MSEL

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(1), No. 3, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: una propuesta de aula a partir de los modelos generados por los alumnos

Lluís Albarracín, Núria Gorgorió
Universitat Autònoma de Barcelona
lluis.albarracin@gmail.com, nuria.gorgorio@uab.cat

Abstract

En este artículo presentamos una propuesta didáctica para introducir la modelización en las aulas de Educación Secundaria. La propuesta presentada se basa en el uso de un conjunto de problemas de Fermi orientados a estimar el valor de grandes cantidades. Para concretarla se utilizan los resultados de un estudio previo en el que se describen las estrategias propuestas por los alumnos a este tipo de problemas.

In this paper we present a proposal to introducing modeling in Secondary School classrooms. The proposal is based on the use of a set of Fermi problems related to estimating large quantities. It uses the results of a previous study which describes the strategies proposed by the students to solve this kind of problems.

Keywords: Resolución de problemas, estimación, modelización, Educación Secundaria Obligatoria.
Problem solving, estimation, modelling, Secondary Education

1 Introducción

En los últimos años ha crecido el interés por introducir actividades en las que se incluyan procesos de modelización en diferentes niveles educativos. Sin embargo, el proceso de introducción no es sencillo en las aulas de las materias relacionadas con los diferentes ámbitos del conocimiento científico, como las matemáticas, la física o diferentes aplicaciones de ingeniería. La inclusión de actividades sobre modelización provoca cambios en las metodologías docentes y es difícil encontrar referencias que permitan al profesorado sentirse seguro y confiado en el uso de este tipo de actividades. Al mismo tiempo, las actividades relacionadas con la modelización se basan en un proceso de matematización de una realidad concreta. Este proceso no es trivial y requiere del dominio de unos ciertos conocimientos matemáticos específicos para cada realidad estudiada. En el caso de la Educación Secundaria Obligatoria en España (ESO, con alumnos de 12 a 16 años) nos encontramos que en este nivel académico los alumnos todavía no poseen un dominio de algunos de los conceptos matemáticos que parecen esenciales para modelizar determinadas realidades.

Por todo ello, parece importante conseguir un conocimiento sobre el tipo de realidades con las que pueden trabajar los alumnos de ESO en procesos de modelización. Con este conocimiento, se podría definir el tipo de actuación del profesorado para enfocar el trabajo en las aulas facilitando que los alumnos puedan enfrentarse a este tipo de tareas. Algunas de las cuestiones que motivan nuestro trabajo son las siguientes:

- ¿Pueden los alumnos de ESO generar modelos por ellos mismos?
- ¿Qué tipo de modelos?
- ¿Para qué tipo de situaciones?
- ¿Cómo se puede trabajar en las aulas la generación de modelos por parte de los alumnos de ESO?

En este artículo presentamos los resultados de un estudio sobre las estrategias propuestas por alumnos de ESO para resolver un tipo de problemas de Fermi en los que se deben estimar grandes cantidades. A partir del estudio, presentamos una estructura de propuesta didáctica que permite trabajar en las aulas con estos problemas incidiendo en los aspectos relacionados con la modelización. Con ello pretendemos ofrecer una guía de referencia para el profesorado con la que puedan trabajar en las aulas.

2 Estimación y problemas de Fermi

Decimos que realizamos una estimación cuando pretendemos responder a preguntas como: ¿cuánto tiempo tardaré en llegar a la estación de tren?, ¿pesará la maleta más de 10 kg?, o ¿tendré suficiente combustible con lo que me queda en el depósito de la motocicleta para llegar a casa o debo parar a repostar? Concretamente, la estimación se define como el juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite. En una revisión de la literatura se pueden encontrar tres tipos de estimación: la numerosidad, la estimación de medidas y la estimación computacional (Hogan y Brezinski [19]), puesto que existen una gran diversidad de tareas que recaen en el concepto de estimación que provienen de diversas fuentes sin compartir los patrones numéricos que permiten realizarlas (Booth y Siegler [7]). La numerosidad se refiere a la habilidad de estimar visualmente el número de objetos dispuestos en un plano; la estimación de medidas se basa en la habilidad perceptiva de estimar longitudes, superficies, tiempos, pesos o medidas similares de objetos comunes, y la estimación computacional se refiere al proceso por el que se aproxima el valor de cálculos como $2.7 + 4.4 \div 2.5$.

Existen estudios que se centran en las estrategias de estimación para cada una de estas acepciones. En el caso de la estimación de numerosidades cabe destacar estudios del campo de la Psicología como los de Ginsburg [15] o Barth, Kanwisher y Spelke [5], centrados en los componentes perceptivos y visuales de la estimación y la representación numérica. Algunas de las estrategias descritas, como es el caso de calcular la mitad de objetos de un conjunto y multiplicar por dos o iterar un referente concreto hasta conseguir el número de veces que se repite en un conjunto, se pueden utilizar en otros tipos de estimación. En el caso de la estimación computacional, Reys, Rybolt, Bestgen y Wyatt [26] [27] identifican los procesos utilizados en este tipo de estimaciones destacando que la estimación computacional posee métodos que le son propios como el truncamiento, el redondeo o la compensación numérica. En relación a la estimación de magnitudes, podemos señalar estudios sobre magnitudes continuas como los de Hildreth [18], Jones, Taylor y Broadwell [23], y el de Jones, Gardner, Taylor, Forrester y Andre [20] en los que se analizan las estrategias y procesos que utilizan los estimadores frente a diferentes situaciones que ponen de manifiesto que la estimación de magnitudes es un tipo de conocimiento situado en el sentido descrito por Greeno [16].

Aún así, existen tareas que se adaptan a la definición de estimación que no han sido estudiadas y a las que no se adaptan algunas de las estrategias escritas anteriormente. Entre ellas encontramos situaciones en las que no existe un procedimiento preciso para encontrar un valor concreto para un determinado fenómeno o este procedimiento es muy costoso. Estas situaciones pueden requerir simplificaciones de la realidad estudiada. Un ejemplo serían las estimaciones que realizan los ingenieros sobre la cantidad de tierra que debe moverse en una construcción. Otras situaciones a las que no se ajustan las estrategias expuestas anteriormente son las estimaciones de cantidades que utilizamos en nuestra vida cotidiana que debido a la complejidad de la situación en la que se dan no tienen un valor único bien definido y poseen un rango de valores aceptables. Un ejemplo podría ser el tiempo necesario para llegar hasta la parada del bus, que depende del ritmo al que se anda o de factores externos como encontrar el semáforo de peatones en verde cuando vamos a cruzar. De hecho, algunas de estas situaciones no aceptan lo que entendemos por *una solución* en el sentido más estricto de la expresión, dado que diferentes condicionantes pueden influir en su valor final en función de la situación concreta que nos planteamos y de la forma en que es planteada.

En otro tipo de situaciones reales, la cantidad a estimar es una magnitud continua, pero el contexto en el que sucede obliga al estimador a discretizar el problema, como en la estimación de la pintura necesaria para pintar el comedor, que en una situación real deberá ajustarse al número de botes de pintura que deben comprarse. Estos casos, aunque se traten de estimaciones de magnitudes discretas, guardan una gran relación con las estimaciones de magnitudes continuas pero no con el concepto de numerosidad, que siempre ha sido estudiado en situaciones simbólicas y alejadas de las situaciones reales. Este tipo de situaciones están ligadas directamente a los denominados problemas de Fermi. La definición de problema de Fermi que ofrece Ärlebäck [4] es la siguiente:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the

problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations. (pág. 331)

El problema de Fermi que se utiliza como ejemplo clásico es el de estimar el número de afinadores de piano que hay en Chicago. A partir de estimar datos como la población total de Chicago, la proporción de familias de Chicago que pueden tener piano o el tiempo necesario parar afinar un piano (ver Efthimiou y Llewellyn [11] para obtener más detalles sobre la resolución completa).

Ärlebäck [28] afirma que el trabajo con problemas de Fermi puede ser útil para introducir la modelización en las aulas. Algunos de los motivos que los hacen particularmente efectivos son los siguientes: 1) son accesibles para alumnos de diferentes etapas educativas y no requieren un tipo concreto de conocimiento matemático previo, 2) tienen una relación clara con el mundo real, 3) obligan a los alumnos a especificar la estructura de la información relevante, 4) al ser problemas abiertos que no están asociados a un conocimiento concreto requieren la elaboración de una estrategia de resolución, 5) al no ofrecer datos numéricos los alumnos deben estimar diversas cantidades por ellos mismos y 6) promueven la discusión entre los alumnos. Otro argumento para el uso de problemas de Fermi en las aulas es la posibilidad de utilizarlos como puente entre las matemáticas y otras materias escolares, acercando a los estudiantes a diferentes tareas interdisciplinarias, tal y como argumentan Sriraman y Lesh [29]. De hecho, para Peter-Koop [24], los problemas de Fermi son mejores y más útiles si no se tratan como ejercicios puramente intelectuales y se centran en situaciones del mundo real y en contextos de nuestro entorno habitual.

Verschaffel [30] afirma que el objetivo de introducir contextos reales en los enunciados de los problemas es "to bring reality into the mathematics classroom, to create occasions for learning and practising the different aspects of applied problem solving, without the practical (...) inconveniences of direct contact with the real world situation (pág. 65)". Para Van Den Heuvel-Panhuizen [17], introducir enunciados con contexto real en los problemas utilizados en las aulas puede aumentar su accesibilidad y sugerir estrategias de resolución a los alumnos. Debe cuidarse la forma en la que se plantea la actividad, ya que Chapman [9] observa que en la mayoría de casos los profesores presentan estos problemas de una forma muy cerrada y no se permite un análisis narrativo de las situaciones propuestas.

3 Modelización

Una de les actividades científicas más relevantes en la actualidad es la de crear modelos que permitan recrear de forma abstracta los objetos, fenómenos o procesos de los que pretendemos obtener un alto grado de comprensión. En general, nuestros objetivos en estas situaciones se centran en poder realizar predicciones, simulaciones o en obtener descripciones suficientemente precisas para cumplir con nuestros propósitos. La producción de modelos para resolver problemas no es exclusiva de los más altos niveles científicos, sino que se ha documentado su presencia en diversos estudios en el ámbito de la educación. Centrándonos en la modelización en el ámbito de la Educación Matemática, constatamos que Lesh y Harel [21] definen el concepto de modelo como sigue:

> *Models* are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience-based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).

> Models include both: (a) *a conceptual system* for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) *accompanying procedures* for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals.
>
> Mathematical models are distinct from other categories of models mainly because they focus on structural characteristics (rather than, for example, physical, biological, or artistic characteristics) of systems they describe.(pág. 159)

Según la literatura existen dos diferencias principales entre los problemas tradicionales con enunciado literal y las actividades de modelización. La primera diferencia es la necesidad de relacionar los conceptos matemáticos y las operaciones con la realidad, produciendo significado para lo que estudian a partir de la necesidad de describir simbólicamente una situación La segunda diferencia se centra en la propia modelización, ya que los estudiantes deben generar modelos que sean realmente aplicables a una realidad dada y que se puedan generalizar e interpretar las soluciones que se deriven (English [12] y Doerr y English [10]).

La forma en la que los estudiantes elaboran modelos para resolver problemas es objeto de discusión y existen diferentes posiciones al respecto (Borromeo Ferri [14]), pero, en general, se acepta que es un proceso multi-cíclico. Esto quiere decir que los alumnos pasan de la situación real al modelo y de la solución que les ofrece el modelo a una solución para el problema a partir de un conjunto de procesos que van revisando constantemente.

Siguiendo a Blum [6], los procesos de modelización se pueden estructurar en cinco fases principales:

1. Simplificar el problema real a un modelo real
2. Matematizar el modelo real a un modelo matemático
3. Buscar una solución a partir del modelo matemático
4. Interpretar la solución del modelo matemático
5. Validar la solución en el contexto del problema real

Estas fases se combinan en el siguiente esquema presentado por Blum:

Estos procesos no siempre son sencillos para los estudiantes, y se han documentado dificultades en la modelización como la presencia excesiva de modelos lineales en situaciones que no lo requieren (Esteley, Villarreal i Alagia [13]).

4 Problemas de Estimación de Magnitudes No Alcanzables

En nuestro trabajo nos centramos en la estimación de los valores de aquellas magnitudes que no podemos estimar perceptivamente sin un proceso de aprendizaje previo. En particular nos interesan aquellas magnitudes que podemos plantearnos e imaginar pero para las que difícilmente podemos interpretar su valor por el hecho de ser excesivamente grandes. Hay magnitudes para las cuales tenemos un conocimiento concreto de su valor, a las cuales hemos dado un significado (la longitud de un bolígrafo, el tiempo que pasa durante un partido de fútbol o el número de

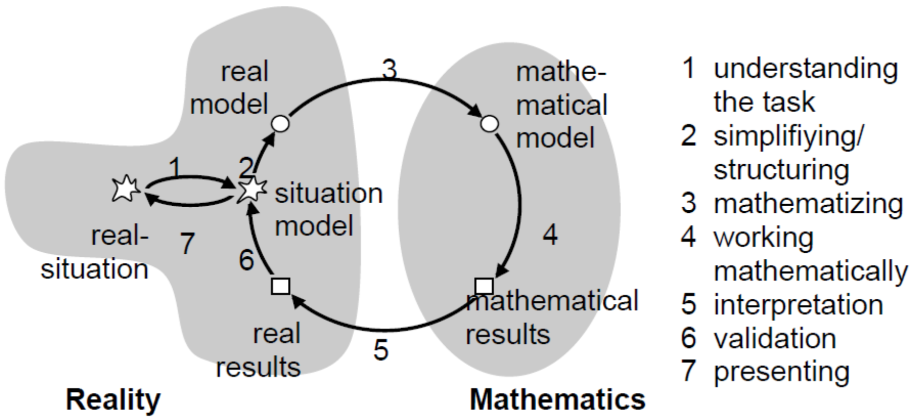

Figura 1: El ciclo de la modelizació de Blum y Leiss

personas que hay en una clase). Podemos afirmar, metafóricamente, que éstas son magnitudes cercanas y alcanzables. Algunos ejemplos de magnitudes no alcanzables en el sentido descrito podrían ser la cantidad de escombros generada en los movimientos de tierras asociados a la construcción de un edificio, el número de coches que pasan por un determinado punto de una autopista en un día, el número de maestros que trabajan en un país, el número de litros de agua que consume una familia en un año o el número de árboles que hay en un bosque.

En Albarracín y Gorgorió [1] introducimos el concepto de magnitud no alcanzable y lo definimos como sigue:

> aquella magnitud (física o abstracta) que se encuentra fuera de nuestro alcance de interpretación y para la cual no hemos generado significado.

Es necesario destacar que en función de esta definición, la concreción de las magnitudes que consideramos como no alcanzables dependerá de cada individuo. Esta concreción estará marcada por sus conocimientos, competencias o experiencias acumuladas. Cuando nos planteamos determinar un valor para una magnitud no alcanzable, la propia naturaleza del valor a estimar nos obliga a trabajar con valores aproximados. Difícilmente podremos conseguir valores exactos para magnitudes que no somos capaces de interpretar. La forma natural de obtener valores para estas magnitudes es elaborar estimaciones razonadas que las aproximen. Al pedir a los alumnos de ESO que estimen el valor de una magnitud no alcanzable de su entorno, de acuerdo con Puig [25], les estamos planteando un problema, ya que esta es una tarea escolar con un enunciado significativo para el que no conocen un método de resolución.

Con todo esto, la definición de problema de estimación de magnitudes no alcanzables (PEMNA a partir de este momento) es la siguiente:

> aquella tarea planteada a un alumno en la que, sin un procedimiento, algoritmo o esquema previo conocidos por él que lleven a su resolución, debe estimar el valor de una magnitud no alcanzable con el objetivo de crear significado para esta magnitud

A priori, este tipo de problemas debería permitirnos tratar situaciones reales o próximas a la realidad de los alumnos, con lo cual el trabajo con PEMNA en las aulas se podría llevar a cabo en forma de proyectos. Según Aravena, Caamaño y Jiménez (2008), el trabajo de modelización por proyectos permite a los estudiantes desarrollar capacidades cognitivas y metacognitivas, así como adquirir una visión integrada de las matemáticas, reconociendo su utilidad para resolver problemas de su entorno.

Desde nuestra perspectiva, los PEMNA pueden ajustarse a diversos niveles educativos, pueden ayudar a fomentar la discusión en el aula de matemáticas y pueden utilizarse para tratar temas relevantes para el desarrollo personal del alumno, potenciando el conocimiento de su entorno. Al mismo tiempo, dado que no es viable utilizar métodos exactos para su resolución, los PEMNA permiten trabajar la estimación de magnitudes y la valoración de errores en medidas. Además, entendemos que los PEMNA son un subconjunto de los problemas de Fermi, ya que pueden ser resueltos a partir de romper el problema principal en subproblemas y resolverlos por separado.

A continuación presentamos nuestro estudio de detección de las estrategias que proponen los alumnos de ESO para resolver PEMNAs. El conocimiento concreto de la forma en que los alumnos pretenden abordar la resolución de estos problemas debería darnos información sobre las estrategias que plantean y el tipo de cuestiones que pueden intentar resolver. A partir de esta información, posteriormente podremos proponer actividades relacionadas con las estudiadas para potenciar la generación de modelos matemáticos en las aulas por parte de los alumnos.

4.1 Metodología

En diferentes pruebas previas a este estudio detectamos que los alumnos tienen una tendencia a ofrecer respuestas numéricas a los problemas descuidando la presentación de los métodos que utilizan para encontrarlas. Por ello, en el estudio que aquí presentamos nos limitamos a estudiar exclusivamente las propuestas de resolución de los alumnos a diferentes PEMNA para poder observar con atención las estrategias que proponen. En consecuencia, consideramos oportuno pedirles exclusivamente que redactaran propuestas de resolución a los problemas planteados, que son los siguientes:

- **Problema A:** ¿Cuánta gente cabe en el patio?

  Situación: Se quiere organizar un concierto y hay que decidir el número de personas que caben en el patio para saber cuantas entradas se pueden poner a la venta.

- **Problema B:** ¿Cuánta gente hay en una manifestación?

  Situación: En una manifestación cualquiera, se quiere aproximar el número de personas participantes.

- **Problema C:** ¿Cuántos SMS se envían en un día en tu comunidad autónoma?

  Situación: Para la comunidad autónoma del estudiante, se quiere aproximar el número de total de SMS enviados en un día.

- **Problema D:** ¿Cuántas gotas son necesarias para llenar un cubo de agua?

  Situación: En la sala de profesores aparece una gotera y se quiere aproximar el número de gotas que pueden caer hasta llenar un cubo.

- **Problema E:** ¿Cuántos vasos de agua son necesarios para llenar una piscina?

  Situación: Pensando en las dificultades habituales del verano con las reservas de agua, se quiere aproximar el número de vasos de agua equivalentes al volumen de una piscina.

- **Problema F:** ¿Cuántas monedas de euro caben en una caja fuerte de un metro cúbico?
  Situación: En las películas de atracos aparecen cajas fuertes llenas de billetes. Si la caja fuerte fuese de un metro cúbico y la llenáramos únicamente con monedas de un euro, se quiere aproximar el número de monedas que caben en la caja fuerte.

Como se puede apreciar, los problemas A y B se refieren al recuento de personas en una superficie en dos contextos distintos. Por su parte, los problemas D, E y F se centran en el recuento de las veces que un volumen pequeño cabe en uno mayor. El problema C, por su parte, está centrado en un recuento para el que es necesario un cierto conocimiento social del entorno.

Estos problemas se presentan a los alumnos acompañados de un enunciado que plantea una situación en la que la pregunta toma sentido. Por ejemplo, el enunciado concreto para el problema C es el siguiente:

> Hoy en día, los teléfonos móviles sirven para una barbaridad de cosas (fotos, música, vídeos, juegos...) pero la gente todavía los utiliza para comunicarse, llamar y enviar mensajes. Nosotros no pensamos mucho en ello, pero es necesaria una gran red de telecomunicaciones para permitir estos servicios.
>
> En esta situación, una buena pregunta es: *¿cuántos mensajes SMS enviamos en un día entre todos los catalanes?*
>
> Descrive **los pasos que seguirías** para calcular de forma aproximada esta cantidad con **tus propios recursos**. No es necesario que des un resultado, únicamente que expliques cómo lo harías.

La recogida de datos se llevó a cabo en dos centros de secundaria de la misma población, una ciudad de tamaño medio en el área metropolitana de Barcelona. Uno de los centros es público y el otro es un centro privado concertado. Las sesiones de recogida de datos se realizaron en clases de una hora, en las que los alumnos podían realizar propuestas a más de un cuestionario en este tiempo. En el caso de que un alumno finalizara una de las propuestas, la persona encargada de recoger los datos le ofrecía otro cuestionario. De esta forma tenemos 538 cuestionarios de 216 alumnos. La tabla 1 muestra el número de cuestionarios recogidos por cada curso y cada problema para nuestro estudio.

Curs	PA	PB	PC	PD	PE	PF	Total
1r	18	18	20	19	18	18	111
2n	22	21	22	20	21	21	127
3r	25	22	20	24	22	20	133
4t	31	31	28	25	25	27	167
Total	96	92	90	88	86	86	538

Tabla 1: Número de cuestionarios recogidos por curso y problema

5 Estrategias y modelos detectados

Para generar los resultados de nuestro estudio se ha realizado un análisis de las estrategias propuestas por los alumnos a cada problema y hemos determinado si contienen elementos de modelización. Para elaborar el análisis se ha utilizado el software de análisis cualitativo de datos NVivo 8. Este software permite trabajar con la digitalización de los datos, codificándolos y generar una base de datos de las categorías de análisis, permitiendo una ágil gestión de éstos y facilitando un análisis dinámico.

Hemos dividido las propuestas de resolución en tres categorías de análisis:

- Las que no contienen ningún tipo de estrategia de resolución
- Las que contienen estrategias de resolución sin elementos de modelización
- Las que contienen estrategias de resolución con elementos de modelización

A partir de los datos recopilados y del análisis realizado hemos obtenido los resultados que se muestran en la tabla 2.

	PA	PB	PC	PD	PE	PF	Total
Sin estrategia	37	28	22	25	17	32	161
No modeliza	19	39	17	9	12	19	115
Modeliza	40	25	51	54	57	35	262
Total	96	92	90	88	86	86	538

Tabla 2: Distribución de las propuestas por nivel de modelización y problema

Debemos destacar que una parte importante de la población participante en el estudio no ofrece propuestas válidas para resolver el problema, ya sea porque no ofrecen una estrategia clara de resolución o porque aquello que propone no es útil para estimar la cantidad que pide el problema. A pesar de ello queremos destacar que hemos detectado una gran variedad de modelos propuestos por los mismos alumnos, destacando que algunos de estos modelos se adaptan a diferentes situaciones.

A continuación detallaremos las características principales de los diferentes tipos de respuesta analizados. En especial, centraremos nuestra atención en los modelos matemáticos detectados en las propuestas de resolución de los alumnos encuestados. Se pueden encontrar más detalles del tipo de análisis realizado y muestras de las propuestas de los alumnos en Albarracín y Gorgorió [1] [2].

5.1 Propuestas sin modelización

- **Propuestas que no contienen ningún tipo de estrategia de resolución**

  Debemos destacar que una parte no despreciable de los alumnos realiza propuestas incompletas que no les permitirían resolver el problema. Algunas de estas propuestas no intentan resolver el problema planteado, sino que se limitan a exponer dificultades o algunos de los factores necesarios. En otros casos nos encontramos con una sucesión de ideas inconexas o incoherentes. En este tipo de propuestas encontramos diversos errores conceptuales, como confusiones en el cálculo de superficies y volúmenes o errores sobre el concepto de media de una población.

- **Propuestas que contienen estrategias de resolución sin elementos de modelización**

Entre las propuestas que contienen una estrategia definida para conseguir la estimación solicitada encontramos alumnos que no modelizan la realidad estudiada. Una de las opciones es delegar la responsabilidad de realizar la estimación a una fuente de información externa, como podría ser el profesor, la policía o las compañías que ofrecen servicios de telefonía móvil.

Tampoco encontramos procesos de modelización en las propuestas que sugieren realizar un recuento exhaustivo, ya sea contando directamente a personas/objetos o a partir de algún método de recuento directo. Estas propuestas no simplifican la situación a estudiar y pretenden realizar tareas que comportan tiempos, esfuerzos o recursos excesivamente grandes para resolver problemas de estimación de magnitudes no alcanzables.

5.2 Propuestas contienen estrategias de resolución con elementos de modelización

Una parte importante de las propuestas recogidas contienen estrategias de resolución basadas en la elaboración de un modelo matemático que represente la situación estudiada. Los tipos de modelos detectados son los siguientes:

- **Regla del producto** Los alumnos que proponen este modelo parten de una imagen mental previa de los objetos a contar distribuidos en forma de cuadrícula. A partir de contar por algún método propio el número de elementos que forman las filas y columnas de la distribución, obtienen una estimación del número de elementos a partir del producto de estos dos valores. Un ejemplo sería el de la distribución de sillas en el patio para acomodar a la gente que debe asistir a un concierto (problema A), como se muestra en la figura 2.

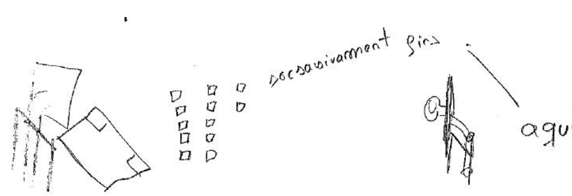

Figura 2: Distribución de sillas en cuadrícula

  Los alumnos proponen este modelo para contar gente en una manifestación o para estimar el número de monedas que caben en una caja fuerte. En este caso crean un modelo de distribución análogo al anterior pero utilizando una cuadrícula tridimiensional. De esta forma obtenemos un modelo que puede ser aplicado en diferentes contextos.

- **Iteración de un punto de referencia**

  Otro tipo de modelo matemático utilizado por los alumnos es la iteración de un punto de referencia, donde el punto de referencia es un objeto que para el estimador es una buena unidad de medida

  En nuestro estudio hemos detectado que los alumnos proponen diversos puntos de referencia para estimar el número de personas/objetos que forman un conjunto a partir de alguna propiedad relevante. Por ejemplo, en el caso del recuento de personas en un espacio, se establece como punto de referencia la superficie que ocupa una persona. A partir de este valor y de la superficie total que ocupa el conjunto de personas, se establece un resultado para el número de personas dividiendo el espacio total entre el espacio de una persona.

Algunos de los puntos de referencia detectados son los siguientes: la superficie que ocupa una silla, el peso medio de una gota, el volumen de un vaso o el volumen de una moneda.

- **Uso de medidas de concentración**

  Entendemos por medidas de concentración la proporción numérica que refleja la relación entre dos magnitudes. Uno de los ejemplos detectados entre las propuestas de los alumnos la densidad de población, que conocen por su aparición en otras materias. Sin embargo, hemos detectado otras medidas de concentración que los alumnos proponen y que son generadas de forma específica para cada problema. Las diferentes medidas de concentración detectadas son: densidad de población, media de SMS enviados por persona y día, número de vasos que ocupan un cierto volumen de agua y el número de gotas que llenan un cierto volumen de agua.

- **Estratificación de la población**

  El último de los modelos detectados consiste en organizar la población en diferentes estratos de forma que pueden ser estudiadas por separado. En nuestro estudio, este tipo de modelo sólo ha sido detectado en el problema C, en el que los alumnos proponen estratificar la población general en función de su edad, considerando que el uso de SMS dependerá de este factor. A partir de establecer estos subconjuntos, los alumnos proponen conseguir la información necesaria a partir de encuestas a una muestra de cada uno de los diferentes estratos.

6 Una propuesta didáctica para introducir los procesos de modelización en las aulas de ESO

En la sección anterior hemos presentado los modelos propuestos por alumnos de ESO a una colección de PEMNA. En nuestro estudio hemos observado que una parte de los alumnos es capaz de generar modelos matemáticos que les permitirían obtener las estimaciones planteadas. De hecho, los alumnos plantean diferentes modelos para cada uno de los problemas, con lo que se pueden generar actividades que proporcionen una gran riqueza matemática a los alumnos. Algunos de los modelos utilizados se han detectado en problemas diferentes, con lo que los PEMNA permiten trabajar la generalización de los modelos matemáticos a otras situaciones (English [12] y Doerr y English [10]).

De los resultados de nuestro análisis de estrategias, concluimos que los problemas de estimación de magnitudes no alcanzables se presentan como una opción útil para introducir los procesos de modelización en educación secundaria. A partir de lo observado, nos parece que utilizar un amplio abanico de problemas de Fermi puede ser adecuado para el trabajo en las aulas de ESO. Aun así, algunos de los alumnos muestran dificultades para generar planes concretos de trabajo que les permitan resolver los problemas propuestos, con lo que consideramos clave el trabajo en el aula por grupos. Dentro de las actividades utilizadas en las aulas, los alumnos deberían poder tratar problemas de estimación de magnitudes no alcanzables que se sitúen en su entorno, para después poder extrapolar los métodos y modelos utilizados a otros problemas. Siguiendo esta idea, a continuación proponemos diversas secuencias de problemas que deberían permitir el trabajo de modelización en el aula.

Planteamos las secuencias de actividades propuestas como un proyecto en el que los alumnos deben resolver diferentes problemas de Fermi, centrados en obtener la estimación de diversas magnitudes no alcanzables que tengan un nexo común y ambientadas en diferentes contextos reales o realistas. Siguiendo a Aravena, Caamaño y Jiménez [3], esperamos que el trabajo en el aula con estas actividades les permita adquirir una visión integrada de las matemáticas, reconociendo su utilidad para resolver problemas de su entorno.

Una de las dificultades de tratar con magnitudes no alcanzables es el hecho que, por definición, nos es difícil crear una imagen mental de estas. Por este motivo, consideramos que el primer problema al que deben enfrentarse los alumnos debe tratar sobre algún aspecto que pueda contextualizarse en su entorno próximo. Este contexto podría ser el mismo centro educativo, su entorno físico o algún aspecto relacionado con sus propias viviendas. A partir del conocimiento generado en la resolución de este primer problema, se pueden extrapolar métodos y resultados o otros problemas que traten situaciones menos accesibles.

Por otro lado, consideramos de vital importancia en el aprendizaje de la resolución de problemas el proceso en el que los alumnos elaboran un plan de acción. Por este motivo, la primera actividad relacionada con el primer problema debería ser la elaboración individual de un plan de acción. Posteriormente, los alumnos podrían discutir sus planes en grupo y consensuar un plan de acción grupal.

Como el primer problema propuesto está ambientado en su realidad próxima, los alumnos pueden realizar el trabajo de campo que consideren para obtener la información necesaria para resolver el problema. A partir de este momento los grupos deberían redactar un informe con todos los resultados y métodos de resolución para el primer problema. Es altamente recomendable realizar una puesta en común con los alumnos, en los que ellos mismos expliquen el tipo de propuestas que han llevado a término, las dificultades encontradas, los métodos y modelos utilizados, sus limitaciones y los resultados finales. Con la discusión de métodos se puede seguir la línea propuesta por Chapman [9] que pretende que las clases de matemáticas sean un espacio más narrativo. La discusión de métodos y modelos debería sugerir formas diferentes de afrontar el problema para los alumnos, que pueden utilizar en futuros problemas.

Una vez se ha cerrado la discusión sobre el primer problema, se puede pasar a los alumnos una lista de cuestiones que incluya 3 o 4 problemas de planteamiento matemático equivalente al del primer problema propuesto pero con contextos diferentes. De hecho, es recomendable introducir problemas en contextos a los que no puedan acceder directamente. De esta forma los alumnos deben elaborar métodos propios para recoger información a distancia, haciendo uso de la nuevas tecnologías. Los alumnos pueden trabajar en estos problemas en los mismos grupos iniciales y al finalizar se puede realizar una nueva puesta en común. En esta ocasión, se puede aprovechar el acceso a la web para intentar encontrar respuestas a las preguntas formuladas y compararlas con sus propias soluciones de forma crítica.

A partir de los modelos detectados en nuestro análisis, proponemos diferentes secuencias didácticas para trabajarlos. Las presentamos a continuación clasificados por el tipo de situación planteado.

A. Distribución de objetos en una superficie:

A1. ¿Cuánta gente cabe en el patio del instituto?

A2. ¿Cuánta gente cabe en el Palau Sant Jordi en un concierto?

A3. ¿Y en la plaza del ayuntamiento en una manifestación?

A4. ¿Cuántos árboles hay en Central Park?

B. Distribución de objetos en un volumen:

B1. ¿Cuántas gotas de agua caben en un cubo?

B2. ¿Cuántas monedas caben en una caja fuerte cúbica de 1 metro cúbico?

B3. ¿Cuántos vasos se necesitan para llenar una piscina?

B4. ¿Cuántas naranjas caben en un camión?

C. Estudio de poblaciones:

C1. ¿Cuántos años suman toda la gente que está ahora en el instituto?

C2. ¿Cuántos SMS se envían en un día en tu provincia?

C3. ¿Cuál es el valor de todos los coches de tu ciudad juntos?

C4. ¿Cuántos libros de texto se venden en tu ciudad cada curso?

Destacamos el hecho que el primero de los problemas de cada secuencia está ambientado en un contexto próximo. Podemos afirmar que los alumnos pueden llevar a cabo las acciones necesarias para resolverlos ya que en nuestro estudio de estrategias hemos podido comprobar que los alumnos poseen los conocimientos necesarios para ello y proponen planes de acción adecuados. En nuestra práctica docente hemos llevado este tipo de actividades a las aulas y hemos podido comprobar que los grupos generan modelos adecuados a cada problema, que adaptan los modelos ya utilizados a nuevas realidades y que utilizan el conocimiento generado de forma crítica.

Estas propuestas han sido puestas en práctica en aulas de ESO y consideramos que uno de sus elementos más importantes es la discusión de modelos y resultados, ya que permite a los alumnos conectar sus propuestas con la realidad, estableciendo vínculos entre los modelos generados y las situaciones descritas y acercando las matemáticas al conocimiento cotidiano de los alumnos. En el momento en el que estos contrastan sus soluciones con las que se pueden encontrar en los medios informativos o en agencias de información, se puede trabajar el espíritu crítico, con lo que la modelización pasa a ser una herramienta que puede permitir que los alumnos crezcan como ciudadanos.

Referencias

[1] L. Albarracín and N. Gorgorió. Una propuesta de modelización en secundaria: problemas de estimación de magnitudes no alcanzables. *Modelling in Science Education and Learning*, 4:71–81, 2011.

[2] L. Albarracín and N. Gorgorió. On strategies for solving inconceivable magnitude estimation problems. In Tai-Yih Tso, editor, *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 2, pages 2–11, 2012.

[3] M. Aravena, C. Caamaño, and J. Giménez. Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1):49–92, 2008.

[4] J. B. Ärlebäck. On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3):331– 364, Juliol 2009.

[5] H. Barth, N. Kanwisher, and E. Spelke. The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86:201–221, 2003.

[6] W. Blum. Icme study 14: Applications and modelling in mathematics education—discussion document. *Educational studies in mathematics*, 51:149–171, 2003.

[7] J. L. Booth and R. S. Siegler. Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41(6):189–201, 2006.

[8] H. L. Carter. *Estimation and mental computation*, chapter Linking estimation to psychological variables in the early years, pages 74–81. National Council of Teachers of Mathematics, 1986.

[9] O. Chapman. Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62:211–230, 2006.

[10] H. Doerr and L. English. A modelling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2):110–136, 2003.

[11] C. J. Efthimiou and R. A. Llewellyn. Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, 42(42):253–261, 2007.

[12] L. D. English. Mathematical modeling in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3):303–323, 2006.

[13] C. B. Esteley, M. E. Villarreal, and H. R. Alagia. The overgeneralization of linear models among university students' mathematical productions: A long-term study. *Mathematical Thinking and Learning*, 12:86–108, 2010.

[14] R. Borromeo Ferri. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2):86–95, 2006.

[15] N. Ginsburg. Numerosity estimation as a function of stimulus organization. *Perception*, 20(5):681–686, 1991.

[16] J. G. Greeno. Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(13):170–218, 1991.

[17] M. Van Den Heuvel-Panhuizen. The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2):2–10, 2005.

[18] D. J. Hildreth. The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher*, 30(5):50–54, 1983.

[19] T. P. Hogan and K. L. Brezinski. Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4):259 — 280, 2003.

[20] M. G. Jones, G. E. Gardner, A. R. Taylor, J. H. Forrester, and T. Andre. Students' accuracy of measurement estimation: Context, units, and logical thinking. *School Science and Mathematics*, 112(3):171–178, 2012.

[21] R. Lesh and G. Harel. Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2):157—189, 2003.

[22] R. Lesh and J. S. Zawojewski. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, chapter Problem solving and modeling. Information Age Publishing, 2007.

[23] A. R. Taylor M. G. Jones and B. Broadwell. Estimating linear size and scale: Body rulers. *International Journal of Science Education*, 31(11):1495–1509, 2009.

[24] A. Peter-Koop. Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' interactive modelling processes. In S. Ruwisch and A. Peter-Koop, editors, *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville)*, 2004.

[25] L. Puig. *Elementos de resolución de problemas.* Ed. Comares, Granada, 1996.

[26] R. E. Reys, J. F. Rybolt, B. J. Bestgen, and J. W. Wyatt. Identification and characterization of computational estimation processes used by inschool pupils and out-of-school adults. Technical report, National Institute of Education, 1980.

[27] R. E. Reys, J. F. Rybolt, B. J. Bestgen, and J. W. Wyatt. Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(183-201), 1982.

[28] J. B. Ärlebäck. Exploring the solving process of groups solving realistic fermi problem from the perspective of the anthropolgical theory of didactits. In M. Pytlak, Ewa Swoboda, and T. Rowland, editors, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME7)*, pages 1010–1019. Rzeszów: University of Rzeszów, Poland, 2011.

[29] B. Sriraman and R. Lesh. Modeling conceptions revisited. *ZDM*, 38(3):247– 254, 2006.

[30] L. Verschaffel. Taking the modeling perspective seriously at the elementary level: Promises and pitfalls. In A. D. Cockburn and E. Nardi, editors, *Proceedings of the 26th PME International Conference*, volume 1, page 64–80, 2002.