

# Modelización no lineal de secciones aeronáuticas con EXCEL–SOLVER<sup>©</sup>

Mario Lázaro, José Luis Pérez Aparicio  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
malana@mes.upv.es, jopeap@mes.upv.es

---

## Abstract

*El programa MICROSOFT–EXCEL<sup>©</sup> tiene una gran popularidad en el mundo profesional de ingeniería–consultoría y los autores son conscientes de ello por propia experiencia. Ésta es la razón que nos ha llevado a implementar en dicha herramienta un modelo no lineal para predecir la capacidad resistente de fuselajes y alas. La metodología didáctica se enmarca dentro de la asignatura Diseño Estructural de Aviones de 4<sup>o</sup> de Ingeniería Aeronáutica (Universidad Politécnica de Valencia). Los alumnos han presentado un nivel alto de satisfacción por varias razones: se introducen métodos no lineales, adecuados para estructuras reales, son capaces de implementarlos con ayuda de una herramienta muy visual y fácil de manejar como es MICROSOFT–EXCEL<sup>©</sup>, sin código de programación y finalmente aprenden a resolver problemas de optimización con el complemento de cálculo numérico SOLVER<sup>©</sup>.*

*The program MICROSOFT–EXCEL<sup>©</sup> has a great popularity in the professional world of engineering–consulting. The authors are aware of that from own experience. This is the reason that has led us to implement a nonlienaar model to predict the ultimate strenght of fuselage and wings structures. The didactic methology has been developed for the subject Aircraft Structural Design in the 4th course of Aeronautical Engineering studies at the Polythecnic University of Valencia. The students show a high level of satisfaction since they learn nonlinear computational methods, valid for real structures; they are capable of the implementation with help of the very visual and handle tool MICROSOFT–EXCEL<sup>©</sup> (without programming code) and finally they solve nonlinear optimization problems with the numerical analysis complement SOLVER<sup>©</sup>.*

---

**Keywords:** Excel–Solver, estructuras aeronáuticas, hoja de cálculo, métodos de optimización, comportamiento no lineal, fuselajes, alas.

Excel–Solver, aerostructures, spreadsheet, optimization methods, nonlinear behavior, fuselages, wings

## 1 Introducción

En la actualidad, el diseño definitivo de una aeronave siempre acaba por ser modelizado con el método de los elementos finitos [11].

El alumno es consciente de las limitaciones de la hipótesis lineal para el análisis real de una estructura. Sin embargo, en muchas ocasiones se omiten los métodos no lineales por falta de espacio en los temarios o por falta de medios computacionales para abordarlos. Esto es lógico hasta cierto punto, pues si bien para el cálculo de movimientos sí es lógico asumir linealidad, para el cálculo de la resistencia se hace necesario el uso de modelos no lineales. Esto es debido a que el colapso de una estructura dúctil se produce en el rango de comportamiento no lineal. En el presente artículo se propone una metodología que se ha puesto en marcha en la asignatura de *Diseño Estructural de Aviones* de la titulación de Ingeniería Aeronáutica de la UPV. Dicha metodología permite estimar la capacidad resistente de estructuras aeronáuticas (alas y fuselajes) cuando se asume un comportamiento no lineal, usando para ello herramientas sencillas basadas en la hoja de cálculo MICROSOFT-EXCEL<sup>©</sup> y en particular en su complemento SOLVER<sup>©</sup> para análisis numérico de problemas de optimización no lineal. Se consigue así un triple objetivo: (1) Introducir métodos más avanzados de análisis que de otra forma serían abordados en estudios más avanzados (másteres y doctorado). (2) Estimular al alumno en el proceso enseñanza-aprendizaje de estructuras reales, pues los modelos no lineales son los grandes desconocidos por su complejidad. (3) Mejorar el manejo de MICROSOFT-EXCEL<sup>©</sup>, muy usado en el mundo profesional, en concreto en el ámbito de ingeniería-consultoría.

## 2 Cómo modelizar secciones aeronáuticas

Las secciones de fuselajes y alas tienen un denominador común: su configuración estructural se basa en un entramado de elementos longitudinales (larguerillos) y transversales (costillas) recubiertos por una lámina de delgado espesor (piel o recubrimiento). Estos elementos son generalmente de aluminio aunque se emplean aleaciones de diferentes resistencias para cada uno de ellos, con el objetivo de optimizar costes. En la Figura 1 se pueden observar dos ejemplos de fuselaje y ala con la configuración típica.

Las secciones aeronáuticas son los cortes transversales y perpendiculares al eje del fuselaje o del ala. En ellas se pueden distinguir claramente los larguerillos (formados por perfiles metálicos en forma de L, Z u  $\Omega$ ) dispuestos a lo largo de todo el perímetro y recubiertos por la piel, de muy delgado espesor (entre 0.5 y 1 mm). La hipótesis fundamental para el análisis de estas secciones es la siguiente: *el material en la sección se considera distribuido en un conjunto discreto de puntos, localizados en los larguerillos*. Suponiendo que la sección tiene  $N$  larguerillos, cada uno de estos puntos tiene asignado un área  $A_i$ , con  $1 \leq i \leq N$  que será el resultado de sumar el área propia del larguerillo más una parte del recubrimiento dispuesto en su entorno. La longitud de recubrimiento asignada se denomina *ancho eficaz* y se representa por  $b_e^{(i)}$ . Se usa la notación  $b_e^{(i)}$  porque el ancho eficaz es una magnitud que dependerá de la posición del larguerillo y de su tensión, pues su valor será diferente en función de si el larguerillo se encuentra tracción o a compresión. Su cálculo se detalla en la siguiente sección. Así, se puede escribir

$$A_i = \Omega_i + b_e^{(i)} t_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (1)$$

donde  $t_i$  es el espesor del recubrimiento en la longitud eficaz  $b_e^{(i)}$ . En la Figura 2 se muestra



Figura 1: Configuración estructural de alas y fuselajes: larguerillos, costillas y recubrimiento

un detalle del modelo de sección resultante así como de los esfuerzos actuantes con sus signos. Nótese que en el caso general, los ejes de referencia se encuentran en un punto  $O$  cualquiera y no están restringidos al centro de gravedad  $G$  de la sección.

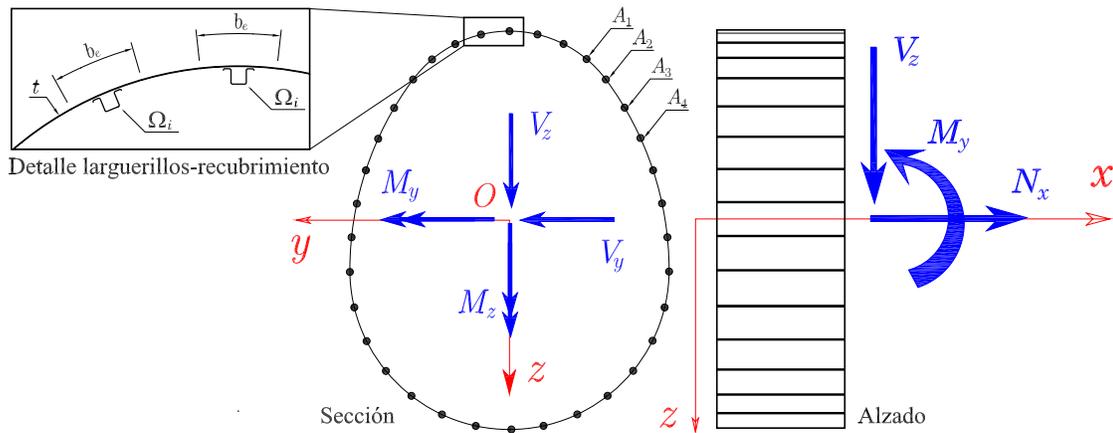


Figura 2: Configuración estructural de alas y fuselajes: larguerillos, costillas y recubrimiento

La configuración descrita es el punto de partida para el análisis de dichas secciones. El hecho de disponer de un conjunto de puntos discreto en lugar de un área distribuida permite transformar las integrales de área en sumatorios discretos de  $N$  sumandos. Ello permite abordar problemas de geometrías complejas con herramientas computacionales sencillas. La pregunta clave es ¿cuánto recubrimiento asignamos a cada larguerillo? Este es el punto de bifurcación entre las teorías lineales y las no lineales

### 3 Las estructuras reales no son lineales

El problema que se plantea es, dados unos esfuerzos actuantes en la sección, obtener las tensiones  $\sigma_i(z_i, y_i)$  y las deformaciones  $\epsilon_i(z_i, y_i)$  en cada larguerillo pues dicha información es importante a la hora de comprobar lo alejados que estamos del inicio de la rotura. Se asume la hipótesis de linealidad en el campo de deformaciones de la sección. Para los propósitos del presente artículo, se analiza el caso de deformación en el plano  $xOz$ . En este caso la ley de deformación no depende de  $y$  y tiene la expresión

$$\epsilon_x(z) = \epsilon_0 + \chi z \quad (2)$$

dependiente de 2 parámetros:  $\epsilon_0$  es la deformación en  $O$ ,  $\chi$  es la curvatura de eje  $y$ . La generalización al caso  $\epsilon(z, y)$  es inmediata aunque conlleva una dosis importante de notación y formulación que no aportan nada nuevo a los objetivos del artículo.

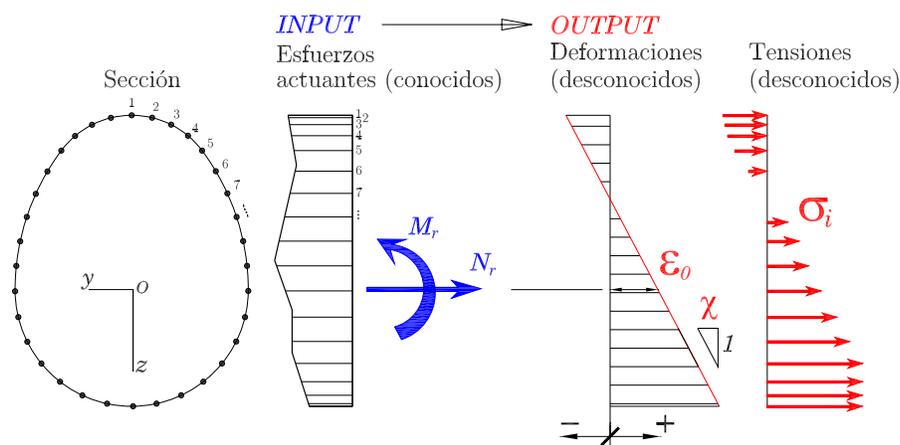


Figura 3: Configuración estructural de alas y fuselajes: larguerillos, costillas y recubrimiento

El esquema del problema se ha representado en la Figura 3, donde  $N_r, M_r$  son los esfuerzos axil y flector actuantes (conocidos) y  $\epsilon_0, \chi z$  son los parámetros de deformación (desconocidos). La relación matemática entre datos e incógnitas es proporcional cuando se asume linealidad en el problema (áreas de larguerillos  $A_i$  constantes y tensiones siempre proporcionales a deformaciones según la ley de Hooke  $\sigma_x = E \epsilon_x$ , donde  $E$  es el módulo de Young o módulo de elasticidad del aluminio en régimen lineal, ver Figura 4) de forma que, siguiendo los pasos habituales en teoría de vigas, véase [2], se obtiene

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ M_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES_y \\ ES_y & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (3)$$

donde las magnitudes

$$A = \sum_{i=1}^N A_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^N A_i z_i, \quad I_y = \sum_{i=1}^N A_i z_i^2 \quad (4)$$

son las características mecánicas de la sección: área, momento estático e inercia, respecto a los ejes  $y, z$  centrados en el punto  $O$  (el centro del sistema de referencia  $O$  no tiene por qué

coincidir con el centro de gravedad  $G$  de la sección, es decir  $O \neq G$  en el caso general). Dichas características se pueden calcular, asumiendo que los  $A_i$  de cada larguerillo son conocidos y constantes (independientes de la tensión en el larguerillo).

Sin embargo  $\epsilon_0, \chi_z$  no se podrán *despejar* explícitamente cuando se introducen los efectos no lineales, no deseables aunque necesarios para una estimación más precisa de la capacidad estructural. Dichos efectos son los siguientes:

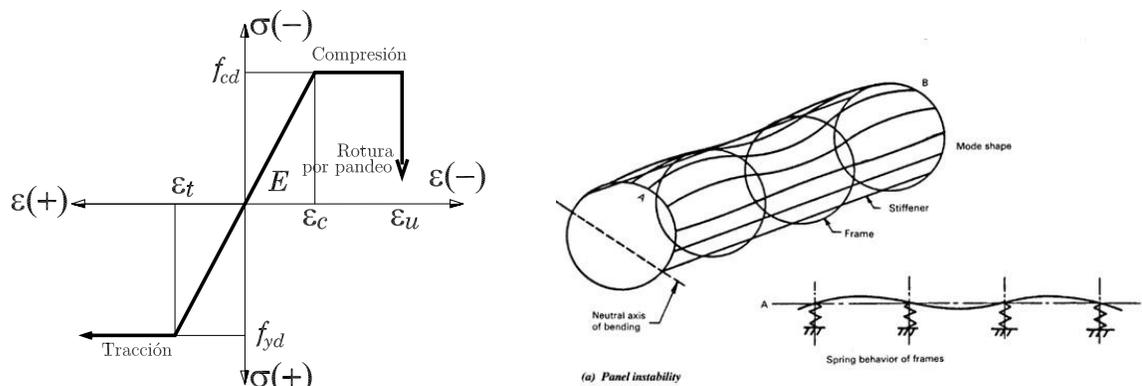


Figura 4: Ley de tensión–deformación de un larguerillo (izquierda) y efecto de pandeo de larguerillos entre costillas (derecha)

1. *No linealidad del aluminio a tracción.* La ductilidad del aluminio se tiene en cuenta considerando un diagrama bilineal a tracción. Las tensiones son proporcionales a las deformaciones hasta cierto límite elástico,  $f_{yd}$  asociado a la deformación  $\epsilon_t = f_{yd}/E$  a partir del cual se produce fluencia del material, ver Figura 4. En cuanto al criterio de rotura, se puede adoptar una deformación última a tracción o bien se puede dejar sin acotar. Se pueden adoptar otros modelos más sofisticados, véase [9], pero hilar más fino en este sentido no es el propósito de la metodología propuesta. En general la resistencia a tracción del conjunto larguerillo+recubrimiento se puede calcular con la media ponderada

$$f_{yd} = \frac{f_{yd,r} b_e^{(i)} t_i + f_{yd,t} \Omega_i}{b_e^{(i)} t_i + \Omega_i} \quad (5)$$

donde  $f_{yd,r}$  y  $f_{yd,t}$  son las resistencias de recubrimiento. El ancho eficaz  $b_e^{(i)}$  en este caso coincide con la separación de larguerillos pues en una zona de tracción todo el recubrimiento entre larguerillos está sometido a la misma tensión.

2. *No linealidad del aluminio a compresión.* Los elementos esbeltos de aluminio sometidos a compresión no siguen el mismo esquema tenso–deformacional que a tracción pues aparece el efecto no lineal–geométrico debido a la inestabilidad por excesiva esbeltez. Este efecto es doble: (i) Por un lado el larguerillo puede pandear como viga, de forma que el modo de pandeo depende de la separación entre costillas transversales, ver Figura 4(derecha). (ii) Por otro, la sección del larguerillo tiene paneles muy esbeltos que pueden sufrir inestabilidad independientemente de la longitud entre costillas. A este efecto se le conoce como abolladura o *cripling* y depende de la esbeltez de los elementos que forman la sección.

Estos efectos reducen notablemente la resistencia de un larguerillo a compresión respecto a aquella que tendría a tracción. La evaluación de la resistencia es muy compleja debido al acoplamiento de ambos fenómenos. El modelo más utilizado para estimar la resistencia a compresión  $f_{cd}$  para estructuras de aluminio es el de Johnson–Euler dado por

$$f_{cd} = \begin{cases} f_{cc} \left( 1 - \frac{f_{cc} \lambda_y^2}{4\pi^2 E} \right) & \text{si } \lambda_y \leq \pi \frac{2E}{f_{cc}} \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} & \text{si } \lambda_y > \pi \frac{2E}{f_{cc}} \end{cases} \quad (6)$$

donde  $\lambda_y = L_p/r$  es la esbeltez mecánica del larguerillo como la relación entre la longitud de pandeo  $L_p$  y el radio de giro  $r$ . La longitud de pandeo se toma en general igual a la separación entre costillas.  $f_{cc}$  es la resistencia de la sección a la abolladura que dependerá de la esbeltez de los paneles que forman la sección, su forma y del tipo de aleación utilizada. Para su obtención se pueden usar las curvas de resistencia que aparecen en el libro de Niu [6]. La resistencia a compresión  $f_{cd}$  se usa como valor máximo de las tensiones a compresión en la curva tensión–deformación (Figura 4-izq). A partir de la deformación  $\epsilon_c = f_{cd}/E$  se considera que el larguerillo no es capaz de aumentar más su tensión. La zona de fluencia a compresión se extiende hasta una deformación considerada de rotura,  $\epsilon_u$  cuyo valor se suele tomar alrededor de los 8 mm/m. La ley matemática de tensiones es una función a trozos (ver Figura 4-izq) con la expresión siguiente

$$\sigma_i = \begin{cases} -f_{cd} & -\epsilon_u \leq \epsilon_i \leq -\epsilon_c \\ E \epsilon_i & -\epsilon_c \leq \epsilon_i \leq +\epsilon_t \\ +f_{yd} & \epsilon_i \geq +\epsilon_t \end{cases} \quad (7)$$

3. *El ancho eficaz depende del nivel de tensiones.* Cuando un larguerillo se encuentra traccionado, también lo está la zona de recubrimiento que tiene en su entorno. No existirán efectos de inestabilidad y puede considerarse que trabaja toda la piel entre dos larguerillos consecutivos. Asumiendo que la separación entre larguerillos es constante e igual a  $s$ , entonces aquellos larguerillos traccionados tendrán un ancho eficaz igual a  $b_e^{(i)} = s$ . Sin embargo, los paneles tipo piel–larguerillo sometidos a compresión presentan un comportamiento diferente. Estudios teórico experimentales han demostrado que la distribución de tensiones se concentra alrededor de los larguerillos tal y como se muestra en la Fig. 5 relajándose en la zona central. Este efecto es tanto más acusado cuanto más es la tensión a compresión. En tal caso, si deseamos analizar la estructura asignando un ancho de recubrimiento a cada larguerillo deberemos de alguna forma aumentar dicho ancho eficaz para tensiones (de compresión) bajas y reducirlo para tensiones altas. Existen múltiples modelos para estimar este ancho eficaz (para una comparación de los mismos véase [8]). Una expresión usada frecuentemente para las aplicaciones en cálculo de aviones es la dada por  $b_e^{(i)} = 1.7t\sqrt{E/|\sigma_i|}$ , véase [4]. Poniendo las consideraciones anteriores en forma matemática, el ancho eficaz (función de la tensión del larguerillo  $\sigma_i$ ) se puede calcular según

$$b_e^{(i)}(\sigma_i) = \begin{cases} s & \text{si } \sigma_i \geq 0 \\ \min \left\{ s, 1.7t\sqrt{E/|\sigma_i|} \right\} & \text{si } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (8)$$

donde  $t$  es el espesor del recubrimiento y  $\sigma_i$  es la tensión en el larguerillo.

En este contexto no lineal nos planteamos cómo resolver el campo de deformaciones a través de la obtención de los parámetros  $\epsilon_0$  y  $\chi$  cuando nuestra sección está sometida a sendos es-

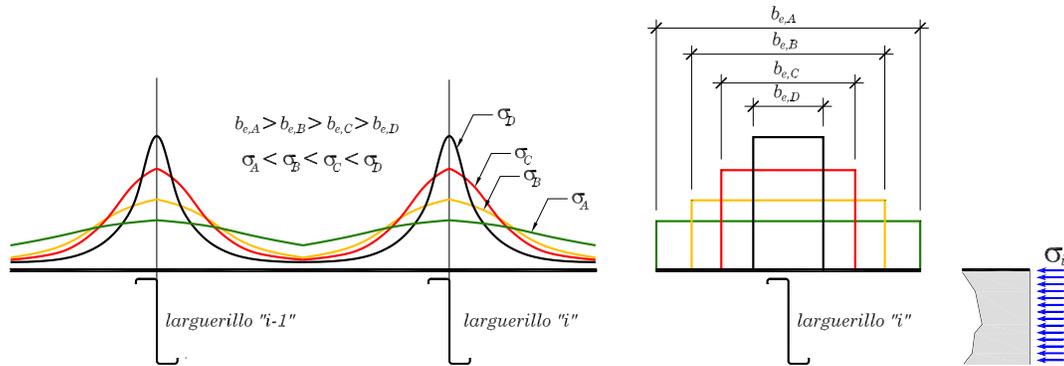


Figura 5: Interpretación física del ancho eficaz como la base del bloque de compresiones entorno a un larguerillo

fuerzos  $N_r, M_r$  conocidos. Como consecuencia del carácter discreto del análisis (recuérdese que buscamos la solución solo en los larguerillos), se propone una metodología basada en una programación en celdas como la que ofrece el programa MICROSOFT-EXCEL<sup>©</sup> junto con el complemento SOLVER<sup>©</sup>, válido para resolver problemas de búsqueda de ceros y optimización de funciones.

#### 4 Uso de la herramienta Excel-Solver<sup>©</sup>

En la presente sección se describe la implementación en EXCEL<sup>©</sup> del algoritmo para resolver el problema no lineal planteado. Tal y como se ha comentado, la gran ventaja de buscar una solución discreta en  $N$  puntos, permite organizar los cálculos en las filas y columnas de una hoja de cálculo. Esta metodología tal y como se muestra aquí ha sido implementada por los alumnos de la titulación Ingeniería Aeronáutica de la UPV para resolver secciones aeronáuticas. En la Figura 6 se muestra el ejemplo que usó en las clases prácticas. Se trata de un fuselaje simétrico y circular de 4 metros de diámetro sometido a una pareja de esfuerzos axil  $N_r = 7000$  kN, y flector  $M_r = 12500$  mkN.

La hoja de cálculo se organiza asignando una fila por cada larguerillo tal y como muestra la Figura 6. Debido a la simetría del fuselaje en el ejemplo, únicamente serán necesarias 11 filas. Bastará multiplicar por 2 las áreas de aquellos larguerillos fuera del eje de simetría. Las columnas contendrán las diferentes magnitudes necesarias y asociadas a los larguerillos: Las columnas C0 y C1 contienen el indicador de larguerillo y la coordenada  $z$  ( $z = 0$  en el centro del círculo). En la columna C2 se muestran las deformaciones de cada larguerillo. Para su cálculo, se asumen ciertos valores iniciales de los parámetros (en el ejemplo  $\epsilon_0 = 1$  mm/m,  $\chi = 1.5 \times 10^{-3}$  m<sup>-1</sup>) y se usa la Ec. (2) para obtener los valores. Las columnas C3, C4 y C5 se obtienen aplicando las Ecs. (7), (8) y (4), respectivamente. Finalmente los axiles y momentos de cada larguerillo se calculan en las columnas C6 y C7 como  $N_{x,i} = \sigma_i A_i$ ,  $M_{y,i} = \sigma_i A_i z_i$ , de forma que los esfuerzos totales asociados con los valores iniciales son

$$N_x(\epsilon_0, \chi) = \sum_{i=1}^N N_{x,i} , \quad M_y(\epsilon_0, \chi) = \sum_{i=1}^N M_{y,i} \tag{9}$$

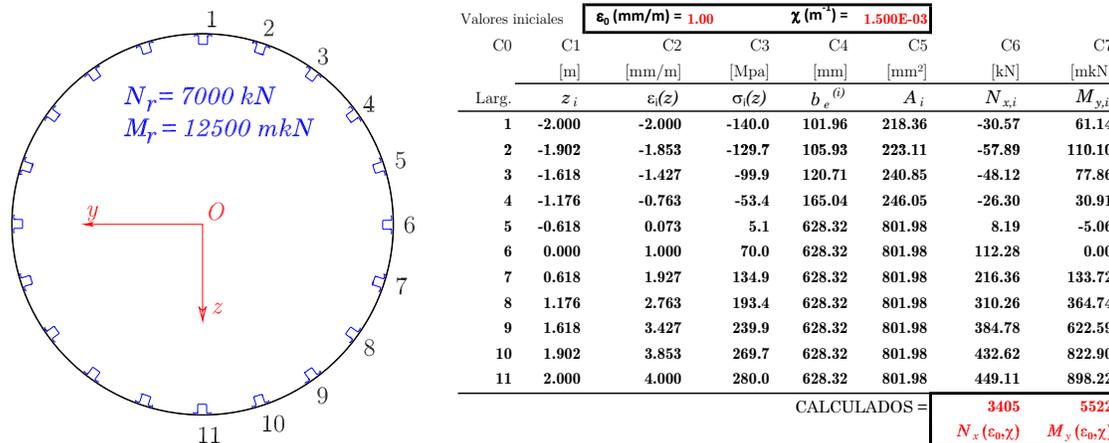


Figura 6: Croquis de un fuselaje ejemplo y organización de las diferentes columnas en la hoja de cálculo

es decir, la suma de los elementos de las columnas C6 y C7, respectivamente. Estos valores están claramente señalados en la Figura 6 como el resultado final obtenido. Llegados a este punto nos preguntamos si los esfuerzos calculados son iguales a los datos: ¿ $N_x(\epsilon_0, \chi) = N_r$ ? y ¿ $M_y(\epsilon_0, \chi) = M_r$ ? Obviamente no lo serán después de la primera estimación. Ahora necesitamos volver a retroalimentar el modelo facilitando dos nuevos valores  $\epsilon_0, \chi$  que reduzcan las distancias  $|N_x(\epsilon_0, \chi) - N_r|$ ,  $|M_y(\epsilon_0, \chi) - M_r|$ . A partir de aquí entran en juego los algoritmos que buscan la mejor opción para el *feedback* en un modelo no lineal. En EXCEL<sup>©</sup>, dichos algoritmos están implementados en la herramienta numérica SOLVER<sup>©</sup>, orientada para resolver problemas de optimización (lineales y no lineales). Pueden encontrarse numerosos enlaces web y tutoriales sobre este programa; nosotros citaremos aquí la página web [1]. A continuación se detallan los pasos a seguir para su utilización en nuestro problema particular.

1<sup>o</sup> **Función objetivo.** Creamos una función  $\Psi(\epsilon_0, \chi)$  definida en el dominio de los parámetros  $\epsilon_0, \chi$ , con valores reales, estrictamente positiva y que se haga cero cuando el problema esté resuelto, lo que es lo mismo que afirmar que tiene un mínimo en la solución. Asignamos el valor de dicha función a una celda determinada. A dicha función se le llama función objetivo. Aunque se pueden proponer muchas, las más utilizadas son las basadas en las normas clásicas definidas en  $\mathbb{R}^2$

$$\Psi(\epsilon_0, \chi) = \sqrt{\left(N_x(\epsilon_0, \chi) - N_r\right)^2 + \left(M_y(\epsilon_0, \chi) - M_r\right)^2}$$

$$\Psi(\epsilon_0, \chi) = \left|N_x(\epsilon_0, \chi) - N_r\right| + \left|M_y(\epsilon_0, \chi) - M_r\right| \quad (10)$$

2<sup>o</sup> **Herramienta Solver<sup>©</sup>.** Abrimos el programa SOLVER<sup>©</sup>: en la versión Microsoft Excel 2007<sup>©</sup> se pueden encontrar en la pestaña *Datos*. El cuadro de diálogo se muestra en la Figura 7 (izquierda-arriba). En *Celda objetivo*: introduciremos la celda donde se obtiene el resultado de la función objetivo. En *Cambiando las celdas* indicamos las celdas donde hemos introducido los valores iniciales de  $\epsilon_0$  y  $\chi$ . Aunque lo ideal es encontrar un valor exactamente nulo de la función objetivo, esto no es posible. Ello es debido, entre otras cosas, a que dicha función (en este caso de dos variables, aunque podrían ser más) suele presentar discontinuidades en las derivadas y *picos* acusados en las proximidades de la solución. Podemos conformarnos con buscar soluciones que dejen la función objetivo

a un determinado valor, no demasiado pequeño para evitar problemas de convergencia. Por ejemplo en la Figura 7 (izquierda) se ha elegido 0.001. Entrando en el apartado de

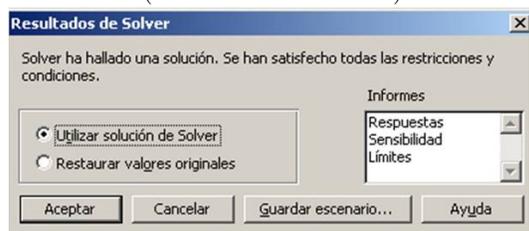
Panel de control SOLVER<sup>®</sup>



Panel de opciones



Resultados (solución satisfactoria)



Resultados (solución no encontrada)



Figura 7: Cuadros de diálogo del complemento SOLVER<sup>®</sup> y mensajes de información en los resultados del cálculo.

*Opciones* podemos variar algunas de los valores asignados por defecto y que controlan el proceso numérico, ver Figura 7 (derecha-arriba). Los valores por defecto suelen dar buenos resultados. Para más detalles sobre el significado de estas opciones se puede consultar los libros de optimización no lineal de Scales [10] o Boyd & Vandenberghe [3]

3º **Interpretación de resultados.** Al resolver el problema, la computadora realizará iteraciones de acuerdo a los algoritmos elegidos. Al final del proceso pueden aparecer bien un mensaje satisfactorio anunciando que se ha alcanzado una solución con los criterios impuestos, Figura 7 (izquierda-abajo), bien un mensaje anunciando que no se ha alcanzado una solución, Figura 7 (derecha-abajo). Este último caso suele ser debido la elección de un punto inicial demasiado alejado de la solución. Numerosas experiencias nos han mostrado que el proceso de optimización es muy sensible al valor inicial por lo que es importante conocer la física del problema y acotar las soluciones dentro de intervalos razonables. Otra posible causa de *fracaso* es el hecho de que efectivamente no exista solución porque la estructura rompe para los valores adoptados, de forma que no puede alcanzar el equilibrio.

## 5 Resultados obtenidos

En esta sección se muestran los resultados obtenidos para el ejemplo de la Figura 6. Por un lado se presentan los valores de las diferentes magnitudes en el proceso de convergencia (Figura 8) y por otro los resultados físicos, es decir las deformaciones, tensiones y fuerzas en cada larguero (Figura 9).

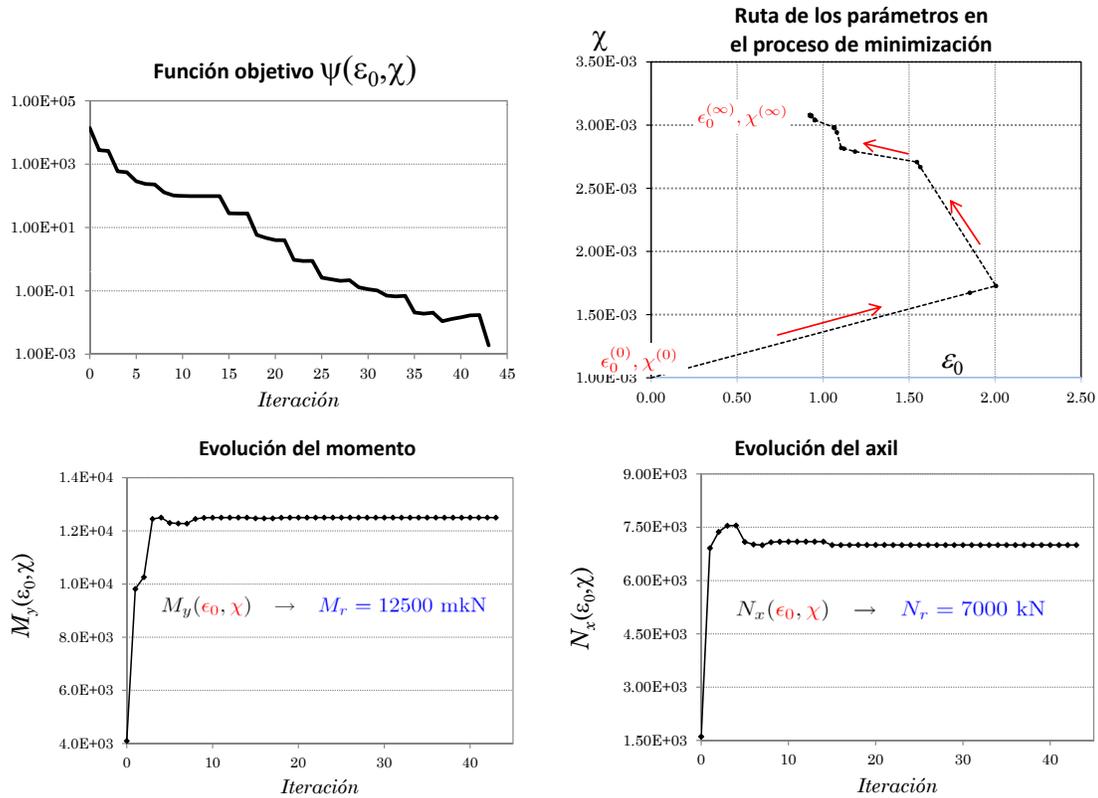


Figura 8: Resultados del proceso de optimización no lineal. Convergencia de la función objetivo (izq-arriba). Recorrido de las variables (der-arriba). Estabilización de los esfuerzos hacia los valores objetivo (abajo)

En la Figura 8 (izquierda-arriba) se ha representado el valor de la función objetivo frente a las iteraciones del proceso de minimización. Se puede comprobar que para alcanzar el error de 0.001 impuesto son necesarias aproximadamente 43 iteraciones. El descenso de la función objetivo se realiza de forma escalonada aunque de forma global la tendencia es lineal. En Figura 8 (derecha-arriba) se ha dibujado el camino que recorren los parámetros variables ( $\epsilon_0, \chi$ ) en su búsqueda del mínimo; en este problema se han usado los valores iniciales  $\epsilon_0^{(0)} = 0$  mm/m,  $\chi^{(0)} = 10^{-3}$  m<sup>-1</sup>. Es interesante la forma quebrada que adopta la sucesión de puntos, característica de problemas de minimización con el método de Newton o el método del gradiente conjugado, en los cuales se utiliza la información de las curvas de nivel de la función objetivo a través su gradiente. Las gráficas de la Figura 8 (abajo) muestran los esfuerzos obtenidos  $M_y(\epsilon_0, \chi)$ ,  $N_x(\epsilon_0, \chi)$  y su estabilización hacia los valores objetivo. Aunque la función objetivo emplea aproximadamente 45 iteraciones en alcanzar el error impuesto, los esfuerzos se estabilizan en apenas 10 iteraciones. Esto es indicativo de que se podrían *relajar* las condiciones impuestas a la función objetivo pues el grado de precisión en la solución se mejora en el tercer decimal cuando pasamos de 10 a 45 iteraciones, algo que quizá sea innecesario cuando estamos tratando con esfuerzos cuyos ordenes de magnitud son  $N_r = 7000$  kN ó  $M_r = 12500$  mkN en los que solo es necesario el primer decimal.

El proceso iterativo facilita las soluciones del problema  $\epsilon_0$  y  $\chi$ , para las cuales se pueden obtener los valores de deformaciones  $\epsilon_i$ , tensiones  $\sigma_i$  y fuerzas  $N_{x,i}$  en los larguerillos. Estas magnitudes, mostradas en la Fig. 9, nos ayudarán a evaluar el estado tensional y la capacidad que todavía

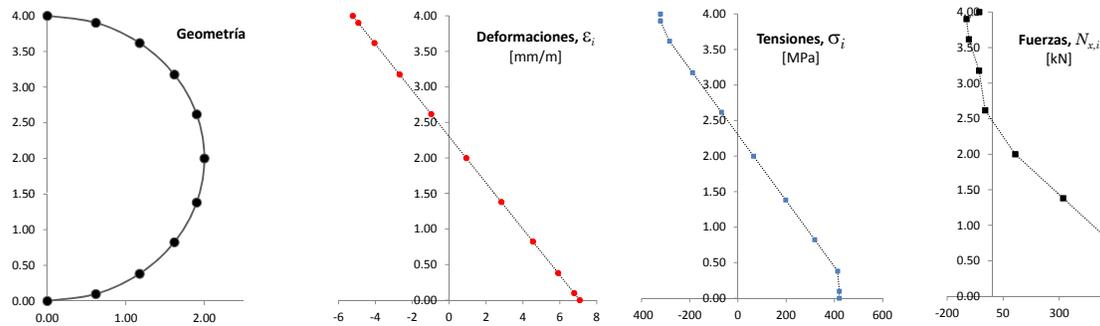


Figura 9: Resultados de deformaciones, tensiones y fuerzas en larguerillos para el ejemplo considerado

le queda al fuselaje. Así, por ejemplo se puede observar el efecto de la plastificación en los larguerillos superiores e inferiores del fuselaje. Por otro lado, las fuerzas son proporcionales a las tensiones en la zona a tracción pero no en la zona a compresión, donde el efecto del ancho eficaz variable produce que dichas fuerzas sean más pequeñas.

## 6 Conclusiones

En el presente artículo se presenta una metodología para el análisis estructural de fuselajes con la herramienta SOLVER<sup>®</sup> de MICROSOFT-EXCEL<sup>®</sup>. Esta metodología se ha puesto en práctica en el 4<sup>o</sup> curso de la titulación de Ingeniería Aeronáutica de la Universidad Politécnica de Valencia y se espera mejorar para su adaptación a los nuevos estudios de grado. El objetivo es que el alumno programe su propia hoja de cálculo y utilice la herramienta SOLVER<sup>®</sup> para la resolución de un problema en el que se introducen no linealidades. En los fundamentos teóricos se han descrito tanto las hipótesis adoptadas para el análisis de fuselajes y alas de aviones como las fuentes de no linealidad que deben tenerse en cuenta. Asimismo, se han desarrollado con detalle los pasos a seguir para elaborar los cálculos en una hoja de cálculo y para la resolución numérica del problema de optimización resultante. La organización en una estructura de celdas permite obtener los resultados numéricos de forma muy intuitiva así como una representación casi inmediata con ayuda las herramientas gráficas facilitadas por EXCEL<sup>®</sup>.

La experiencia de otros años ha sido muy satisfactoria pues el alumno tiene la oportunidad de crear una hoja de cálculo compleja basada en un modelo matemático y de usar la herramienta SOLVER<sup>®</sup>. La puesta en práctica permite adquirir conocimientos para la competencia en su vida profesional pues MICROSOFT-EXCEL<sup>®</sup> es ampliamente usado en el ámbito de la oficina técnica. Además, el hecho de resolver problemas mecánicos no lineales inabordable a mano les ha resultado gratificante, pues esto se presenta en escasas ocasiones durante el ciclo académico, donde la hipótesis de linealidad es *dominante* en los modelos matemáticos. En la actualidad se está estudiando la adaptación de esta herramienta para la obtención de otros resultados relacionados con las estructuras aeronáuticas como los llamados diagramas de interacción y los diagramas momento-curvatura.



# Referencias

- [1] Frontline Solvers. Developers of the Excel Solver. [www.solver.com](http://www.solver.com).
- [2] F. Beer, E. Russell Johnston, J. DeWolf, D. Mazurek. Mechanics of Materials. McGraw-Hill, (2008).
- [3] S. Boyd, L. Vandenberghe. Convex Optimization. Cambridge University Press, (2004).
- [4] E. F. Bruhn. Analysis and Design of Flight Vehicle Structures. Tri-State Offset Company, (1973).
- [5] T. H. G. Megson. Aircraft Structures for Engineering Students. Butterworth-Heinemann, (2007).
- [6] M. Chun-Yung Niu. Airframe Structural Design. Hong Kong Conmilit Press Ltd., (1995).
- [7] M. Chun-Yung Niu. Airframe Stress Analysis and Sizing. Hong Kong Conmilit Press Ltd., (1997).
- [8] W. Ramberg, A. E. McPherson, S. Levy. Experimental study of deformation and effective width in axially loaded sheet-stringer combinations. Technical report, NACA TN-684, (1939).
- [9] W. Ramberg, W. R. Osgood. Description of stress-strain curve by three parameters. Technical report, NACA TN-902, (1943).
- [10] L. E. Scales. Introduction to Non-Linear Optimization. Springer, (1987).
- [11] O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. The Finite Element Method. 2-Solids Mechanics. Butterworth Heinemann, (2000).