MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(1), No. 8, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Modelo para el trazado de una carretera entre dos paraboloides

Víctor José Lorente Arreba, Eduardo Jiménez Fernández, Lorena Vicent Ferrando
Universidad Politécnica de Valencia
vicloar@cam.upv.es, edjimfer@mat.upv.es, lovifer@cam.upv.es

Abstract

En este trabajo presentamos una actividad docente que consiste en modelizar el trazado de una carretera entre dos superficies paraboloides. La finalidad de esta tarea consiste en desarrollar el cálculo diferencial utilizando como herramienta la modelización matemática. Se utiliza el contexto ingenieril del trazado de una carretera como vehículo de aprendizaje de contenidos matemáticos necesarios para la implementación de este proyecto.

We present a classroom task that consists to model the path of the road between two paraboloid surfaces. The purpose of this paper is to teach the differential calculus using mathematical modeling as a teaching tool. The context of the engineering design of a highway serves as a vehicle for teaching and learning the mathematical contents necessary for driving the task.

Keywords: Modelización, geometría diferencial, Mathematica.
Modelling, differential geometry, Mathematica

1 Introducción

El objeto de esta actividad consiste en resolver un problema de ingeniería civil en el trazado de una carretera que discurre a través de dos paraboloides invertidos. La modelización matemática permite contextualizar un problema matemático en el ámbito de la formación ingenieril de los estudiantes, haciendo más útil y atractivo el estudio que se está realizando, (ver [3]). Los contenidos matemáticos que se introducen están directamente relacionados con el cálculo diferencial, trabajando conceptos de geometría, diferenciabilidad e integración. La actividad se enmarca dentro de una asignatura optativa de la licenciatura de Ingeniería Civil cuyo nombre lleva por título *Modelización Asistida por Ordenador*. Al inicio del curso se presentan una serie de contenidos matemáticos enfocados a partir del desarrollo de pequeñas rutinas que se realizan con el asistente matemático Mathematica, (ver [1]). Una vez que los alumnos se han familiarizado con este software y con las nociones matemáticas usuales, se proponen una serie de problemas de ingeniería que posteriormente los alumnos revisan y escogen en función de sus inquietudes. A partir de ese momento, los alumnos comienzan desarrollando todas las fases de necesarias para la elaboración de un modelo matemático que describa el problema que han elegido. El ejercicio que presentamos en este trabajo es el resultado de la modelización del trazado de una carretera entre dos paraboloides invertidos realizado por los alumnos Víctor José Lorente Arreba y Lorena Vicent Ferrando. El objeto de esta propuesta trata de desarrollar una carretera entre dos montañas. Sobre este modelo, deciden modificar el enunciado, generando una nueva superficie (dos parabolides invetidos de diferentes altitudes) sobre la cual se construirá el trazado de una carretera. El problema nuevo se simplifica modelizando el trazado de una carretera que discurrá por la ladera de una de las montañas, es decir, que esté contenido en su superficie, y que por un puente llegué a la otra montaña y siguiese por su superficie hasta llegar al plano de cota cero. Este trabajo está inspirado en otro modelo similar que utiliza Gaussianas en lugar de paraboloides, (ver [2]). En este trabajo se presentan cuatro secciones. Inicialmente se proporciona una introducción donde se exponen el proposito y donde se enmarca la realización de este trabajo. En una segunda sección se expone el planteamiento y el enunciado del molelo. La tercera sección proporciona una descripción de como se desarrolla la construcción del modelo sin entrar en detalles técnicos, dejando al lector la posibilidad de trabajar sobre un archivo .nb anexo a este trabajo, para que puede utilizarlo como patrón para la realización de proyectos similares. Finalmente se describen unas breves conclusiones que se desprenden de esta experiencia.

2 Planteamiento

Se pretende construir una carretera para unir a través de un puente dos colinas de distintas alturas. En una primera aproximación, dada la suavidad y regularidad de ambas elevaciones, se propone la construcción de un modelo matemático sencillo para simular la situación, basado en la utilización de paraboloides invertidos. El trazado de la carretera se realizará utilizando curvas parametrizadas de $\mathbb{R}^3$. En particular, se definiran dos curvas, parametrizadas para mayor comodidad en función del ángulo de giro con respecto del origen situado en cada una de las cimas y conectan a través de un puente rectilíneo. El inicio de esta curva parte desde un punto del primer paraboloide girando aproximadamente π radianes a través de dicha superficie, conectando con un puente rectilíneo que enlaza con el otro arco perteneciente al otro paraboloide llegando hasta cota cero ($Z = 0$). La unión de estos tres arcos genera una curva que tiene forma de S. La carretera diseñada debe cumplir los siguientes requisitos:

1. En ningún punto de su trazado debe tener una inclinación mayor del 5%. Es decir, el ángulo formado por la carretera y la horizontal nunca debe superar los 4.5 grados.
2. En el punto de unión de los tramos, el ángulo formado por las carreteras debe ser superior a los 170 grados, con el fin de que la conexión no suponga una dificultad para los vehículos.

3 El Modelo Matemático

3.1 Construcción de la superficie

El primer paso para modelar el problema es la representación de los paraboloides invertidos que simularán dos montañas. La ecuación general de un paraboloide de invertido viene expresada por:

$$z = -\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} + h_p \tag{1}$$

donde el punto (x_c, y_c) representa el centro del paraboloide, a y b representa la distancia de los semiejes y h_p la altitud del paraboloide. A partir de estos coeficientes podemos construir el paraboloide, con una altura y una posición determinada. En primer lugar se constuye un primer paraboloide que llamaremos P_1 en el centro de coordenadas, con una altura de 2 unidades. Por otro lado denominamos P_2 al segundo paraboloide, situado en el eje OX pero desplazado en el eje OY 4 unidades, y con una altura de solo 1 unidad. La siguiente figura nos ofrece una representación de estas dos cuádricas.

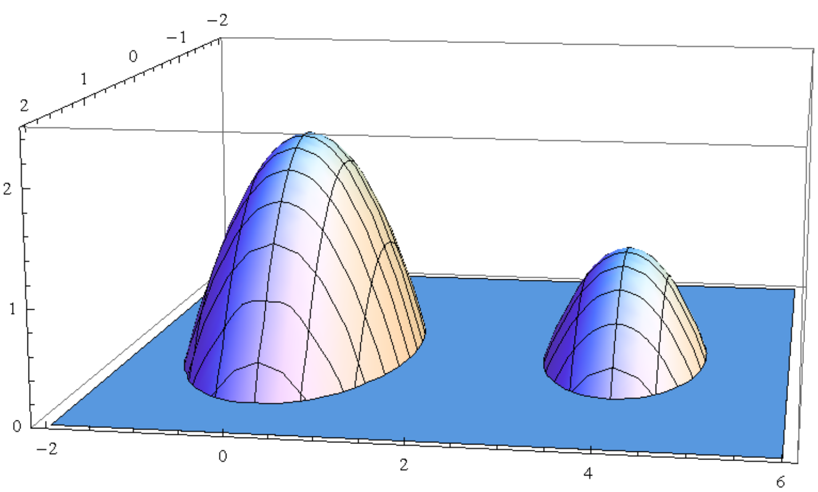

Figura 1: Superficies parabólicas.

3.2 Construcción del trazado

El siguiente paso consiste en trazar una carretera que discurra por las superficies de ambos paraboloides. Las hipótesis iniciales establecen un limite superior e inferior de las pendientes del 5% en todo punto. Para resolver esta dificultad inicial, se plantea construir un plano que satisfaga los requisitos anteriores. Las secciones de este plano con ambos paraboloides nos definirá el trazado de la carretera que deseamos construir. Finalmente tendremos que unir ambas secciones a través un segmento cuya unión con las anteriores nos propocione un arco casi diferenciable en todo punto (ver hipótesis del enunciado).

En primer lugar calculamos el plano que nos permitirá trazar sobre él todo el arco. Una de las formas de calcular este plano es tomar como referencia el punto final de la carretera situado en la cota 0 del terreno, $F = (0, 5, 0)$. Por otro lado se consideran dos vectores que permitan construir un plano donde en todo punto la pendiente de cualquier dirección no supere el 5%. Es suficiente considerar $\overrightarrow{u} = (0, 1, -p)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 0, -p)$ tomando $p = 0.02$. Por lo tanto la ecuación del plano buscado será:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ -5+y & 1 & 0 \\ z & -0.02 & -0.02 \end{vmatrix} = 0, \quad \Pi \equiv z - 0.1 + 0.02x + 0.02y = 0. \tag{2}$$

A continuación se representa el plano gráficamente y se ve la intersección con los dos paraboloides:

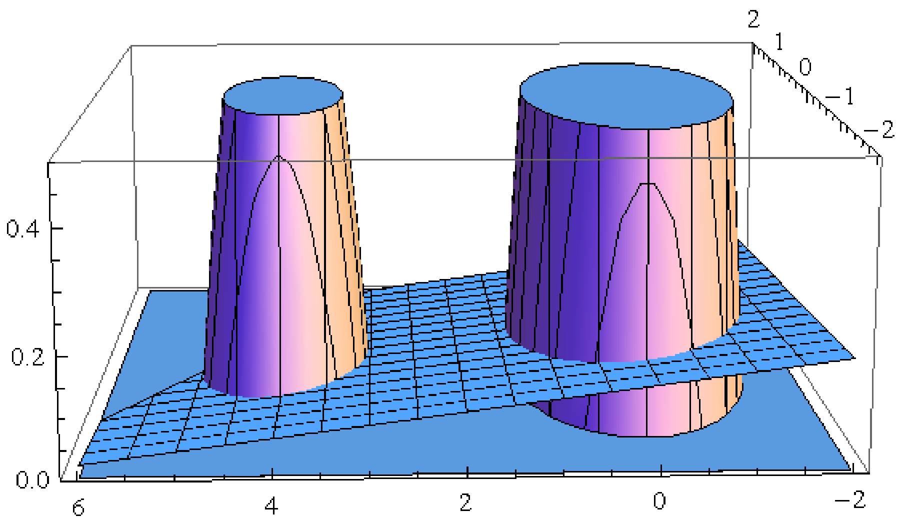

Figura 2: Intersección del plano con los paraboloides.

A continuación deseamos obtener los dos arcos que transcurren por ambos paraboloides. Para eso es necesario obtener las parametrizaciones de ambos paraboloides.

$$\left.\begin{aligned} x - x_{c_i} &= r\cos t \\ y - y_{c_i} &= r\sin t \\ z = -r^2\left(\frac{\cos t^2}{a_i^2} + \frac{\sin t^2}{b_i^2}\right) &+ h_{p_i} \end{aligned}\right. \qquad i = 1, 2. \tag{3}$$

Para obtener las dos funciones resultantes de la intersección del plano con los dos paraboloides tendremos que resolver dos sistemas de ecuaciones de cuatro ecuaciones cada uno. El primer sistema a resolver lo compondrán las ecuaciones paramétricas del primer paraboloide y la ecuación del plano Π, mientras el segundo sistema estará compuesto de las otras tres ecuaciones paramétricas del segundo paraboloide y de nuevo la ecuación del mismo plano. Una vez tenemos los paraboloides expresados en ecuaciones paramétricas solo nos queda resolver los sistemas planteados. Para realizar estos cálculos utilizamos el programa Mathematica. No vamos a incluir los resultados ya que anexo a este trabajo adjuntamos un archivo .nb que incluye todos los cálculos intermedios que se han realizado utilizando el citado software.

El resultado nos proporciona las parametrizaciones de las curvas intersección del plano respecto de cada una de los paraboloides.

De esta manera, obtenemos dos funciones $r_i(t) \quad i = 1, 2$ que proporcionan para cada ángulo t la distancia al eje Z de cada punto de las curvas parametrizadas. Una vez obtenidas las dos trayectorias anteriores, el siguiente problema que se nos plantea es cómo modelar el puente, o sea, la línea que une las trayectorias de los dos paraboloides. La solución de este problema consiste en unir mediante un segmento los dos puntos pertenecientes a los arcos que están contenidos en el plano y que vienen representados a través de las ecuaciones paramétricas de cada paraboloide. El ángulo formado por las arcos debe ser superior a los 170 grados. Para averiguar los puntos de unión, se calcula el vector tangente en cada punto de los arcos contenidos en ambos paraboloides. Dado que todos están incluidos en el plano, existirán vectores tangentes en ambas representaciones que tendrán la misma dirección y distinto sentido. Se trata entonces de seleccionar los puntos adecuados donde se satisface esta condición y trazar un segmento que los una. Acotamos la búsqueda a un intervalo de 90º de cada arco perteneciente a cada uno de los paraboloides, alrededor de los posibles puntos candidatos, los cuales se pueden intuir de la representación grafica de las trayectorias de las curvas engendradas en ambos paraboloides.

En Mathematica obtenemos las pendientes de un conjunto de puntos de las trayectorias de la zona acotada cada $0,02$ radianes para las funciones $r_i(t) \quad i = 1, 2$. Obviamente cuanto más pequeño es este valor más precisa será la aproximación y más valores de pendiente obtendremos. Si derivamos ambas funciones obtendremos pendientes de las rectas tangentes. Queremos encontrar pendientes iguales, pero teniendo en cuenta que las curvas $r_i(t) \quad i = 1, 2$ están orientadas al revés, por lo tanto generamos tablas de las derivadas de las funciones $r_i(t) \quad i = 1, 2$ cada $0,02$ radianes y sumamos ambas tablas con el fin de encontrar cuál es el valor que más se aproxima a cero. Ese valor nos proporcionará los puntos que satisfacen que sus vectores tangentes estan en la misma dirección y tienen sentido opuesto. Una vez calculados ambos puntos de tangencia r_1 y r_2, se obtiene el vector que tiene por extremos ambos puntos. Este vector director nos proporciona la dirección de la recta que nos permitirá construir el puente. El siguiente paso consiste en encontrar un ángulo $t_i, i = 1, 2$ para cada parametrización de los paraboloides que nos proporcione precisamente, el valor de las pendientes de las rectas tangentes en los puntos buscados.

Por lo tanto, si ahora introducimos este valor de ángulo t en cada una de las funciones trayectoria $r(t)$ encontramos el valor de r de cada una de las carreteras, y de esta manera tenemos ambos puntos de tangencia totalmente determinados por sus coordenadas (r, t).

Ya tenemos definidos los dos puntos de tangencia entre los cuales se construirá el puente, entre ambos paraboloides. Unicamente nos falta construir la recta que pasa por los dos puntos obtenidos anteriormente, por lo tanto podemos definir utilizando coordenadas paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= x_{p_1} + \lambda \cdot v_x \\ y &= y_{p_1} + \lambda \cdot v_y \\ z &= z_{p_1} + \lambda \cdot v_z \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es el vector director de la recta que se obtiene de los puntos obtenidos en los dos paraboloides.

Si retomamos las ecuaciones paramétricas de los paraboloides y sustituimos los valores de (r, t), de los dos puntos obtenidos anteriormente, tenemos el valor de esos puntos pero en coordenadas cartesianas. Una vez calculado el vector director que une los puntos, y partiendo, por ejemplo del punto correspondiente al primer paraboloide, lo introduciremos en la ecuación de la recta como $(x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1})$ obteniendo la recta en ecuaciones paramétricas, de la forma que se muestra anteriormente. La representación grafica puede verse en la Figura 3.

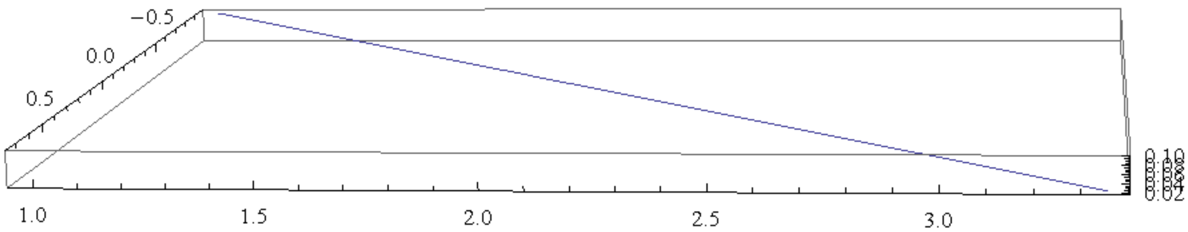

Figura 3: Curva que parametriza el puente de unión de las dos curvas.

Una vez calculada esta recta, ya tenemos perfectamente determinada la trayectoria que puede seguir la carretera, primero alrededor de la superficie del primer paraboloide, luego a través del puente y finalmente a lo largo del segundo paraboloide donde recorrerá su superficie hasta llegar al punto de cota 0.

Solo queda definir el punto desde donde queremos que empiece la trayectoria en el primer paraboloide, que por ejemplo podría representar a una estación de esquí. Por simplicidad podemos considerar un punto que parta desde un ángulo $\pi/2$, según el sentido de referencia de Mathematica, origen desde el punto más meridional de la montaña, en el sentido de las agujas del reloj.

Para la representación de las trayectorias sobre los paraboloides las obtendremos a partir de las ecuaciones $r(t)$ calculadas anteriormente, pero multiplicándolas por la función caracteristica de un intervalo de valores del parámetro para así mostrar sólo el tramo de trayectoria que nos interese, esta función recibe el nombre en Mathematica de UnitStep. En el caso del primer paraboloide desde $\pi/2$ hasta el ángulo t, valor de ángulo del punto tangente de este paraboloide, y en el segundo paraboloide representaremos desde el otro ángulo t tangente a la recta pero en este segundo paraboloide hasta $3\pi/2$ que es donde la trayectoria alcanza la cota $Z = 0$, (ver Figura 4).

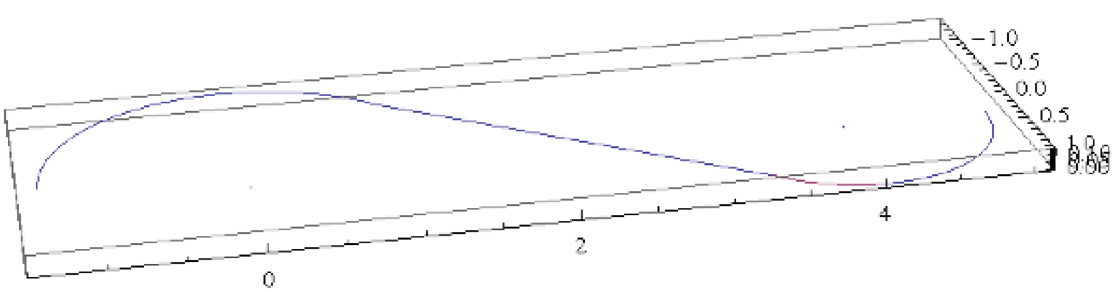

Figura 4: Unión de las curvas.

Finalmente proporcionamos una ilustrción donde aparece el trazado de la carretera a través de los dos paraboloides invertidos, (ver Figura 5).

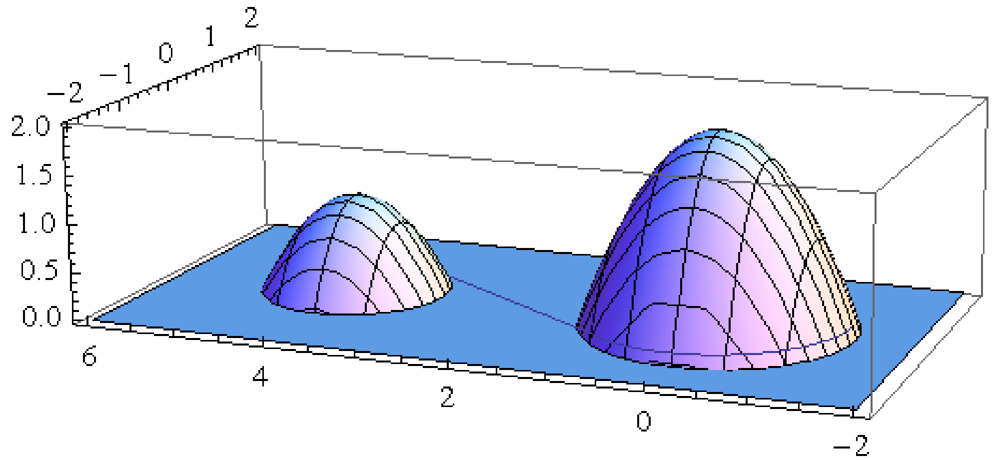

Figura 5: Trazado de la carretera.

4 Conclusiones

La modelización matemática permite contextualizar un problema matemático en el ámbito de la formación de los estudiantes, haciendo más útil y atractivo el estudio que se está realizando, (ver [3]).
Utilizando un problema de ingeniería civil para obtener el trazado de una carretera que discurre a través de dos paraboloides invertidos, se consigue que los alumnos se involucren en una actividad, asimilando conceptos matemáticos de cálculo diferencial, geometría y cálculo numérico. Los resultados obtenidos por estos alumnos ponen de relieve que la enseñanza realizada con este tipo de procedimientos, hace más participativo al alumno y permite que las matemáticas no se presenten como un lenguaje formal y desvinculado de la realidad. La puesta en marcha de este tipo de actividades a lo largo de los últimos 15 años nos ha permitido constatar a traves de las opiniones de alumnos que han superado la asignatura y diferentes encuestas realizadas en el desarrollo de las clases, que la herramienta de la modelización se presenta como una alternativa creible y eficaz a la forma tradicional de impartir matemáticas, donde el profesor presenta los contenidos matemáticos desde un punto de vista genneralista sin particularizar sobre que disciplina se están aplicando esos conocimientos. La satisfacción de los alumnos al finalizar estos modelos, los resultados obtenidos y la calidad de los trabajos, no hacen más que revindicar el uso de la modelización matemática como via de aprendizaje.

Agradecimientos

E. Jiménez Fernández es miembro del EICE MoMa de la UPV y quiere agradecer las ayudas recibidas PIME 2011/A09 y PID-DMA 2012.

Referencias

[1] L. M. García Raffi , M. J. Pérez Peñalver , E. A. Sánchez Pérez. Figueres Moreno M. *Matemáticas Asistidas por Ordenador*, Editorial de la U.P.V. ISBN, ISSN: 84-9705-071-1 L. (2001).

[2] A. Padovani, L. M. Garcia Raffi, J. V. Sánchez-Pérez, E. A. Sánchez Pérez. *Cálculos matemáticos en el contexto de la modelización de accidentes geográficos con el programa Mathematica*, II Jornadas de Didáctica de la Física en la U.P.V. Actas SPUPV. ISBN: 84-7721-902-8, 103–107 (2000).

[3] L. M. Garcia Raffi, J. V. Sánchez-Pérez, E. A. Sánchez Pérez. *Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los cursos de las carreras técnicas*, Enseñanza de las Ciencias, **17**(1), 119-129 (1999).

[4] Wolfram, S. T. *The Mathematica book*. Cambridge University Press. Wolfram Media. 1999.