

Círculos de Mohr: un laboratorio virtual para la enseñanza y el aprendizaje de estados tensionales planos

Antonio José Jiménez Mocholí, Fernando Giménez-Palomares, Andrés Lapuebla-Ferri

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

ajimene@mes.upv.es, fgimenez@mat.upv.es, anlafer0@mes.upv.es

Abstract

La Elasticidad Lineal es una disciplina que estudia los sólidos elásticos que, bajo fuerzas externas, generan una respuesta mecánica en régimen elástico y lineal. En particular, es de especial interés el estudio de las tensiones y las deformaciones en un punto cualquiera del sólido, lo que se conoce como problema elástico. Por otro lado, el problema elástico de tensión plana –esto es, en dos dimensiones– es muy habitual en ingeniería. Previamente a su estudio, es necesario obtener en primer lugar el denominado estado tensional en el entorno diferencial de un punto del sólido elástico, para calcular posteriormente los distintos valores que pueden alcanzar las tensiones en ese punto para una dirección cualquiera.

Con este fin, en el presente trabajo se muestra un laboratorio virtual basado en el método gráfico denominado Círculo de Mohr –atribuido al ingeniero Otto Christian Mohr (1835-1918)–, que permite representar el estado tensional en un punto a partir de unas variables introducidas por el usuario. El laboratorio virtual MOHR, elaborado con el paquete MATLAB a través de su interfaz gráfica de usuario (GUI), permite una interactividad total, pudiendo obtener los valores de las tensiones para cualquier dirección. Esta aplicación constituye una excelente herramienta de enseñanza y aprendizaje del problema elástico en las titulaciones de grado en ingeniería.

Linear elasticity is a discipline that studies the elastic solid under external forces that generate a mechanical response in linear elastic regime. In particular, it is of special interest to study the stresses and strains at any point of the solid, which is known as the elastic problem. Moreover, the problem of plane stress state –that is, in two dimensions– it is very common in engineering. Prior to its study, it is necessary to first obtain the so-called stress state in the differential vicinity around a point of the elastic solid, then calculating the different values that can reach the tensions at that point in any direction.

This paper shows a virtual laboratory based on the graphical method called Mohr's Circle –attributed to engineer Otto Christian Mohr (1835-1918)– which allows to represent the stress state at a point from a user-defined set of variables. The virtual laboratory MOHR, implemented with the MATLAB package through its graphical user interface (GUI), allows full interactivity and can obtain the values of the stresses in any direction. This application is an excellent tool to support the teaching and learning process of mechanics-related subjects in engineering studies

Keywords: Círculo de Mohr, estados tensionales planos, componentes intrínsecas, tensión y deformación, direcciones principales, Fórmula de Cauchy.

Mohr's Circle, Plane Stress States, Intrinsic Components, Stresses and Strain Principal Directions, Cauchy's Formula

1 Introducción

La mecánica del sólido deformable, a diferencia de la mecánica del sólido rígido, estudia el comportamiento de cuerpos que se deforman al ser sometidos a cargas exteriores. Estas deformaciones quedan materializadas en forma de movimientos relativos entre los puntos del cuerpo y llevan asociadas la aparición de fuerzas internas y, en consecuencia, de tensiones. La determinación de estas deformaciones y tensiones en cada punto del sólido constituye el objeto de la Elasticidad. El estudio de las tensiones y las deformaciones en un punto es necesario en los recorridos curriculares relacionados con la Ingeniería Civil o la Ingeniería Mecánica

Con este fin, en el presente trabajo se muestra un laboratorio virtual basado en el método gráfico de los Círculos de Mohr que permite representar el estado tensional en un punto a partir de unas variables introducidas por el usuario. El laboratorio virtual Círculos de Mohr, programado mediante el programa matemático multifunción MATLAB como una interfaz gráfica de usuario (GUI), permite representar el estado tensional en un punto, dibujar y cuantificar las tensiones que intervienen e interpretar la influencia de las mismas en el resultado final. No son necesarios conocimientos informáticos de programación, aunque sí lo son los concernientes a la materia Elasticidad.

2 Estado tensional en un punto un sólido elástico

Si se considera un sólido elástico en equilibrio estático, sometido a una serie de fuerzas exteriores y se realiza un corte transversal en el cuerpo, en cada uno de los puntos de la sección de corte aparecerán una serie de fuerzas internas que son las que impiden que las dos partes del sólido elástico se separen.

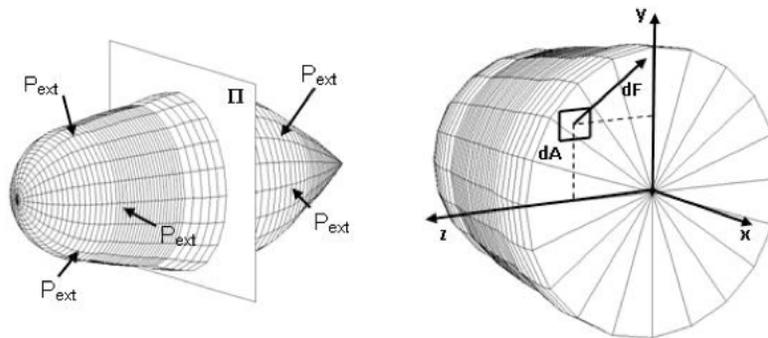


Figura 1: Concepto de tensión en un punto.

Dado un elemento de sección dA sometido a una fuerza dF , se define el vector tensión \mathbf{T}_n en un punto P de una superficie cuya normal es n como (Figura 1):

$$\mathbf{T}_n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dF}{dA}.$$

El vector tensión \mathbf{T}_n proporciona información acerca de la distribución de las fuerzas internas en cada punto de la sección de corte, y especialmente su intensidad y direccionalidad. El vector tensión depende del punto P del sólido elástico y del plano de corte π , caracterizado por su vector normal n . Sin embargo, el vector tensión no proporciona directamente una información

útil a los efectos del diseño en ingeniería, pues los materiales responden de manera distinta a las fuerzas que tienden a separar las superficies, que a las fuerzas que tienden a que las superficies deslicen entre sí. Se hace necesario representar la tensión en un punto de un sólido elástico mediante sus dos proyecciones fundamentales: la tensión normal σ_n a la superficie y la tensión tangencial τ_n .

2.1 Componentes intrínsecas del vector tensión

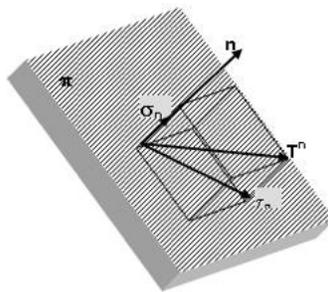


Figura 2: Componentes intrínsecas, normal y tangencial del vector tensión.

Para descomponer el vector \mathbf{T}_n en dos componentes, un vector en la dirección normal al plano, σ_n y otro, τ_n , en la dirección perpendicular a la anterior contenida en el plano π basta con proyectar utilizando las propiedades del producto escalar de dos vectores, de la forma:

$$\sigma_n = \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = \sqrt{\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{T}_n - \sigma_n^2}.$$

Las dos componentes σ_n y τ_n del vector \mathbf{T}_n tienen un valor independiente de sistema de referencia y se denominan componentes intrínsecas del vector tensión. Puesto que los materiales tienen un comportamiento distinto frente a tensiones normales σ_n que frente a cortadura τ_n , son estas componentes intrínsecas del vector tensión las que proporcionan una información realmente útil en el diseño de elementos resistentes en ingeniería.

2.2 Matriz de tensiones de Cauchy

En la mayoría de las aplicaciones, la definición del estado tensional en un punto a través de un vector es poco útil, ya que existen infinitos planos de corte que pasan por un punto, y en consecuencia infinitos estados de tensión posibles alrededor del punto. Sería deseable buscar una forma de caracterizar el estado de tensiones con independencia del plano de corte, utilizando unos ejes coordenados de referencia, para luego poder obtener, las tensiones en un plano de corte particular (como por ejemplo el plano de una unión pegada inclinada, un plano de soldadura, etc.).

Para ello, cada punto P del sólido se caracteriza por un volumen diferencial formado por un cubo de aristas diferenciales, pudiendo interpretarse cada una de las caras de dicho cubo como un plano de corte en el entorno del punto, en cuyas caras aparecen las correspondientes proyecciones normal y tangencial de los respectivos vectores tensión. De este modo, en cada punto P , una vez escogidos unos ejes coordenados, se pueden agrupar las distintas componentes en forma de una matriz $[\sigma]$ que define el estado de tensiones del punto P y que incluye todas las componentes de los tres vectores tensión anteriores.

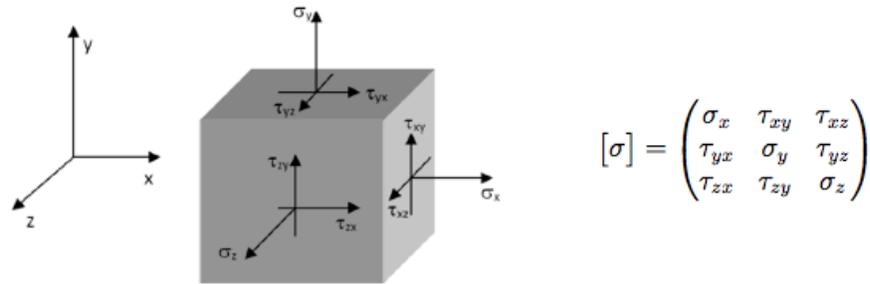


Figura 3: Estado tensional en el entorno de un punto.

A la matriz $[\sigma]$ se le denomina matriz de tensiones de Cauchy o tensor de tensiones. El conjunto de tensiones que aparecen en las distintas caras del elemento diferencial de la Figura 3 se denomina estado tensional en el punto P . El estado tensional de un punto P respecto a unos ejes coordenados queda definido por las nueve componentes que componen la matriz de tensiones, frente a las dos componentes intrínsecas que definían el vector tensión asociado a un plano.

2.3 Estados tensionales planos

En ingeniería es elevado el número de problemas que se pueden simplificar notablemente por razones del tipo de carga y de la geometría del sólido, estudiando el problema sólo en dos dimensiones. Entre ellos están los llamados casos de tensión plana. En estas condiciones la matriz de tensiones del punto P queda definida por tan solo cuatro componentes.

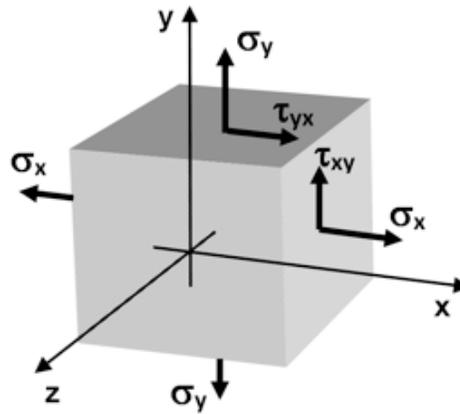


Figura 4: Estado tensional plano.

Fórmula de Cauchy

Conocida la matriz de tensiones de Cauchy $[\sigma]$ respecto un sistema de referencia dado, a través de la Fórmula de Cauchy es posible obtener las componentes de la tensión en cualquier otro plano que no coincida con los ejes utilizados coordenados para formar la matriz, pudiendo obtenerse así información del conjunto infinito de tensiones que pueden aparecer en ese punto del sólido elástico.

Si se considera un elemento triangular de lados dx , dy , ds en el entorno de un punto P de un sólido elástico y se estudia el equilibrio del mismo puede obtenerse el vector tensión \mathbf{T}_n sobre la superficie ds , cuya normal es $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta)$:

$$\mathbf{T}_n = [\sigma]^T \cdot \mathbf{n} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}.$$

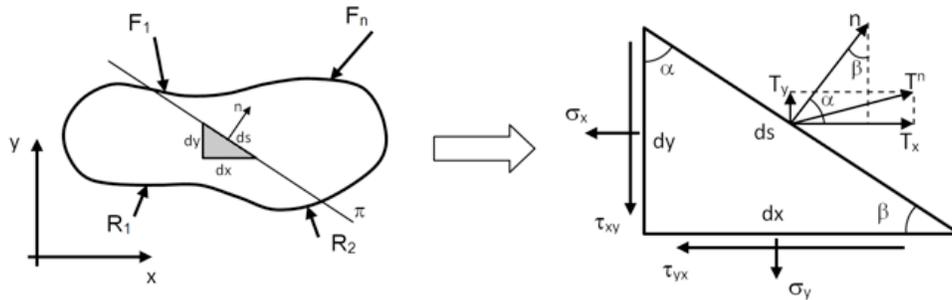


Figura 5: Tensiones en un elemento bidimensional con un plano inclinado.

Tensiones y direcciones principales

Dado que la matriz de tensiones en un punto es siempre simétrica y real, es posible su diagonalización. Las raíces de la ecuación característica $\sigma_1 \geq \sigma_2$ son también números reales e independientes del sistema de referencia empleado. A los valores propios de la matriz $[\sigma]$ se les denomina tensiones principales y a sus correspondientes autovectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 direcciones principales.

Los valores propios acotan los valores de las componentes intrínsecas normales de los infinitos vectores tensión en un punto. Físicamente, las direcciones principales representan los planos de corte en los cuales no existen tensiones tangenciales, lo cual es interesante conocer dado que los materiales no presentan el mismo comportamiento a tracción o compresión que a deslizamiento o cortadura.

Para buscar los valores principales, se plantea la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir} \quad (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0,$$

de donde resultan las dos raíces de la ecuación característica:

$$\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{1}$$

A partir de los valores propios se pueden obtener finalmente las direcciones principales, dadas por las dos autovectores correspondientes.

Círculo de Mohr

Cuando se trabaja con problemas de tensión plana o deformación plana es importante poder obtener los distintos valores que pueden alcanzar las tensiones para distintos planos de trabajo (Figura 6).

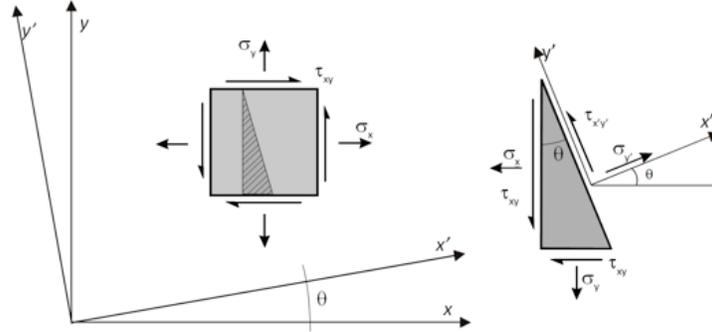


Figura 6: Transformación de tensiones.

Conocida la matriz de tensiones en el punto P , se pueden obtener las tensiones para cualquier otra orientación $n = x'$ definida por el ángulo θ respecto al eje x (Figura 6).

El vector de tensión asociado al plano inclinado será:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_x^n \\ \mathbf{T}_y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \\ \sigma_y \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \end{pmatrix}$$

y sus componentes intrínsecas (σ_n, τ_n) :

$$\begin{aligned} \sigma_n = \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta), \\ \tau_n = \tau_{x'y'} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta), \end{aligned} \quad (2)$$

Estas expresiones son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia, con el ángulo 2θ como parámetro, en las que la ordenada τ_n de un punto del círculo representa la tensión tangencial y la abcisa σ_n la tensión normal, para una dirección dada por el ángulo 2θ .

El ingeniero alemán Otto Christian Mohr desarrolló un método que permite obtener gráficamente los valores de las componentes intrínsecas σ_n y τ_n del vector tensión \mathbf{T}_n . Esta representación gráfica permite obtener los valores de σ_n y τ_n correspondientes a todas las posibles orientaciones de los planos que pasan por un punto P .

Partiendo de la expresión (2) y operando convenientemente se llega a eliminar el parámetro 2θ :

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (3)$$

En un problema dado σ_x , σ_y y τ_{xy} son los valores conocidos y σ_n y τ_n son las componentes que desean obtenerse para una dirección \mathbf{n} dada.

Si se escribe la expresión (3) como:

$$(\sigma_n - C)^2 + \tau_n^2 = R^2, \quad \text{donde } C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

resulta la ecuación de una circunferencia de coordenadas σ_n y τ_n , de centro $(C, 0)$ y radio R , denominada *Circunferencia* o *Círculo de Mohr*. El resultado obtenido nos indica que el infinito conjunto de valores (σ_n, τ_n) que corresponden a los infinitos planos que pasan por un punto P se sitúan sobre un círculo de radio R y centro $(C, 0)$.

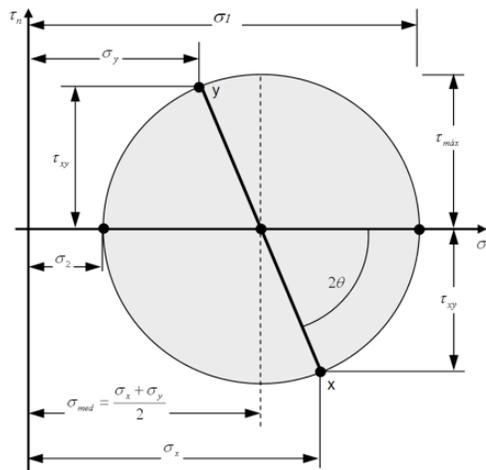


Figura 7: Círculo de Mohr.

3 Descripción del laboratorio virtual

El laboratorio virtual Círculo de Mohr que se presenta está desarrollado como una GUI de MATLAB, siendo fácilmente implementable como una aplicación web interactiva que no requiere ni la disposición del paquete MATLAB ni de conocimientos específicos de programación con su código propio.

El laboratorio virtual muestra información gráfica y numérica referida al estado tensional inicial, el estado de las tensiones principales, el estado tensional cuando se ha producido un giro y el círculo de Mohr. El aspecto visual del programa puede verse en la Figura 8.

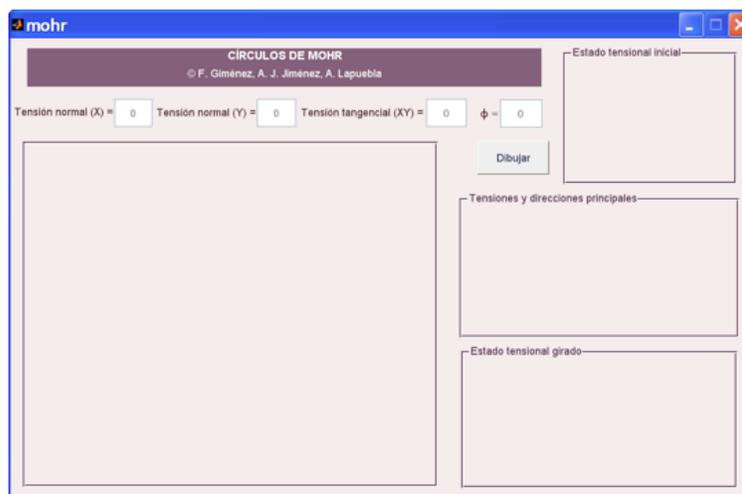


Figura 8: Laboratorio virtual Círculos de Mohr.

Los parámetros de entrada son los siguientes:

- Tensiones normales en las direcciones de los ejes x e y (σ_x y σ_y , respectivamente).
- Tensión tangencial τ_{xy} .
- Ángulo ϕ que define una superficie cuya normal no coincida con los ejes coordenados.

Como salida, la aplicación muestra:

- Una representación esquemática del estado tensional inicial, de las tensiones y direcciones principales.
- Un esquema del estado tensional en un punto de la superficie inclinada que forma el ángulo ϕ .
- Círculo de Mohr del punto, en que se presentan:
 - Valores numéricos del centro y radio del círculo de Mohr.
 - Tensiones principales σ_1 y σ_2 .
 - Ángulo β que sitúa el plano de tensión tangencial máxima.
 - Tensión equivalente de Von Mises $\sigma_{eq,VM}$.
 - Valores de las tensiones $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ sobre la superficie correspondiente al ángulo ϕ .

4 Ejemplos

Ejemplo 1: Barra sometida a esfuerzo axial con unión pegada inclinada

Se desea unir dos piezas mediante un empalme oblicuo solapado de ángulo α y unido con pegamento, como indica la figura inferior. La sección recta de la pieza es de $10 \times 20 \text{ mm}^2$. El fabricante garantiza que la tensión tangencial máxima que soporta el pegamento es $\tau_{\max} = 10 \text{ MPa}$.

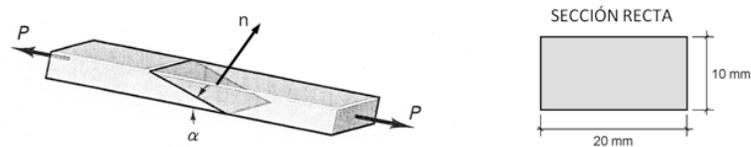


Figura 9: Barra con unión pegada inclinada.

PREGUNTA

a) ¿Para un valor $P = 600 \text{ kp}$ y un ángulo de unión α a 20° se producirá el fallo en la unión proyectada o resistirá?

En ingeniería, en el cálculo resistente de una barra sometida a esfuerzo axial se sabe que la tensión en cualquier punto de la barra se reduce a únicamente a σ_x . Además, se llega a demostrar que este estado tensional es igual para todos los puntos de una sección perpendicular a la barra. De este modo la matriz de tensiones de cualquier punto toma la forma:

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ kp/cm}^2.$$

Con los valores de σ_x , σ_y y τ_{xy} de la matriz, se puede dibujar un círculo de Mohr con centro en las coordenadas $(C, 0) = (150, 0)$ y radio $R = 150$, cuyo aspecto, en el laboratorio virtual Círculos de Mohr, es el siguiente:

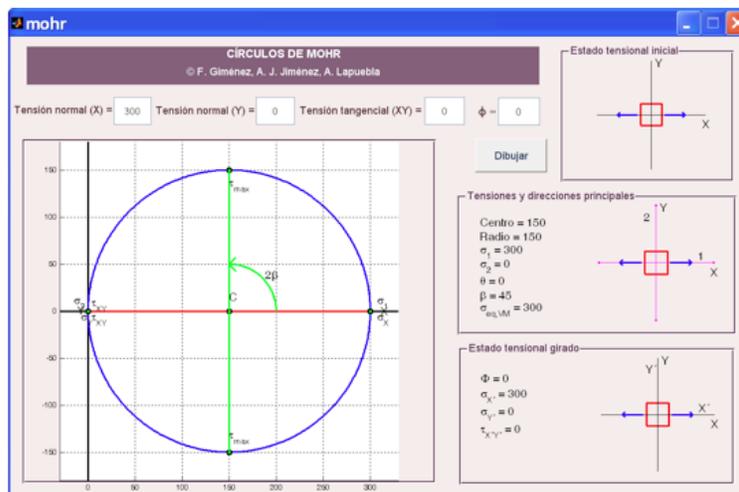


Figura 10: Círculo de Mohr y estado tensional.

Para obtener el valor de la tensión tangencial que actúa sobre la unión inclinada hay que tener en cuenta, en primer lugar, el ángulo que forma el vector perpendicular a la misma con el eje x , dado que analíticamente un plano queda definido por su vector unitario perpendicular. En este caso concreto, el vector \mathbf{n}_1 correspondiente a la superficie inclinada forma $\theta = 70^\circ$ con el eje longitudinal de la pieza, como puede deducirse fácilmente observando la figura adjunta.

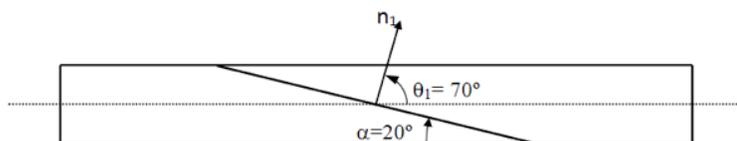


Figura 11: Ángulos en la unión pegada inclinada $\alpha = 20^\circ$.

Por tanto, bastará con acudir al círculo de Mohr anterior y localizar las componentes intrínsecas $(\sigma_{\mathbf{n}_1}, \tau_{\mathbf{n}_1})$ del punto correspondiente a la dirección dada por la dirección del vector \mathbf{n}_1 , que se encuentra girando $2\theta_1 = 140^\circ$ en sentido antihorario desde el eje x .

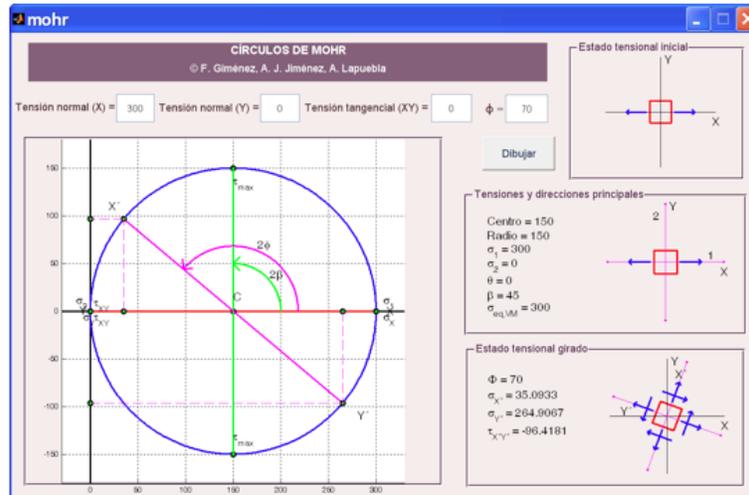


Figura 12: Círculo de Mohr y estado tensional para $\theta_1 = 70^\circ$.

Si se observa el círculo de Mohr puede deducirse la relación:

$$|\tau_{n_1}| = |R \text{ sen}(140)| = 96.418 \text{ kp/cm}^2.$$

RESPUESTA

Este valor corresponde a la tensión tangencial que se presenta sobre la superficie inclinada pegada. Al ser este valor inferior al valor de la tensión tangencial máxima que puede soportar el pegamento, $\tau_{\text{max}} = 10 \text{ MPa} = 100 \text{ kp/cm}^2$, **la unión proyectada no fallará.**

PREGUNTA

b) ¿Qué valor de tensión tangencial se tendría en la unión pegada si el ángulo α fuese igual a 70° ?

Se considera que el ángulo físico que forma la unión pegada es $\alpha = 70^\circ$,

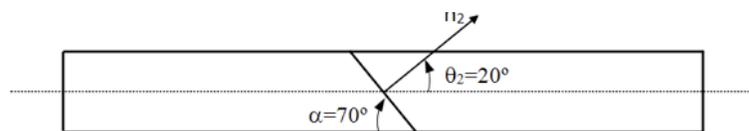


Figura 13: Ángulos en la unión pegada inclinada para $\alpha = 70^\circ$.

En esta ocasión, el vector n_2 correspondiente a la superficie inclinada forma 20° con el eje x longitudinal de la pieza y la tensión tangencial en la unión puede ser obtenida de nuevo a partir del círculo de Mohr:

$$|\tau_{n_2}| = |R \text{ sen}(40)| = 96.418 \text{ kp/cm}^2.$$

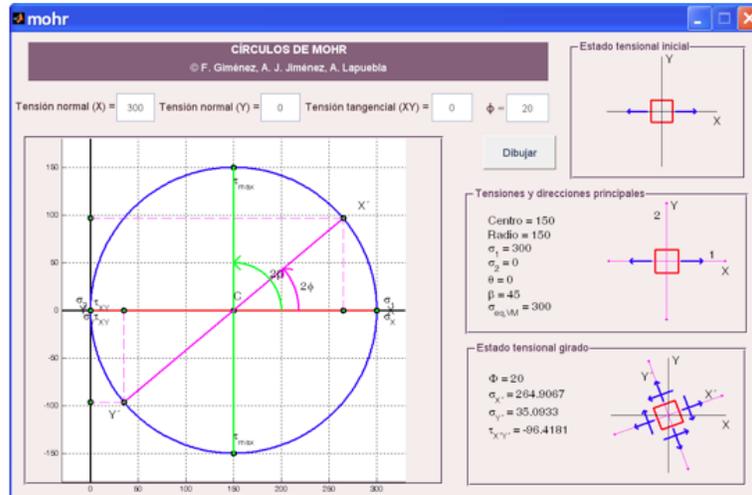


Figura 14: Círculo de Mohr y estado tensional para $\theta_2 = 20^\circ$.

RESPUESTA

Este valor que, corresponde a la tensión tangencial que se presenta sobre la nueva superficie inclinada pegada, es exactamente igual al obtenido en el caso anterior, por lo que **la nueva unión proyectada es igual de resistente que la anterior.**

PREGUNTA

c) Si el pegamento fuese capaz de resistir como una tensión normal máxima $\sigma_{\max} = 15MPa$ ¿cuál de los dos valores de α sería preferible, 20° ó 70° ? ¿Y si el límite de la tensión normal fuese $\sigma_{\max} = 30MPa$?

La resolución de este apartado resulta sencilla si se utilizan conjuntamente los círculos de Mohr de los dos apartados anteriores.

Los valores de σ_{n1} y σ_{n2} pueden ser obtenidos fácilmente de forma gráfica:

$$\begin{cases} \sigma_{n1} = |C| - |R \cos(140)| = 3.64 MPa \leq \sigma_{\max} = 15 MPa \\ \sigma_{n2} = |C| + |R \cos(140)| = 27.47 MPa \geq \sigma_{\max} = 15 MPa \end{cases}$$

Como se observa en el círculo de Mohr, si el ángulo físico de la unión fuese 70° el pegamento no sería capaz de resistir la tensión normal máxima en la misma. Sin embargo, sí sería capaz de resistirla la unión pegada a 20° .

Si el valor de la tensión normal máxima que el pegamento de la unión fuese capaz de resistir valiese $\sigma_{\max} = 30MPa$, ambas soluciones serían viables, aunque evidentemente seguiría siendo preferible la unión pegada a 20° .

Ejemplo 2: Máquina centrífuga

Una máquina centrífuga con un peso total $P = 4000kp$ se encuentra apoyada sobre cuatro tacos de neopreno sobre los que se reparten todas las acciones transmitidas a partes iguales. Los tacos de neopreno son cuadrados, siendo $b = 36cm$ la longitud del lado. La masa que se centrifuga produce una fuerza centrífuga $F = 12.337kp$.

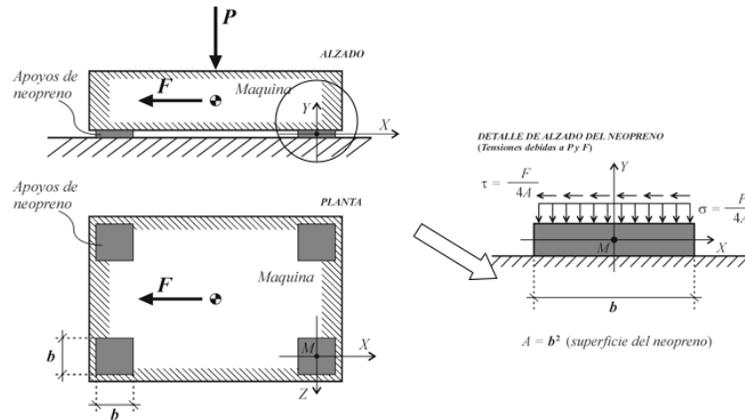


Figura 15: Detalle de acciones transmitidas por la máquina a los apoyos.

PREGUNTA

Si se quiere limitar el valor máximo de las tensiones normales en los tacos de neopreno a $100kp/cm^2$ ¿será suficiente una dimensión $b = 6cm$ de los lados de las bases de neopreno para evitar que alguna tensión principal supere en valor absoluto dicho valor?

En la Figura 16 se muestra el estado tensional en un punto M de uno de los tacos de neopreno:

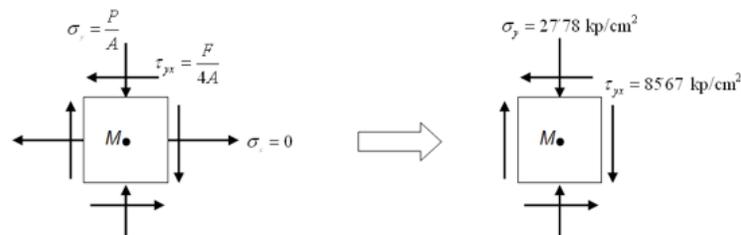


Figura 16: Estado tensional en un punto M .

Así, a partir de la determinación del estado tensional en el punto M , se dibujan el círculo de Mohr en el laboratorio virtual:

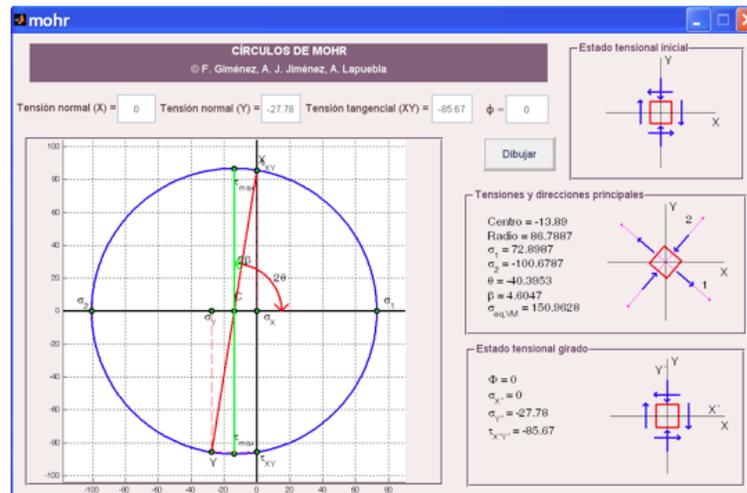


Figura 17: Círculo de Mohr y tensiones principales.

a partir del cual se obtienen las dos tensiones principales σ_1 y σ_2 :

$$\sigma_1 = 72.899 \text{ kp/cm}^2, \quad \sigma_2 = -100.678 \text{ kp/cm}^2.$$

RESPUESTA

El módulo de la tensión principal σ_2 , que es negativa, es mayor que el de la tensión principal σ_1 , y supera la condición límite, por lo que se necesita aumentar ligeramente la dimensión b de los lados de las bases de los tacos de neopreno.

5 Conclusiones

De todo lo expuesto, se desprende que el laboratorio virtual Círculos de Mohr contribuye a la asimilación de conocimientos de distintas materias, siendo útil desde el punto de vista docente en asignaturas relacionadas con cálculo y dimensionamiento de elementos estructurales. De este modo, se cubre un gran abanico de materias relacionadas con las disciplinas de Elasticidad, Resistencia de Materiales, Cálculo de Estructuras o Mecánica de Suelos. La aplicación queda asimismo disponible para la libre utilización del alumno, sin necesidad de recurrir a paquetes de software comercial, de elevado coste, que lleven integrados esta aplicación entre sus prestaciones. Como ventajas adicionales, cabe citar su fácil manejo –al no requerir el usuario conocimientos especializados de MATLAB –y emplear la misma notación y metodología que en el aula.

Como futura línea de ampliación del laboratorio virtual se encuentra su ampliación a estados tridimensionales de tensiones y deformaciones. De hecho, su principal desventaja radica en su limitación a la elasticidad plana.

Referencias

- [1] S. Timosehko, J.M. Gere. Resistencia de Materiales. 5^a edición. Ed. Thomson. (2002).
- [2] E.P. Popov. Mecánica De Sólidos. 2^a Edición. Ed. Pearson Educación. (2000).
- [3] A.J. Jiménez Mocholí, A. Lapuebla Ferri, M. Romero García, M., S. Ivorra Chorro. Elasticidad Y Resistencia De Materiales. Apuntes De Clase Para Las Titulaciones De Grado En Ingeniería. Spupv 947.
- [4] A.J. Jiménez Mocholí, S. Ivorra Chorro. Elasticidad y Resistencia de Materiales. Ejercicios Resueltos. Ed. UPV 2009-4028.
- [5] C. Depcik, D.N. Assanis. Graphical User Interfaces In An Engineering Educational Environment, Comput. Appl. Eng. Educ. Vol. 13.