

Cálculo del área de un polígono simple

Francisco Arteaga¹

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALENCIA SAN VICENTE MÁRTIR

francisco.arteaga@ucv.es

Abstract

En el presente trabajo nos planteamos determinar la posición relativa entre un punto y un polígono simple en un plano, para lo cual nos creamos un modelo del polígono, cuya manipulación nos lleva, de una manera muy natural, a la solución de dicho problema y a plantearnos un problema más ambicioso, basado en el mismo modelo: la determinación del área del polígono. Este ejemplo geométrico es útil para ilustrar el proceso de creación en matemáticas. Se considera de especial interés la manera en la que la formalización de un problema sencillo, con una notación afortunada, y con grandes dosis de exploración algebraica, llevan a redescubrir un interesante resultado geométrico, de mucho mayor alcance que el objetivo inicial.

In the present paper we consider to determine the relative position between a point and a simple polygon in a plane. For this purpose we build a model of the polygon, which manipulation carries us, in a very natural way, to the solution of this problem and it allows us to arise a more ambitious problem based on the same model: the determination of the polygon area. This geometric example is useful to illustrate the creation process in Mathematics. It is especially interesting the way in which the formalization of a simple problem with a successful notation and a great dose of algebraic exploration results in a rediscovery of an interesting geometric result which is much more important than the original objective.

Keywords: Polígono, Área.

¹Este trabajo está basado en la lección inaugural del curso 2009-2010 en la Universidad Católica de Valencia San Vicente Mártir, impartida por el autor.

1 Introducción

A menudo, cuando leemos un artículo científico o un libro especializado para conocer un resultado que ha despertado nuestro interés, nos maravillamos de una ocurrencia del autor o autora y nos preguntamos ¿cómo se le ha podido ocurrir esto?. Este fenómeno es especialmente frecuente en Matemáticas y habitualmente se conoce con el nombre de idea feliz.

Las ideas felices, si bien suponen una gran satisfacción intelectual para quien las experimenta, pueden desanimar a quien se acerca a los resultados con curiosidad, ya que no es extraño o pensar algo así como “eso a mí no se me ocurriría jamás”. Thomas Edison dijo que el genio es un 1% de inspiración y un 99% de transpiración. Creo que esto también se puede decir de las ideas felices y, en especial de las ideas felices en Matemáticas.

La existencia de ideas felices en Matemáticas es, frecuentemente, más prosaica de lo que suponemos, y se debe, en gran medida, a que la forma de exponer los resultados en los textos científicos nos hurta, con frecuencia, el proceso seguido para alcanzarlos, que se deshecha por poco relevante, y sólo se conoce cuando alcanza el nivel de anécdota llamativa, y a menudo de dudosa credibilidad.

En este trabajo quiero ilustrar la forma real de llegar a un resultado matemático de gran interés práctico que puede ser enunciado mediante una expresión muy sencilla, pero que dice muy poco del proceso que hay que seguir para obtenerlo. El resultado que se alcanza es una fórmula para calcular el área de los polígonos simples a partir de la relación de sus vértices en orden correlativo. En realidad no es un resultado original, ya que la fórmula se conoce desde hace tiempo, y habitualmente aparece con el nombre de fórmula del agrimensor [1-5], para la que existe una demostración muy elegante, empleando el Teorema de Green. Lo que se pretende en este trabajo no es tanto presentar el resultado matemático, sino el proceso seguido para alcanzarlo. Dicho proceso presenta varios puntos importantes que se destacan a continuación:

- El problema que originalmente se trataba de resolver era otro más sencillo, cuya solución nos lleva a un nuevo problema más ambicioso.
- La demostración es constructiva y se obtiene empleando sólo resultados matemáticos incluidos en bachillerato, incluyendo la definición de todos ellos para facilitar la comprensión de la misma. Estos resultados se definen con la precisión estrictamente necesaria para el alcance de la demostración.
- La notación es a menudo un elemento clave para el éxito de un desarrollo matemático y el caso que nos ocupa no es una excepción. Aprovecharemos las definiciones previas para introducir la notación a emplear y para familiarizarnos con ella.
- En los últimos apartados se incluyen algunos casos en los que se emplean resultados que no se definen en detalle, aunque también están dentro del arsenal de herramientas matemáticas adquiridas en bachillerato. Estos resultados son la notación de sumatorios, el cálculo de límites con cambio de variable y aplicando el Teorema de L'Hôpital, el teorema del valor medio, el cálculo de integrales de funciones trigonométricas y el cálculo de integrales definidas. Todo esto se considera útil para ilustrar la utilidad de la fórmula presentada y con ese ánimo se incluye en el trabajo.

La lección empieza con el planteamiento del problema que se va a resolver, seguido de un conjunto de definiciones necesarias para seguir el desarrollo de la resolución. Antes de resolver el

problema que se plantea se incluye un problema más sencillo, que es el que inspiró el problema objeto del presente trabajo. El problema inicial tiene la virtud adicional de facilitar la comprensión de las definiciones y la de ayudar a familiarizarse con la notación que se emplea en la resolución de ambos problemas.

Una vez estudiado el problema inicial se plantea y resuelve el problema objeto del trabajo, que se seguirá con algunas ampliaciones y ejemplos que servirán para ilustrar el uso del resultado que se alcanza.

2 Planteamiento del problema

Lo normal en un trabajo de investigación es tratar de resolver un problema específico y se insiste en la correcta formulación del mismo, ya que de lo contrario se corre el riesgo de resolver correctamente el problema equivocado (Box llamó a esto error de tercera especie). Esto, que es cierto en la fase de comunicar los resultados de investigación, no es necesariamente verdad en la fase de creación de dichos resultados, ya que la investigación es a veces una simple exploración cargada de incertidumbre, al adentrarnos en un terreno posiblemente estéril, del que sólo a veces somos capaces de obtener algo interesante.

El problema que se va a resolver en el presente trabajo es el cálculo del área de un polígono simple, a partir de la relación de las coordenadas de sus vértices en orden correlativo, tal y como se ilustra en la Figura 1, en la que se muestra un polígono simple con 8 vértices que son los puntos P_i , con $i = 1, 2, \dots, 8$, indicados en el orden que resulta de recorrer el perímetro del polígono girando en el sentido inverso al de las agujas del reloj (sentido antihorario).

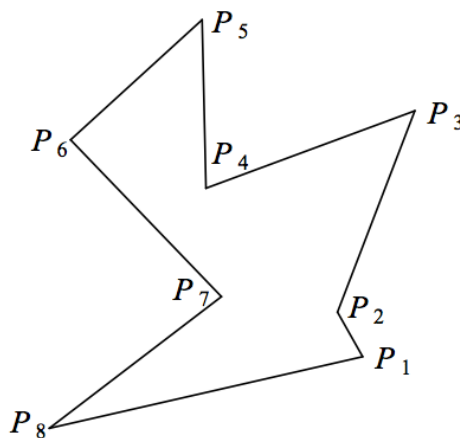


Figura 1: Polígono simple con 8 vértices.

En una primera aproximación al problema lo más directo es pensar en triangular el polígono, tal y como se muestra en la Figura 2, para calcular el área total como la suma de las áreas de los triángulos en que se divide el polígono.

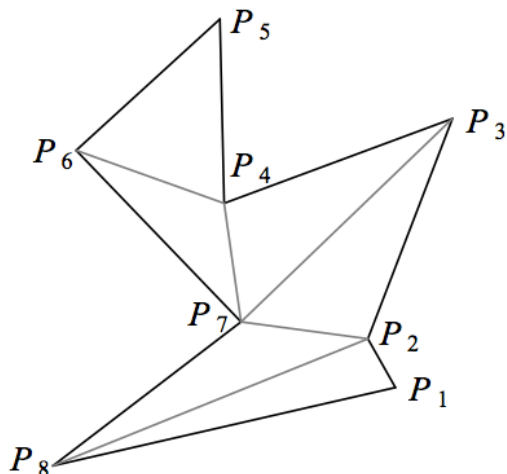


Figura 2: División del polígono de la Figura 1 en 6 triángulos para facilitar el cálculo de su área.

Veremos en la presente lección que esta manera tan intuitiva de resolver el problema es muy poco eficiente, si la comparamos con la solución que obtenemos al abordar el problema con más profundidad.

En la resolución del problema planteado emplearemos una batería de conocimientos previos que se detallarán a continuación en forma de definiciones.

3 Algunas definiciones

En este apartado se definen, con la precisión estrictamente necesaria para el alcance de la lección, algunos conceptos y herramientas matemáticas que son imprescindibles para el desarrollo.

3.1 Puntos en el plano

Pensamos en el plano como en una superficie plana ilimitada. El plano está formado por puntos y para localizarlos recurriremos a un punto especial al que llamaremos origen y a un sistema de coordenadas formado por dos direcciones perpendiculares entre si en las que disponemos de una escala, idéntica en ambas direcciones, de forma que para localizar un punto cualquiera del plano indicaremos el número de ‘saltos’ que debemos dar en cada dirección para alcanzar el punto desde el origen. Por ejemplo, si decimos de un punto que sus coordenadas son $(2, 3)$, estamos diciendo que para alcanzar dicho punto debemos posicionarnos en el origen y desplazarnos 2 unidades en la primera dirección y 3 unidades en la segunda dirección. Del mismo modo el punto cuyas coordenadas son $(-1, 2)$ lo alcanzamos desplazándonos 1 unidad en sentido negativo en la primera dirección y 2 unidades en la segunda dirección. La localización de estos dos puntos se ilustra en la Figura 3.

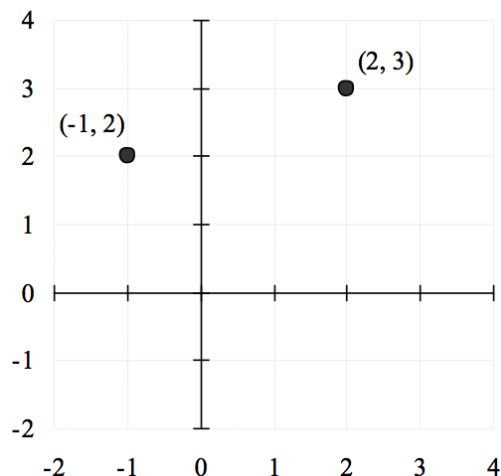


Figura 3: Localización de puntos en el plano, mediante sus coordenadas.

Para referirnos a puntos del plano emplearemos letras mayúsculas en cursiva.

3.2 Segmento

Dados dos puntos A y B del plano, llamaremos segmento de extremos A y B a la parte de la línea recta que une a ambos puntos que está entre ambos. Emplearemos la notación $[AB]$ para representar al segmento que une los puntos A y B .

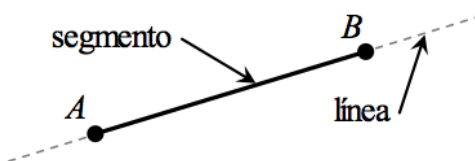


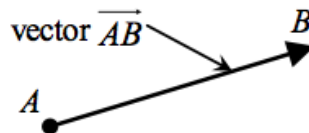
Figura 4: Segmento con extremos A y B : $[AB]$.

3.3 Vector

Un vector se escribe como un par ordenado de números reales que son sus componentes. Por ejemplo, el vector \mathbf{v} se escribe a partir de sus componentes v_x y v_y como $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Normalmente presentaremos un vector mediante una letra minúscula en negrita. Un vector es un segmento orientado en el que uno de los dos extremos toma el papel de extremo inicial y el otro adopta el papel de extremo final. El vector con extremo inicial en $A = (x_A, y_A)$ y extremo final en $B = (x_B, y_B)$ se denota \overrightarrow{AB} y se representa a partir de sus coordenadas o componentes:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{3.1}$$

En la Figura 5 se muestra el vector \overrightarrow{AB} .

Figura 5: Vector con extremo inicial en A y extremo final en B .

3.4 Recta que une dos puntos del plano

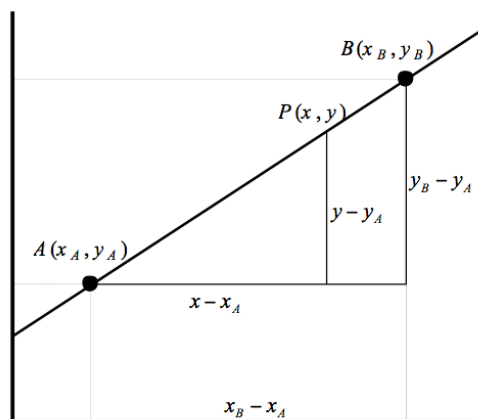
Dados dos puntos del plano, A y B , existe una única línea recta que pasa por ambos puntos. Para determinar la ecuación de dicha recta tenemos en cuenta que, para cualquier punto $P(x, y)$ de la misma se verificará, por el Teorema de Thales para los triángulos semejantes, la siguiente relación:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A} \quad (3.2)$$

De donde, despejando convenientemente, obtenemos:

$$y = y_A + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) (x - x_A) \quad (3.3)$$

La Figura 6 nos ayuda a entender la aplicación del Teorema de Thales para determinar la ecuación de la recta.

Figura 6: Aplicación del teorema de Thales para hallar la ecuación de la recta que une los puntos A y B .

Se debe notar que la recta dada en la Ecuación 3.3, divide el plano en dos semiplanos disjuntos:

$$y > y_A + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) (x - x_A) \quad (3.4)$$

$$y < y_A + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) (x - x_A) \quad (3.5)$$

En uno de los dos semiplanos (**semiplano superior**) están todos los puntos (x, y) tales que el valor de y está por encima del valor que le correspondería si el punto tuviera la misma x , pero estuviera en la recta y en el otro semiplano (**semiplano inferior**) están todos los puntos tales que el valor de y está por debajo del valor que le correspondería si el punto tuviera la misma x , pero estuviera en la recta. La división que la recta $y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ hace del plano en dos semiplanos se ilustra en la Figura 7.

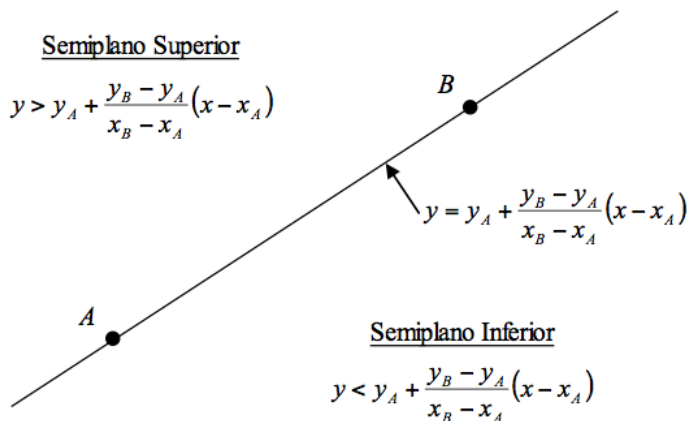


Figura 7: La recta divide el plano en dos semiplanos.

3.5 Ecuación de la recta en forma general o implícita

Operando convenientemente podemos expresar una recta como una función lineal en las variables x y y más una constante, igualada a cero, es decir:

$$Ax + By + C = 0.$$

La expresión anterior se denomina ecuación de la recta en forma general o implícita. A partir de la ecuación general de la recta los semiplanos superior e inferior se escriben $Ax + By + C > 0$ y $Ax + By + C < 0$, respectivamente.

3.6 Norma de un vector

La norma de un vector es la longitud del mismo, es decir, la distancia entre sus extremos. Para calcular la norma del vector $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ empleamos la expresión:

$$\|\mathbf{v}\| = +\sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

que se deduce del Teorema de Pitágoras, según se puede apreciar en la Figura 8.

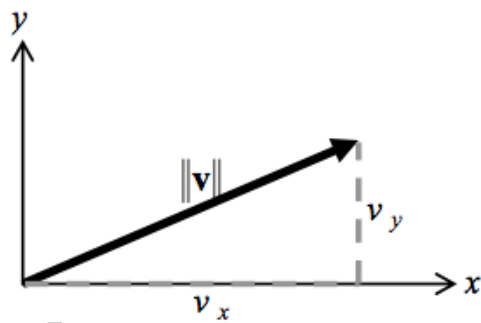


Figura 8: Aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular la norma de un vector.

3.7 Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos del plano, $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$, podemos calcular la distancia que los separa mediante la expresión:

$$d(A, B) = +\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

que se deduce del Teorema de Pitágoras, según se puede apreciar en la Figura 9.

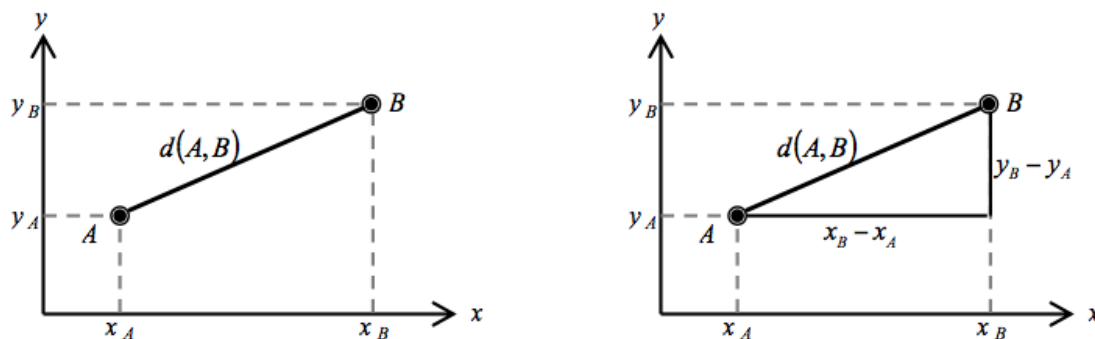


Figura 9: Aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos.

3.8 Ángulo entre dos vectores

Para calcular el ángulo entre dos vectores apoyamos el extremo inicial de ambos en el origen.

Las dos escalas de medida de ángulos más empleadas son la escala sexagesimal y la escala en radianes.

En la escala sexagesimal la circunferencia completa son 360 grados, descomponiendo cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos (los grados se indicarán con el símbolo $^{\circ}$, los minutos con el símbolo $'$ y los segundos con el símbolo $''$, por ejemplo $46^{\circ} 15' 23''$). En la escala en radianes una circunferencia completa son 2π radianes (1 radián equivale a $1/2\pi$ vueltas, es decir, $57^{\circ}17' 45''$ y 1° equivale a $2\pi/360$ grados, es decir, 0.01745 radianes).

Para los efectos que nos interesan en este trabajo consideraremos los ángulos en la escala sexagesimal y consideraremos sólo ángulos entre 0° y 180° grados (ángulos positivos) o entre

0° y -180° grados (ángulos negativos). Los ángulos se consideran positivos si se recorren en el sentido inverso al de las agujas del reloj (sentido antihorario) y se consideran negativos si se recorren en el sentido de las agujas del reloj (sentido horario) tal y como se refleja en la Figura 10.

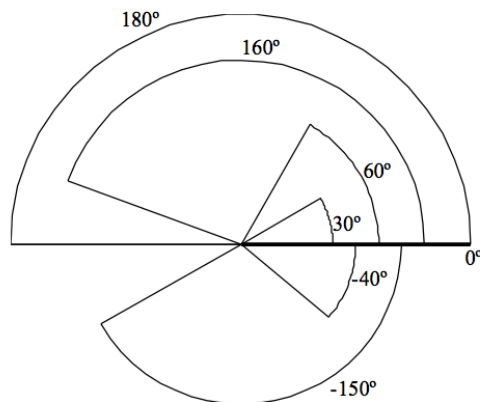


Figura 10: Ejemplo de algunos ángulos.

3.9 Determinación del signo del ángulo entre dos vectores

Es fácil determinar el signo de un ángulo entre dos vectores, si podemos verlos representados con el origen de ambos en el mismo punto, tal y como se muestra en la Figura 11, en la que se muestran los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , ambos con origen en el punto A , de manera que para determinar el signo del ángulo basta con pensar en el sentido en que desplazaríamos la visual, si estamos situados en A , mirando en la dirección del primer vector, y queremos mirar en la dirección del segundo.

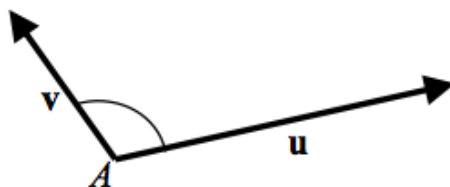


Figura 11: El ángulo desde \mathbf{u} hasta \mathbf{v} es positivo, pero el ángulo desde \mathbf{v} hasta \mathbf{u} es negativo.

En el caso de la Figura 11, el signo del ángulo desde \mathbf{u} hasta \mathbf{v} será positivo (giramos la visual en sentido antihorario) y el signo del ángulo desde \mathbf{v} hasta \mathbf{u} sería negativo (giramos la visual en sentido horario).

Sin embargo, si estamos interesados en determinar dicho ángulo sólo a partir de las coordenadas de los vectores implicados, es decir, sin la posibilidad de verlos directamente, necesitamos un procedimiento analítico, que se describe a continuación.

Sean los puntos $A = (x_A, y_A)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, de manera que estamos interesados en determinar el signo del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AP_1} = (x_1 - x_A, y_1 - y_A)$ y $\overrightarrow{AP_2} = (x_2 - x_A, y_2 - y_A)$, según se muestra en la Figura 12

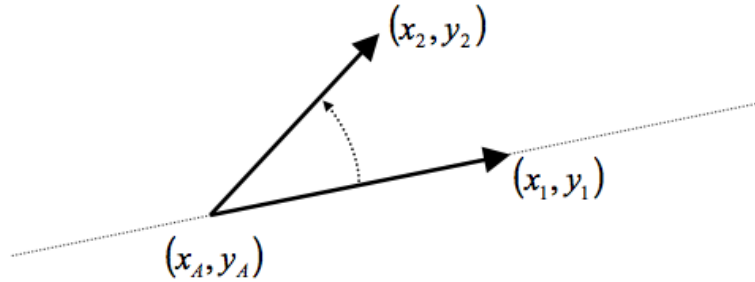


Figura 12: Signo del ángulo entre dos vectores.

En la Figura 12 se ha añadido la recta que une los puntos A y P_1 , cuya ecuación es:

$$y = y_A + \frac{y_1 - y_A}{x_1 - x_A}(x - x_A).$$

Según hemos visto antes, la recta divide el plano en dos semiplanos y es fácil ver que si el punto P_2 está en el semiplano superior el ángulo es positivo, mientras que en el caso contrario el ángulo será negativo. En el caso de la Figura 12 el punto P_2 está en el semiplano superior, con lo que el ángulo resulta ser positivo.

Analíticamente, si P_2 está en el semiplano superior, debería verificarse la siguiente relación:

$$y_2 > y_A + \frac{y_1 - y_A}{x_1 - x_A}(x_2 - x_A).$$

Lo anterior equivale a escribir:

$$(y_2 - y_A)(x_1 - x_A) - (y_1 - y_A)(x_2 - x_A) > 0.$$

Si al vector $\overrightarrow{AP_1}$ le llamamos \mathbf{u} y al vector $\overrightarrow{AP_2}$ le llamamos \mathbf{v} , con coordenadas $u_x = x_1 - x_A$, $u_y = y_1 - y_A$, $v_x = x_2 - x_A$ y $v_y = y_2 - y_A$ lo anterior se puede escribir:

$$u_x v_y - u_y v_x > 0.$$

Siendo que el producto cruzado $u_x v_y - u_y v_x$ se puede representar mediante la expresión del determinante:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

Con lo que diremos que el ángulo es positivo siempre que el determinante lo sea y negativo en caso contrario.

3.10 Razones trigonométricas (seno y coseno de un ángulo)

Para lo que sigue necesitamos definir la función coseno de un ángulo y lo haremos recurriendo a una circunferencia de radio la unidad sobre la que representaremos el ángulo, apoyando su

vértice en el centro de la circunferencia y haciendo coincidir una de las líneas que definen el ángulo con la línea horizontal que atraviesa el centro de la circunferencia.

El coseno del ángulo α será la proyección del punto de la circunferencia intersectado por la segunda línea que define el ángulo, sobre la horizontal que cruza por el centro de la circunferencia. Del mismo modo definimos el **seno del ángulo** α como la proyección del mismo punto sobre la línea vertical que cruza por el centro de la circunferencia. En la Figura 13 se ilustra la definición de seno y coseno de un ángulo.

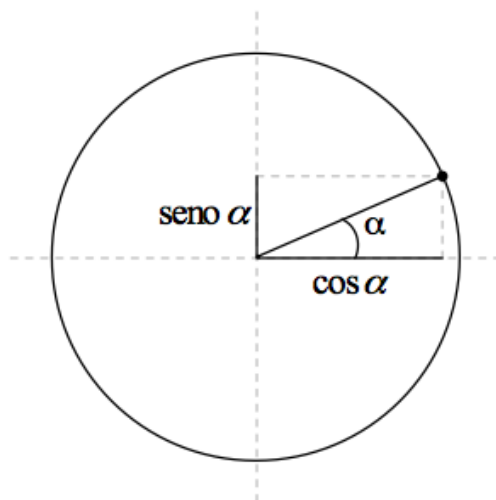


Figura 13: Ilustración de la definición de las funciones seno y coseno de un ángulo.

3.11 Producto escalar

El producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, que se representará mediante la expresión $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, es el número real que resulta de sumar el producto de las primeras coordenadas de ambos vectores más el de las segundas:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y.$$

El producto escalar es útil para calcular el ángulo entre dos vectores, ya que se puede comprobar que una expresión equivalente a la anterior para calcular el producto escalar entre dos vectores consiste en multiplicar las normas de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}}).$$

A partir de las dos expresiones vistas para el producto escalar de dos vectores, operando convenientemente, resulta:

$$\cos(\alpha_{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

3.12 Distancia de un punto a una recta en el plano

Dado el punto P con coordenadas (x_P, y_P) y una recta r , especificada en forma general $r \equiv AX + By + C = 0$, la distancia entre el punto P y la recta r se denota por $d(P, r)$ y se define

como la mínima distancia del punto P a un punto de la recta r , según se aprecia en la Figura 14.

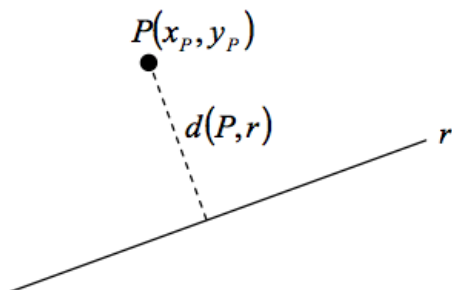


Figura 14: Ilustración de la distancia entre el punto P y la recta r .

Para calcular la distancia entre el punto P y la recta r se emplea la expresión:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.13 Poligonal

Es un conjunto ordenado de segmentos tales que un extremo de cada uno de ellos coincide con un extremo del siguiente (una concatenación de segmentos).

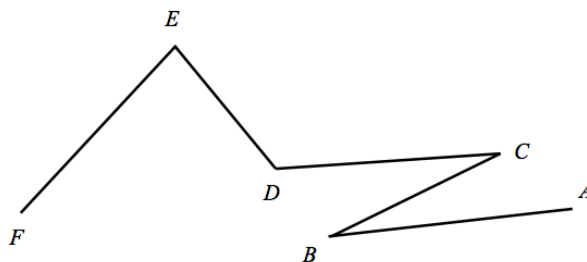


Figura 15: Línea poligonal.

3.14 Polígono Simple

Es una poligonal cerrada tal que sus segmentos no se cruzan entre sí. A los segmentos que forman el polígono les llamaremos **lados**.

Se debe notar que para todo polígono el número de vértices coincide con el número de lados.

3.15 Interior y Exterior de un polígono

Un polígono divide el plano en dos partes disjuntas: el **interior** y el **exterior** del polígono, separadas por una frontera que es la poligonal que define al polígono.

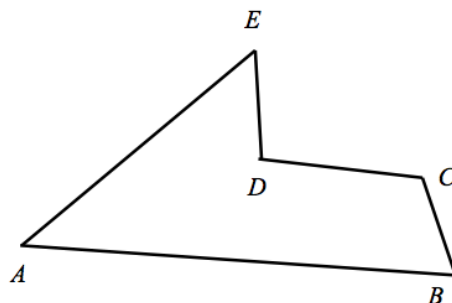


Figura 16: Ejemplo de polígono simple con 5 lados: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EA]$.

De los puntos interiores al polígono diremos que están **dentro** del mismo, es decir, que están en el **recinto delimitado por el polígono**.

3.16 Diagonal

Llamaremos **diagonal** a cualquier segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono.

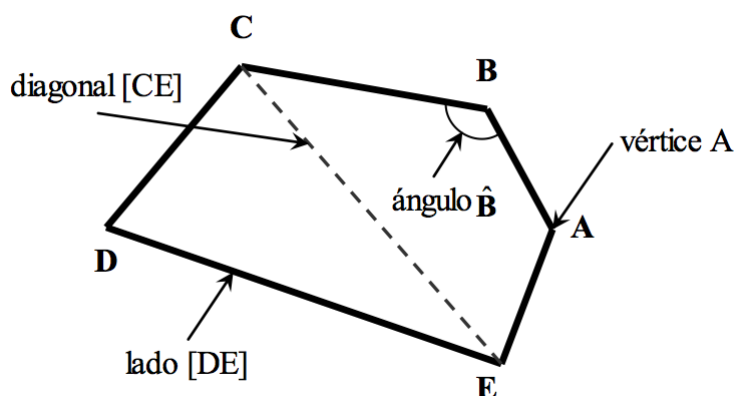


Figura 17: Algunos elementos de un polígono.

Si todos los puntos de la diagonal son interiores al polígono diremos que se trata de una **diagonal interior**. Si todos los puntos de la diagonal son exteriores al polígono diremos que se trata de una **diagonal exterior**. La diagonal representada en la Figura 17 es interior, mientras que la diagonal que se construye uniendo los vértices C y E en la Figura 16 es una diagonal exterior. La diagonal que se construye uniendo los vértices B y E en la Figura 16 es parcialmente interior y parcialmente exterior.

3.17 Polígono Regular

Es un polígono cuyos lados son todos iguales.

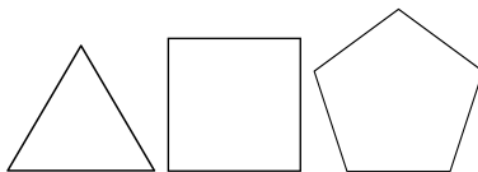


Figura 18: Ejemplos de polígonos regulares: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono,...

Un polígono irregular es aquel para el que los lados no son todos iguales.

3.18 Polígono Convexo

Decimos que un polígono es convexo siempre que dados dos puntos cualesquiera del polígono el segmento que los une está incluido dentro del polígono.

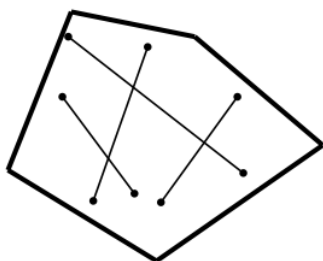


Figura 19: Polígono convexo.

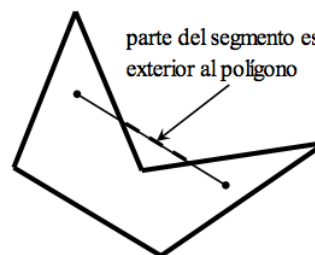


Figura 20: Polígono no convexo.

3.19 Polígono Estrellado

Decimos que un polígono es estrellado cuando existe al menos un punto interior al polígono tal que el segmento que lo une con cualquier punto del polígono está contenido en el interior del polígono.

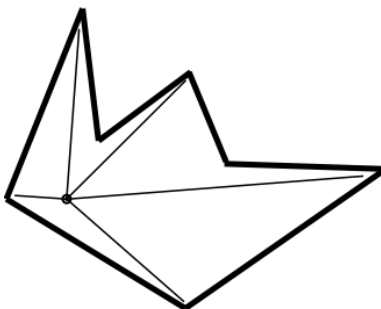


Figura 21: Polígono estrellado. Podemos ver que existe al menos un punto interior al polígono conectado con todos los demás puntos del interior del polígono mediante un segmento totalmente interior al polígono.

En la Figura 22 podemos ver un polígono no estrellado.

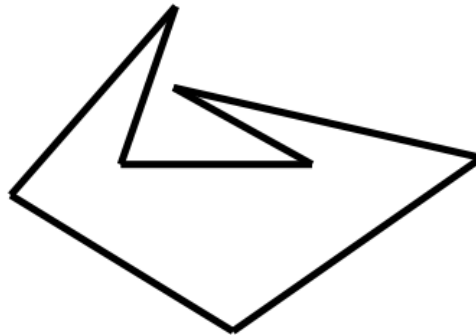


Figura 22: Polígono no estrellado.

4 Un problema “sencillo”

En este apartado se plantea y resuelve el problema original que se deseaba resolver y cuya solución nos llevará a otro problema más ambicioso. Empezamos con el planteamiento de este problema:

Sea un polígono simple, definido por la sucesión de sus n vértices $P = \{P_i\}_{i=1}^n$, siendo $P_i = (x_i, y_i)$, y sea un punto $A = (x_A, y_A)$, que no es ninguno de los vértices del polígono ni está contenido en ninguno de los lados del mismo, ¿Cómo podemos determinar si el punto es interior o exterior al polígono?

Si podemos ver una representación gráfica del problema, éste parece elemental, tal y como se muestra en las Figuras 23 y 24.

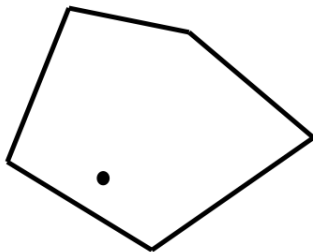


Figura 23: El punto está dentro.

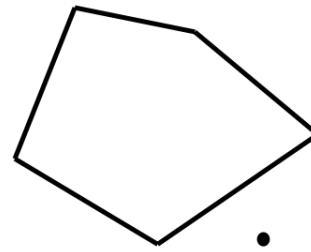


Figura 24: El punto está dentro.

Si no podemos ver la representación gráfica el problema no resulta tan sencillo, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

4.1 Ejemplo 1

Sea el polígono definido por sus 8 vértices:

$$P = \{(9, 1), (6, 6), (9, 7), (5, 9), (5, 4), (4, 9), (1, 1), (4, 3)\},$$

para el que se entiende que el último vértice $P_8 = (4, 3)$ está unido por un segmento con el primero $P_1 = (9, 1)$, para cerrar el polígono.

Estamos interesados en determinar si el punto $A = (6, 5)$ está dentro del recinto delimitado por el polígono.

Visto así, sin disponer de la posibilidad de ver una representación gráfica conjunta del polígono y el punto, el problema es más complicado y requiere un poco de ingenio para ser resuelto. En los siguientes apartados se sugieren tres métodos de resolución, radicalmente diferentes entre sí, en orden decreciente de complejidad.

Sólo se describirá en detalle el tercer método (el más eficiente y elegante), mientras que los dos primeros métodos sólo se describirán de forma somera.

4.2 Primera tentativa: recorriendo la frontera

La idea es desplazarnos desde el punto hasta las proximidades de la frontera del polígono, pero sin llegar a cruzarla, es decir, si el punto era exterior al polígono nuestra posición sigue siéndolo, mientras que si el punto era interior, este hecho tampoco cambia.

Una vez nos hemos aproximado a la frontera, recorremos el contorno del polígono, sin cruzar la frontera, midiendo la distancia que hemos recorrido al dar la vuelta completa; digamos que esta distancia es d_1 .

Ahora cruzamos la frontera (es un pequeño salto, ya que estamos en sus proximidades) y repetimos el proceso de recorrer el contorno del polígono hasta dar la vuelta completa, con lo que recorreremos una distancia a la que llamaremos d_2 .

En la Figura 25 se ilustra el proceso descrito en los párrafos anteriores, en el caso de un punto exterior.

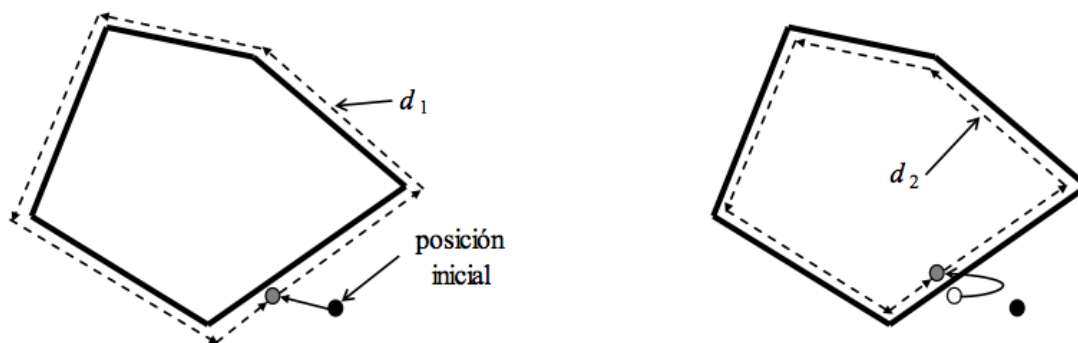


Figura 25: Si al recorrer la frontera antes de cruzarla la distancia es mayor que después de cruzarla, el punto es exterior. En el caso contrario el punto sería interior.

Es claro que en el caso ilustrado en la Figura 25 (punto exterior) la distancia del primer recorrido (d_1) es mayor que la del segundo (d_2) y esto sucedería siempre que el punto sea exterior, mientras que si el punto fuera interior, la distancia del primer recorrido sería menor que la del segundo, es decir, si $d_1 > d_2$ el punto es exterior, mientras que si por el contrario $d_1 < d_2$ el punto es interior.

Este método tiene el inconveniente de la complejidad algebraica de posicionarnos en las proximidades del polígono, de recorrer el contorno midiendo la distancia recorrida y de cruzar la frontera.

4.3 Segunda tentativa: trazando una semirrecta

Si trazamos una semirrecta desde el punto, con un ángulo arbitrario, pueden suceder dos cosas: que la semirrecta no intercepte a ninguno de los segmentos que conforman el polígono, en cuyo caso es evidente que el punto es exterior; o que la semirrecta cruce al menos uno de los segmentos que conforman el polígono, en cuyo caso caben dos posibilidades: que intercepte un número par de segmentos, en cuyo caso el punto es exterior; o que intercepte un número impar de segmentos, en cuyo caso el punto es interior (para ambas posibilidades hay que tener en cuenta que si la semirrecta cruza por un vértice está interceptando dos segmentos, pero sólo hemos de contabilizar un cruce).

En la Figura 26 se muestran las posibilidades de un punto exterior.

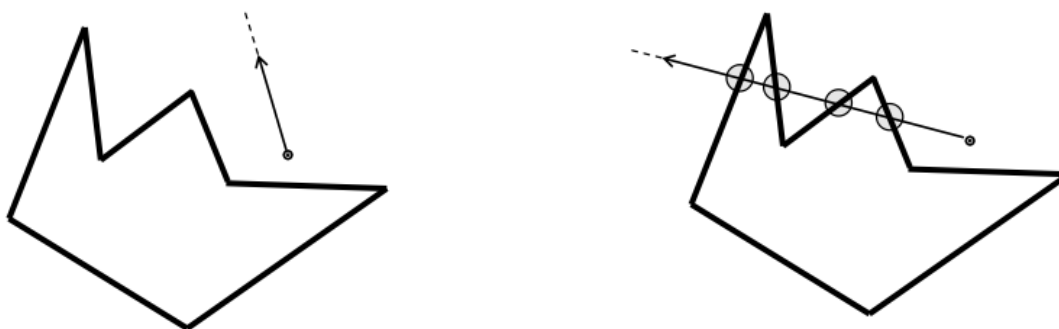


Figura 26: Si el punto es exterior caben dos posibilidades: (a) la semirrecta no intercepta al polígono y (b) la semirrecta intersecta al polígono en un número par de puntos (marcados como círculos en la Figura).

En la Figura 27 se muestran el caso de un punto interior.

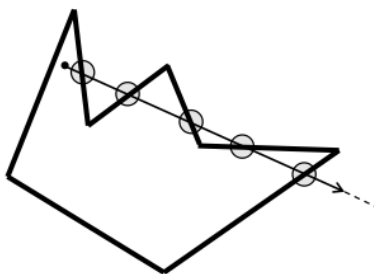


Figura 27: Si el punto es interior la semirrecta interceptará al polígono en un número impar de puntos (marcados como círculos en la Figura).

Para este método la complejidad algebraica es menor que para el anterior, ya que sólo hay que comprobar el número de intersecciones entre la semirrecta y los lados del polígono, pudiendo elegir la semirrecta de manera que el cálculo se simplifique al máximo (por ejemplo horizontal o vertical).

4.4 Tercera tentativa: mirando alrededor

Este tercer método está basado en la sencilla idea de imaginar lo que haríamos si estuviéramos situados en el punto y quisiéramos saber si estamos encerrados dentro del polígono o si estamos fuera del mismo, siendo la respuesta más evidente: “mirar alrededor”.

Si el punto es interior al polígono al “mirar alrededor”, recorriendo desde el primer vértice hasta el último (que coincidirá con el primero, ya que el polígono está cerrado), habremos dado una vuelta completa, es decir, nuestra mirada habrá descrito un **ángulo acumulado** de 360° (la suma acumulada de los ángulos recorridos para los lados del polígono, contando como positivo el ángulo recorrido en el sentido contrario a las agujas del reloj y como negativo el ángulo recorrido en el sentido de las agujas del reloj). En la Figura 28 se muestra un ejemplo sencillo de esto.

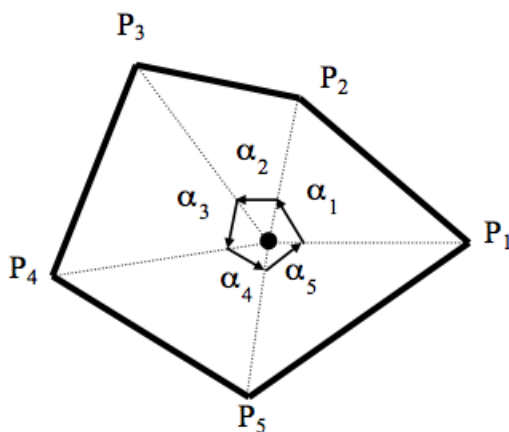


Figura 28: Al estar el punto dentro del polígono la suma acumulada de los ángulos barridos equivale a dar una vuelta completa (360°).

Si el punto es exterior al polígono al “mirar alrededor”, recorriendo desde el primer vértice hasta el último (que coincidirá con el primero, ya que el polígono está cerrado), hacemos y deshacemos un mismo recorrido, es decir, la suma acumulada de los ángulos recorridos para los lados del polígono por nuestra mirada será igual a 0° . En la Figura 29 se muestra un ejemplo sencillo de esto.

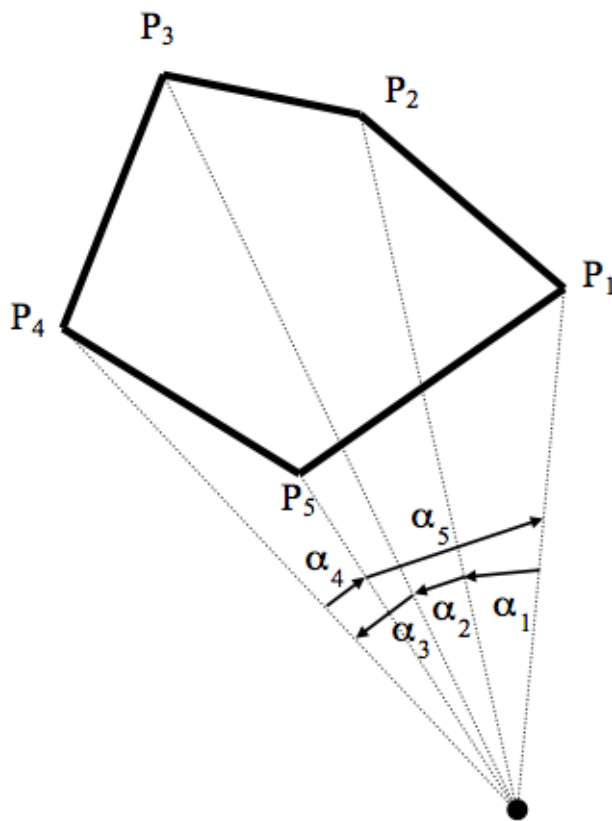


Figura 29: Al estar el punto fuera del polígono la suma acumulada de los ángulos barridos supone andar (los tres primeros ángulos son positivos) y desandar (los dos últimos ángulos son negativos) un mismo recorrido (0°).

Naturalmente, necesitamos definir un procedimiento analítico para calcular la suma acumulada de los ángulos barridos por la mirada al recorrer los vértices del polígono y para ello pensamos en el ángulo barrido al desplazar la mirada desde un vértice hasta el siguiente (disponemos de la lista de los vértices del polígono en orden correlativo). Para hacerlo recordamos la notación introducida, según la cual el polígono viene especificado por la sucesión ordenada de sus vértices $\mathbf{P} = \{P_i\}_{i=1}^n$, siendo $P_i = (x_i, y_i)$, y el punto es $A = (x_A, y_A)$.

Al ángulo barrido desde el vértice P_i hasta el vértice P_{i+1} lo denotaremos por α_i , según se muestra en la Figura 30.

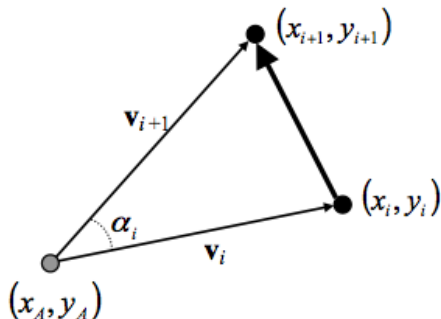


Figura 30: α_i es el ángulo barrido si nos situamos en el punto A y desplazamos la mirada desde el punto P_i hasta el punto P_{i+1} .

Para calcular el ángulo α_i recurrimos a la expresión del producto escalar de los vectores $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{AP_i}$ y $\mathbf{v}_{i+1} = \overrightarrow{AP_{i+1}}$:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1} \rangle = \|\mathbf{v}_i\| \cdot \|\mathbf{v}_{i+1}\| \cdot \cos(\alpha_i).$$

Despejando obtenemos:

$$\alpha_i = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_i\| \cdot \|\mathbf{v}_{i+1}\|}\right) = \arccos\left(\frac{(x_i - x_A)(x_{i+1} - x_A) + (y_i - y_A)(y_{i+1} - y_A)}{\sqrt{(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2} \sqrt{(x_{i+1} - x_A)^2 + (y_{i+1} - y_A)^2}}\right).$$

Para ilustrar el uso de la fórmula recordamos el ejemplo que estamos estudiando, para el que es $A = (6, 5)$, $P_1 = (9, 1)$ y $P_2 = (6, 6)$, con lo que para hallar α_1 necesitamos conocer \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 :

$$\mathbf{v}_1 = P_1 - A = (9, 1) - (6, 5) = (3, -4), \quad \mathbf{v}_2 = P_2 - A = (6, 6) - (6, 5) = (0, 1).$$

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle (3, -4), (0, 1) \rangle}{\|(3, -4)\| \cdot \|(0, 1)\|}\right) = \arccos(-0.8).$$

Hay dos ángulos cuyo coseno es -0,8: $143^\circ 7' 48''$ y $-143^\circ 7' 48''$. Para discernir entre ambos hemos de comprobar si el ángulo se recorre en sentido horario (signo negativo) o en sentido antihorario (signo positivo). Para discriminar entre ambos casos hemos visto que podemos emplear el determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-4) = 3 > 0.$$

Al resultar positivo el determinante concluimos que el signo del ángulo es positivo y nos quedamos con $\alpha_1 = 143^\circ 7' 48''$.

Para calcular la suma acumulada de los ángulos repetimos el proceso para todos los ángulos barridos en el ejemplo que estamos estudiando y rellenamos la Tabla 1.

TABLA 1. Cálculo de la suma acumulada de los ángulos barridos por la visual para el ejemplo.

Desde	Hasta	v_i	v_{i+1}	$\cos(\alpha_i)$	Determ.	α
P_1	P_2	(3, -4)	(0, 1)	-0.8000	$3 > 0$	143°7' 48"
P_2	P_3	(0, 1)	(3, 2)	-0.5547	$-3 < 0$	-56°18' 36"
P_3	P_4	(3, 2)	(-1, 4)	0.3363	$14 > 0$	70°20' 46"
P_4	P_5	(-1, 4)	(-1, -1)	-0.5145	$5 > 0$	120°57' 50"
P_5	P_6	(-1, -1)	(-2, 4)	-0.3162	$-1 < 0$	-108°26' 6"
P_6	P_7	(-2, 4)	(-5, -4)	-0.2095	$28 > 0$	102°5' 41"
P_7	P_8	(-5, -4)	(-2, -2)	0.9939	$2 > 0$	6°20' 25"
P_8	P_1	(-2, -2)	(3, -4)	0.1414	$14 > 0$	81°52' 12"
suma						360°

Como el resultado de la suma acumulada de los ángulos barridos al recorrer los vértices del polígono es igual a 360° , concluimos que hemos dado una vuelta completa, es decir, el punto A es interior al polígono.

Lo más notable del procedimiento descrito, junto con su sencillez, es que en ningún momento hemos necesitado ver la imagen del polígono y del punto del que queremos determinar su posición relativa al polígono. Para apreciar el resultado de forma gráfica se muestra el polígono en la Figura 31.

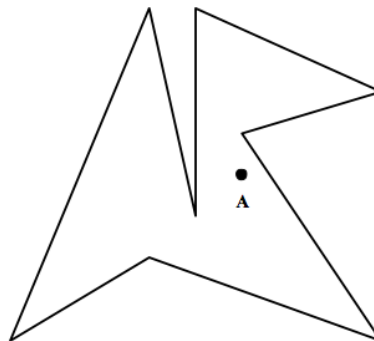


Figura 31: Representación gráfica del polígono P del ejemplo, junto al punto A para confirmar visualmente que el punto es interior.

5 Una aproximación estocástica al área del polígono

En este apartado emplearemos el método descrito para comprobar si un punto es interior o exterior a un polígono para calcular, de manera aproximada, el área del polígono, relacionando dicha área con la probabilidad de que un punto seleccionado al azar, en un recinto que incluye al polígono en su interior, sea interior al polígono (dicha probabilidad será proporcional al área del polígono).

5.1 Aplicación del método Monte Carlo

El disponer de un método sencillo para determinar si un punto es interior o exterior a un polígono nos permite resolver, de manera aproximada, el problema del cálculo del área del

mismo, aplicando el siguiente principio:

Si el polígono está totalmente incluido en un recinto mayor, del que conocemos el área, y somos capaces de seleccionar un punto al azar de dicho recinto, la probabilidad de que el punto sea interior al polígono es proporcional al área del polígono, verificándose que si el área del polígono es igual a 0 dicha probabilidad es nula y si el área del polígono es igual al área del recinto que lo contiene la probabilidad será igual a la unidad.

A partir del principio enunciado, si denotamos por S al área del recinto y por $S(\mathbf{P})$ al área del polígono \mathbf{P} , la probabilidad de que un punto seleccionado al azar de entre los del recinto superior sea un punto del polígono se puede calcular mediante la expresión:

$$\text{prob} = \frac{S(\mathbf{P})}{S}.$$

Si en la expresión anterior despejamos $S(\mathbf{P})$ obtenemos $S(\mathbf{P}) = \text{prob} \times S$, por lo que una estimación de la probabilidad prob nos permitiría obtener una aproximación al área del polígono.

Para obtener una estimación de la probabilidad prob podemos recurrir al método Monte Carlo de simulación que, al apartarse del objeto de la presente lección, no se va a describir en detalle y sólo diremos de él que, aplicado al problema que nos ocupa, consiste en seleccionar al azar *un número elevado de puntos* del recinto superior para estimar la probabilidad prob como la proporción de dichos puntos que son interiores al polígono. Una vez obtenida la estimación de prob es inmediato calcular la aproximación al área del polígono.

Al decir *un número elevado de puntos* nos referimos a que cuanto mayor sea dicho número mejor será la aproximación obtenida, siendo que dicha aproximación converge al verdadero valor del área buscada cuando el número de puntos tiende a infinito.

5.2 Ejemplo 2

En este ejemplo aplicaremos el método Monte Carlo para calcular, de manera aproximada, el área del polígono \mathbf{P} del Ejemplo 1. Para ello, emplearemos como recinto superior el cuadrado cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(10, 10)$ y $(0, 10)$, cuyo área es $S = 100$. En la Figura 32 se muestran conjuntamente el polígono \mathbf{P} y el recinto superior que lo contiene.

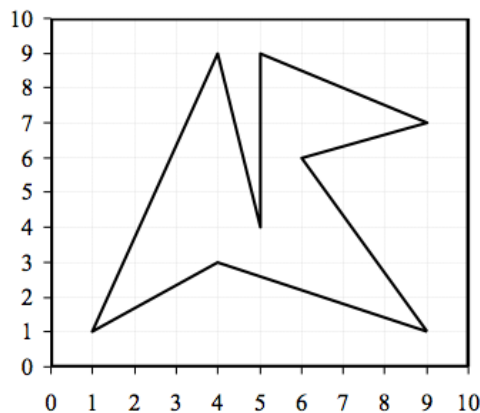


Figura 32: Representación conjunta del polígono \mathbf{P} y el cuadrado de área 100 que lo contiene.

Para mostrar la convergencia de la aproximación con el incremento del número de puntos

seleccionados al azar en el cuadrado que contiene al polígono, en la Figura 33 se muestra un gráfico con el valor estimado para el área del polígono en función del número de puntos seleccionados. Después de haber seleccionado 20000 puntos obtenemos un valor aproximado para el área igual a $28,44u^2$. En apartados posteriores veremos que el verdadero valor del área del polígono es igual a $28,50u^2$.

El problema del método estocástico descrito es la lentitud con la que converge al verdadero valor, ya que para asegurar cada cifra significativa se necesita añadir 10 veces más puntos que los acumulados para asegurar la cifra significativa anterior.

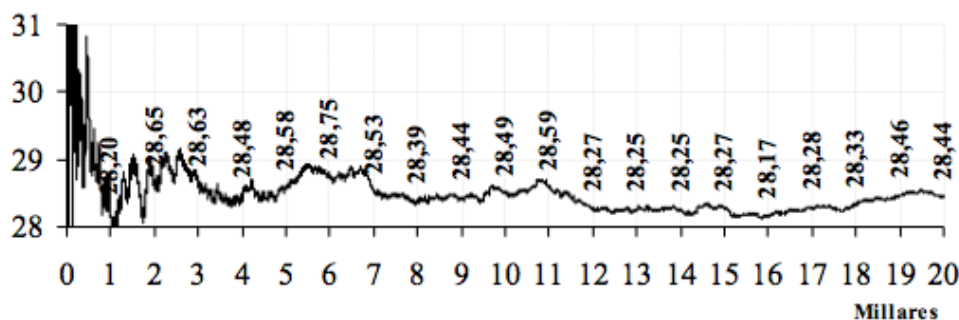


Figura 33: Evolución de la aproximación al área del polígono al aumentar el número de puntos seleccionados al azar en el recinto superior.

Ya hemos mencionado que no daremos detalles adicionales en relación a este método y sólo nos quedaremos con que empleando 20000 puntos seleccionados al azar en el recinto superior hemos obtenido una aproximación al área del polígono igual a $S(\mathbf{P}) \approx 28,44u^2$.

6 Cálculo del área de un polígono estrellado

La definición de polígono estrellado implica la existencia de al menos un punto interior al polígono tal que los segmentos que unen cada vértice del polígono con dicho punto están totalmente incluidos en el interior del polígono, es decir, si definimos el polígono estrellado a partir de la sucesión ordenada de sus vértices $\mathbf{P} = \{P_i\}_{i=1}^n$, siendo $P_i = (x_i, x_{i+1})$, y el punto es $A = (x_A, y_A)$, se verifica que todos los puntos del segmento $[AP_i]$ están en el interior del polígono.

En la Figura 34 podemos ver que si \mathbf{P} es un polígono estrellado con n vértices y A es un punto interior que verifica la propiedad de estar comunicado con todos los vértices del polígono mediante segmentos interiores, todos los triángulos cuyos vértices son A y dos vértices consecutivos del polígono son interiores al polígono. Al triángulo formado por los vértices A, P_i y P_{i+1} lo llamamos \mathbf{T}_i .

Es sencillo ver que $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n\}$ es una partición del polígono, de manera que el área del polígono estrellado es igual a la suma del área de los n triángulos, con lo que un paso previo para construir un procedimiento analítico para calcular el área de un polígono estrellado es elaborar un procedimiento analítico para calcular el área de un triángulo, a partir de sus vértices.

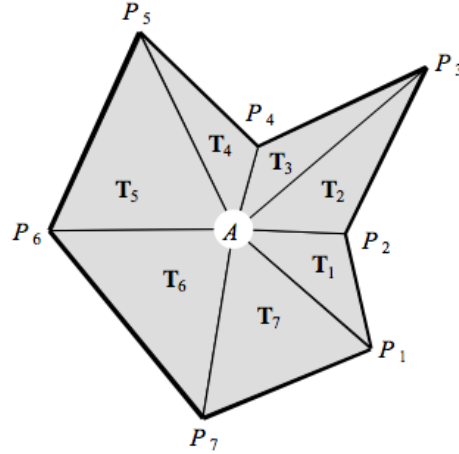


Figura 34: Un polígono estrellado de n vértices se puede dividir en n triángulos a partir de un punto interior al polígono.

6.1 Cálculo del área de un triángulo

Pensamos en un triángulo cualquiera, de entre los n en que hemos dividido el polígono estrellado, el i -ésimo (\mathbf{T}_i), cuyos vértices son los puntos: $\{A, P_i, P_{i+1}\}$. Para calcular el área del triángulo \mathbf{T}_i recurrimos a la conocida fórmula del área de un triángulo: **Área del triángulo** igual a **base** multiplicada por **altura** partido por dos.

Si consideramos como base el segmento $[P_i P_{i+1}]$, la base es igual a la distancia entre ambos vértices:

$$\text{base} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

La altura se calcula como la distancia del vértice A hasta la recta definida por los vértices P_i y P_{i+1} :

$$\text{altura} = d(A, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}).$$

La recta definida por los vértices P_i y P_{i+1} es:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y}{x_{i+1} - x}.$$

Agrupando convenientemente tenemos la ecuación de la recta en forma general:

$$(y_i - y_{i+1})x + (x_{i+1} - x_i)y + (y_{i+1} - y_i)x_{i+1} - (x_{i+1} - x_i)y_{i+1} = 0.$$

Con lo que la altura de \mathbf{T}_i , tomada desde el vértice A , sería:

$$\text{altura} = \frac{(y_i - y_{i+1})x_A + (x_{i+1} - x_i)y_A + (y_{i+1} - y_i)x_{i+1} - (x_{i+1} - x_i)y_{i+1}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}.$$

Al desarrollar la expresión anterior obtenemos:

$$\text{altura} = \frac{x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_A + x_A y_i - y_i x_{i+1} + y_{i+1} x_A + y_A x_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}.$$

De lo anterior concluimos que el área del triángulo \mathbf{T}_i , que denotaremos $S(\mathbf{T}_i)$, es:

$$S(\mathbf{T}_i) = \frac{1}{2} (x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_A + x_A y_i - y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_A - y_A x_i).$$

Se debe notar que la fórmula anterior sólo nos dará un signo positivo para el área si al situarnos en A mirando hacia P_i , y desplazamos la mirada hacia P_{i+1} , el ángulo barrido por la visual es positivo (sentido antihorario). En caso contrario el área obtenida tendría signo negativo.

La expresión de se puede escribir de forma mnemotécnica como:

$$S(\mathbf{T}_i) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & x_i & x_{i+1} & x_A \\ y_A & y_i & y_{i+1} & y_A \end{vmatrix}.$$

La expresión mnemotécnica consiste en indicar las coordenadas de los vértices, repitiendo el primero al final, para indicar el cierre del triángulo, de manera que se suman los productos obtenidos mediante diagonales recorridas en el sentido \searrow y se restan los productos obtenidos mediante diagonales en el sentido \swarrow . A la forma descrita de calcular los productos de las diagonales, sumando o restando el resultado en función del sentido de la diagonal, lo llamamos “productos cruzados”.

6.2 Área del polígono estrellado

Según hemos dicho con anterioridad, el área del polígono estrellado es igual a la suma del área de los n triángulos, es decir, si llamamos \mathbf{P} al polígono y $S(\mathbf{P})$ al área del mismo, se verifica:

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n S(\mathbf{T}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_A + x_A y_i - y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_A - y_A x_i).$$

En la anterior fórmula se debe recordar que $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ es $P_1 = (x_1, y_1)$, para cerrar el polígono.

Si desarrollamos la expresión de $S(\mathbf{P})$, obtenemos:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{P}) &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_A + x_A y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_A - y_A x_1 \\ &+ x_2 y_3 + x_3 y_A + x_A y_2 - y_2 x_3 - y_3 x_A - y_A x_2 \\ &+ \dots \\ &+ x_{n-1} y_n + x_n y_A + x_A y_{n-1} - y_{n-1} x_n - y_n x_A - y_A x_{n-1} \\ &+ x_n y_1 + x_1 y_A + x_A y_n - y_n x_1 - y_1 x_A - y_A x_n) \end{aligned}$$

En la fórmula anterior es fácil apreciar que todos los términos que contienen x_A ó y_A se cancelan, quedando:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \dots x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n + x_n y_1 - y_n x_1).$$

Agrupando los términos que se suman por un lado y los que se restan por otro lado, obtenemos:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots x_{n-1} y_n + x_n y_1) + (-y_1 x_2 - y_2 x_3 - \dots - y_{n-1} x_n + -y_n x_1)].$$

Este resultado se puede resumir de forma mnemotécnica mediante la expresión de “productos cruzados” enunciada anteriormente, según la siguiente expresión:

$$S(\mathbf{P}_i) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

En primera instancia el resultado anterior nos sorprende por su sencillez, ya que no depende del punto A elegido, aunque si reflexionamos esto es lógico, ya que para cualquier punto A del interior del polígono, que esté unido con todos los vértices mediante segmentos interiores al polígono, $S(\mathbf{P})$ debe proporcionarnos el área del polígono, según hemos razonado con anterioridad. Sin embargo, recuperamos la sorpresa si pensamos que el desarrollo que se ha hecho sería el mismo para cualquier punto A que elijamos, incluso si A es un punto exterior al polígono, con lo que hemos encontrado un resultado de gran importancia, ya que disponemos de una expresión extraordinariamente simple para calcular el área de un polígono estrellado a partir de sus vértices especificados de forma correlativa, en sentido antihorario (si disponemos de los vértices ordenados en sentido horario obtenemos el mismo resultado, pero con signo negativo).

Llegados a este punto tiene interés saber si el resultado obtenido puede extenderse a polígonos no estrellados y ese será el objetivo del siguiente apartado.

7 Cálculo del área de un polígono no estrellado

Para tratar de generalizar el resultado anterior a polígonos no estrellados procederemos por el método de **inducción**.

Dado un polígono de n vértices, no necesariamente estrellado, es fácil ver que si lo dividimos en dos polígonos, mediante una diagonal interior, obtenemos dos polígonos con n_1 y n_2 vértices respectivamente, siendo $n_1 < n$, $n_2 < n$ y $n_1 + n_2 = n + 2$. En la Figura 35 se muestra esto para el caso de un polígono con $n = 8$, que se divide en dos polígonos con $n_1 = 4$ y $n_2 = 6$.

Hipótesis de inducción: supongamos que para un número de lados, n , se verifica que para todo polígono con n o menos lados la fórmula (3.6) es válida.

Sea $\mathbf{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n+1}$ un polígono de $n + 1$ lados y sea $[P_j P_k]$ una diagonal interior que dividirá al polígono \mathbf{P} en dos polígonos a los que denotaremos por \mathbf{Q} y \mathbf{R} , respectivamente. \mathbf{Q} tendrá n_1 vértices y \mathbf{R} tendrá n_2 vértices, siendo $n_2 = (n + 2) - n_1$, siendo claro que $n_1 < n$ y $n_2 < n$, pudiendo escribir $\mathbf{Q} = \{P_i\}_{i=j}^k$ y $\mathbf{R} = \{P_i\}_{i=k}^j$.

Por conveniencia renumeramos los vértices, manteniendo el orden correlativo, transformando P_j en P_1 , P_{j+1} en P_2 , y así sucesivamente, de manera que podemos escribir $\mathbf{Q} = \{P_i\}_{i=1}^{n_1}$ y $\mathbf{R} = \{P_i\}_{i=n_1}^{n+1}$.

En la Figura 36 se muestra la renumeración de los vértices para la partición del polígono de la Figura 35.

Es evidente que el área del polígono \mathbf{P} es igual a la suma de las áreas de los polígonos \mathbf{Q} y \mathbf{R} , es decir:

$$S(\mathbf{P}) = S(\mathbf{Q}) + S(\mathbf{R}).$$

Como el número de vértices de \mathbf{Q} y \mathbf{R} es menor que n , aplicando la hipótesis de inducción, obtenemos:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n_1} & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n_1} & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{n_1} & x_{n_1+1} & \dots & x_{n+1} & x_1 & x_{n_1} \\ y_{n_1} & y_{n_1+1} & \dots & y_{n+1} & y_1 & y_{n_1} \end{vmatrix}.$$

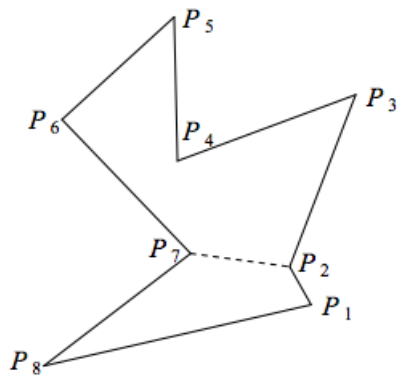


Figura 35: Partición mediante una diagonal interior de un polígono de 8 lados en dos polígonos con 4 y 6 lados, respectivamente.

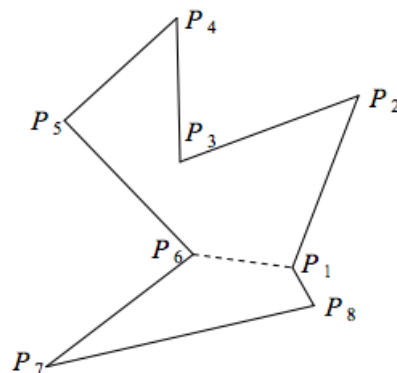


Figura 36: Renumeración de los vértices para hacer coincidir P_1 con uno de los vértices de la diagonal interior que particiona el polígono.

Desarrollando la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{P}) &= S(\mathbf{Q}) + S(\mathbf{R}) \\
 &= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + \mathbf{x_{n_1}y_1} - y_1x_2 - y_2x_3 - \dots - \mathbf{y_{n_1}x_1}) \\
 &+ \frac{1}{2}(x_{n_1}y_{n_1+1}x_{n_1+1}y_{n_1+2} + \dots + x_{n+1}y_1 + \mathbf{x_1y_{n_1}} - y_{n_1}x_{n_1+1}) \\
 &+ \frac{1}{2}(-y_{n_1+1}x_{n_1+2} - \dots - y_{n+1}x_1 - \mathbf{y_1x_{n_1}})
 \end{aligned}$$

En la expresión anterior apreciamos que los términos marcados se anulan, de manera que, reordenando convenientemente, se obtiene:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} [(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_{n+1} + x_{n+1}y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_nx_{n+1} + y_{n+1}x_1)].$$

O, expresado en forma mnemotécnica:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n+1} & y_1 \end{vmatrix}.$$

Que es la fórmula (3.6) aplicada al caso de un polígono con $n + 1$ vértices.

Hemos probado que si la fórmula es válida para un polígono con n vértices, también lo es para un polígono con $n + 1$ vértices y como es evidente que todo polígono de 3, 4 o 5 vértices es estrellado, la fórmula es aplicable a polígonos de hasta 5 vértices y por lo tanto, también lo será para polígonos de 6 vértices y eso nos lleva a la validez para polígonos de 7 vértices y así indefinidamente para polígonos con un número arbitrario de vértices, con lo que concluimos la demostración.

7.1 Ejemplo 3

Para ilustrar el uso de la fórmula que hemos construido calcularemos el área del polígono \mathbf{P} del Ejemplo 1, definido por sus 8 vértices, expresados de forma correlativa como:

$$\mathbf{P} = \{(9, 1), (6, 6), (9, 7), (5, 9), (5, 4), (4, 9), (1, 1), (4, 3)\},$$

Para calcular el área de P empleamos la expresión (3.6), adaptada a los vértices indicados:

$$S(P) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 9 & 6 & 9 & 5 & 5 & 4 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 9 & 4 & 9 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si calculamos los productos cruzados, obtenemos:

$$S(P) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 9 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ -(1 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 5 + 9 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 9) \end{array} \right\} = \frac{57}{2} = 28.5u^2.$$

Es decir, el área del polígono es igual a 28.5 unidades de superficie.

8 Un caso especial: la Fórmula de Pick

Para el caso especial de polígono simple cuyos vértices son puntos de una retícula, como el ejemplo de la Figura 37, existe una fórmula muy simple para el cálculo de su área, debida al Vienés George Alexander Pick, publicada en 1899, con el título: *Geometrisches zur Zahlenlehre*, en la revista *Sitzungberg*, que precisa sólo del número de nodos de la retícula interiores al polígono (I) y del número de nodos de la retícula en el perímetro del polígono (B).[1, 5]

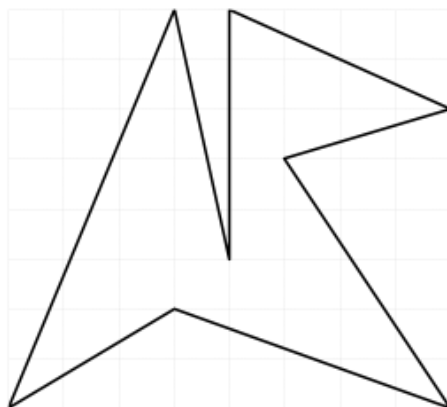


Figura 37: Polígono cuyos vértices son todos puntos de una retícula.

El polígono de la Figura 37 es el mismo que hemos empleado en los Ejemplos 1, 2 y 3, de manera que sabemos que su área es igual a 28.5 unidades de superficie.

La Fórmula de Pick nos dice que para calcular el área del polígono debemos emplear la relación:

$$\text{Área} = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

En la Figura 38 se muestra el recuento del número de puntos interiores y el número de puntos sobre el perímetro, para el polígono de la Figura 37, obteniendo $I = 23$ puntos interiores y $B = 13$ puntos sobre el perímetro, con lo que, aplicando la Fórmula de Pick, obtenemos:

$$\text{Área} = I + \frac{1}{2}B - 1 = 23 + \frac{1}{2}13 - 1 = 28.5u^2.$$

Resultado que coincide con el que habíamos obtenido aplicando la Fórmula del Agrimensor que hemos demostrado.

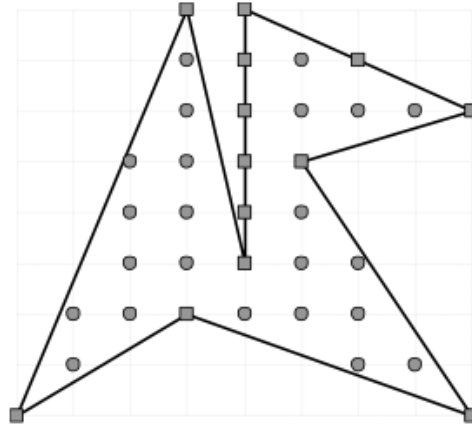


Figura 38: Recuento de puntos interiores (círculos grises) y puntos sobre el perímetro (cuadrados grises) para el polígono de la Figura 37.

9 Algunos ejemplos

En este apartado vamos a demostrar las fórmulas elementales del cálculo de áreas, que son las correspondientes al cuadrado de lado l , al rectángulo de lados a y b , al triángulo cuya base y altura son b y h , respectivamente y el círculo de radio r . Todos los resultados que vamos a probar son conocidos por los estudiantes de primaria y nos van a servir para ilustrar el uso de la Fórmula del Agrimensor.

9.1 Área del cuadrado de lado l

Es fácil ver que el cuadrado de lado l puede especificarse mediante los vértices ordenados en sentido antihorario como: $(0, 0)$, $(l, 0)$, (l, l) y $(0, l)$, según se muestra en la Figura 39, con lo que se obtiene:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & l & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & l & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (l^2 + l^2) = l^2.$$

Que es la conocida fórmula de la geometría elemental para el cálculo del área de un cuadrado de lado l .

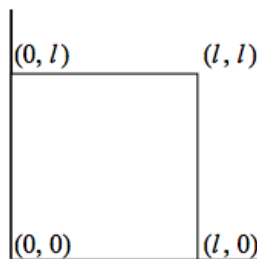


Figura 39: Especificación de un cuadrado de lado l en un sistema de coordenadas.

9.2 Área del rectángulo de lados a y b

Del mismo modo que en el caso del cuadrado, podemos especificar el rectángulo de lados a y b mediante los vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) y $(0, b)$, con lo que se obtiene:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(ab + ab) = ab.$$

Que es la conocida fórmula de la geometría elemental para el cálculo del área de un rectángulo de lados a y b .

9.3 Área del triángulo de base b y altura h

Para especificar el triángulo de base b y altura h , giramos el triángulo hasta conseguir que su base coincida con el eje horizontal del sistema de coordenadas, apoyando uno de los vértices de la base sobre el origen, tal y como se muestra en la Figura 40. Al aplicar la fórmula obtenemos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & b & x & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}bh.$$

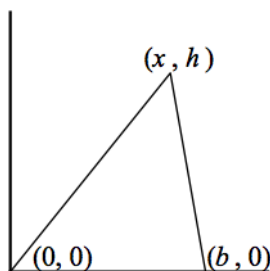


Figura 40: Triángulo con base b y altura h .

Que es la conocida fórmula de la geometría elemental para el cálculo del área de un triángulo de base b y altura h .

9.4 Área de polígono regular de n lados inscrito en circunferencia de radio r

Si, por comodidad, situamos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia, tal y como se muestra en la Figura 41 para el caso en que $n = 6$ (hexágono), el polígono se puede dividir en n triángulos cuyas coordenadas son, para el triángulo i -ésimo:

$$\left\{ (0, 0), \left(r \cos\left(\frac{i-1}{n}2\pi\right), r \sin\left(\frac{i-1}{n}2\pi\right) \right), \left(r \cos\left(\frac{i}{n}2\pi\right), r \sin\left(\frac{i}{n}2\pi\right) \right) \right\}$$

De manera que para calcular el área del polígono multiplicaremos por n el área de uno cualquiera de dichos triángulos, por ejemplo el 1º, para el que $i = 1$:

$$S(\mathbf{P}_n) = \frac{n}{2} \begin{vmatrix} 0 & r \cos(0) & r \cos \frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & r \sin(0) & r \sin \frac{2\pi}{n} & 0 \end{vmatrix} = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}.$$

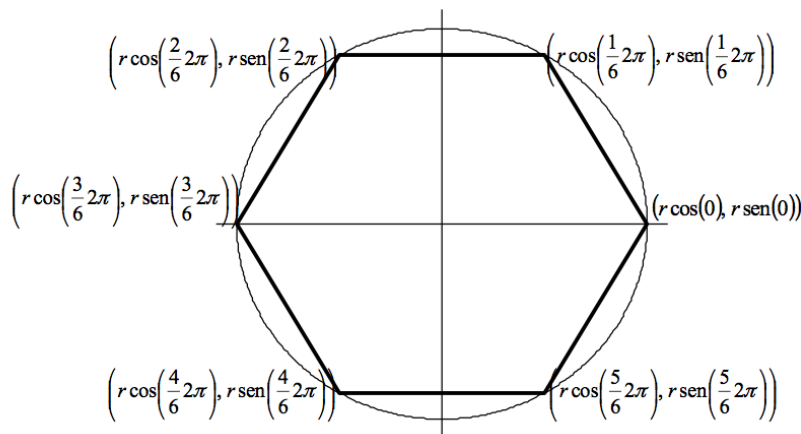


Figura 41: Polígono regular de 6 lados (hexágono) inscrito en una circunferencia de radio r .

Es decir, si denotamos por P_n al polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r , su área vale:

$$S(P_n) = \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}.$$

9.5 Área del círculo de radio r

Es fácil ver que, para el caso del apartado anterior, al incrementar el número de lados del polígono (n) el área del mismo es cada vez más próxima a la de todo el círculo de radio r en que está incluido el polígono, verificándose la igualdad en el límite, cuando n tiende a infinito, es decir:

$$\text{Área círculo de radio } r = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n).$$

Si calculamos dicho límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = \left[\text{cambio} \right]_{x = 1/n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2 \operatorname{sen}(2\pi x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(2\pi x) 2\pi}{2} = \pi r^2.$$

Con lo que hemos probado que el área del círculo de radio r es πr^2 , que es la conocida fórmula de la geometría elemental que se usa a tal efecto.

10 Más allá de los polígonos

Para demostrar la conocida fórmula del área de un círculo de radio r hemos llevado al límite el concepto de polígono regular de n lados. En este apartado haremos algo similar para curvas expresadas en forma paramétrica, es decir, empleando dos funciones dependientes de un mismo parámetro para indicar las coordenadas de los puntos que definen la curva.

El ejemplo más conocido de curva cerrada en forma paramétrica es la circunferencia, que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(t) \\ y &= r \operatorname{sen}(t) \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi].$$

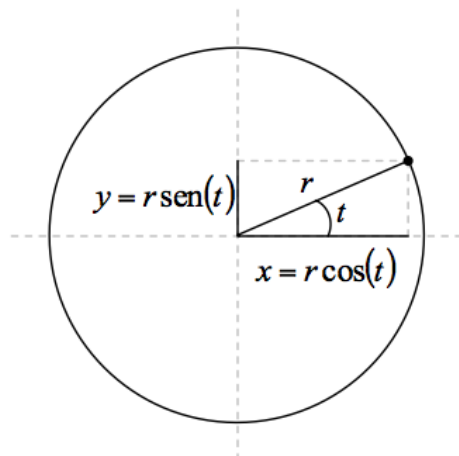


Figura 42: Circunferencia de radio r expresada en forma paramétrica.

En la Figura 42 se muestra la circunferencia expresada en forma paramétrica. En general se puede expresar una curva en forma paramétrica mediante la expresión:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad t \in [a, b].$$

Si la curva expresada en forma paramétrica es cerrada podemos aproximar su área mediante un polígono cuyos vértices son un subconjunto de los puntos de la curva, siendo tanto mejor la aproximación cuanto mayor sea el número de puntos que incluimos en el polígono, siendo que, en el límite, la aproximación sería perfecta.

La fórmula presentada para calcular el área de un polígono a partir de sus vértices especificados en el orden que resulta de recorrer el perímetro del polígono en sentido antihorario:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix}.$$

Puede escribirse como:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right).$$

Es decir,

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Abusando de la notación, si hacemos el salto de lo discreto a lo continuo, cambiando el sumatorio por una integral, expresando los puntos de la curva en forma paramétrica y desarrollando los determinantes, obtenemos:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y(t+dt) - y(t)x(t+dt)).$$

Aplicando el teorema del valor medio,

$$y(t+dt) = y(t) + y'(t)dt,$$

y, análogamente,

$$x(t + dt) = x(t) + x'(t)dt,$$

Con lo que resulta:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t)dt - \int_a^b y(t)x'(t)dt).$$

Aplicando el método de integración por partes y teniendo en cuenta que $x(a) = x(b)$ e $y(a) = y(b)$, por ser la curva cerrada, es fácil comprobar que:

$$\int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b x'(t)y(t)dt.$$

De donde podemos escribir:

$$S(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t)dt,$$

o, equivalentemente,

$$S(\mathbf{P}) = -\frac{1}{2} \int_a^b x'(t)y(t)dt.$$

10.1 Ejemplo 4: área del círculo de radio r

Vamos a aplicar la expresión integral anterior para volver a demostrar la conocida fórmula del área de un círculo de radio r .

A partir de la expresión de los puntos de una circunferencia de radio r en forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(t) \\ y &= r \operatorname{sen}(t) \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\text{Área círculo de radio } r = \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(t)dt = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt.$$

Es decir,

$$\text{Área círculo de radio } r = \frac{r^2}{2} \left[t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2} 2\pi = \pi r^2.$$

Con lo que hemos probado de nuevo que el área del círculo de radio r es πr^2 , que es la conocida fórmula de la geometría elemental que se usa a tal efecto.

Referencias

- [1] Blatter, C. Another proof of Pick's theorem, *Math. Mag.* 70 (1997) 200.
- [2] Bockman, S.F. Generalizing the Formula for Areas of Polygons to Moments. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 96, Number 2 (Feb., 1989), pp.131–132.
- [3] Braden, B. The Surveyor's Area Formula. *The College Mathematics Journal*, September 1986, Volume 17, Number 4, pp. 326–337.
- [4] Lopshits, A.M.. Computation of areas of oriented figures. D C Heath and Company: Boston, MA, 1963.
- [5] Stewart, I. ¿Cuántas cabras hay en el huerto? *Investigación y Ciencia*: 165-Junio 1990.
- [6] Stone, M.G. A Mnemonic for Areas of Polygons. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 93, Number 6 (Jun.-Jul., 1986), pp.479–480.
- [7] Strang, G. Polar Area is the Average of Strip Areas. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 100, Number 3 (Mar., 1993), pp.250–254.

