

Modelos compartimentales para el cálculo de dosis interna

Sofia Carlos Alberola, Sergio Gallardo Bermell, Sebastián Martorell Alsina
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
scarlos@iqn.upv.es, sergalbe@iqn.upv.es, smartore@iqn.upv.es

Abstract

La asignatura de Dosimetría de la Radiación se cursa en el Máster de Seguridad Industrial y medioambiente. Uno de los principales objetivos de la asignatura es proporcionar las herramientas adecuadas para que el alumno pueda realizar estimaciones de dosis externa e interna. La asignatura se organiza con una alta dedicación a prácticas en las que los alumnos utilizan las herramientas de cálculo para estimar la dosis producida por diferentes vías de exposición. Uno de los problemas propuestos es la estimación de la dosis producida en el tiroides por inhalación de Yodo-131. Para resolver este problema la International Commission on Radiological Protection ha publicado dos guías que deben usarse para la determinación de la transferencia de radionucleidos en los diferentes órganos del sistema respiratorio y del tiroides. Estas estimaciones hacen uso de modelos biocinéticos en los que cada órgano se considera como un compartimento en el que se realiza un balance de masa. Así, la dosis en un determinado órgano puede estimarse a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes que puede resolverse con MATLAB[®].

Dosimetría de la Radiación is a subject to be coursed in the Master de Seguridad Industrial y Medioambiente. One of the main objectives of this subject is to provide the appropriate tools to the students for the estimation of external and internal dose. The course is organized with many practical sessions, in which the students use calculation tools to estimate the dose produced by different exposure pathways. One of the problems proposed is to determine the dose received in the thyroid by the inhalation of a certain amount of Iodine-131. In this case, the International Commission on Radiological Protection, has published two guides to estimate the transfer of radionuclides inside the human respiratory tract and the thyroid. Both estimations are obtained using biokinetic models, in which each organ is considered as a compartment and a mass balance is performed for each compartment. So the dose in a certain organ can be estimated by solving a system of differential equations with constants coefficients, what can be done using MATLAB[®].

Keywords: Dosis interna, tracto respiratorio, modelo compartimental.
Internal dose, respiratory tract, compartmental model

1 Introducción

Enmarcada en el Máster de Seguridad Industrial y Medioambiente del departamento de Ingeniería Química y Nuclear se encuentra la asignatura de Dosimetría de la Radiación, en la que uno de los principales objetivos consiste en que el alumno realice diferentes cálculos de dosis externa e interna. Los alumnos de esta asignatura poseen una base matemática importante, puesto que la mayoría provienen de las titulaciones de Ingeniero Químico e Ingeniero Industrial, y poseen gran soltura en el uso de herramientas de cálculo como MATLAB[©] o MATHEMATICA[©]. La asignatura tiene una importante dedicación a prácticas, ya que se considera indispensable el trabajo de laboratorio y el uso de herramientas informáticas para el cálculo y simulación en la resolución de problemas como la estimación de la dosis. En una de las prácticas programadas en la asignatura se propone calcular la dosis interna recibida por una persona, debida a la inhalación de una determinada actividad de yodo-131.

El tracto respiratorio es una importante vía para la incorporación de radionucleidos en suspensión o aerosoles. Una vez inhalado, las propiedades del aerosol y las características del individuo determinan la penetración del aerosol en las vías respiratorias, los lugares en los que se deposita, el tiempo que permanece en cada órgano. Otros parámetros importantes que afectan a la dosis recibida son la absorción en la sangre y las tasas a las que se transferirán a otros órganos, así como las características de la respiración en el momento de la inhalación, las características radiológicas del contaminante y la radiosensibilidad de los órganos afectados determinarán las dosis a cada tejido u órgano.

Para poder realizar una valoración del riesgo radiológico, la Comisión Internacional de Protección Radiológica (ICRP) ha publicado en la ICRP-66 [1] el modelo biocinético del tracto respiratorio. Dicho modelo divide el sistema respiratorio en compartimentos, en cada uno de ellos se realiza un balance de masas del radionucleido, que consiste en resolver una ecuación diferencial que está relacionada con el balance de masas de los compartimentos adyacentes. De forma análoga, la ICRP-78 [2] presenta el modelo biocinético del tiroides. De este modo, el problema de cálculo de dosis se plantea como la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que se resuelve con herramientas de cálculo como MATHEMATICA[©] [3] o MATLAB[©]. En este trabajo se revisan los conceptos asociados a los modelos compartimentales lineales, se presenta el modelo del tracto respiratorio y se muestra una herramienta implementada en MATLAB[©] que permite la resolución de este problema y que se utiliza en las prácticas de la asignatura de dosimetría de la Radiación.

2 Vías de exposición e incorporación de los radionucleidos

El primer paso para abordar el cálculo de dosis consiste en determinar cuáles son las vías de exposición existentes. La Figura 1 muestra las distintas vías de exposición e incorporación de los radionucleidos. En dicha Figura se muestra que existen dos maneras distintas de incorporación de radionucleidos al cuerpo: Por ingestión de los mismos debido a que los alimentos se encuentran contaminados y por inhalación de aire contaminado.

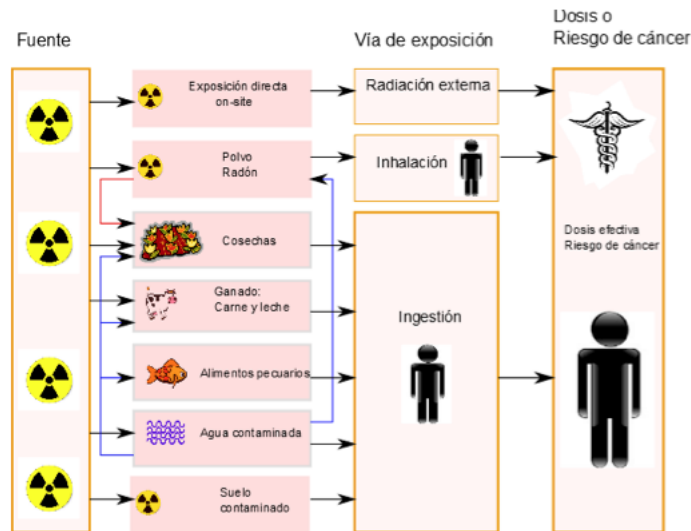


Figura 1: Vías de exposición e incorporación.

Por tanto, el tracto respiratorio es una importante vía para la incorporación de radionucleidos en suspensión o aerosoles. Una vez inhalado, las propiedades del aerosol y las características del individuo determinan la penetración del aerosol en las vías respiratorias, los lugares en los que se deposita, el tiempo que permanece en cada órgano, su absorción en la sangre y las tasas a las que se transferirán a otros órganos. Otros factores importantes son las características de la respiración en el momento de la inhalación, las características radiológicas del contaminante y la radiosensibilidad de los órganos afectados. Todos ellos determinarán las dosis a cada tejido u órgano. Además, como se observa en la Figura 2, las dos vías de incorporación al organismo de radionucleidos están también conectadas a través de la sangre y del sistema linfático. Es decir, un radionucleido incorporado por inhalación o por ingestión se transporta por los distintos órganos del cuerpo.



Figura 2: Conexión entre las dos vías de incorporación del radionucleidos.

Con el fin de normalizar esta situación de forma que sea posible una valoración del riesgo radiológico, la Comisión Internacional de Protección Radiológica (ICRP) publicó en la ICRP-

66 [1] el modelo biocinético del tracto respiratorio. Dicho modelo divide el sistema respiratorio en compartimentos, en cada uno de ellos se realiza un balance de masas del radionucleido, que consiste en resolver una ecuación diferencial que está relacionada con el balance de masas de los compartimentos adyacentes.

3 Modelos compartimentales

El transporte de distintas sustancias dentro del organismo se calcula mediante los denominados modelos compartimentales. Estos modelos se basan en dividir el sistema en compartimentos que interaccionan entre ellos mediante el intercambio de las distintas sustancias. Este tipo de análisis es muy utilizado para el estudio del transporte dentro del cuerpo humano de hormonas, productos químicos, radionucleidos etc... El intercambio de sustancias entre los diferentes compartimentos se calcula utilizando modelos biocinéticos. Dichos modelos se basan en:

- Asimilar el organismo humano a un conjunto de compartimentos discretos.
- Cuantificar las funciones temporales que permiten caracterizar los procesos biológicos de transferencia de actividad entre dos compartimentos.
- Caracterizar la transferencia de actividad en el conjunto de compartimentos mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya resolución permitirá conocer la evolución temporal de la actividad del radionucleido en cada compartimento.

La Figura 3 muestra un esquema sencillo con dos compartimentos en el que se plantea evaluar el tránsito de una determinada sustancia con una incorporación representada por $b_1(t)$.

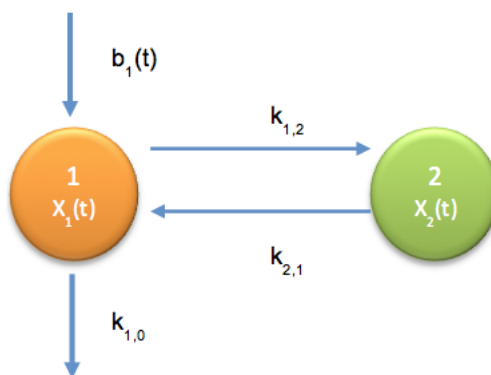


Figura 3: Modelo de dos compartimentos.

En dicho modelo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las concentraciones a calcular sabiendo que existen unas transferencias entre los compartimentos determinadas por las constantes $k_{1,2}$, $k_{2,1}$ y una transferencia al exterior desde el compartimento 1 con una constante $k_{1,0}$.

Realizando un balance en cada uno de los compartimentos, las concentraciones de cada sustancia en cada compartimento pueden calcularse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_{1,0}x_1(t) - k_{1,2}x_1(t) + k_{2,1}x_2(t) + b_1(t) \\ \dot{x}_2 &= k_{1,2}x_1(t) - k_{2,1}x_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

El sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{1,0} - k_{1,2} & k_{2,1} \\ -k_{1,0} & -k_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Por tanto, el problema se plantea como la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que se puede hacer utilizando herramientas de cálculo como MATHEMATICA[©] [3] o MATLAB[©].

4 El tracto respiratorio según la ICRP-66

El objetivo de la práctica consiste en poder estimar la dosis por inhalación de un radionucleido en distintos órganos del cuerpo que se realiza mediante el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales, obtenido del modelo compartimental del aparato respiratorio. El primer paso del estudio consiste en dividir las diferentes zonas del aparato respiratorio en compartimentos sobre los que realizar el balance de masa. El tracto respiratorio es una importante vía para la incorporación de radionucleidos en suspensión o en forma de gas, en especial para trabajadores de instalaciones nucleares y radiactivas. Sin embargo, el problema puede darse también para individuos de la población en general (o “miembros del público”, en la terminología de ICRP), como en casos de inhalación de radón o una descarga (bien rutinaria o accidental) de radionucleidos a la atmósfera desde instalaciones industriales o de investigación. Debido a la importancia del sistema respiratorio en cuanto a la estimación de dosis interna, su modelo compartimental ha sido estudiado y elaborado por la Comisión Internacional de protección Radiológica, cuya última versión se encuentra publicado en la ICRP-66 [1], publicado en 1994, y supone una actualización del anterior modelo de ICRP-30, publicado en 1979.

Una vez inhalado el radionucleido, las propiedades físicas y químicas del aerosol determinarán la penetración del aerosol en las vías respiratorias, los lugares en los que se depositará preferentemente, los períodos durante los que permanecerán en cada órgano, su absorción en la sangre y las tasas a las que se transferirán a otros compartimentos. Además, otros factores importantes son los fisiológicos, incluyendo las características de la respiración en el momento de la inhalación (p.e. tasa de ventilación, volumen inhalado, respiración a través de la nariz o de la boca, etc.). Todos estos factores, junto con las características radiológicas del contaminante y la radiosensibilidad de los órganos afectados determinarán las dosis a cada tejido u órgano. La Figura 4 representa los órganos considerados por la ICRP 66 para el tracto respiratorio. Los órganos considerados se agrupan en dos regiones:

- a. Región Extratorácica: ET1: nariz y pasajes nasales anteriores. ET2: pasajes nasales posteriores, faringe y laringe.
- b. Región Torácica (corresponde a los pulmones.)
 - BB : tráquea, bronquios principales (primera bifurcación de las vías respiratorias, o generación 1^a del árbol pulmonar) y bronquios (hasta la generación 8^a del árbol pulmonar).
 - bb : bronquiolos (aprox. de la generación 9^a a la 15^a del árbol pulmonar).
 - AI : alvéolos (de la generación 16^a hasta la última, que suele ser la 18-20^a generación del árbol pulmonar).

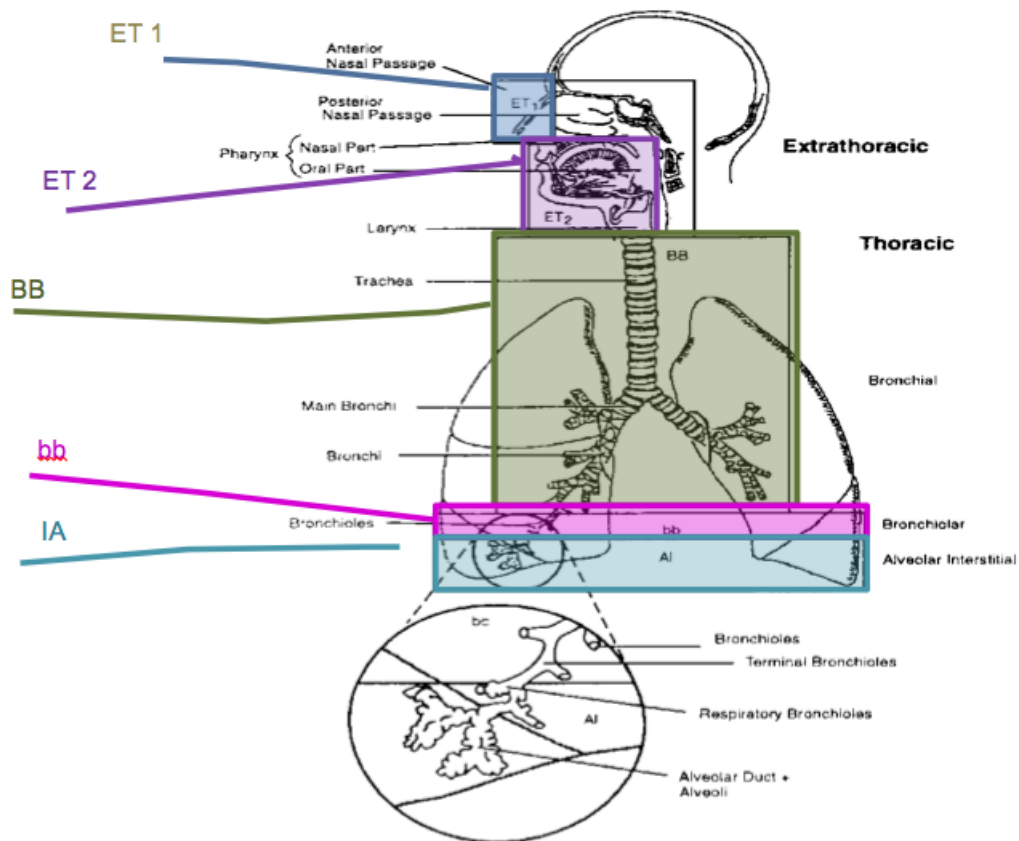


Figura 4: Los órganos considerados por la ICRP 66 para el tracto respiratorio.

Cada una de las regiones comprende uno o varios órganos y se subdividen en varios compartimentos hasta alcanzar el modelo teórico final del tracto respiratorio, que se puede observar en la Figura 5. En dicho modelo se observan las interacciones entre los distintos órganos.

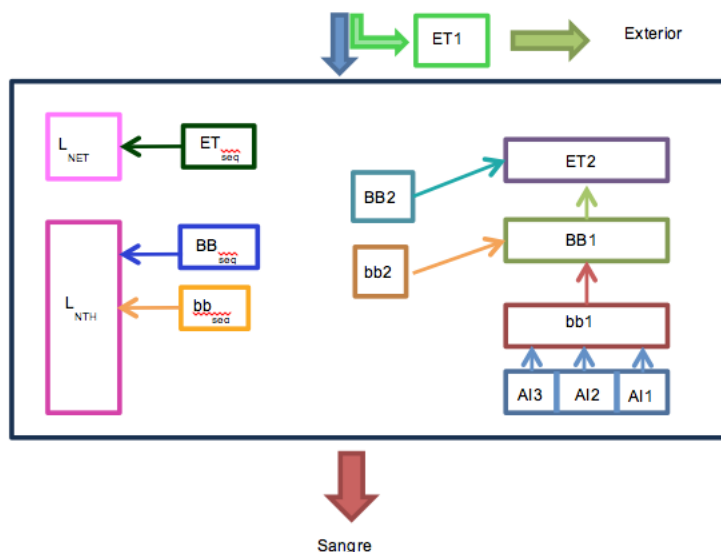


Figura 5: Modelo teórico del tracto respiratorio.

Tabla 1: Compartimentos del modelo del tracto respiratorio.

	Compartimento		Compartimento
1	AI ₁ . Alveolos	11	ET ₂ . Pasaje nasal posterior
2	AI ₂ . Alveolos	12	ET _{seq} . Pasaje nasal posterior
3	AI ₃ . Alveolos	13	L _{NET} . Sistema linfático
4	bb ₁ . Bronquiolos	14	ET ₁ . Pasaje nasal anterior
5	bb ₂ . Bronquiolos	15	GI. Sistema digestivo
6	bb _{seq} . Bronquiolos	16	Exterior
7	BB1. Bronquios	17	Sangre
8	BB2. Bronquios		
9	BB _{seq} . Bronquios		
10	L _{NTH} . Sistema linfático		

El modelo del tracto respiratorio consta de 17 compartimentos tal como se muestra en la Tabla 1.

5 Modelos de deposición y eliminación.

Además, para realizar el análisis del transporte de los radionucleidos entre los distintos compartimentos, es necesario calcular la cantidad de los mismos que retiene cada compartimento, lo que se calcula mediante el modelo de deposición.

Esto requiere previamente conocer el proceso de deposición, o más concretamente qué fracción de la cantidad total respirada se deposita en los diferentes compartimentos del modelo. Para ello se definen lo que denominaremos Fracciones de Deposición Inicial (IDF), que corresponden a la fracción que se deposita, por cada unidad inhalada (usualmente expresada en Bq) en los compartimentos. En concreto los que se muestran en Tabla 1, excepto el 10 y el 13. Los IDF dependen de:

- a. Características aerodinámicas de los aerosoles (tamaño y forma). Se utiliza como parámetro el AMAD (diámetro aerodinámico medio) que se expresa en μm ,
- b. Parámetros fisiológicos del individuo (grupo de edad del individuo, sexo, etc...)
- c. Tasa de inhalación, que depende de las características del individuo y del tipo de actividad que realice (dormido, sentado, realizando un trabajo pesado, etc.).

La forma de calcular los IDF se describe en la ICRP 66 [2], aunque para la mayoría de los casos de interés los IDF están tabulados. Estos valores constituyen la solución inicial de la que parte el problema para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que constituyen el modelo compartimental del tracto respiratorio.

Una vez conocida la cantidad inicial de radionucleido en cada órgano, comienza el proceso de metabolización del material incorporado. El material experimenta dos procesos: un proceso de transporte hacia otros órganos y la absorción en la sangre.

- a. El transporte de las partículas se produce cuando la partícula queda atrapada en la película líquida (mucus) que recubre todas las paredes internas del tracto respiratorio y es arrastrada hacia el exterior del tracto respiratorio a través de sucesivos órganos. Existe

Tabla 2: Coeficientes de transferencia.

Desde	Hasta	Valor	(d-1)
$k_{1,4}$	AI ₁	bb ₁	0.02
$k_{2,4}$	AI ₂	bb ₁	0.001
$k_{3,4}$	AI ₃	bb ₁	0.0001
$k_{3,10}$	AI ₃	L _{NTH}	0.00002
$k_{4,7}$	bb ₁	BB ₁	2
$k_{5,7}$	bb ₂	BB ₁	0.03
$k_{6,10}$	bb _{seq}	L _{NTH}	0.01
$k_{7,11}$	BB ₁	ET ₂	10
$k_{8,11}$	BB ₂	ET ₂	0.03
$k_{9,10}$	BB _{seq}	L _{NTH}	0.01
$k_{11,15}$	ET ₂	Tracto GI	100
$k_{12,13}$	ET _{seq}	L _{NET}	0.001
$k_{14,16}$	ET ₁	Exterior	1

un cierto número de partículas que quedan atrapadas o incrustadas, “sequestered” en la terminología de ICRP-66, en las paredes respiratorias, y no sufren transporte.

- b. La absorción tiene lugar cuando el material de la partícula pasa a formar parte del torrente sanguíneo. Todas las paredes de los órganos que componen el Tracto Respiratorio, excepto el llamado ET1 (nariz y pasajes nasales anteriores), están regadas por sangre que entra por millones de capilares hasta las células más superficiales.

Una partícula adherida a las paredes de alguno de estos órganos puede llegar a una zona regada por capilares, entrando así en contacto con el plasma sanguíneo y disolviéndose en él. La asimilación en la sangre, también se puede producir cuando pequeñas partículas son arrastradas en suspensión en el plasma sanguíneo. Cada radionucleido tendrá una velocidad de absorción en sangre característica. La ICRP-66 clasifica los radionucleidos en tres grupos según esta velocidad: absorción rápida o F (“fast”), moderada o M (“moderate”), lenta o S (“slow”). Los valores que se asignan para caracterizar la velocidad de absorción son unos coeficientes constantes tabulados en la ICRP-66.

Finalmente, es necesario construir la matriz de coeficientes de transporte, $k_{i,j}$, que define el sistema de ecuaciones diferenciales. Los coeficientes $k_{i,j}$ se encuentran tabulados en la ICRP-66, para cada pareja de compartimentos. La Tabla 2 muestra un ejemplo de estos coeficientes.

6 Ejemplo propuesto

Como ejemplo se plantea que el alumno calcule la dosis interna producida por la inhalación de I-131. Para estimar la actividad inhalada por el individuo se plantea una aproximación con datos referidos a las emisiones derivadas del accidente de la central nuclear de Fukushima. El 11 de Marzo del 2011, se produjo un terremoto y posterior tsunami que ocasionó la pérdida de corriente alterna exterior a la central. Al no poder actuar los sistemas de emergencia el accidente progresó y dio lugar, en primer lugar a venteos de la contención primaria y más tarde a una explosión de hidrógeno en el reactor número 2, con la consiguiente emisión de productos radiactivos al exterior. En la Figura 6 se muestran los niveles de I-131 y Cs-137 medidos en el

aire a partir del día 15 de Marzo del 2011, distribuidos por el IAEA [4].

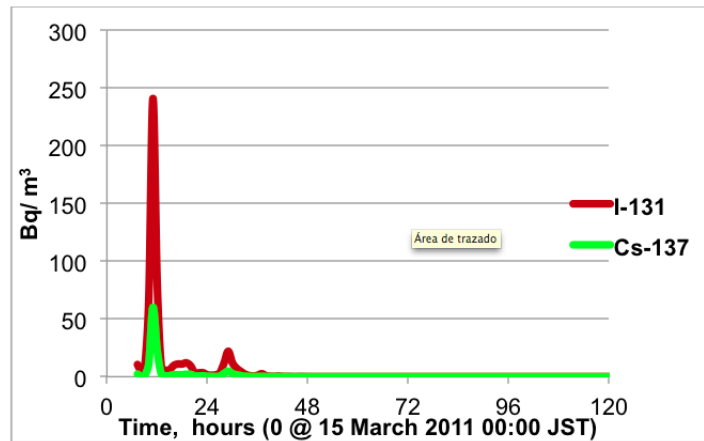


Figura 6: Concentración en aire de I-131 y Cs-137.

Puesto que una de las exposiciones más importantes es debida al I-131 y además este radionucleido afecta al tiroides se propone el cálculo de la dosis en sangre y tiroides debido a la inhalación de I-131. Para obtener la solución de este ejercicio se debe realizar un modelo compartimental que una el tracto respiratorio con el modelo del Yodo que se plantea en la ICRP-78 [2], el cual considera cuatro compartimentos: Sangre, tiroides, resto del cuerpo y exterior. Dado que en el modelo compartimental del Tracto respiratorio existe un compartimento que modela la sangre, toda la actividad que por inhalación llegará a este compartimento es la que se transportará al tiroides. De manera que al unir los dos modelos compartimentales el total queda como el que muestra la Figura 6.

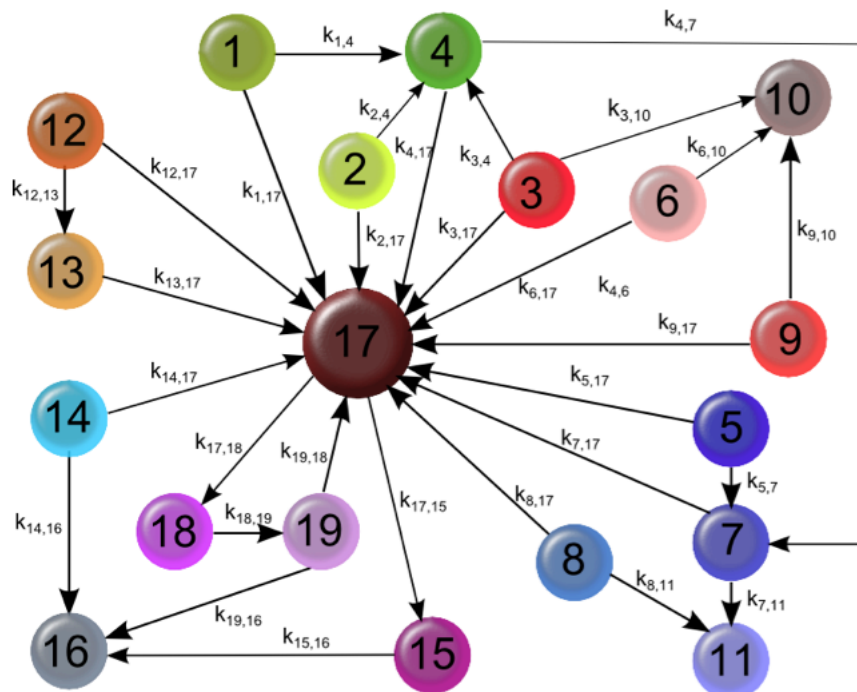


Figura 7: Combinación del modelo de tracto respiratorio ICRP- 66 con el del Yodo ICRP-78.

Tabla 3: Compartimentos del modelo completo.

Compartimento		Compartimento	
1	AI ₁ . Alveolos	11	ET ₂ . Pasaje nasal posterior
2	AI ₂ . Alveolos	12	ET _{seq} . Pasaje nasal posterior
3	AI ₃ . Alveolos	13	L _{NET} . Sistema linfático
4	bb ₁ . Bronquiolos	14	ET ₁ . Pasaje nasal anterior
5	bb ₂ . Bronquiolos	15	GI. Sistema digestivo
6	bb _{seq} . Bronquiolos	16	Exterior
7	BB1. Bronquios	17	Sangre
8	BB2. Bronquios	18	Tiroides
9	BB _{seq} . Bronquios	19	Resto del cuerpo
10	L _{NTH} . Sistema linfático		

En la Figura 6 cada número corresponde a un compartimento tal como muestra la Tabla 3.

Realizando en balance en cada uno de los nodos, el modelo de la Figura 7, lleva a que se debe resolver un sistema homogéneo de 19 ecuaciones diferenciales. En concreto el sistema planteado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -(k_{1,4} + k_{1,17})k_1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= -(k_{2,4} + k_{2,17})k_2 \\
\frac{dx_3}{dt} &= -(k_{3,4} + k_{3,17})k_3 \\
\frac{dx_4}{dt} &= -(k_{4,7} + k_{4,17})k_4 + k_{1,4}x_1 + k_{2,4}x_2 + k_{3,4}x_3 \\
\frac{dx_5}{dt} &= -(k_{5,7} + k_{5,17})k_5 \\
\frac{dx_6}{dt} &= -(k_{6,10} + k_{6,17})k_6 \\
\frac{dx_7}{dt} &= -(k_{7,11} + k_{7,17})k_7 + k_{5,7}x_5 + k_{4,7}x_4 \\
\frac{dx_8}{dt} &= -(k_{8,11} + k_{8,17})k_8 \\
\frac{dx_9}{dt} &= -(k_{9,10} + k_{9,17})k_9 \\
\frac{dx_{10}}{dt} &= k_{6,10}x_6 + k_{9,10}x_9 \\
\frac{dx_{11}}{dt} &= k_{7,11}x_7 + k_{8,11}x_8 \\
\frac{dx_{12}}{dt} &= -(k_{12,13} + k_{12,17})k_{12} \\
\frac{dx_{13}}{dt} &= k_{12,13}x_{12} - k_{13,17}x_{13} \\
\frac{dx_{14}}{dt} &= -(k_{14,16} + k_{14,17})k_{14} \\
\frac{dx_{15}}{dt} &= k_{17,15}x_{17} - k_{15,16}x_{15} \\
\frac{dx_{16}}{dt} &= k_{14,16}x_{14} + k_{15,16}x_{15} + k_{19,16}x_{19} \\
\frac{dx_{17}}{dt} &= \sum_{i=1}^9 k_{i,17}x_i + \sum_{i=1}^{14} k_{i,17}x_i - k_{17,15}x_{17} - k_{17,18}x_{17} + k_{19,17}x_{19} \\
\frac{dx_{18}}{dt} &= k_{17,18}x_{17} - k_{18,19}x_{18} \\
\frac{dx_{19}}{dt} &= k_{18,19}x_{18} - k_{19,17}x_{19}
\end{aligned} \tag{3}$$

Por tanto se tiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de la forma:

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

Cuya solución formalmente se expresa como:

$$x(t) = e^{-At}x(0),$$

donde la condición inicial $x(0)$ se calcula para cada compartimento mediante el modelo de eliminación, considerando además que las partículas del aerosol son AMAD 5, con una velocidad de absorción rápida y la actividad incorporada corresponde a una inhalación de 240 Bq/m³ de I-131 durante 24 h y con una tasa de respiración de 1.2 m³/h.

El sistema planteado se resuelve mediante el método de Runge Kutta utilizando la función `ode23()` de MATLAB[®] [5, 6]. De esta manera, se obtienen las concentraciones en cada uno de los compartimentos que después de multiplicarlos por el factor de dosis [7] nos proporciona la evolución de la dosis. En la Figura 8 se muestran las evoluciones de la dosis en sangre y tiroides.

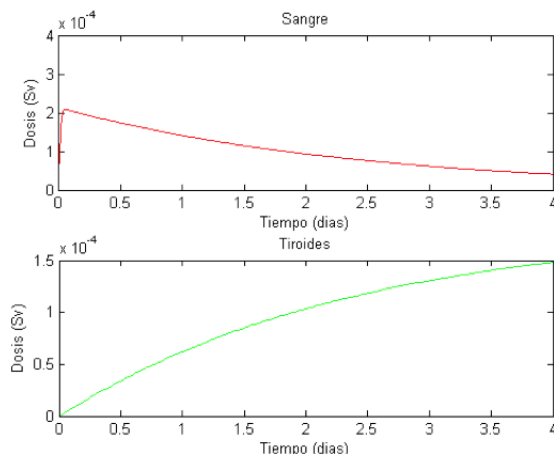


Figura 8: Dosis en sangre y tiroides por inhalación de I-131.

Con los resultados obtenidos se plantean diversas preguntas a los alumnos, como: ¿Cuál es la dosis en el tiroides justo cuando acaba la exposición? ¿Y al cabo de 1 día de haber inhalado el radionucleido? ¿Por qué al pasar el tiempo la dosis en sangre disminuye mientras que en el tiroides aumenta? Y si consideran lógico que se produzca este comportamiento. Los alumnos responden a las cuestiones y entregan una memoria en la que presentan las curvas de las evoluciones de la dosis y las respuestas razonadas a cada una de las preguntas planteadas.

7 Conclusiones

El planteamiento de prácticas de laboratorio o de informática relacionadas con la realidad, aumenta la motivación del alumno y permite afianzar los conocimientos teóricos adquiridos en la asignatura. En este trabajo se ha resumido la experiencia adquirida en la asignatura Dosimetría de la Radiación en el marco del Máster de Seguridad Industrial y Medioambiental en cuanto a la realización de una práctica de informática para el cálculo de dosis interna por inhalación. Se ha intentando proporcionar un enfoque actual a la práctica, relacionando la teoría del cálculo dosimétrico con un hecho actual de especial relevancia, como el accidente de la Central Nuclear de Fukushima Daichi en Japón. El modelo matemático para el cálculo de dosis ha sido realizado por los alumnos, los cuales han construido el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo con coeficientes constantes, que constituye el modelo dinámico que describe la concentración de radionucleidos en las distintas partes del cuerpo consideradas, lo cual da una visión de la importancia de los modelos matemáticos en una aplicación real como el cálculo de dosis interna. Los resultados en cuanto a motivación y aprendizaje de los alumnos son alentadores ya que han percibido la utilidad real de la materia impartida, tanto en la parte relacionada con la estimación de las dosis como en el tratamiento matemático del problema.

Referencias

- [1] ICRP. ICRP Publication 66: Human Respiratory Tract Model for Radiological Protection, 1st Edition. Annals of the ICRP Volume 24/1-3.
- [2] ICRP. ICRP Publication 78: Individual Monitoring for Internal Exposure of Workers. Pergamon Press. Oxford, (1997).
- [3] G. Sánchez, Biokmod: A Mathematical toolbox for modelling biokinetic systems. *Mathematica in Education and Research* **10**(2), (2005).
- [4] P. Bogacki, L. F. Shampine. A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas, *Appl. Math. Letters*, **2**, 1–9 (1989).
- [5] J.R. Dormand, P. J. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J. Comp. Appl. Math.*, **6**, 19–26 (1980).
- [6] IAEA. Technical Briefing on the Radiological Situation in Japan. 20 Marzo 2011.
- [7] BOE. Real decreto 783/2001. Reglamento sobre Protección sanitaria contra radiaciones ionizantes.

