MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volumen 6(2), No. 3, 2013.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Modelización de esculturas en la enseñanza de las matemáticas

M. C. Gómez-Collado, J. Puchalt, J. Sarrió, M. Trujillo
Universitat Politècnica de València
mcgomez@mat.upv.es, jaupucla@arq.upv.es, sarriopuig@gmail.com, matrugui@mat.upv.es

Abstract

A lo largo de la historia las matemáticas han estado presentes en disciplinas como la ingeniería, las ciencias sociales, la arquitectura y también la pintura y escultura. En este trabajo estudiamos la modelización matemática de alguna escultura del artista Jaume Espí y planteamos la extracción de este material para ser usado en la enseñanza de las matemáticas. Además, con la ayuda de programas de diseño gráfico como 3DStudioMax abrimos la perspectiva de extrapolar esas obras escultóricas al ámbito de la arquitectura.

Throughout history the mathematics have been present in disciplines such as engineering, social sciences, architecture and also painting and sculpture. In this work we study the mathematical modelling of some sculptures of the artist Jaume Espíand we propose the removal of this material to be used in the teaching of mathematics. In addition, with the help of graphic design programs such as 3DStudioMax we open the perspective of extrapolating these sculptural works to the field of architecture.

Keywords: Modelización matemática, escultura, Jaume Espí, Mathematica.
Mathematical Modelling, sculpture, Jaume Espí, Mathematica

1 Introducción

En este trabajo presentamos la descripción matemática de dos esculturas del artista Jaume Espí. Los modelos obtenidos son fruto del estudio matemático de alguna de sus obras y del trabajo conjunto que estamos llevando a cabo los firmantes con el citado escultor. Trabajo éste, encaminado a poner las matemáticas y el sofware matemático del que se dispone en la actualidad, al servicio de la creación del artista y poder ofrecer un volcán de ideas en torno a los medios de producción en escultura así como posibilitar la creación de nuevas obras regidas por conceptos matemáticos. No obstante, como docentes y/o miembros de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia nuestro interés en esta comunicación no es mostrar nuestro trabajo sino extraer y presentar material que pueda utilizarse en la enseñanza de las Matemáticas en el Grado en Arquitectura o en otros muchos grados en ingeniería. Las obras escultóricas que hemos seleccionado para describir matemáticamente pueden ser extrapolables a volúmenes arquitectónicos que nos ayudarán a poner de manifiesto la relación entre Matemáticas, Escultura y Arquitectura; además los conceptos matemáticos involucrados en su descripción se encuentran recogidos en los programas de las asignaturas de la materia matemáticas de los grados impartidos en la Universitat Politècnica de València (UPV) lo que aumenta el campo de aplicación de dicho material.

El sofware matemático que vamos a usar es el programa Mathematica 8.0 (Wolfram Research, Champaign, Illinois, EEUU) por sus posibilidades gráficas, potencia en los cálculos y el amplio abanico de opciones para exportar figuras a archivos con diferente extensión. Además en la actualidad la UPV cuenta con una licencia de uso y es el programa que estamos usando para desarrollar las prácticas informáticas asociadas a las asignaturas de matemáticas en el Grado de Arquitectura y en muchos grados de ingeniería de la UPV. Entre las extensiones de archivos que pueden exportarse se encuentran las de los programas más usados en la actualidaad relacionados con el diseño gráfico como 3DStudioMax, Autocad (Autodesk Inc., San Rafael, CA, EEUU) y Photoshop (Adobe Systems Inc., San Jose, CA, EEUU).

2 Modelización matemática de la obra Alexandria

Las matemáticas en la mayoría de grados en ingeniería se encuadran dentro de los módulos considerados básicos y su docencia se encuentra fundamentalmente en primer curso. Hemos elegido presentar la descripción matemática de la obra "Alexandria", ver Figura 1, dado el nivel básico de las matemáticas que se utilizan para su desarrollo.

Figura 1: Alexandria. Medidas:b 110x110x h 660 mm. Piedra calcárea de la Mola.

"Alexandria" es la escultura emblema de la serie "Fars" del escultor Jaume Espí cuyo taller se encuentra en la localidad de Carlet (Valencia). Está construida en piedra calcárea de la Mola y sus dimensiones son 110 mm $\times$ 110 mm de base y 660 mm de alto (Figura 1). En la misma serie, se encuentra la escultura "Far 2" (Figura 2) construida en bronce pavonado de dimensiones más reducidas y realizada por encargo de la UPV al escultor J. Espí para una entrega de trofeos. Desde un punto de vista matemático ambas esculturas representan la misma forma.

Figura 2: Far 2. Medidas: 50 x 370 mm Bronce pavonado.

La idea

La idea que subyace en la obra "Alexandria", al igual que en otras muchas del mismo autor es la de torsión o giro. En la Figura 3 está representada la primera versión de la obra en una tiza con forma de octaoedro que es la forma habitual en la que hace sus ensayos el citado escultor.

Figura 3: Tiza tallada.

Tras conocer el proceso que sigue el autor en la construcción de la obra en tiza, la torsión que se aprecia en "Alexandria" está representada en la Figura 4.

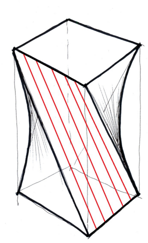

Figura 4: Idea de de la construcción de la tiza.

El proceso es el siguiente: se consideran dos cuadrados en el espacio, de igual tamaño, separados una distancia b (altura de la torre) y con la particularidad de que el cuadrado superior es el resultado de efectuar un giro de 90^0, en sentido contrario a las agujas del reloj, en el cuadrado inferior. La torre viene determinada como el resultado de unir por medio de rectas cada punto de un lado del cuadrado inferior con el correspondiente punto del cuadrado superior una vez efectuado el giro.

Proceso matemático para la modelización

Para modelizar matemáticamente la obra (sin considerar los huecos superiores que se observan en sus paredes) y poder implementar las ecuaciones en Mathematica, una de las opciones posibles es seguir los siguientes pasos:

- Parametrización de los cuadrados que forman la base y la tapa.
- Parametrización de cada uno de los lados de la torre que se reduce a parametrizar los segmentos que unen los puntos de un lado del cuadrado con los puntos del lado del otro cuadrado.

El proceso anterior se puede simplificar parametrizando sólo un lado del cuadrado inferior, el correspondiente lado en el cuadrado superior una vez efectuado el giro y la parametrización del lado de la torre que se obtendría uniendo los puntos de los dos lados por medio de rectas. El resto de lados que componen la torre se obtendrían haciendo giros de 90º, 180º y 270º en el ya construido.

Para la modelización matemática de la obra hemos optado por recurrir al uso de las ecuaciones paramétricas y al de ecuaciones implícitas dada la simplicidad de la obtención de las primeras y que además en la actual asignatura de Matemáticas 2 en Grado en Arquitectura se estudia la parametrización de curvas. Basta con conocer la forma de parametrizar un segmento para poder desarrollar la modelización de toda la obra recurriendo a la matriz de rotación en el espacio.

Las instrucciones de Mathematica que hemos utilizado para modelizar "Alexandria" son:

$$a = \sqrt{(121)/2};$$
$$b = 66;$$
$$\{\mathrm{x1} = (1-t)a, \mathrm{y1} = -at, \mathrm{z1} = 0\};$$
$$\{\mathrm{x2} = -ta, \mathrm{y2} = -a(1-t), \mathrm{z2} = b\};$$
$$\{\mathrm{x3} = a(1-t), \mathrm{y3} = at, \mathrm{z3} = b\};$$
$$\{\mathrm{xp1} = (1-u)\mathrm{x1} + u\mathrm{x2}, \mathrm{yp1} = (1-u)\mathrm{y1} + u\mathrm{y2}, \mathrm{zp1} = (1-u)\mathrm{z1} + u\mathrm{z2}\};$$
$$\{\mathrm{xp2}, \mathrm{yp2}, \mathrm{zp2}\} = \{\mathrm{xp1}, \mathrm{yp1}, \mathrm{zp1}\}.\mathrm{RotationMatrix}[\pi/2, \{0,0,1\}];$$
$$\{\mathrm{xp3}, \mathrm{yp3}, \mathrm{zp3}\} = \{\mathrm{xp1}, \mathrm{yp1}, \mathrm{zp1}\}.\mathrm{RotationMatrix}[\pi, \{0,0,1\}];$$
$$\{\mathrm{xp4}, \mathrm{yp4}, \mathrm{zp4}\} = \{\mathrm{xp1}, \mathrm{yp1}, \mathrm{zp1}\}.\mathrm{RotationMatrix}[3\pi/2, \{0,0,1\}];$$

$$\text{tronco} = \text{ParametricPlot3D}[\{\{\text{xp1}, \text{yp1}, \text{zp1}\}, \{\text{xp2}, \text{yp2}, \text{zp2}\},$$
$$\{\text{xp3}, \text{yp3}, \text{zp3}\}, \{\text{xp4}, \text{yp4}, \text{zp4}\}\}, \{t, 0, 1\}, \{u, 0, 0.85\}, \text{Mesh} \to \text{None},$$
$$\text{PlotStyle} \to \text{Thickness}[0.35]];$$
$$\text{partealta} = \text{ParametricPlot3D}[\{\{\text{xp1}, \text{yp1}, \text{zp1}\}, \{\text{xp2}, \text{yp2}, \text{zp2}\},$$
$$\{\text{xp3}, \text{yp3}, \text{zp3}\}, \{\text{xp4}, \text{yp4}, \text{zp4}\}\}, \{t, 0, 1\}, \{u, 0.95, 1\}, \text{Mesh} \to \text{None},$$
$$\text{PlotStyle} \to \text{Thickness}[0.35]];$$
$$\text{ladoventanader} = \text{ParametricPlot3D}[\{\{\text{xp1}, \text{yp1}, \text{zp1}\}, \{\text{xp2}, \text{yp2}, \text{zp2}\},$$
$$\{\text{xp3}, \text{yp3}, \text{zp3}\}, \{\text{xp4}, \text{yp4}, \text{zp4}\}\}, \{t, 0, 0.2\}, \{u, 0.8, 0.95\}, \text{Mesh} \to \text{None},$$
$$\text{PlotStyle} \to \text{Thickness}[0.35]];$$
$$\text{ladoventanizq} = \text{ParametricPlot3D}[\{\{\text{xp1}, \text{yp1}, \text{zp1}\}, \{\text{xp2}, \text{yp2}, \text{zp2}\},$$
$$\{\text{xp3}, \text{yp3}, \text{zp3}\}, \{\text{xp4}, \text{yp4}, \text{zp4}\}\}, \{t, 0.8, 1\}, \{u, 0.8, 0.95\}, \text{Mesh} \to \text{None},$$
$$\text{PlotStyle} \to \text{Thickness}[0.35]];$$
$$\text{tapa} = \text{ParametricPlot3D}[\{(1-u)\text{x3} + u\text{x2}, (1-u)\text{y3} + u\text{y2},$$
$$(1-u)(\text{z3} - 0.2) + u(\text{z2} - 0.2)\}, \{t, 0, 1\}, \{u, 0, 1\}, \text{Mesh} \to \text{None},$$
$$\text{PlotStyle} \to \text{Thickness}[0.5]];$$
$$\text{alexandria} = \text{Show}[\text{tronco}, \text{partealta}, \text{ladoventanader}, \text{ladoventanizq}, \text{tapa},$$
$$\text{PlotRange} \to \text{All}, \text{Boxed} \to \text{False}, \text{ViewPoint} \to \text{Front}, \text{Axes} \to \text{False}]$$

La representación grafica obtenida con Mathematica se puede ver en la Figura 5:

Figura 5: Representación gráfica obtenida con Mathematica.

Algunas consideraciones acerca de la ecuaciones e instrucciones que hemos usado son las siguientes:

1. Las ecuaciones que hemos usado están dadas en función de dos parámetros a y b $(a, b \geq 0)$ para que puedan ser modificadas las dimensiones de la obra con sólo asignar nuevos valores a dichos parámetros. El parámetro b corresponde a la altura y el parámetro a hace relación a las dimensiones del cuadrado que define la base o tapa de la obra en el siguiente sentido: si llamamos ℓ al lado de dicho cuadrado, y suponemos éste con los vértices sobre los ejes cartesianos, tal y como se muestra en la Figura 6, los vértices se corresponderían con los puntos $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$. Por tanto la relación entre ℓ y a es la siguiente: $a = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$.

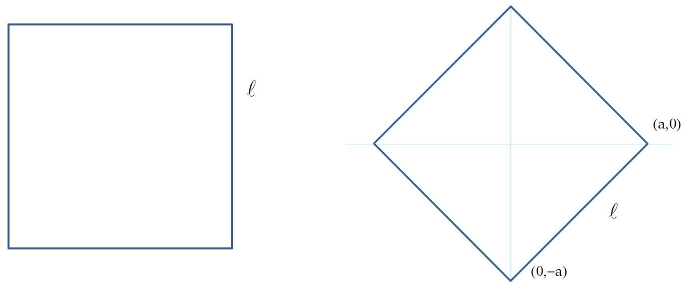

Figura 6: Relación entre los parámetros a y ℓ

2. Denotamos por (x_1, y_1, z_1) el segmento que une los puntos $(a, 0, 0)$ y $(0, -a, 0)$, por (x_2, y_2, z_2) el segmento que une los puntos $(0, -a, b)$ y $(-a, 0, b)$, por (x_3, y_3, z_3) el segmento que une los puntos $(a, 0, b)$ y $(0, a, b)$; (xp_1, yp_2, zp_2) parametriza el lateral de "Alexandria" que resulta de unir por medio de rectas cada punto del segmento (x_1, y_1, z_1) con el correspondiente del segmento (x_2, y_2, z_2).

Extrapolación al mundo de la arquitectura

Una vez obtenida la representación de la obra con el programa Mathematica y teniendo en cuenta las posibilidades que éste ofrece para exportar gráficos en diferentes tipos de archivos que después pueden ser tratados con programas más especializados en el diseño gráfico, y a la vez más usados en el ámbito de la arquitectura, con la ayuda del programa 3DStudioMax podemos hacer un render incorporando la obra para darle carácter de volúmen arquitectónico. En la Figura 7 podemos ver un posible escenario urbano donde encuadrar la obra.

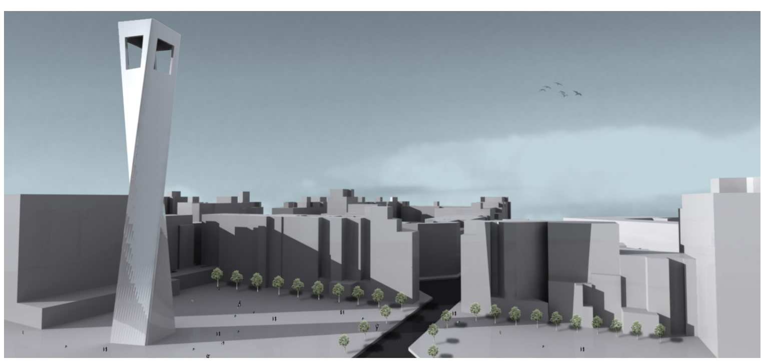

Figura 7: Render realizado con 3DStudioMax.

3 Modelización matemática de Pedra de Toc 2

"Pedra de Toc 2" es otra de las obras de J. Espí (Figura 8) y pertenece a la serie "Clau de Volta". La idea que subyace en esta pieza es la misma que en la obra "Alexandria", la torsión. En esta ocasión el giro es en sentido contrario a las agujas del reloj y sólo se consideran dos laterales de los cuatro que formaban la obra anterior. Al igual que la anterior, esta obra se puede presentar a los alumnos para que éstos planteen la parametrización e intenten representarla con Mathematica.

Figura 8: Pedra de Toc 2. Dimensiones: 20 x 20 x 50 mm. Piedra de la Mola.

El resultado obtenido se puede ver en la Figura 9.

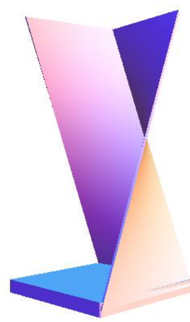

Figura 9: Representación obtenida con Mathematica.

Las instrucciones en Mathematica empleadas en la Figura 9 son:

$$a = \sqrt{200};$$
$$b = 50;$$
$$\{\mathrm{x1} = at, \mathrm{y1} = a(t-1), \mathrm{z1} = 0\};$$
$$\{\mathrm{x2} = a(-t+1), \mathrm{y2} = at, \mathrm{z2} = b\};$$
$$\{\mathrm{x3} = a(-t), \mathrm{y3} = -a(1-t), \mathrm{z3} = b\};$$
$$\{\mathrm{xp1} = (1-u)\mathrm{x1} + u\mathrm{x2}, \mathrm{yp1} = (1-u)\mathrm{y1} + u\mathrm{y2}, \mathrm{zp1} = (1-u)\mathrm{z1} + u\mathrm{z2}\};$$
$$\{\mathrm{xp2}, \mathrm{yp2}, \mathrm{zp2}\} = \{\mathrm{xp1}, \mathrm{yp1}, \mathrm{zp1}\}.\mathrm{RotationMatrix}[3\pi/2, \{0,0,1\}];$$

$$\mathrm{laterales} = \mathrm{ParametricPlot3D}[\{\{\mathrm{xp1}, \mathrm{yp1}, \mathrm{zp1}\}, \{\mathrm{xp2}, \mathrm{yp2}, \mathrm{zp2}\}\}, \{t, 0, 1\}, \{u, 0, 1\},$$
$$\mathrm{Mesh} \to \mathrm{None}, \mathrm{PlotStyle} \to \mathrm{Thickness}[0.35]];$$
$$\mathrm{base} = \mathrm{ParametricPlot3D}[\{(1-u)\mathrm{x3} + u\mathrm{x2}, (1-u)\mathrm{y3} + u\mathrm{y2}, 0\}, \{t, 0, 1\}, \{u, 0, 1\},$$
$$\mathrm{Mesh} \to \mathrm{None}, \mathrm{PlotStyle} \to \mathrm{Thickness}[2]];$$
$$\mathrm{Show}[\mathrm{laterales}, \mathrm{base}, \mathrm{PlotRange} \to \mathrm{All}, \mathrm{Boxed} \to \mathrm{False},$$
$$\mathrm{ViewPoint} \to \mathrm{Front}, \mathrm{Axes} \to \mathrm{False}]$$

En esta ocasión y haciendo alusión a la frase de Le Corbusier

> *Arquitectura es todo: su silla y su mesa, sus muros y sus habitaciones, su escalera y su ascensor, su calle, su ciudad. Encantamiento o banalidad, o tedio. Horror aún posible en estas cosas. Belleza o fealdad. Felicidad o desgracia ...*

podemos encuadrar la obra dentro de un contexto arquitectónico como mobiliario. En la Figura 10 vemos un posible ejemplo.

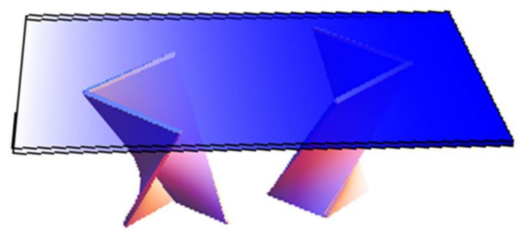

Figura 10: Representación obtenida con Mathematica.

4 Conclusiones

En los actuales títulos de grado que se imparten en la UPV las asignaturas de matemáticas se encuadran dentro de los módulos considerados básicos y su docencia se ve relegada en la práctica totalidad de ellos al primer y segundo curso. Este hecho hace difícil el mostrar casos particulares donde se refleje la relación de las matemáticas con otras disciplinas o encontrar ejemplos donde poner de manifiesto la aplicabilidad de éstas en un contexto profesional. Este tipo de modelizaciones están encaminadas a suplir estas carencias.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Ayuda para Proyectos de Innovación Docente en el departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia (PID-DMA 2012).

Referencias

[1] M. C. Gómez-Collado, J. Puchalt, J. Sarrió, M. Trujillo. *Matemáticas y escultura: análisis matemático de obras del escultor Jaume Espí*, Segunda Jornada Internacional MATEMÁTICAS EVERYWHERE, ISBN 978-84-7493-462-5, Castro Urdiales 2012.

[2] J. Espí. *Jaume Espí Escultura*, Catàleg d'escultura.