MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(1), No. 5, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Una propuesta para trabajar la proporción desde el arte

Irene Ferrando
Universitat de València
irene.ferrando@uv.es

Carlos Segura
IES El Clot, Valencia
carlos.segura@uv.es

Abstract

En este trabajo presentamos una propuesta didáctica dirigida a alumnos de primeros cursos de ESO en la que trabajarán conceptos relacionados con la proporción. Nuestra propuesta tiene como hilo conductor la historia del arte, pues buscamos que los alumnos adquieran competencias en el dominio de la proporción a partir de los usos que los artistas le han ido dando a lo largo de la historia; esto nos permite partir del razonamiento puramente visual para llegar a las relaciones numéricas. A través de un recorrido que empieza en el antiguo Egipto y acaba en la Atenas actual, los alumnos se pondrán en la piel de los pintores, arquitectos o, incluso, guías turísticos que, al encontrarse frente a problemas técnicos, los resuelven matemáticamente. Algunas de las actividades que presentaremos han sido puestas en práctica en el proyecto Estalmat CV (programa de estimulación del talento matemático dirigido a alumnos de entre 12 a 14 años) y, posteriormente, adaptadas a un aula convencional de primeros cursos de ESO.

We present a proposal addressed to students of the first courses of ESO. Through these activities, pupils will work concepts related with proportionality. Our proposal is developed along art history, the students will acquire skills related with proportionality through the uses the artists have done throughout history. Through a route beginning in ancient Egypt and ending in today Athens, students will act as the artists, architects or even tour guides to deal with technical problems and solve them mathematically. Some of the activities have been already implemented in the project Estalmat CV (a mathematic stimulation program for talented students) and later adapted to a conventional classroom of the first courses of ESO.

Keywords: Proporcionalidad, modelización, problemas reales.
Proportionality, modelling, real problems

1 Introducción

Este trabajo es el fruto de las sesiones que, anualmente, realizamos para los alumnos del proyecto Estalmat CV, un programa de detección, estimulación y orientación del talento matemático de jóvenes de entre 12 y 13 años que nació de la mano del profesor Miguel de Guzmán. Se trata de un trabajo que está en constante evolución, ya que cada año vamos modificando las sesiones. Las actividades que vamos a plantear aquí están adaptadas para trabajarse en un aula estándar de primeros cursos de educación secundaria obligatoria. Hemos tratado de construir actividades de distintos niveles de dificultad, de esta forma se podrán implementar sin perder de vista la atención a la diversidad. Todos los contenidos que se van a trabajar están relacionados con el concepto de proporción. La idea es enseñar competencias en el dominio de la proporción a partir de los distintos usos y significados que se le ha ido dando a lo largo de la historia.

Hemos escogido una propuesta didáctica centrada en este tema porque el significado de proporción entre magnitudes plantea dificultades entre los alumnos, pues no reside en el proceso por el que se asigna un valor, sino en la posibilidad de comparar dos razones, por lo que su estructura conceptual (relación de equivalencia) es más compleja que las nociones de entero, longitud, fracciones y otros conceptos habituales en el currículo.

El planteamiento de nuestra propuesta, que comienza en un recorrido histórico-artístico y termina con una situación más cotidiana, está basado en el principio de variabilidad perceptual (en el sentido de [3]). La idea básica de este principio reside en que la abundancia de experiencias concretas, visuales, sobre la misma estructura conceptual facilita el poder extraer la idea abstracta esencial inherente en ella. Así, el contexto artístico permite manejar la proporción como concepto intuitivo, visual y manipulable, entendiéndolo en un primer momento como repetición exacta de una figura a distintos tamaños, extendiéndolo a la idea de relación geométrica (noción de módulo) para llegar, por último, a la relación numérica.

Los distintos documentos nacidos de la filosofía tanto del ICMI como de PISA/OCDE, dos de las instituciones de referencia para la matemática educativa, ponen el énfasis en un modelo funcional de aprendizaje (en términos de y acerca de relaciones) que trabaje especialmente sobre la modelización-matematización de situaciones reales. Estudiar Proporcionalidad mediante el estudio de problemáticas reales sacadas, por ejemplo, de la Historia del Arte, no sólo permite contextualizar ciertas tareas, sino contextualizar de forma coherente todo el proceso de aprendizaje.

La búsqueda de contextos y modelos que den lugar de modo más o menos natural a la matematización corresponde a lo que Freudenthal denomina fenomenología didáctica ([4]). La fenomenología didáctica se nutre de la historia de la matemática y de las producciones y construcciones de los alumnos que van surgiendo durante el proceso de instrucción ([8] y [9]). Se trata un método que consiste en investigar primero las diversas manifestaciones y usos de un determinado objeto matemático como fenómeno en la realidad, considerando sus referencias en el lenguaje cotidiano (lo que decimos cuando hablamos de razones, fracciones, funciones, etc.) y, a partir de esto, construir la didáctica de ese tema.

Con esta idea, en los años 80 algunos investigadores en didáctica de las matemáticas (como Filloy) propusieron un "vaivén entre análisis de textos históricos y las actuaciones de los alumnos en los sistemas educativos" ([7]). En este sentido, si entendemos los productos artísticos (cuadros, esculturas o monumentos) como textos que nos hablan también sobre las herramientas matemáticas empleadas en elaborarlos, podemos utilizar las competencias de los artistas en problemas de proporción para plantear modelizaciones basadas en dichos problemas que impliquen manejar dichas competencias por parte de los alumnos en el aula. Así, nosotros consideramos que un estudio histórico-artístico del concepto de proporción permite establecer una secuencia de aprendizaje más adecuada que las usuales en los libros de textos, que separan en unidades didácticas (la aritmética trabajada a través de la proporcionalidad entre magnitudes no geométricas, la geometría a través de la semejanza, etc). La secuencia que presentamos va ampliando progresivamente el campo semántico y funcional del concepto de proporción.

2 Propuesta didáctica

La propuesta que pasamos a presentar consta de tres bloques de actividades que, aunque inspiradas en las sesiones trabajadas en el proyecto Estalmat CV, están diseñas para implementarse en un aula de segundo o tercer curso de ESO. En los dos primeros bloques presentaremos actividades individuales que pueden adaptarse a distintos niveles de complejidad y, en el último, proponemos una actividad de modelización para que se realice en grupo, fomentando así el trabajo colaborativo y la integración en el aula. El trabajo que presentamos aquí está todavía en fase de experimentación por lo que algunas cuestiones (como la evaluación o la respuesta de los alumnos) no se contemplarán todavía. Serán, por tanto, respondidas en trabajos posteriores.

Proporción en el arte del Antiguo Egipto: búsqueda de una total regularidad

Tal y como hemos comentado en la introducción, el objetivo es avanzar desde una perspectiva estrictamente visual de la proporción, intentando que el alumno actúe como el artista que, en un momento determinado, necesitaba herramientas matemáticas para realizar su obra. En este sentido encontramos recursos muy ilustrativos en el arte egipcio.

La principal pretensión del arte egipcio es su legibilidad, pretenden tener codificadas las imágenes hasta el mínimo detalle: posturas iguales, colores iguales, distribución de las figuras controlada, vestidos, formas... de tal manera que las imágenes fuertemente convencionalizadas se lean como un alfabeto. Así, no debe extrañarnos que la primera función conocida de la proporción en la historia del arte sea la que fija la relación entre las partes de las figuras humanas que decoran las arquitecturas egipcias. En este caso la proporción no es más que una relación que permite al artista reproducir cualquier figura cambiando el tamaño sin cambiar la forma.

Hacia el 3200 a. C., la representación de la figura humana empezó a realizarse según la llamada “regla de proporción”, un estricto sistema geométrico de cuadrículas que aseguraba la repetición exacta de la forma convencional egipcia a cualquier escala y en cualquier posición. Era un sistema infalible que regulaba las distancias exactas entre las partes del cuerpo, que se dividía en 18 unidades de igual tamaño situadas en relación a unos puntos fijos de la cuadrícula; incluso especificaba la anchura exacta de la zancada de las figuras que aparecían andando y la distancia entre los pies (ambos pies se reproducían por la cara interna) en las figuras que estaban de pie. Antes de empezar a pintar una figura, el artista dibujaba en la superficie de trabajo una cuadrícula del tamaño adecuado y después colocaba la figura.

Partiendo de estas ideas, proponemos a los alumnos actividades a través de las cuales, a partir de los dibujos sobre cuadrículas que aparecen en el arte egipcio, asimilen un aspecto puramente geométrico de la proporción: el control sobre la repetición de las formas a distintos tamaños. Además, partiendo de un sistema de proporciones fijado, podrán hacer predicciones sobre las magnitudes.

<u>Actividad 1</u>: *Observa detenidamente las figuras 1 y 2. Teniendo en cuenta que la medida del dedo al codo es de 45 cm intenta contestar las siguientes preguntas:*

– *¿Cuánto mide cada celda de la cuadrícula?*

– *Ahora fíjate en la figura del hombre entero, ¿cuánto mide?*

– *¿Cuántos cuadros crees que necesitaríamos para representar a ese mismo hombre sentado en una silla de manera que las plantas del pie tocaran el suelo?*

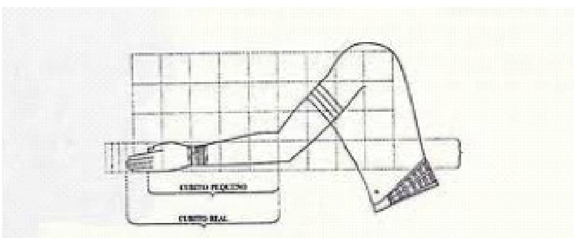

Figura 1:

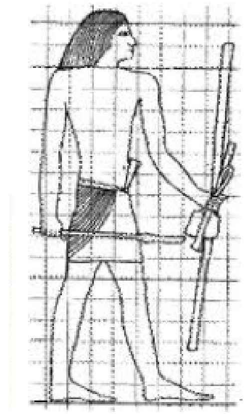

Figura 2:

Actividad 2: *Antes de avanzar al sistema de cuadrículas que acabamos de observar, los egipcios del Imperio Antiguo realizaban sus representaciones humanas basándose en el siguiente texto:*

"El nivel de la línea de la rodilla desde la planta del pie representaba un tercio de la altura de la línea frontal del cabello; el nivel más bajo de las nalgas representaba la mitad de la altura de la línea del cabello; la línea del codo representaba dos tercios de la altura del cabello, y la distancia desde la línea del cabello hasta la unión del cuello con los hombros era un noveno de la altura de la línea del cabello."

A partir de este texto, ¿sabrías deducir porque, durante el Imperio Nuevo, las cuadrículas tenían una altura de 18 cuadros?

Estas actividades pueden completarse con preguntas que lleven a los alumnos hacia la noción de semejanza como por ejemplo:

– *¿Qué ocurre si, partiendo de una figura dibujada en un sistema de cuadrículas, la intentamos reproducir en otra cuadrícula con las celdas más grandes?*

– *¿Qué ocurrirá si, en lugar de celdas cuadradas, utilizamos rectángulos con la base mayor que la altura?*

Proporción en el Arte Griego: Canon y Belleza. Concepto de módulo

Lo que en los egipcios era la búsqueda de construir un alfabeto visual, se amplia para los griegos y pasa a tener connotaciones metafísicas. El conocimiento geométrico pasa de Egipto a Platón por la vía de los pitagóricos. Platón es la figura que liga para siempre las nociones de proporción y belleza, que tanto influirá en el Arte: se llama armonía al equilibrio en las proporciones de entre las distintas partes de un todo. Este pensamiento recorrerá el mundo clásico y llega hasta nuestros días, por tanto los alumnos estarán familiarizados con él (aún a un nivel irreflexivo). Así, la armonía en la proporciones vista a través de la generación de figuras regulares a partir de partes más pequeñas es un buen punto de partida para que los alumnos descubran el concepto de módulo.

Esta idea de proporción como relación de las partes de un conjunto en concordancia con una cierta parte elegida como clave, el módulo, genera una gran gama de ejercicios, muchos a partir de ejemplos de la práctica artística: estudios de esculturas, como el Doríforo de Policleto, de edificios... Se pueden realizar actividades con juegos de construcción (a partir de piezas iguales) o con ayuda del ordenador. Aquí nos vamos a limitar a presentar una actividad de modelización en la cual los alumnos en grupos de 3 o 4 se pondrán en la piel de unos arqueólogos que deben intentar reconstruir un templo griego en ruinas.

Antes de comenzar la actividad introducimos, a partir de la idea de módulo, dos de los tres órdenes griegos. Les proporcionamos las siguientes tablas (Figuras 3 y 4) en las que vemos cómo cada orden se define a partir de una serie de relaciones entre las partes que componen la columna (capitel y fuste) y la parte tomada como módulo: el diámetro de la sección de la columna (que se denota con la letra m). También se les explicará el vocabulario arquitectónico básico que aparece en estas relaciones y que deberán identificar en las imágenes con las que trabajarán posteriormente en las actividades.

Orden completo 20 m	**Entablamento 4 m**	Cornisa	1 + ½ m
		Friso	1 + ½ m
		Arquitrabe	1 m
	Columna 16 m	Capitel	1 m
		Fuste	14 m
		Basa	1 m

Figura 3: Proporciones en el orden dórico.

Orden completo 22 + ½ m	**Entablamento 4 + ½ m**	Cornisa	1 + ¾ m
		Friso	1 + ½ m
		Arquitrabe	1 + ¼ m
	Columna 18 m	Capitel	1 m
		Fuste	16 m
		Basa	1 m

Figura 4: Proporciones en el orden Jónico.

Actividad 3: *Imagina que perteneces a un equipo de arqueología y has descubierto un manuscrito del siglo IV aC en el que aparece la siguiente planta del templo de Hera en Olimpia (Figura 5). Del templo sólo se conserva la plataforma, con dos escalones de 0'75 m de altura cada uno.*

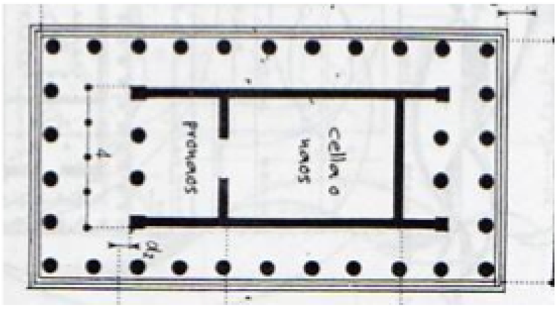

Figura 5: Plano de la planta del Templo de Hera

En dicha planta, no se especifica si el orden del templo es dórico o jónico, pero sí se observa que el diámetro de la columna es de 50 cm. Siguiendo el plano, y a partir de estimaciones, determina las dimensiones del templo (ancho, largo, alto) si:
a) Su orden es dórico.
b) Su orden es jónico.

A partir de estas cuestiones podemos plantear a los alumnos que hagan otras estimaciones como el volumen total, la cantidad de piedra necesaria, coste del templo, etc. Podemos plantear, incluso, que se conviertan en obreros e ingenieros e intenten, mediante el trabajo colaborativo, diseñar una maqueta, de este modo podemos introducir la idea de escala.

A continuación, plantearemos otra actividad contextualizada en la arquitectura griega que enlazará directamente con las actividades del último bloque. El objetivo es estimar las dimensiones del Partenón, el templo griego más celebre. La actividad está pensada para ser puesta en práctica en un aula informática y utilizando el programa GeoGebra. A los alumnos se les proporciona una carpeta con una serie de imágenes del Partenón para que, a la hora de trabajar con ellas con el GeoGebra, escojan la más conveniente en función del tipo de mediciones que deseen hacer. También se les explica que la concepción del arquitecto del Partenón incluye una serie de correcciones ópticas en la distancia entre las columnas para tener en cuenta la perspectiva y que el ojo, enfrentado al edificio, lo perciba armónicamente. Por ese motivo, algunas imágenes, como la que mostramos a continuación - y que, entre las que disponen, será la óptima para hacer las mediciones representan la columnata con una cierta curvatura que permite adaptar las correcciones ópticas.

Actividad 4: *Observa la Figura 5 que corresponde a una parte de la fachada del Partenón. Serías capaz de estimar...*

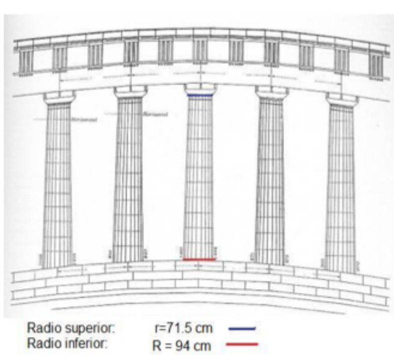

Figura 6: Imagen de la fachada del Partenón.

a) La altura total de la columna. ¿Tiene basa?
b) Las dimensiones de la planta (ancho y largo), hasta el estilóbato (sin contar los escalones).
c) Basándote en los datos obtenidos y en alguna de las imágenes del Partenón que te proporcionamos intenta estimar sus tres dimensiones.

Diseño de una excursión para visitar el centro de Atenas

En este último apartado trataremos que los alumnos trabajen simultáneamente con distintos significados de proporción, desde las relaciones entre magnitudes geométricas (más visuales) hasta las relaciones numéricas (más abstractas) y que las apliquen en la resolución de una tarea de modelización. La tarea consta de dos actividades complementarias, ambas diseñadas sobre el hilo conductor de un hipotético viaje de final de curso. La idea es planear una visita al centro de Atenas en un tiempo limitado y ajustando el presupuesto al máximo intentando no dejar de ver ningún monumento importante. Para resolver las actividades que componen esta tarea podrán recurrir a distintas herramientas como GeoGebra, Google Maps, buscadores... lo que permite que los alumnos se desenvuelvan matemáticamente en entornos de tecnologías de la información y la comunicación con los que ellos están familiarizados, como es el caso de los buscadores (Google) o del Google Maps, y relacionen los resultados con un programa estrictamente matemático (GeoGebra).

Actividad 5: *En el siguiente plano (Figura 6) de de la Acrópolis de Atenas podéis localizar los monumentos más importantes, entre ellos el Partenón, cuyas medidas ya habéis estimado en la actividad anterior. En el plano podéis observar el recorrido que sugerimos para visitar todos los monumentos, tratad de averiguar la longitud (en metros) del recorrido.*

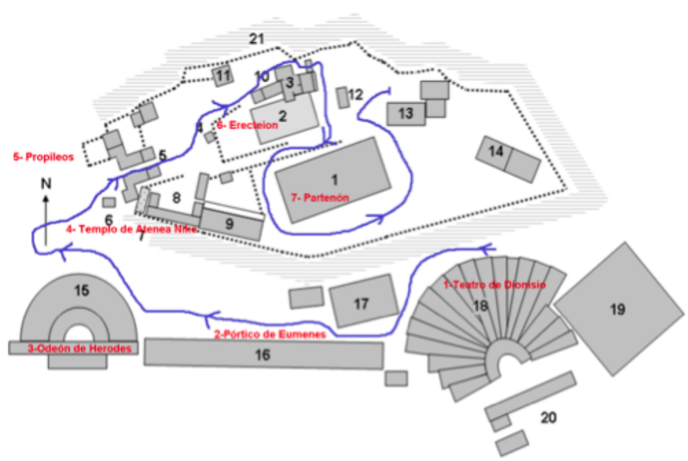

Figura 7: Croquis de la Acrópolis de Atenas.

Al intentar contestar a la pregunta los alumnos observarán que el croquis proporcionado no tiene escala y, por tanto, no es posible calcular nada directamente. Deben utilizar la estimación obtenida en la actividad anterior para usar la medida de uno de los lados del Partenón como escala. Les proponemos que resuelvan la actividad mediante el GeoGebra y que, a continuación comprueben con el Google Maps (usando la herramienta "mis recorridos") que la estimación se aproxima a la realidad. Para resolver la actividad en GeoGebra pueden escoger distintas estrategias, por ejemplo, tratar de aproximar el recorrido propuesto por un polígono y obtener la longitud del recorrido a partir de la herramienta "perímetro". Esta medida se obtiene en unidades desconocidas, para pasarla a metros bastará con utilizar el ancho del Partenón. Queremos evitar el razonamiento a partir de "reglas de tres", así que intentaremos que los alumnos se planteen preguntas como: ¿Cuántas veces "cabe" el lado del Partenón en nuestro recorrido? A partir de la respuesta a esta pregunta basta con multiplicar el número de veces por la longitud del lado del Partenón (31 metros según una estimación obtenida en la actividad anterior). Así, se obtiene que la longitud del recorrido es, aproximadamente, de unos 860 metros. En la Figura 7 podemos ver que, a través de una aproximación realizada con las herramientas proporcionadas por Google Maps obtenemos una solución muy ajustada a la del GeoGebra.

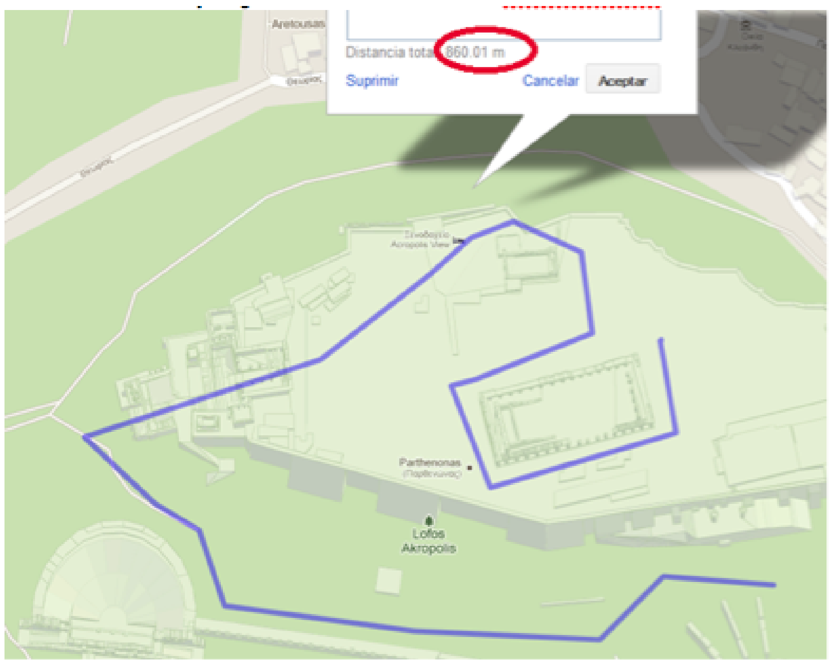

Figura 8: Estimación de recorrido realizada con Google Maps

Actividad 6: *Un crucero atraca en el puerto del Pireo (Atenas) a las 10 de la mañana, los viajeros están ansiosos por visitar los tesoros que les aguardan en el centro de Atenas. Vosotros sois los guías turísticos encargados de organizar la excursión para 20 turistas. Se trata de que los viajeros visiten siete monumentos del centro y que regresen al barco antes de las 17 horas. Os proporcionamos un mapa del centro de Atenas con los principales monumentos señalados, plano del metro y un folleto con los precios y los horarios de entrada a los monumentos. El recorrido debe realizarse en un tiempo limitado minimizando los gastos.*

En esta actividad deberán utilizar algunos datos utilizados en las anteriores y ampliar la noción de proporcionalidad que han adquirido anteriormente. Se sugerirán preguntas del tipo: ¿A qué velocidad se desplaza un adulto? ¿Crees que esta velocidad varía cuando visitamos un museo? ¿Y si el adulto se desplaza junto a un grupo numeroso? Al realizar tu itinerario, ¿has tenido en cuenta que los viajeros deberán realizar alguna parada para comer, comprar? Sin duda, esta es la actividad más abierta de todas, y en la que los alumnos van a utilizar una idea más amplia del concepto de proporción (desde la noción geométrica a partir del uso de mapas y escalas a la relación numérica entre magnitudes).

Análisis de la propuesta y conclusiones

Para analizar nuestra propuesta nos vamos a basar en los criterios sugeridos por el proyecto europeo LEMA (Lerning and Education in and through Modelling and Applications). Tendremos en cuenta cuatro aspectos de nuestras tareas: el contexto, el conocimiento matemático implicado, la naturaleza de las soluciones esperadas y la actividad realizada por el resolutor. Hemos agrupado las tareas en tres bloques: Antiguo Egipto (actividades 1 y 2), Arte Griego (actividades 3 y 4) y Excursión a Atenas (actividades 5 y 6). En las siguientes tablas presentamos un análisis de cada uno de los tres bloques.

Análisis del contexto de las tareas

	¿Real y auténtica?	¿Interesante para los alumnos?	¿Es relevante para los alumnos?
Antiguo Egipto	Sí	Es posible	Es posible
Arte Griego	Sí	Es posible	Es posible
Excursión Atenas	Sí	Sí	Es posible

Análisis del conocimiento matemático implicado

	¿Único y completamente determinado por adelantado?	¿Promueve el uso de distintas partes del conocimiento matemático?
Antiguo Egipto	No	Estimación, proporcionalidad y medidas
Arte Griego	No	Estimación, escalas, medidas
Excursión Atenas	No	Estimación, optimización, medidas, análisis

Análisis de las soluciones esperadas

	¿Una o varias soluciones?	¿Naturaleza de la solución?	¿La solución está relacionada con el contexto?
Antiguo Egipto	Varias	Número, intervalo y afirmación	Sí
Arte Griego	Varias	Un intervalo y una estimación	Sí
Excursión Atenas	Varias	Medidas e intervalos	Sí

Análisis de la actividad del resolutor

	¿Se lleva a cabo un procedimiento óptimo y único?	¿Debe explorar, plantear hipótesis, buscar alternativas, interpretar y validar soluciones...?
Antiguo Egipto	No	Sí
Arte Griego	No	Sí
Excursión Atenas	No	Sí

En vista de los análisis presentados, consideramos que se trata de una propuesta enriquecedora, sobre todo si ésta se trabaja completamente, llevando al alumno desde una idea visual a una idea numérica del concepto de proporcionalidad. Como ya hemos comentado en la introducción, algunas de las actividades ya han sido puestas en marcha, sin embargo todavía no contamos con un estudio completo y sistemático de los resultados en un aula estándar. En un futuro próximo esperamos obtener y poder analizar la puesta en práctica de las tareas.

Referencias

[1] W. Blum , F. Borromeo, (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, 1(1), 45–58 (2009).

[2] A.M. Bressan, M.F. Gallego, La educación Matemática Realista. Bases teóricas. I*II Congreso Nacional de Matemática y Problemáticas de la Educación Contemporánea* (2011).

[3] Z. Dienes, La construcción de las matemáticas. Editorial Vicens-Vives, Barcelona (1970).

[4] H. Freudenthal, Mathematics as an educational task. Dordrecht. *Reidel Publishing Co.* (1983).

[5] H. Freudenthal, Revisiting mathematics education. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht* (1991).

[6] J. Kilpatrick, Historia de la investigación en educación matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Educación Matemática e Investigación* (p. 13-98). Madrid: Síntesis, (1994).

[7] L. Puig, Historia de las ideas algebraicas. Componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa. *Investigar en educación matemática: séptimo simposio de la SEIEM*, 97–108 (2003).

[8] L. Streefland, L. (Editor), Realistic Mathematics Education in primary school. *Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute* (1991).

[9] L. Streefland, Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of developmental research. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht* (1991).