

Propuesta de modelización: Reflexión de ondas por una superficie rugosa

L.M. Garcia-Raffi

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

lmgarci@mat.upv.es

V. Romero-García

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

virogar1@mat.upv.es

Abstract

Dentro del marco de los nuevos planes de estudio, donde el activo del aprendizaje es el alumno, se propone una práctica de modelización para trabajar conceptos básicos de matemáticas y física en los primeros cursos Universitarios. La práctica consiste en la modelización de la reflexión de ondas por superficies rugosas. En un primer estadio de la práctica se analiza la reflexión por una superficie totalmente plana usando conceptos geométricos y físicos. La onda reflejada por la superficie plana se calcula a partir de las ondas emitidas por una fuente virtual colocada en la posición totalmente simétrica a la posición de la fuente respecto a la superficie especular. Para el cálculo de la onda reflejada se introducen conceptos de probabilidad. La reflexión de la onda por una superficie rugosa se obtiene a partir de las ondas emitidas por diferentes fuentes virtuales para cada punto de reflexión. Cursos de arquitectura y de ingeniería básica, o incluso algún máster de acústica, son marcos excepcionales para la aplicación de esta práctica.

Within the framework of the new curriculum, where active learning is the student, we propose a practice of modelling in science education to work with basics of mathematics and physics. The practice involves the modelling of wave reflection by rough surfaces. In a first stage, the reflection is analysed by a completely flat surface using geometric and physical concepts. The wave reflected from the surface is calculated from the waves emitted by a virtual source placed at the position symmetrical to the source position with respect to the mirror surface. To calculate the reflected wave, probability concepts are introduced. The wave reflection by a rough surface is obtained from the waves emitted by different sources for virtually every point of reflection. Courses in architecture and basic engineering, or even a master of acoustics are exceptional framework for the implementation of this practice.

Keywords: Reflexión, Método de las imágenes virtuales, Transformada de Box-Muller, Método Monte Carlo.

1 Introducción

En el marco del espacio europeo de educación superior, las especialidades desaparecen dando lugar a los grados, con la consecuente reducción de docencia en ciencias básicas. Dentro de las enseñanzas básicas de matemáticas en las Ingenierías, los conceptos trigonométricos y la geometría del plano aparecían en muchas de las titulaciones. Además, dentro de los temarios de Física General y Mecánica, existen numerosos ejemplos de modelos geométricos cuya comprensión reside en la correcta interpretación de los elementos geométricos que modelan la situación [1]. Un ejemplo canónico de este tipo de modelos lo representa la óptica de rayos que aparece de nuevo en contextos tan diversos como la óptica geométrica o la acústica básica.

En el caso que analizaremos en este trabajo tomaremos el ejemplo de la Acústica de rayos como una forma de dar significado a muchos conceptos de geometría como pueda ser la relación entre eje de simetría y reflexión especular o fuente y haz de rectas que pasan por un punto, así como el concepto de envolvente. Con estas ideas sencillas podemos cubrir varios objetivos: Dar un significado físico a conceptos abstractos de geometría, dar a determinados conceptos de la Física un referente geométrico y por tanto una representación conceptual muy ostil para los estudiantes a la hora de abordar problemas relacionados con este contexto. Además este referente geométrico será de utilidad a la hora de hacer ver a los estudiantes la limitación del modelo y la necesidad de realizar ampliaciones del mismo.

En este trabajo se plantea una práctica que consiste en la modelización de la reflexión por una superficie. En un primer estadio, el modelo geométrico permite el análisis de la reflexión por una superficie totalmente plana. La onda reflejada por la superficie plana se calcula a partir de las ondas emitidas por una fuente virtual colocada en la posición totalmente simétrica a la posición de la fuente respecto a la superficie especular [2]. La segunda parte de la práctica consiste en la mejora del modelo geométrico inicial para reproducir la reflexión por una superficie rugosa. Esto abre la posibilidad de abordar el problema determinista por uno de naturaleza estocástica, reformulado en términos de los Métodos de Monte Carlo [3]. A pesar de que estos métodos, abordados en toda su profundidad, superan con mucho los contenidos de estadística básica que pueda disponer un alumnos de los primeros cursos, al igual que pasa con otras técnicas matemáticas, aprovechamos la oportunidad para introducir de manera sencilla la esencia del método: Inventar juegos para el cálculo de magnitudes. Así, casi jugando, reformulamos el problema en una situación donde la acústica de rayos de per se no puede ser aplicada y recuperamos de esta manera y para este caso, parte de la intuición geométrica subyacente. La reflexión de la onda por una superficie rugosa se obtiene a partir de las ondas emitidas por diferentes fuentes virtuales, una para cada punto de reflexión. Mediante el sorteo, para cada punto de reflexión, se determina una fuente virtual desplazada respecto a la posición simétrica de la fuente real y se determina la envolvente de todas las ondas emitidas para cada punto de reflexión, obteniendo el frente de ondas de la onda reflejada.

Por otra parte, para la programación del problema utilizaremos uno de los programas más utilizados en el mundo de la ingeniería y de la ciencia en general, MATLAB[®] [4]. Este programa presenta diversos paquetes que pueden ser de mucha utilidad para los alumnos.

2 Definición del problema

Consideremos una fuente puntal situada en la posición (x_s, y_s) . Estamos interesados en estudiar la reflexión de rayos emitidos desde la fuente hacia una superficie que ocupa la región $S =$

$[x_0, x_N]$. Suponemos que la velocidad de propagación de la onda en el medio es c . Se puede diferenciar aquí entre ondas mecánicas, las que necesitan de un medio para su propagación, de las ondas electromagnéticas que no necesitan un medio para propagarse, pudiendo hacerlo incluso en el vacío. Estudiaremos la reflexión de ondas por una superficie en dos casos: cuando la superficie es totalmente lisa y cuando es rugosa.

La aproximación utilizada para el problema es la reflexión de rayos por la superficie. Consideraremos que la fuente emite N rayos, cada uno de los cuales es reflejado por un punto de la superficie S . Por tanto, la superficie de reflexión estará dividida en N puntos. La envolvente de la onda reflejada estará configurada por la unión de los puntos de cada rayo de hayan recorrido la misma distancia. En la figura 1 se puede ver la visión esquemática del problema.

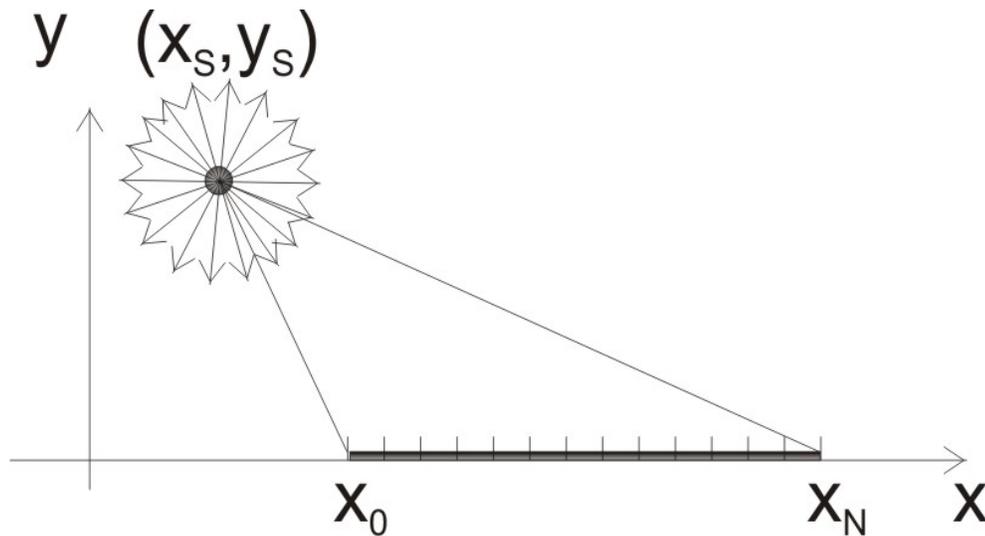


Figura 1: Visión esquemática del problema analizado en esta práctica.

2.1 Onda incidente

Para cada punto de la superficie reflectante suponemos que la fuente emite un rayo. Aquí introducimos, por una parte, el concepto de recta como línea que une dos puntos del espacio (la fuente y el punto de reflexión). Y por otra, el de descomposición de vectores en sus proyecciones sobre los ejes de un sistema de referencia. Además, para determinar la evolución de cada rayo en el espacio, introducimos el concepto de movimiento rectilíneo y uniforme (MRU).

Cada rayo viene determinado por una MRU con velocidad $\vec{c} = (v_{ix}, v_{iy})$, cuyo módulo es la velocidad de propagación de la onda, $c = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$, donde el subíndice i indica que corresponde a la velocidad incidente, y los subíndices x e y las proyecciones del vector \vec{c} en el sistema formado por los ejes XY (ver figura 1). La descomposición en cada componente de la velocidad, viene determinada por el punto de reflexión $(x_i, 0)$ y la posición de la fuente, de forma que:

$$v_{ix} = c \sin(\theta) = \frac{x_i - x_s}{\sqrt{y_s^2 + (x_i - x_s)^2}}, \tag{15.1}$$

$$v_{iy} = c \cos(\theta) = \frac{y_s}{\sqrt{y_s^2 + (x_i - x_s)^2}}. \tag{15.2}$$

Por tanto, el movimiento del rayo i viene determinado por las siguientes ecuaciones:

$$x = v_{ix}t + x_s, \quad (15.3)$$

$$y = -v_{iy}t + y_s. \quad (15.4)$$

La figura 2 muestra la onda incidente sobre una superficie que cubre la región $[20, 100]$ m desde una fuente situada en el punto $(10, 100)$ m. La velocidad de la onda es $c = 100$ m/s.

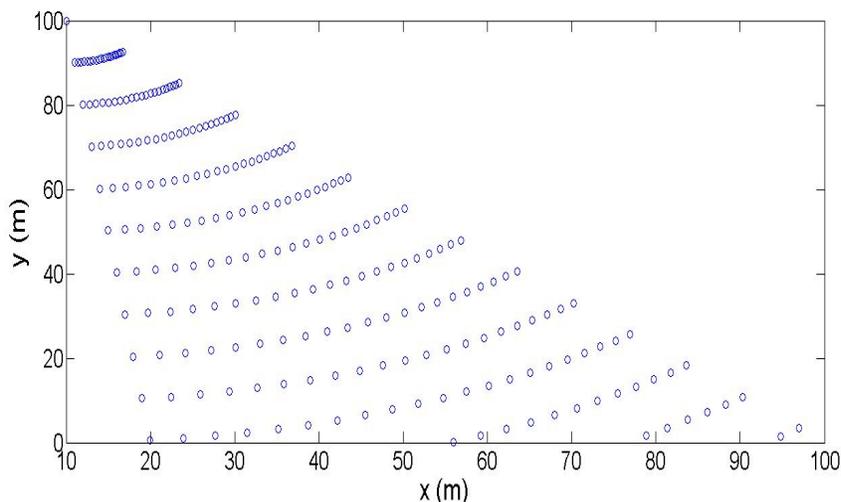


Figura 2: Onda incidente sobre la superficie $[20,100]$ m desde una fuente situada en el punto $(10, 100)$ m.

2.2 Caso 1: Onda reflejada por una superficie lisa

La reflexión de un rayo en un punto de una superficie viene determinada por la ley de Snell, que concluye que el ángulo que forma el rayo reflejado respecto de la normal en el punto de reflexión, es el mismo que el que formaba la onda incidente con la normal en ese punto. Si la superficie es totalmente lisa, sabemos que las normales en todos y cada uno de los puntos de reflexión van a presentar el mismo sentido en cada uno de los puntos de reflexión, y que van a ser normales en cada uno de ellos. Otro mecanismo posible para el cálculo de la onda reflejada es substituir la superficie por una fuente que emite la onda reflejada, es decir, podemos substituir el efecto de la superficie, por una fuente virtual situada en una posición (x'_s, y'_s) , totalmente simétrica a la posición de la fuente real respecto del eje X. La figura 3a muestra estas aproximaciones para el caso de superficie totalmente lisa.

Si consideramos esta segunda posibilidad, que la onda reflejada está constituida por los rayos que emite una fuente puntual virtual, situada en el punto $(x'_s, y'_s) = (x_s, -y_s)$. Los rayos que surgen de esta fuente siguen las siguientes ecuaciones:

$$x = v_{ix}t + x_s, \quad (15.5)$$

$$y = v_{iy}t - y_s. \quad (15.6)$$

Para calcular el frente de onda de la onda reflejada, introducimos el concepto de envolvente de una onda. El conjunto formado por los puntos de cada rayo tales que todos han estado viajando el mismo tiempo por el espacio, se denomina envolvente, y determina el frente de ondas de la

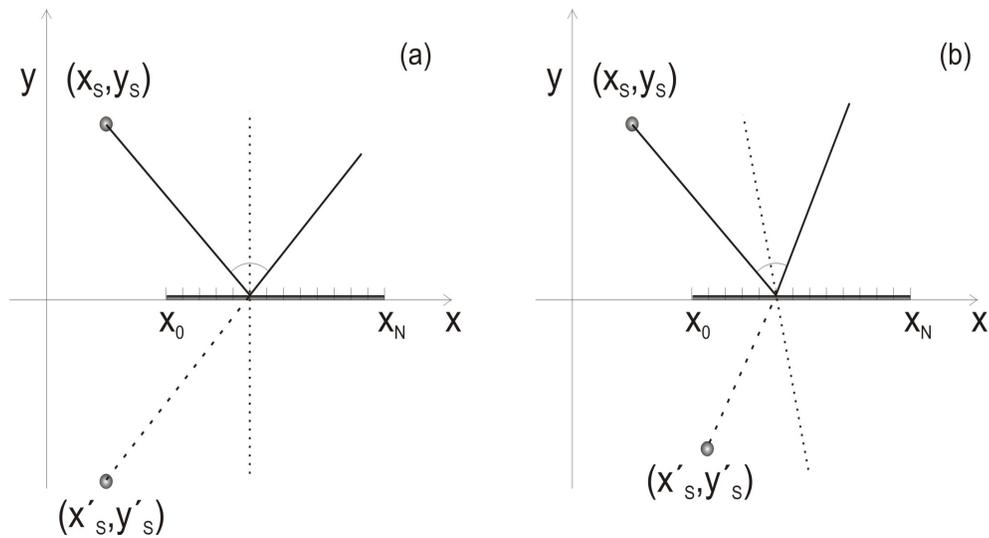


Figura 3: Esquema de los modelos elegidos en esta práctica para analizar la reflexión por superficies tanto lisas (a) como rugosas (b).

onda en un instante determinado. La Figura 5 muestra la onda reflejada por una superficie lisa en el intervalo $[20, 100]$ m. La fuente virtual está colocada en el punto $(10, -100)$ m. La envolvente en está marcada con una línea roja.

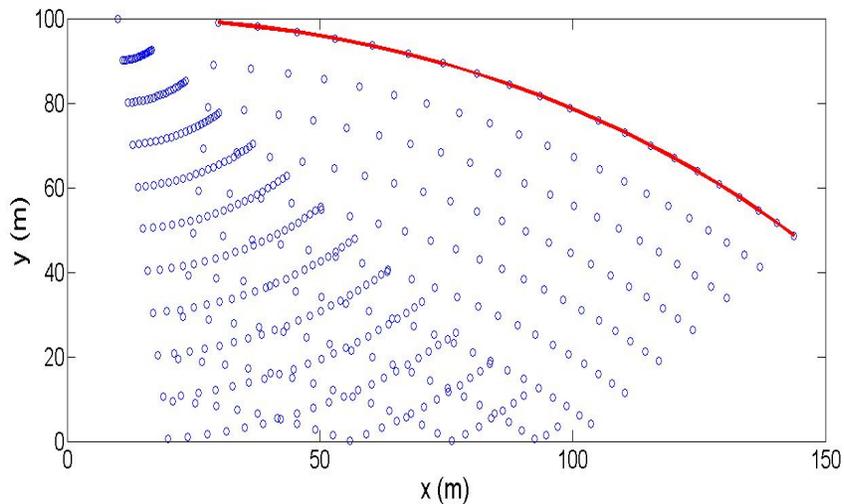


Figura 4: Onda reflejada por una superficie lisa situada en el intervalo $[20, 100]$ m. La fuente está situada en el punto $(10, 100)$ m.

2.3 Caso 2: Reflexión por una superficie rugosa

Se plantea aquí una aproximación a la realidad de la situación anterior. Efectivamente, en la el mundo real son pocas las superficies totalmente lisas, si bien es cierto que muchas se pueden considerar como lisas, otras están muy lejos de serlo, precisamente porque presentan un perfil que se aleja mucho de la superficie lisa.

En una superficie rugosa, al contrario que en la lisa, las normales en cada punto presentan sentidos diferentes, y por tanto cada rayo va a ser reflejado en un sentido diferente, de forma que la envolvente de la onda va cambiar respecto a la situación de la superficie rugosa.

Para modelar el comportamiento de la superficie rugosa, podríamos seguir diversos caminos, pero entre ellos, nosotros destacamos dos. El primero consistiría en el sorteo aleatorio del ángulo de la normal en cada punto, de forma que en cada punto la rugosidad viene determinada por las diferentes normales a lo largo de la superficie. Otra posibilidad, y que es la que vamos a desarrollar aquí, consiste en que la onda reflejada está constituida por diversas fuentes virtuales, una para cada punto de reflexión, situadas en posiciones diferentes a la totalmente simétrica a la fuente.

Para ello seguimos el siguiente procedimiento [3]:

Una variable aleatoria X presenta una distribución normal si su función de distribución de probabilidades es

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (15.7)$$

y se denomina $N(\mu, \sigma^2)$. Donde μ es la media y σ es la varianza.

Dado que $X = \mu + \sigma Z$, donde Z es la variable standard normal determinada por $N(0, 1)$. La transformación inversa de la distribución normal no puede aplicarse y debemos utilizar diversos mecanismos para aplicarla. Una posibilidad es la aplicación de la transformación de Box and Muller [3]. Probemos que, si U_1 y U_2 son dos variables independientes y generadas aleatoriamente, generadas en el dominio $[0, 1]$, entonces las variables

$$Z_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2), \quad (15.8)$$

$$Z_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\sen(2\pi U_2), \quad (15.9)$$

son independientes y siguen la distribución normal. Para ver esto, representemoslas como:

$$Z_1 = \sqrt{-2V}\cos(2\pi U), \quad (15.10)$$

$$Z_2 = \sqrt{-2V}\sen(2\pi U), \quad (15.11)$$

donde $V = -\log(U_1)$ y $U = U_2$. Es fácil de ver que:

$$Z_1^2 + Z_2^2 = 2V, \quad (15.12)$$

$$Z_2/Z_1 = \tan(2\pi U). \quad (15.13)$$

Podemos calcular el Jacobiano de la transformación, y ver que vale $J = -\frac{1}{2\pi}$. Con esto la función de distribución de probabilidad de las dos variables independientes es

$$f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = f_{u,v}(u, v)|J| = \frac{1}{2\pi}e^{-(z_1^2+z_2^2)/2}, \quad (15.14)$$

que sigue una desviación normal standard.

Queremos que Z_1 i Z_2 presenten una media igual a 1, por tanto, lo que hacemos es $Z'_i = Z_i + 1$ con $i = 1, 2$. Con estos valores, la posición de la fuente virtual para el rayo i es $x'_s = Z_1 x_s$ i $y'_s = Z_2 y_s$.

La variación de la posición de la fuente virtual se traduce en que las componentes de la velocidad para el movimiento de cada rayo, varía para cada rayo. Las componentes de la velocidad del

rayo i toma las siguientes posiciones:

$$v_{ix}^r = c \frac{x_i - x_s Z_1}{(\sqrt{(y_s Z_2)^2 + (x_i - x_s Z_1)^2})} \tag{15.15}$$

$$v_{iy}^r = c \frac{y_s Z_2}{(\sqrt{(y_s Z_2)^2 + (x_i - x_s Z_1)^2})}. \tag{15.16}$$

$$\tag{15.17}$$

Por tanto, las ecuaciones de los rayos reflejados son:

$$x = v_{ix}^r t + x'_s, \tag{15.18}$$

$$y = v_{iy}^r t - y'_s. \tag{15.19}$$

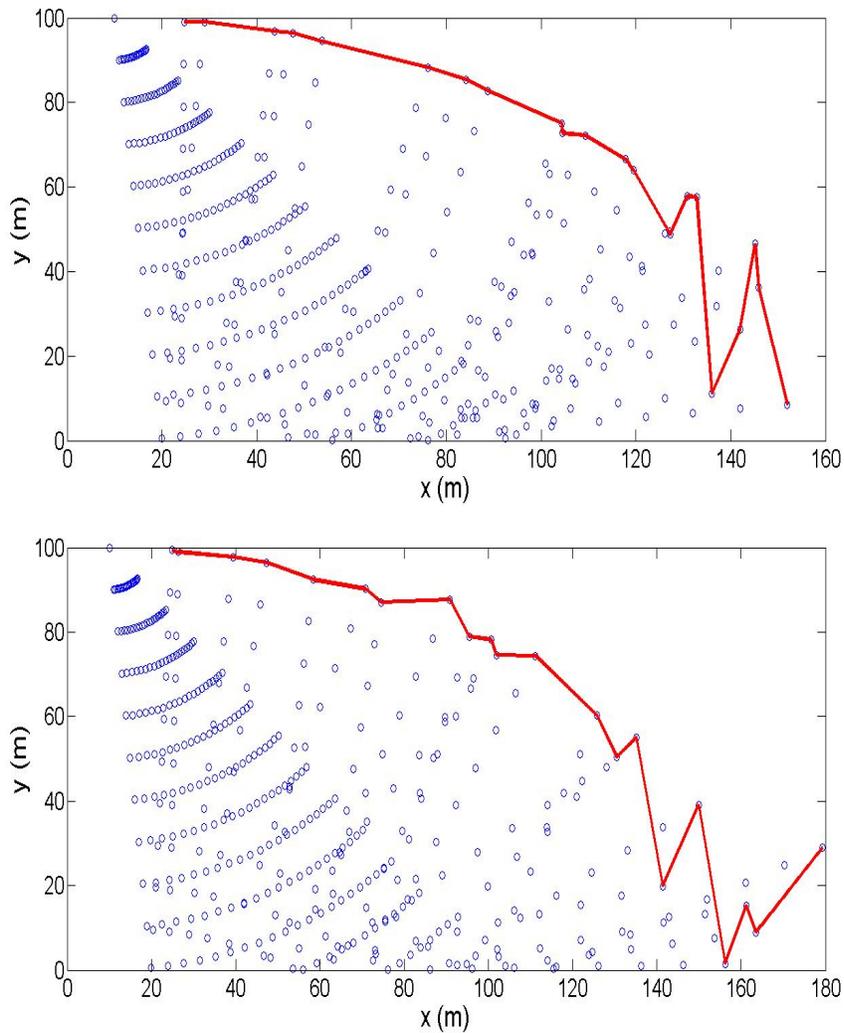


Figura 5: Dos ejemplos de onda reflejada para una superficie rugosa en el intervalo [20,100]m. La fuente está situada en el punto (10,100)m.

La figura 5 muestra la onda reflejada para una superficie rugosa en el intervalo [20,100]m. La fuente está situada en el punt (10,100)m. La velocidad de la onda es $c = 100m/s$.

Podemos ver que el frente de ondas queda bastante desfigurado respecto a la reflexión por una superficie lisa. Esto es lo que se denomina reflexión difusa de ondas. La onda incide sobre una superficie y es reflejada en todas las direcciones creando un frente de ondas difuso.

3 Conclusiones

La reflexión de ondas por superficies lisas y rugosas son presentadas aquí como un ejemplo de modelización de situaciones reales para introducir conceptos básicos de física y matemáticas en los primeros cursos Universitarios. Desde el punto de vista de matemáticas se introducen conceptos como la descomposición de vectores en componentes de un sistema de referencia, las ecuaciones de la recta, distribuciones normales, entre otros muchos que son de carácter fundamental en una carrera ciencias o tecnología. Por otra parte, conceptos básicos de física, como el movimiento rectilíneo uniforme, composición de movimientos, ley de Snell, también son introducidos en la práctica. Mejoras de la práctica se pueden plantear como ejercicios adicionales, como por ejemplo el diseño de diferentes superficies rugosas con diferente grado de rugosidad. Son muchas las posibilidades que introduce esta práctica para introducir conceptos fundamentales de física y matemáticas.

4 Programación en MATLAB[©]

4.1 Superficie lisa

```
%Puntos de reflexión
x0=20;
xN=100;
xstep=20;
X = x0 : (xN - x0)/xstep : xN;

for j=1:length(X)

% Variables
t0 = 0;
tN = 2;
tstep = 20;
T = t0 : (tN - t0)/tstep : tN;

%Velocidad de la onda
c = 100;

%Posición de la fuente
xs = 10;
ys = 100;

%velocidades
```

```

vx = c * ((X(j) - xs)/(sqrt(ys^2 + (X(j) - xs)^2)));
vy = c * (ys/(sqrt(ys^2 + (X(j) - xs)^2)));

```

```

%Tiempos de reflexión
t = abs(ys/vy);

```

```

%Posiciones
for i=1:length(T)
if T(i) <= t
x(i) = vx * T(i) + xs;
y(i) = -vy * T(i) + ys;
else
x(i) = vx * T(i) + xs;
y(i) = vy * T(i) - ys;
end
end

```

```

xf(j) = x(length(T));
yf(j) = y(length(T));

```

```

scatter(x, y, 'ob'); holdon endplot(xf, yf)

```

4.2 Superficie rugosa

```

%Puntos de reflexión
x0 = 20;
xN = 100;
xstep = 20;
X = x0 : (xN - x0)/xstep : xN;

```

```

for j=1:length(X)

```

```

% Variables
t0 = 0;
tN = 2;
tstep = 20;
T = t0 : (tN - t0)/tstep : tN;

```

```

%Velocidad de la onda
c = 100;

```

```

%Posición de la fuente
xs = 10;
ys = 100;

```

```
%velocidades
```

```
 $vx = c * ((X(j) - x_s) / (\text{sqrt}(y_s^2 + (X(j) - x_s)^2)));$ 
```

```
 $vy = c * (y_s / (\text{sqrt}(y_s^2 + (X(j) - x_s)^2)));$ 
```

```
%Tiempos de reflexión
```

```
 $t = \text{abs}(y_s / vy);$ 
```

```
% Transformación de Box-Muller
```

```
 $r = \text{rand}(1, 2); n = \text{sqrt}(-2 * \log(r(1, 1))) * [1, 1]. * [\cos(2 * \pi * r(1, 2)), \sin(2 * \pi * r(1, 2))];$ 
```

```
 $n = n + 1;$ 
```

```
%velocidades onda reflejada
```

```
 $vx_r = c * ((X(j) - x_s * n(1)) / (\text{sqrt}((y_s * n(2))^2 + (X(j) - x_s * n(1))^2));$ 
```

```
 $vy_r = c * \text{abs}((y_s * n(2)) / (\text{sqrt}((y_s * n(2))^2 + (X(j) - x_s * n(1))^2));$ 
```

```
 $t_r = \text{abs}(y_s * n(2) / vy_r);$ 
```

```
%Posiciones
```

```
for  $i = 1 : \text{length}(T)$ 
```

```
if  $T(i) \leq t$ 
```

```
 $x(i) = vx * T(i) + x_s;$ 
```

```
 $y(i) = -vy * T(i) + y_s;$ 
```

```
end
```

```
if  $T(i) > t$ 
```

```
 $x(i) = vx_r * (T(i) + (t_r - t)) + \text{abs}(x_s * n(1));$ 
```

```
 $y(i) = vy_r * (T(i) + (t_r - t)) - \text{abs}(y_s * n(2));$ 
```

```
end
```

```
end
```

```
 $x_f(j) = x(\text{length}(T));$ 
```

```
 $y_f(j) = y(\text{length}(T));$ 
```

```
 $\text{scatter}(x, y, 'ob');$ 
```

```
hold on
```

```
end
```

```
 $X_f = [x_f, y_f];$ 
```

```
 $X_f = \text{sortrows}(X_f, 1);$ 
```

```
 $\text{plot}(X_f(:, 1), X_f(:, 2))$ 
```

Referencias

- [1] Sánchez-Pérez, E.A., Garcia-Raffi, L. M., Sánchez-Pérez, J. V. Introducción a las Técnicas de Modelización para la enseñanza de la Física y las Matemáticas en los primeros cursos de Ingeniería. *Enseñanza de las Ciencias* **17(1)** (1999), pp. 119-129.
- [2] A. P. French, *Vibraciones y Ondas* Editorial Reverté S. A. Barcelona (1974).
- [3] R.Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley Series in probability and mathematical statistics. Canada, 1981.
- [4] Brian R. Hunt, Ronald L. Lipsman, Jonathan M. Rosenberg, with Kevin R. Coombes, John E. Osborn, and Garrett J. Stuck, *A guide to MATLAB[®]: for beginners and experienced users*. Cambridge University Press. Cambridge (2001).

