugar, los valores dados por una métrica fuzzy se encuentran en el intervalo $[0,1]$ independientemente de la naturaleza del concepto de distancia que se mide. Este hecho hace más sencillo combinar distintos criterios de distancia que pueden encontrarse originalmente en muy diferentes rangos pero que las métricas fuzzy llevan a un rango común. Ahondando en este sentido, la combinación de varios criterios de distancia pueden interpretarse mediante un único modelo que se representa de nuevo por una métrica fuzzy. En segundo lugar, las métricas fuzzy encajan perfectamente con el uso de otras técnicas fuzzy puesto que los valores dados por una métrica fuzzy pueden ser utilizados directamente o interpretados como grado de cercanía. En particular, recientemente, las métricas fuzzy han sido aplicadas al filtrado de imágenes en color mejorando algunos filtros existente mediante la simple sustitución de las métricas clásicas [8, 9] y permitiendo el desarrollo de nuevas técnicas de filtrado de imagen [2],[10]-[12].

El estudio de este tipo de métricas tiene cabida en el desarrollo de un curso de posgrado y por ello presentamos un modelo de filtrado de imágenes en color que permite introducir la noción de métrica fuzzy y los contenidos asociados a dicho nivel.

2 Modelización de imágenes digitales

En la actualidad el uso de imágenes digitales está presente en casi todos los ámbitos: desde el uso a nivel de usuario en cámaras digitales, vídeo y otras, a las aplicaciones médicas, el reconocimiento de formas, la inteligencia artificial, la meteorología y la ingeniería. Las imágenes, que a simple vista son una representación en dos dimensiones de un conjunto de objetos, vienen modelizadas como *señales* para su tratamiento digital, almacenamiento y transmisión. La representación más común de una imagen es una matriz tridimensional, de dimensiones $m \times n \times p$, donde m y n representan las dimensiones de la imagen (alto y ancho) y p es el número de canales (generalmente los colores básicos) de la imagen. Ello es debido a que la imagen en la cámara se proyecta sobre un dispositivo (CCD) que se compone de una serie de sensores individuales dispuestos en una rejilla. Las imágenes de un único canal son las denominadas imágenes en escala de grises (o en blanco y negro), mientras que las imágenes en color habitualmente se sirven de tres canales conocidos como *RGB* (*Red*, *Green*, *Blue*), ya que para formar un color puede realizarse una combinación de los colores Rojo, Verde y Azul (denominados primarios). Más usualmente, en lugar de una matriz tridimensional, conviene modelizar una imagen como una matriz bidimensional donde cada elemento es un vector de color denominado *píxel* (del inglés *picture element*). La Figura 1 muestra algunos ejemplos de este tipo de modelización.

3 Espacios de color

Al igual que nuestro ojo es incapaz de ver zonas del espectro electromagnético, los dispositivos que habitualmente utilizamos para manipular y presentar nuestras fotos (tales como pantallas

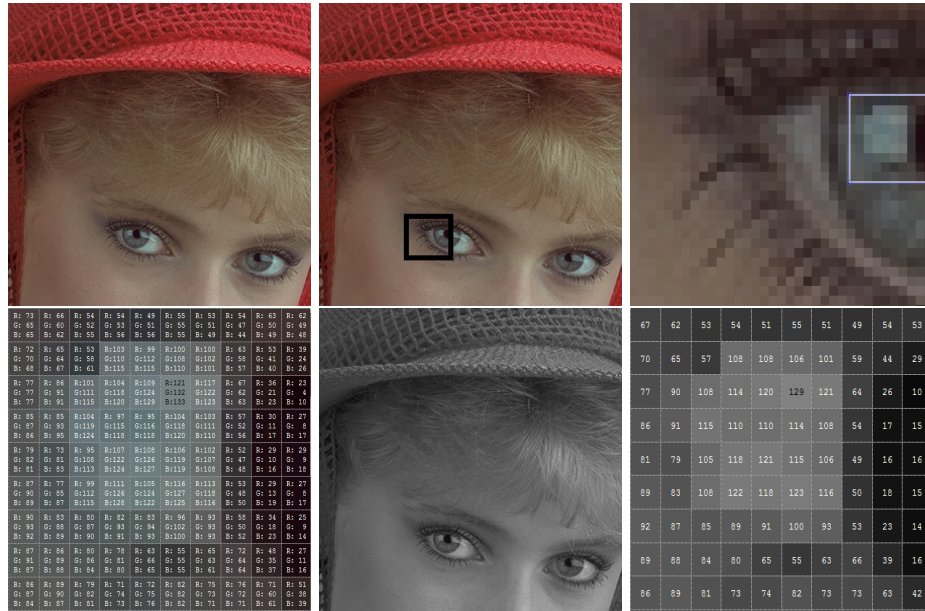


Figura 1: Ejemplos de modelización de imágenes digitales: (a) Imagen Girl Red Hat; (b) Marca de un detalle de la imagen Girl Red Hat; (c) Detalle de la imagen Girl Red Hat; (d) Ternas de valores RGB de la marca sobre el detalle de la imagen Girl Red Hat; (e) Imagen Girl Red Hat en escala de grises; (f) Valores de los píxeles en escala de grises de la imagen Girl Red Hat.

de televisión u ordenador e impresoras) son incapaces de representar el espectro de luz visible. Existen diferentes espacios de color y cada uno de ellos tiene capacidades de representación distintas, con mayor o menor limitación de la gama de colores que puede mostrar cada uno.

- En el espacio RGB (presente en los monitores y televisores) cada píxel se compone de una mezcla de los colores (denominados primarios) rojo (R), verde (G) y azul (B). De esta manera, cada uno de los parámetros utiliza valores comprendidos entre 0 (ausencia de dicho color) y 255. Por ejemplo, la terna (255,0,0) indica el color rojo. En la figura 1(d) se muestran las ternas correspondientes a los píxeles de la zona marcada en la imagen de la figura 1(c). Además, en la figura 2(a) se muestra la representación gráfica de este espacio de color.
- El CMYK (Cian, Magenta, Amarillo y Negro) es el que usan todas las impresoras y, generalmente, las imprentas.
- En el espacio HSV o HSL (Tono, Saturación y Valor/Luminancia) el tono define la frecuencia del color en el espectro visible, es decir el color en sí. La saturación define la cantidad de color (si es más vivo o más apagado) y la luminancia la cantidad de brillo (más o menos brillante).
- El modelo de color Lab es el nombre abreviado de dos espacios de color diferentes. El más conocido es CIELAB ($L^*a^*b^*$) y el otro es Hunter Lab.

El CIE $L^*a^*b^*$ (CIELAB) es el modelo cromático usado normalmente para describir todos los colores que puede percibir el ojo humano. Fue desarrollado específicamente con este propósito por la *Commission Internationale d'Éclairage* (Comisión Internacional de Iluminación), razón por la cual se abrevia CIE.

El valor de L^* representa la luminosidad de color (de manera que valores pequeños de L^* indican poco brillo y valores altos de L^* indican mucho brillo. Por su parte, el parámetro a^*

indica la posición entre magenta y verde (valores negativos indican verde mientras valores positivos indican magenta). Finalmente, El parámetro b^* indica la posición entre amarillo y azul (valores negativos indican azul y valores positivos indican amarillo).

El modo de color Lab de Adobe Photoshop contiene un componente de luminosidad (L) que varía entre 0 y 100. En el Selector de color y la paleta de colores, el componente a (eje verde-rojo) y el componente b (eje azul-amarillo) pueden estar comprendidos entre +127 y -128. En la Figura 2(b) se muestra la representación gráfica del espacio de color $L^*a^*b^*$.

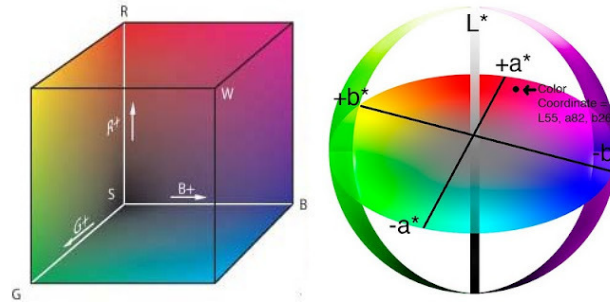


Figura 2: (a) Espacio de color RGB y (b) Espacio de color $L^*a^*b^*$

4 Modelización del ruido

Por el hecho de ser una señal, cualquier imagen puede contaminarse durante su adquisición (cámaras, escáneres, etc.), almacenamiento (discos duros, tarjetas de memoria, cd, etc.) o transmisión (vía Internet, Bluetooth, etc.). Es aquí donde aparece el concepto de *ruido*. Una imagen está contaminada cuando algunos de sus píxeles han resultado alterados o transformados y, en consecuencia, la información del color original ha sido sustituida por otros valores.

En general existen dos tipos fundamentales de ruido. Por una parte una imagen puede resultar contaminada por ruido que aparece en el momento de su adquisición por el hecho de que un sensor de la cámara, escáner o similar es de mala calidad o bien se encuentra en malas condiciones (técnicas, iluminación, etc.). Este tipo de ruido se denomina *ruido blanco* o *Gaussiano*.

Por otra parte, existe lo que se conoce como *ruido impulsivo*, que aparece cuando la imagen ha resultado contaminada durante su transmisión por un canal. Este tipo de ruido afecta solamente a ciertos píxeles de la imagen (a diferencia del ruido Gaussiano) y el efecto provocado sobre los píxeles contaminados es la alteración del valor de alguna (o algunas) de su componentes de color por valores extremos o muy diferentes (ya que en el mundo digital la información se codifica en sistema binario y cada componente de color es un *byte*, el efecto de modificar sus valores todos a 0 representa el valor mínimo, que en términos de color es el negro, mientras que modificarlos a 1 resulta el valor máximo de color que es el blanco). El efecto visual producido por el ruido impulsivo sobre la imagen es que aparece salpicada en los píxeles que han resultado alterados. En la Figura 3 pueden observarse los dos tipos de ruido al que hacemos referencia aplicados a una de las imágenes utilizadas en las experimentaciones posteriores de filtrado.

Para la introducción de ruido (artificial) en las imágenes pueden utilizarse diversos modelos. Entre ellos destacaremos los siguientes.

El ruido gaussiano se añade utilizando una distribución normal (con media nula) y desviación

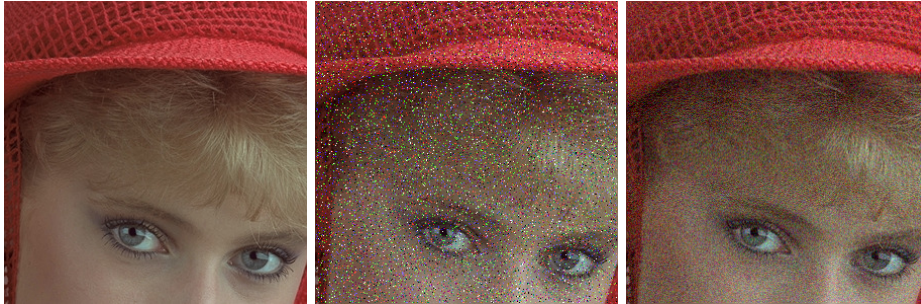


Figura 3: Tipos de ruido que pueden afectar a las imágenes (a) *Girl Red Hat* original, (b) *Girl Red Hat* contaminada con ruido impulsivo y (c) *Girl Red Hat* contaminada con ruido Gaussiano.

típica σ . Para el caso de ruido impulsivo se consideran dos modelos para imágenes modelizadas en el espacio de color RGB [1].

Sea $\mathbf{F} = \{F_R, F_G, F_B\}$ el píxel original y sea \mathbf{F}^* el píxel ruidoso generado mediante el proceso. Supóngase que p es la probabilidad de que aparezca ruido. Entonces, los dos tipos de ruido impulsivo considerados se definen como sigue.

I. Ruido impulsivo de valor fijo.

Los píxeles de la imagen se perturban de acuerdo con el siguiente esquema

$$\mathbf{F}^* = \begin{cases} \{d_1, F_G, F_B\} & \text{con probabilidad } p \cdot p_1, \\ \{F_R, d_2, F_B\} & \text{con probabilidad } p \cdot p_2, \\ \{F_R, F_G, d_3\} & \text{con probabilidad } p \cdot p_3, \\ \{d_1, d_2, d_3\} & \text{con probabilidad } p \cdot (1 - \sum_{i=1}^3 p_i). \end{cases} \quad (1)$$

donde d_1, d_2, d_3 son independientes e iguales a 0 o 255 con igual probabilidad, y p_i para $i = 1, 2, 3$ determina la probabilidad de que el ruido aparezca en los canales de la imagen.

II. Ruido impulsivo de valor aleatorio.

$\mathbf{F}^* = \{d_1, d_2, d_3\}$ con probabilidad p , donde d_1, d_2, d_3 son valores enteros aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 255]$.

III. Ruido Gaussiano.

$\mathbf{F}^* = F_R + g_R, F_G + g_G, F_B + g_B$, donde g_R, g_G, g_B son tres valores aleatorios tomados de una distribución normal (gaussiana) con media nula y desviación típica igual a σ que es el parámetro que caracteriza la intensidad de ruido.

5 Filtrado de imágenes digitales

Para eliminar o reducir el ruido presente en una imagen, y que altera la estructura de la información que contiene, se aplican las denominadas técnicas de filtrado de imágenes. De hecho, el filtrado de ruido es el proceso de discriminar entre la información original de una imagen y los datos ruidosos, lo cual hace que el problema de la presencia de ruido pueda tratarse como un problema de interpretación de información. Como consecuencia, el filtrado de imágenes se convierte en un paso fundamental dentro de cualquier sistema de visión por computador donde se utilizan imágenes y es, probablemente, la tarea más común del procesamiento de imágenes digitales, sobre todo para prepararlas para otros procesos posteriores.

Las primeras técnicas aplicadas para el filtrado de imágenes en color fueron métodos que utilizaban los modelos usados para imágenes en escala de grises aplicados a cada una de las componentes de color individualmente. Sin embargo, es conocido que existe una correlación entre los canales de color de la imagen que debe tenerse en consideración y, por otra parte, pueden aparecer algunos artefactos de color y otros efectos colaterales en las imágenes procesadas, lo cual implica la necesidad de buscar nuevas soluciones específicas para imágenes en color sin adaptar los modelos para escala de grises.

Una de las vertientes para el procesamiento de imágenes más estudiada ha sido la vectorial. De acuerdo con esta técnica, cada píxel de la imagen viene representado como un vector formado por las componentes de color y la imagen se trata como un campo de vectores. En consecuencia, todos los canales de la imagen se procesan conjuntamente de manera que, necesariamente, se toma en consideración la correlación entre ellos. Las bases teóricas de los modelos de filtrado se fundamentan en la teoría de la estadística *robusta* y, con este enfoque, se puede afirmar que las observaciones no representativas (*outliers*) en el conjunto de vectores se pueden considerar como contaminantes de la información. Estas técnicas de filtrado proporcionan herramientas para interpretar o clasificar estos *outliers* juntamente con métodos para rechazarlos o bien aplicar procedimientos para reducir su influencia. Puesto que los píxeles *outliers* son una muestra diferenciada del resto de píxeles circundantes, estas técnicas se basan en la idea de detectarlos mediante diferentes modelos.

Una de las primeras técnicas conocidas en esta línea fue el denominado *Vector Median Filter* (VMF, introducido por Astola en 1990). Este filtro considera sobre cada píxel de la imagen una ventana centrada en dicho píxel que incluye a todos sus vecinos y calcula la distancia acumulada de cada uno de los píxeles al resto. Ello permite generar un orden de píxeles en función del valor de esta distancia acumulada, de manera que el píxel central será sustituido por el vecino con menor distancia acumulada. Cabe decir que, en estos modelos, el cálculo de las distancias toman un papel determinante y, en consecuencia, el resultado depende del tipo de métrica utilizada, si bien las más utilizadas son las conocidas *city-block* (L_1), la *Euclídea* (L_2) y la *supremo* (L_∞).

El resultado obtenido mediante este filtrado elimina el ruido impulsivo con relativa eficiencia ya que los píxeles *outliers* difícilmente acumulan bajos valores de distancias acumuladas. En cambio, este tipo de filtrado presenta el problema de ausencia de adaptatividad, es decir, no tiene en consideración si el píxel analizado es ruidoso o no, ya que filtrará tanto aquellos píxeles contaminados como los libres de ruido y provocará sobre la imagen una difuminación general y, en consecuencia, la pérdida de detalles en bordes y texturas finas.

Posteriormente se han introducido otros métodos que aplican la misma técnica pero con ciertas variaciones de interpretación como es el caso del *Basic Vector Directional Filter* (BVDF, introducido por Trahanias en 1993), que realiza la ordenación de los vectores (píxeles) en función de los ángulos que forman entre ellos y el *Directional Distance Filter* (DDF, introducido por Karakos en 1997), que utiliza como criterio de distancia un producto ponderado entre la distancia vectorial acumulada (criterio del VMF) y la distancia angular vectorial (criterio del BVDF). Este último filtro consigue discriminar, por una parte, vectores distantes con el mismo ángulo y, por otra parte, vectores próximos con ángulo distante y, en consecuencia, mejora la salida del filtro pero no resuelve el problema de la adaptatividad y, además, presenta un enorme coste computacional ya que se han de efectuar numerosos cálculos.

Para resolver el problema de la ausencia de adaptatividad y acoplarse a las características locales de la imagen, aparecieron en la literatura los denominados filtros adaptativos, entre los

que cabe destacar las técnicas basadas en coeficientes ponderados, donde se aplica a cada píxel de la ventana de filtrado una ponderación que sirve para computar la salida del filtro como media ponderada de los vectores de la ventana. En la figura 4 se ilustra el funcionamiento de un filtro adaptativo y se muestran algunos valores que indican la calidad de la salida.

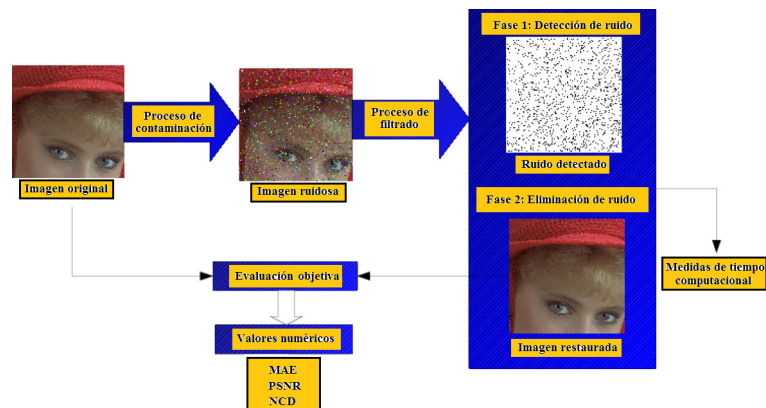


Figura 4: Proceso de filtrado adaptativo.

La compilación de estos filtros radica en el cálculo de estas ponderaciones, ya que utilizan desde estadísticas variadas y funciones polinómicas a la inteligencia artificial. Otras técnicas son las denominadas técnicas de filtrado múltiple (o híbridos) donde el filtrado se realiza mediante distintos subfiltros simultáneamente, de manera similar al DDF. Pero entre las técnicas adaptativas más importantes que se conocen en la actualidad aparecen las de filtrado por sustitución (principalmente para ruido impulsivo) que realizan el proceso de filtrado únicamente a los píxeles detectados como ruidosos, manteniendo inalteradas las características locales de las imágenes (bordes y vértices) de manera que el proceso consta de dos fases, una primera de detección de los impulsos y una segunda donde se procesan estos píxeles ruidosos. La dificultad de estas técnicas radica en la detección de los píxeles ruidosos y la manera más común de funcionamiento es mediante la construcción de un grupo de análisis de un píxel (*cluster*), normalmente formado por los píxeles vecinos al estudiado y midiendo el grado de pertenencia del píxel analizado al grupo, detectándose como ruido siempre que dicho grado sea bajo.

Como evolución del grupo de análisis mencionado, aparece el concepto de *peer group*. El *peer group* de un píxel es el conjunto de vecinos que son próximos a él (respecto a una cierta métrica y un umbral de distancia). Mención especial requiere el trabajo de Smolka, con su *Peer Group Filter* (PGF, Smolka 2005). En este filtro se estudia el número de píxeles que pertenecen al *peer group* de cada píxel de la imagen y, si es mayor que cierto parámetro dado, el píxel estudiado se declara como no corrupto. Una vez clasificados los píxeles entre corruptos y no corruptos se realiza la fase de filtrado de los píxeles ruidoso mediante cualquier técnica de sustitución. Estas técnicas, además de mejorar la calidad de las salidas son computacionalmente más eficientes ya que efectúan menos cálculos.

6 Medidas de calidad de filtrado

Para el estudio de la calidad del filtrado de imágenes deben tenerse en cuenta dos cualidades: la eliminación del ruido y la preservación de los detalles de la imagen. Para ello, habitualmente se utilizan unas medidas de calidad cuyas definiciones son las siguientes [1]:

MAE: (*Mean Absolute Error*) que mide la calidad de la preservación de detalles. Está definida por

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{q=1}^Q |F^q(i, j) - \hat{F}^q(i, j)|}{N \cdot M \cdot Q} \quad (2)$$

donde M y N son las dimensiones de la imagen, Q es el número de canales de la imagen ($Q = 3$ para imágenes en color), y $F^q(i, j)$ y $\hat{F}^q(i, j)$ denotan la componente q -ésima del vector de la imagen original y la imagen filtrada, en el píxel que ocupa la posición (i, j) .

PSNR: (*Peak Signal to Noise Ratio*) que representa la capacidad de eliminación de ruido.

$$PSNR = 20 \log \left(\frac{255}{\sqrt{\frac{1}{NMQ} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{q=1}^Q (F^q(i, j) - \hat{F}^q(i, j))^2}} \right) \quad (3)$$

NCD: (*Normalized Color Difference*) que mide las diferencias perceptuales entre los píxeles.

$$NCD_{Lab} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \Delta E_{Lab}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E_{Lab}^*} \quad (4)$$

donde $\Delta E_{Lab} = [(\Delta L^*)^2 + (\Delta a^*)^2 + (\Delta b^*)^2]^{\frac{1}{2}}$ denota el error perceptual del color y $E_{Lab}^* = [(L^*)^2 + (a^*)^2 + (b^*)^2]^{\frac{1}{2}}$ es la *norma* o *magnitud* del vector de la imagen original en el espacio de color $L^*a^*b^*$.

7 Métricas fuzzy

En el año 1965, Lofti A. Zadeh [13] introdujo la teoría de conjuntos *fuzzy* (difusos o borrosos), motivada por el hecho de que la mayoría de objetos del mundo real no tienen totalmente definido un criterio de pertenencia. La teoría de conjuntos *fuzzy* es una generalización de la teoría clásica que permite la pertenencia parcial de un elemento a cierto conjunto y, en consecuencia, describe una transición gradual entre las nociones clásicas de exterior e interior de un conjunto. Basada en la teoría de conjuntos *fuzzy* aparece la denominada *lógica fuzzy* que es una forma de razonamiento que permite incorporar los sistemas de razonamiento humanos a los sistemas de automatización con la finalidad de tratar el conocimiento impreciso, con gran aplicabilidad actual al control de procesos, sistemas inteligentes, reconocimiento de formas, tratamiento de señales y robótica. Ciertamente, en pocas ocasiones de la historia de la ciencia un concepto matemático ha tenido una trascendencia tan espectacular en los diversos ámbitos de la ciencia. El éxito de la *lógica fuzzy* radica en que permite tratar la información con límites imprecisos y graduaciones de manera que se intenta elevar las capacidades de una máquina a niveles comparables a las del ser humano y que habitualmente se denomina inteligencia artificial.

Uno de los primeros campos desarrollados en la Matemática *Fuzzy* fue la *Topología Fuzzy* y entre los problemas más interesantes aparecidos destaca el de obtener una noción adecuada de métrica *fuzzy*. Cabe recordar que el estudio matemático de las métricas está basado en la distancia entre objetos pero, sin embargo, en muchas ocasiones esta distancia no puede determinarse con

exactitud. Este problema se engloba en el ámbito *fuzzy* y, aunque en primer lugar se abordó desde el punto de vista probabilístico, varios autores lo han estudiado posteriormente desde diferentes puntos de vista.

Entre todos ellos destacaremos las denominadas métricas *fuzzy* de George y Veeramani [5], desarrolladas recientemente.

Definition 1.1 Sea X un conjunto (no vacío). Una métrica *fuzzy* (en el sentido de George y Veeramani) es un par $(M, *)$ donde $*$ es una t -norma continua y M es un conjunto *fuzzy* definido en $X \times X \times]0, \infty[$ que cumple las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $t, s \in]0, \infty[$:

$$(GV1) \quad M(x, y, t) > 0$$

$$(GV2) \quad M(x, y, t) = 1 \text{ si y sólo si } x = y$$

$$(GV3) \quad M(x, y, t) = M(y, x, t)$$

$$(GV4) \quad M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$$

$$(GV5) \quad \text{La aplicación } M_{xy} :]0, \infty[\rightarrow]0, 1] \text{ es continua, donde } M_{xy} :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1] \text{ dada por } M_{xy}(t) = M(x, y, t).$$

El valor $M(x, y, t)$ puede interpretarse como el grado de cercanía entre x e y con respecto al parámetro t .

El axioma (GV1) se justifica porque, de la misma forma que una métrica clásica no puede tomar el valor ∞ entonces M no puede tomar el valor 0.

El axioma (GV2) es equivalente al siguiente:

$$M(x, x, t) = 1 \text{ para todo } x \in X \text{ y } t > 0, \text{ y } M(x, y, t) < 1 \text{ para cualesquiera } x \neq y \text{ y } t > 0.$$

El axioma (GV2) sugiere la idea de que cuando $x = y$ el grado de cercanía entre x e y es *perfecto*, o simplemente 1, y por tanto $M(x, x, t) = 1$ para cualesquiera $x \in X$ y $t > 0$.

De esta forma, los valores 0 e ∞ en la teoría clásica de los espacios métricos se identifican con 1 y 0, respectivamente en la teoría *fuzzy*.

El axioma (GV3) exige la simetría de la métrica y (GV4) puede considerarse la versión *fuzzy* de la desigualdad triangular clásica.

Las propiedades de las métricas *fuzzy* han sido ampliamente estudiadas desde el punto de vista topológico y han sido numerosos los trabajos dedicados al desarrollo de la teoría de los espacios métricos *fuzzy* [6, 7].

Una clase destacada de métricas *fuzzy* son aquéllas que no dependen del parámetro t , y por tanto se pueden denotar por $M(x, y)$ y reciben el nombre de métricas *fuzzy* estacionarias.

8 Ejemplos de métricas *fuzzy*

Example 1.2 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $M_d : X \times X \times]0, +\infty[$ definida por

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

Entonces (M_d, \cdot) es una métrica fuzzy definida en X denominada **métrica fuzzy estándar inducida por d** .

Example 1.3 Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicación inyectiva y sea $g : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, +\infty[$ una función continua y creciente. Fijados $\alpha, \beta > 0$, definimos el conjunto fuzzy M mediante la expresión

$$M(x, y, t) = \left(\frac{(\min\{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t)}{(\max\{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t)} \right)^\beta \quad (5)$$

Entonces (M, \cdot) es una métrica fuzzy en X .

En particular, si en la ecuación (5) tomamos $f(x) = x$, $g(t) = t$, $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ se tiene

$$M(x, y, t) = \frac{\min\{x, y\} + t}{\max\{x, y\} + t}$$

9 Aplicación de las métricas fuzzy al filtrado de imágenes

Recientemente se han introducido las ideas de la lógica *fuzzy* como aplicación al filtrado de imágenes y las implementaciones han resultado de gran interés. Atendiendo al hecho de que, dentro de las imágenes, es complicado distinguir entre píxeles ruidosos y los que forman parte de vértices y detalles, las métricas *fuzzy*, desarrolladas en los últimos años, han resultado muy interesantes a la hora de trabajar con incertezas o umbrales y se han utilizado para la implementación de nuevos filtros. En los filtros clásicos anteriormente citados, se utilizan métricas clásicas pero se ha demostrado que la implementación de las métricas *fuzzy* a ciertos tipos de filtrado, además de mejorar la detección de ruido, también mejora el rendimiento computacional del filtrado. En particular, las métricas *fuzzy* posibilitan la medida de diversas características simultáneamente, lo cual no es posible con el uso de métricas clásicas y ello ha permitido la obtención de nuevas métricas que, de alguna forma, garantizan el estudio de estas características.

10 Eliminación de ruido impulsivo. Fuzzy peer group filter

Para la similitud de color entre los píxeles \mathbf{F}_i y \mathbf{F}_j podemos comparar su tres componentes de color RGB mediante la siguiente métrica fuzzy

$$M_c(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j) = \prod_{s=1}^3 \frac{\min\{F_i^s, F_j^s\} + K}{\max\{F_i^s, F_j^s\} + K}$$

donde K es un número real constante independientemente de la imagen elegida o bien puede tomarse como un parámetro que dependa de las diferencias de color en la imagen.

11 Eliminación de ruido Gaussiano. Fuzzy bilateral filter

La eliminación de ruido Gaussiano implica el suavizado de las distintas áreas de una imagen sin degradar los detalles y bordes. Filtros clásicos como el Arithmetic Mean Filter (AMF)



Figura 5: (a) Imagen Girl Red Hat contaminada con un 20% de ruido impulsivo. Imágenes de salida: (b) Imagen Girl Red Hat filtrada con el VMF (Vector Median Filter), (c) Imagen Girl Red Hat filtrada con el PGF (Peer Group Filter), (d) Imagen Girl Red Hat filtrada con el FPGF (Fuzzy Peer Group Filter).

consiguen el suavizado del ruido pero emborronan los bordes significativamente. Algunos otros modelos detectan los bordes por medio de medidas locales para suavizar en menor medida estas zonas.

Un modelo muy conocido es el Bilateral Filter (BF) cuya salida de filtrado es una media ponderada de los píxeles vecinos donde el peso asignado a cada píxel depende de la similitud colorimétrica y de la cercanía espacial.

Por ello, se ha adaptado dicho filtro con el uso de métricas fuzzy en el denominado Fuzzy Bilateral Filter (FBF) que utiliza una única métrica fuzzy para el cálculo de las ponderaciones de la salida del filtrado.

Para el estudio de la distancia colorimétrica entre píxeles se considera la métrica fuzzy M_c citada anteriormente en el FPGF.

En el caso del grado de cercanía espacial entre los píxeles \mathbf{F}_i y \mathbf{F}_j podemos tener en cuenta su localización $\mathbf{i} = (i_1, i_2)$ y $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$ en la imagen. Para ello podemos utilizar la métrica fuzzy (estándar)

$$M_e(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mu) = \frac{\mu}{\mu + d(\mathbf{i}, \mathbf{j})}$$

donde $d(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ denota cualquier métrica clásica. El parámetro μ puede tomarse para ajustar el criterio de cercanía según el tamaño de la imagen.

Para tener en cuenta ambos criterios simultáneamente utilizaremos una nueva métrica generada mediante una combinación de las dos anteriores de manera que el grado de cercanía entre dos píxeles viene dado por el producto de ambas métricas

$$M(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j) = M_c(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j, \lambda) \cdot M_e(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j, \mu)$$

Los resultados visuales correspondientes a diversos filtros mencionados en este artículo pueden observarse en las Figuras 5 y 6 donde se muestran las diferentes salidas una vez aplicado cada uno de los métodos sobre la imagen ruidosa.

Los recientes trabajos [3, 4] del profesor Emre Celebi (Universidad de Lousiana, EEUU) han estudiado una gran cantidad de métricas clásicas y métricas fuzzy utilizadas en filtrado de imágenes y ha concluido que las métricas fuzzy son las más efectivas para este tipo de filtrado.



Figura 6: (a) Imagen Girl Red Hat contaminada con un 20% de ruido Gaussiano. Imágenes de salida: (b) Imagen Girl Red Hat filtrada con el BF (Bilateral Filter), (c) Imagen Girl Red Hat filtrada con el FBF (Fuzzy Bilateral Filter).

Agradecimientos

Valentín Gregori agradece la ayuda del Ministerio de Economía y Competitividad MTM 2012-37894-C02-01, Samuel Morillas y Almanzor Sapena agradecen la ayuda del Ministerio de Educación MTM2009-12872-C02-01.

Referencias

- [1] K. N. Plataniotis, A. N. Venetsanopoulos, *Color Image Processing and Applications*. Springer, Berlin, 2000.
- [2] J. G. Camarena, V. Gregori, S. Morillas, A. Sapena, “Fast detection and removal of impulsive noise using peer groups and fuzzy metrics”, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, **19 1** (2008) 20–29.
- [3] M. E. Celebi, “Distance measures for reduced ordering-based vector filters”, *IET Image Processing*, bf 3 (2009) 249-260 .
- [4] M. E. Celebi, “Alternative distance/similarity measures for reduced ordering based non-linear vector filters”, *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings*, 2010, 1266-1269.
- [5] A. George and P. Veeramani, On Some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* **64 3** (1994) 395-399.
- [6] V. Gregori and S. Romaguera, Some properties of fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* **115** (2000) 485-489.
- [7] V. Gregori, S. Romaguera, Characterizing completable fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* **144 3** (2004) 411-420.
- [8] S. Morillas, V. Gregori, G. Peris-Fajarnés, P. Latorre, “A new vector median filter based on fuzzy metrics”, *ICIAR 2005, Lecture Notes in Computer Science* **3656** (2005) 81-90.
- [9] S. Morillas, V. Gregori, G. Peris-Fajarnés, P. Latorre, A fast impulsive noise color image filter using fuzzy metrics, *Real-Time Imaging* **11 5-6** (2005) 417-428.
- [10] S. Morillas, V. Gregori, G. Peris-Fajarnés, Isolating impulsive noise pixels in color images by peer group techniques, *Computer Vision and Image Understanding*, **110 1** (2008) 102-116.
- [11] S. Morillas, V. Gregori, G. Peris-Fajarnés, A. Sapena, New Adaptive Vector Filter Using Fuzzy Metrics, *Journal of Electronic Imaging* **16 3** (2007) 033007:1-15.
- [12] S. Morillas, V. Gregori, G. Peris-Fajarnes, A. Sapena, Local Self-Adaptive Fuzzy Filter for Impulsive Noise Removal in Color Images, *Signal Processing*, **88 2** (2008) 390-398.
- [13] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inform. Control* **8** (1965) 338-353.

