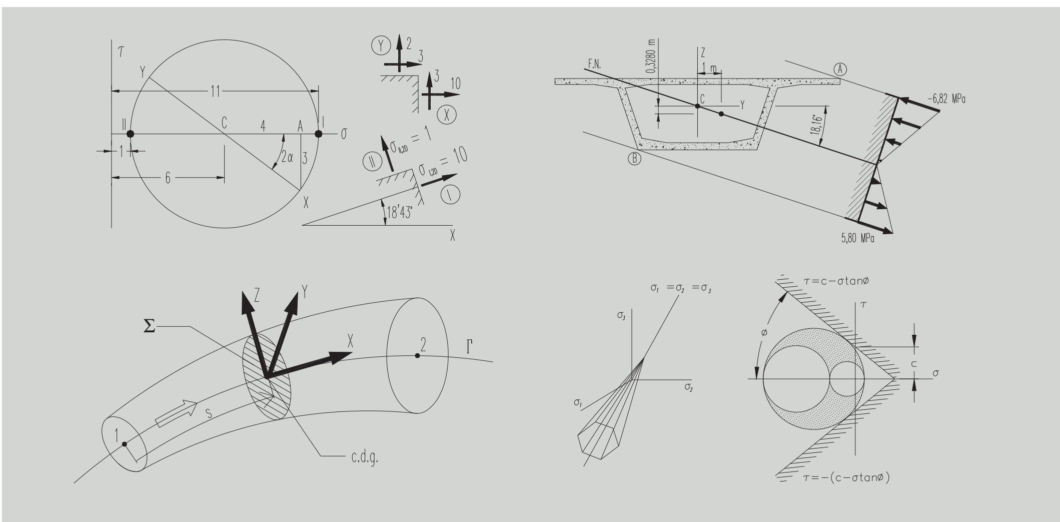
ELEMENTOS DE MECÁNICA DE LOS SÓLIDOS DEFORMABLES

Josep Casanova Colon



Editorial Universitat Politècnica de València

Elementos de mecánica de los sólidos deformables

Josep Casanova Colon

2018

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección *Manual de Referencia*

Los contenidos de esta publicación han sido evaluados mediante el sistema *doble ciego*, siguiendo el procedimiento que se recoge en http://bit.ly/Evaluacion_Obras

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Casanova Colon, Josep (2018). *Elementos de mecánica de los sólidos deformables.* Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© Josep Casanova Colon

© 2018, Editorial Universitat Politècnica de València
distribución: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0617_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-631-3
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es.

Impreso en España

A María

Prólogo

Si no viere en sus manos la señal de los clavos, y metiere mi dedo en el lugar de los clavos, y metiere mi mano en su costado, no creeré.

(Juan, 20:25)

Este libro, en primer lugar, pretende ser un texto introductorio de Mecánica de los Sólidos Deformables, dirigido a estudiantes de grado y pensado para que constituya su primer contacto con la materia. En segundo lugar, trata de ser un manual de referencia donde estos mismos estudiantes, los de postgrado o cualquier profesional que necesite recordarlos, encuentren los conceptos y resultados más importantes —no sólo los que tienen cabida en un curso elemental— de la formulación lineal del problema del sólido deformable, explicados con claridad y justificados con suficiente rigor. En su planteamiento, recoge las conclusiones de mí ya larga experiencia en la impartición de asignaturas relacionadas con la Mecánica, la Elasticidad, la Resistencia de Materiales y el Cálculo de Estructuras.

La cita del evangelio de Juan figura arriba porque pienso que debería estar grabada en el frontispicio de todas las universidades. Considero una obligación científica dudar de cualquier resultado que no se haya demostrado, y una obligación profesional y moral del profesor transmitir a los estudiantes que la ciencia lo es porque se basa en argumentos, ensayos o razonamientos que la comunidad científica puede entender y repetir. Lamentablemente, hoy, la confluencia de varios factores hace que la aceptación acrítica de ideas, procedimientos y resultados sea una actitud demasiado extendida entre los estudiantes universitarios. Entre tales factores cabe citar una docencia más centrada en los métodos que en los conceptos y en su justificación, una evaluación convertida en una retahíla de trabajos apresurados y repetitivos, el acceso inmediato y casi sin trabajo a cualquier información vía *Internet* —incluida la que debería haber sido fruto del esfuerzo del estudiante—, la calidad dudosa o no contrastada de la misma… y, también, el propio entorno social, que tiende a aceptar sin discusión ni contraste las aseveraciones más variopintas.

Convencido de que la aceptación sin pruebas de cualquier proposición es una lacra que debemos desterrar de la Universidad, he tratado de dar una demostración suficiente de cada uno de los resultados que se presentan en el texto, para que cualquier estudiante pueda comprobar por sí mismo que esos teoremas y esas propiedades que tantas veces se le están dando sin justificar son el resultado de una deducción matemática rigurosa, que no los sostiene el argumento de autoridad sino la razón. Renunciar a basar el conocimiento en la justificación teórica o experimental sería volver épocas oscuras, en las que se daba preeminencia a la fe o la tradición sobre la evidencia científica.

Antes de presentar el contenido del texto, creo necesario justificar el título, *Elementos de mecánica de los sólidos deformables*. En primer lugar, he escogido la palabra *elementos* más en la primera acepción del Diccionario de la Real Academia Española, «parte constitutiva o integrante de algo», que en la novena «fundamentos y primeros principios de las ciencias y artes», sin descartar totalmente esta última. El libro se ocupa de elementos de Mecánica de Sólidos Deformables porque presenta los fundamentos de la misma, pero también porque sólo trata de una parte del amplísimo campo que podríamos englobar bajo ese título. Trata de los principios y resultados fundamentales de la formulación tridimensional de la Mecánica de Sólidos Deformables, haciendo especial hincapié en la Elasticidad Lineal, y del planteamiento unidimensional de la misma —Teoría de Vigas—, pero omite el desarrollo de problemas particulares (extensión, flexión, torsión, tensión y deformación plana…) en el primer caso, y la aplicación a estructuras o cualquier planteamiento no lineal en el segundo. Tampoco aborda los modelos bidimensionales —placas y láminas—.

Siguiendo con el título, he escogido *Mecánica de los Sólidos Deformables* y no del sólido deformable, como parece aconsejar la afinidad con la Mecánica del Sólido Rígido, porque mientras el modelo matemático de sólido rígido es uno, el que mantiene la distancia entro dos partículas cualesquiera, pueden considerarse muchos modelos de sólidos deformables, en función de cómo varíe tal distancia: modelos elásticos, plásticos, viscosos, posibles subdivisiones en cada una de estas categorías, modelos elastoplásticos, visco-elásticos… Creo que esta característica exige el plural.

Paso a describir brevemente el contenido del texto. En ocasiones destacaré alguna parte de algún tema, no porque sea la más importante sino porque aporta algún planeamiento poco convencional en este tipo de textos, o simplemente porque la valoro especialmente, le he tomado cariño.

La primera parte del texto, constituida por los cinco primeros temas, se dedica a los modelos tridimensionales en Mecánica de los Sólidos Deformables. El primer tema presenta ideas previas y conceptos generales. El segundo, que se ocupa de la cinemática, describe las diferentes medidas de la deformación, el análisis de ésta en el entorno de un punto y la determinación del campo de desplazamientos a partir del de deformaciones; en él cabe destacar, por una parte, la exposición detallada de las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones y de sus consecuencias, y por otra, el detalle de la influencia en las medidas de la deformación del hecho de prescindir de dichas hipótesis. El tercer tema trata de la estática e incluye los conceptos de vector tensión y tensor de tensiones, la relación de este con las fuerzas exteriores y el análisis local de la distribución tensional; destaca en él un amplio tratamiento del Círculo de Mohr, apoyado en ejercicios que muestran su aplicación. El cuarto tema se ocupa de las relaciones constitutivas y, tras presentar las principales características de los modelos constitutivos más relevantes, se centra en la ley de Hooke generalizada y los criterios que establecen los límites del dominio elástico. El quinto tema versa sobre el problema elástico y describe su planteamiento local y global, así como una serie de principios y teoremas característicos del mismo; cabe reseñar el tratamiento de los teoremas de los trabajos virtuales y de los trabajos virtuales complementarios, aplicables con independencia de la relación constitutiva, y los ejemplos de su aplicación con diferentes fines.

La segunda parte, formada por los tres últimos temas, se dedica al modelo de sólido deformable unidimensional, es decir, al modelo viga, que permite estudiar las piezas alargadas. El sexto tema se ocupa de las definiciones, las hipótesis y la determinación de las ecuaciones cinemáticas, estáticas y constitutivas del mencionado modelo; sin renunciar a la interpretación física de las relaciones en las que resulta pertinente, se formula de un modo deductivo, diferente del habitual planteamiento inductivo de los textos basados en la escuela de Grashof y Timoshenko. El tema séptimo desarrolla la interpretación, en términos tridimensionales, de los resultados del modelo unidimensional relativos a la flexión: desplazamientos fuera de la directriz y distribuciones de tensiones normales y tangenciales, incluyendo la determinación de esta última en secciones cerradas de pared delgada. Incorpora ejercicios que muestran la aplicación de cada uno de los procedimientos tratados, y varios de ellos se dedican a la aplicación de los resultados del tema a situaciones propias de la actividad profesional: recorrido de la junta de dilatación de un puente, definición de parámetros relacionados con el pretensado de la viga… Por último, el octavo tema aborda el problema de torsión, desarrollando la formulación de Coulomb, describiendo los principales resultados de la de Saint-Venant y exponiendo el tratamiento de la torsión no uniforme en los casos en que es admisible despreciar los efectos de alabeo. Se dedica especial atención al problema de determinar el módulo de torsión y los valores más significativos de las tensiones tangenciales, incluyendo un algoritmo que permite obtenerlos en secciones macizas —las más difíciles de resolver— mediante un algoritmo basado en el programa comercial *FlexPDE*, del cual existe una versión gratuita para estudiantes, suficiente para cualquier ejercicio académico.

Se incluyen en el texto un total de 64 ejercicios resueltos, que muestran la aplicación de los diferentes métodos desarrollados en él. El lector deberá aplicar la misma técnica a otros ejercicios similares para adquirir la destreza y la soltura necesarias en el desarrollo de los procedimientos básicos, y, luego, a partir de ellos, combinándolos, podrá enfrentarse a problemas que merezcan ese nombre. La finalidad del aprendizaje práctico de nuestra materia no es conocer este catálogo de técnicas, u otro similar, sino dominarlos hasta convertirlos en las herramientas que permitirán al estudiante abordar casos más complejos.

En cuanto a las convenciones tipográficas que he adoptado, sólo dos requieren una explicación. Por una parte, el cuerpo de los caracteres: cuando son de tamaño estándar (10,5 puntos, como esta parte) indican que los contenidos que se desarrollan podrían formar parte de un curso de grado, quizás un curso avanzado en algunos puntos, y cuando son de cuerpo menor (9 puntos) señalan que esa parte corresponde a las demostraciones que se omitirían en un curso de este tipo o a alguna incursión en temas propios de niveles superiores. Por otra, a veces ha sido necesario dividir una ecuación en dos partes para facilitar la paginación; en tal caso, el número de la ecuación aparece en la primera página que ocupa, y se indica que continúa en la página siguiente terminando con puntos suspensivos si se ha cortado un fórmula, o con el símbolo …/… si sigue la relación de fórmulas agrupadas bajo un mismo número pero no se ha interrumpido ninguna de ellas.

Para terminar, quiero agradecer su colaboración a los alumnos de diferentes cursos que han usado las versiones iniciales de algunos de los capítulos del texto y me han indicado muchas de las erratas que había en ellas, y mi compañero, el profesor D. Carlos R. Sánchez Carratalá, que además de señalarme erratas me ha hecho comentarios y sugerencias atinados que me han permitido mejorar el texto.

Valencia, diciembre de 2017

J. Casanova

Índice

Índice de ejercicios

PRIMERA PARTE

Sólidos en general: modelos tridimensionales

1
Conceptos básicos

La Ciencia y la Ingeniería necesitan formular modelos matemáticos de la realidad para describirla y prever su respuesta. Para que resulten resolubles necesitan incorporar algunas simplificaciones y, en consecuencia, ninguno es exacto.

En general, cuanto más complejo es un modelo, más difícil es su manipulación y más exactos sus resultados. Como la Ingeniería sólo pretende resolver los problemas con la precisión suficiente para su aplicación práctica, no requiere modelos sofisticados sino eficientes.

En el ámbito de la Mecánica, el modelo de partícula representa los objetos como puntos materiales y permite estudiar problemas como el de determinar la órbita de un planeta o la trayectoria de un vehículo. Un modelo más complejo, el de sólido rígido, permite analizar problemas como el de la estabilidad frente al vuelco de una grúa o el movimiento de las piezas de un motor. Hay otra categoría de problemas, como los de prever cómo transmite las cargas una estructura o cómo circula el agua en una tubería, que requieren un modelo aún más sofisticado, el de medio continuo.

En este tema se introducirá el modelo de sólido deformable como caso particular de medio continuo, así como algunas de las simplificaciones necesarias para establecer un modelo matemático manejable que permita estudiar la resistencia y la deformación de un cuerpo cualquiera solicitado por fuerzas exteriores.

Más adelante, en este mismo texto, se introducirán nuevas simplificaciones para dar una solución ingenieril –menos exacta, más fácil de obtener y suficientemente precisa en la práctica– al problema de la resistencia y deformación de un sólido alargado.

1.1 La ingeniería estructural

Según la vigésima edición del Diccionario de la Lengua Española, la Ingeniería es el «conjunto de conocimientos y técnicas que permiten aplicar el saber científico a la utilización de la materia y de las fuentes de energía, mediante invenciones o construcciones útiles para el hombre» (Real Academia Española, 1984).

La Ingeniería Estructural es la rama de la ingeniería que se ocupa de establecer la forma, dimensiones y modo de ensamblaje de los elementos de una construcción o una máquina de modo que se garanticen la resistencia, la rigidez y la estabilidad tanto de cada uno de ellos por separado como de la estructura que forman en conjunto.

Se denomina resistencia a la capacidad de las estructuras, o de los elementos que las forman, de transmitir de forma segura —sin sufrir daños ni romperse— las cargas a que pueda verse sometida.

Se denomina rigidez a la capacidad de las estructuras, o de los elementos que las forman, de transmitir las cargas a que pueda verse sometida sin sufrir grandes deformaciones o vibraciones que impidan o dificulten su normal explotación.

Se denomina estabilidad a la capacidad de las estructuras y de sus elementos de conservar una posición —una forma inicial— determinadas, o de volver a ellas cuando una acción exterior la ha alterado.

Para facilitar su resolución, el problema de comprobar que una estructura posee estas propiedades se descompone en otros más sencillos, que son:

1) El estudio de los distintos elementos de la construcción o la máquina por separado, persiguiendo en cada uno de ellos cuantificar la interacción entre las distintas partes del elemento —representada por las fuerzas interiores, tensiones o esfuerzos que definiremos más adelante— cuando éste se halla solicitado por una acción exterior; y determinar los desplazamientos y deformaciones que se producen en él.
2) El análisis de la estructura en conjunto, basado en los resultados del punto anterior y tratando ahora de cuantificar la interacción entre los distintos elementos en que la habíamos dividido y la deformación del conjunto.
3) El establecimiento de las dimensiones de cada pieza de la estructura y del modo de ensamblarlas para que queden garantizadas la resistencia, rigidez y estabilidad tanto de cada una por separado como de la estructura en conjunto.

Los dos primeros problemas parciales son el objeto de la Teoría de Estructuras, cuyo desarrollo se inicia con la materia objeto de este texto. Como veremos más adelante, para su estudio nos basaremos en modelos que simplifican drásticamente el comportamiento de los materiales e incluso la geometría de las piezas, así como en los principios de la Mecánica, de la cual forma parte nuestra disciplina.

El tercero de los problemas parciales no permite el mismo nivel de abstracción: requiere considerar la forma y dimensiones reales de las piezas, las peculiaridades del material que la forma influyen mucho más que en los problemas anteriores, etc. Es objeto de estudio de las materias que se ocupan de cada tecnología en particular: hormigón armado y pretensado, estructuras metálicas, estructuras mixtas, etc.

Centrándonos ya en la Teoría de Estructuras, comenzaremos por encuadrarla en la Mecánica y luego pasaremos a comentar como aborda los dos primeros problemas parciales anteriormente definidos.

De nuevo según el Diccionario de la Lengua Española, la Mecánica es la «parte de la física que trata del equilibrio y del movimiento de los cuerpos sometidos a fuerzas cualesquiera». El lector debe conocer la Mecánica Racional, que trata de los problemas relativos a partículas y sólidos rígidos. La otra gran rama de esta ciencia es la Mecánica de los Medios Continuos, caracterizada porque considera continua —dando a esta palabra el mismo sentido que en matemáticas— la materia que forma los cuerpos. A su vez, se divide en Mecánica de Fluidos y Mecánica de Sólidos Deformables.

Para poder estudiar los distintos elementos de la estructura por separado —primero de los problemas parciales planteados—, deberemos comenzar representando la pieza real por un modelo matemático que refleje su geometría y sus propiedades mecánicas más características, sobre el cual realizaremos nuestros cálculos. Para que éstos no resulten inabordables, es necesario introducir simplificaciones drásticas, como reducir al mínimo imprescindible el número de parámetros que intervienen en la definición de la respuesta tenso-deformacional —despreciar el efecto de la temperatura, la humedad, el tiempo que permanece aplicada la carga, etc.— o suponer que tensiones y deformaciones están relacionadas por funciones lo más sencillas posible.

Admitiendo, además, que los desplazamientos son tan pequeños que tratarlos como si fueran infinitesimales no origina errores relevantes y que las tensiones y las deformaciones se relacionan mediante funciones lineales, se plantea el modelo que estudia la Elasticidad Lineal, fruto de numerosas simplificaciones y omisiones. Pese a ello, conduce a un problema matemático complejísimo. La primera parte del texto se dedicará a formularlo.

La Elasticidad estudia las piezas considerando su verdadera forma; trata, pues, con elementos tridimensionales. Cuando la forma de la pieza permite representarla razonablemente mediante una superficie —placas y láminas— o mediante una línea —vigas y arcos— puede conseguirse una nueva simplificación del problema, que se logra reduciendo el número de dimensiones que considera y, por lo tanto, de coordenadas de las que dependen las funciones que lo resuelven.

En el caso de las piezas alargadas, las más frecuentes en la práctica, el problema puede plantearse como unidimensional y llegar a una formulación matemática razonablemente sencilla, cuyo estudio ocupará la segunda parte de este texto. Se caracteriza porque persigue la resolución de los problemas que aparecen en la práctica profesional con precisión suficiente para estos fines.

El segundo de los problemas que hemos planteado, el análisis de la estructura completa, se basa en representarla como un ensamblaje de elementos cada uno de los cuales puede estudiarse mediante uno de los modelos anteriores. En esta fase, pues, basta con investigar cómo afecta al resto de la estructura la solicitación que actúa sobre una pieza. No se abordará en este texto.

Para evitar confusiones, es menester comentar en esta introducción los muchos nombres que reciben las distintas partes de esta materia. Ya hemos mencionado que, en conjunto, y junto con otras ramas de esta ciencia que no hemos citado, constituyen la Mecánica de los Sólidos Deformables. La rama que estudia los cuerpos con su forma real, pero simplificando de forma drástica la respuesta del material —como veremos más adelante— y aceptando que los desplazamientos de todos los puntos de la estructura son pequeñísimos es la Elasticidad Lineal. La teoría, derivada de ésta, que se ocupa del estudio de las piezas alargadas se denomina Teoría de Vigas, o también Resistencia de Materiales. Por último, la parte que se ocupa de estudiar, en conjunto, el esqueleto resistente de las construcciones y las máquinas formadas por tales piezas se llama Cálculo de Estructuras. No obstante, en ocasiones se utiliza la denominación Resistencia de Materiales para referirse a todas las teorías derivadas a partir de la Elasticidad, cuyo denominador común es buscar métodos de cálculo sencillos pero suficientes para la aplicación práctica —incluso aunque se refieran a elementos superficiales—; otros veces se han usado denominaciones tales como Cálculo de Estructuras, Análisis Estructural, Mecánica de la Construcción, Mecánica de Materiales, etc. para referirse a este conjunto de teorías. Más arriba hemos utilizado la denominación Teoría de Estructuras, que adoptaremos, para nombrarlo.

Para terminar este apartado, mencionaremos que según Samartin (1990, pág. 3) la Resistencia de Materiales y el Cálculo de Estructuras «representan planteamientos simplificados de la teoría de la Elasticidad, al añadirse ciertas hipótesis específicas que facilitan la resolución de los problemas complejos que aparecen en la práctica profesional». En este párrafo se resumen los rasgos más característicos de la Teoría de Estructuras, cuyo estudio se inicia con nuestra materia. Son los siguientes:

- Utiliza planteamientos simplificados derivados de los de un planteamiento tridimensional —usualmente, la Elasticidad Lineal—, obtenidos introduciendo las hipótesis adicionales necesarias.
- Permite resolver con suficiente aproximación problemas que de otro modo serían inabordables.
- Está enfocada a la aplicación práctica en el ámbito profesional.

1.2 Concepto de medio continuo

Se denomina medio continuo al modelo matemático adecuado para representar a sólidos y fluidos, a escala macroscópica, en los problemas de la Mecánica. Su característica definitoria es la continuidad, que debe entenderse como en Matemáticas: entre cualesquiera dos puntos materiales del medio existen infinitos más. Ello significa que la materia llena completamente la región que ocupa, sin dejar espacios vacíos en su interior, y también que cualquier parte de esta región, por pequeña que sea, contiene materia.

La hipótesis de continuidad permite describir las propiedades de los cuerpos, así como su estado de reposo o movimiento —es decir, las fuerzas que actúan sobre ellos, la posición y velocidad de cada partícula, la masa, cantidad de movimiento y energía en el entorno de un punto, etc.— mediante funciones continuas y diferenciables, y establecer las relaciones que puedan existir entre ellas utilizando el Cálculo Diferencial e Integral.

La razón de ser del modelo es justificar el recurso a esta herramienta matemática. Todos sabemos que, en realidad, la materia no es continua, sino que está formada por partículas discretas —moléculas, átomos, partículas subatómicas— separadas entre sí. No obstante, considerarla continua permite resolver de forma eficiente el tipo de problemas que interesan, en los que los cuerpos tienen dimensiones macroscópicas —es decir, que se pueden apreciar a simple vista, sin el auxilio del microscopio u otros artificios similares—, mientras que tratarlos como conjuntos discretos de partículas resultaría inabordable por la enorme cantidad de éstas que incluirían..

De lo anterior se desprende que el modelo *medio continuo* sólo es válido para estudiar problemas en los que la menor dimensión de los cuerpos que intervienen sea mucho mayor que la de las partículas elementales de la materia. Por ello, en la definición de medio continuo se ha especificado que el modelo representa a sólidos y fluidos *a escala macroscópica*. ¿Podemos cuantificar la menor dimensión del cuerpo? Que se pueda apreciar a simple vista puede ser un buen indicador; ya que entonces seguro que incluye un número enorme de partículas. Suponiendo el tamaño de éstas de 1000 Å (mil veces la molécula de agua, o algo más de 400 veces la distancia entre los átomos de hierro en la red cristalina de este metal), podríamos fijar dicha dimensión en 10^5 Å, es decir, una centésima de milímetro, muchísimo menor que las medidas habituales de los cuerpos en casi todas las ramas de la ingeniería, en particular en la ingeniería civil.

Además de la continuidad, en Mecánica de los Medios Continuos se suele aceptar otras dos hipótesis simplificadoras sobre la estructura de la materia: la homogeneidad y la isotropía. Se definen como sigue:

- Se dice que un medio es homogéneo cuando presenta las mismas propiedades en todos sus puntos.
- Se dice que un medio es isótropo cuando presenta las mismas propiedades en cualquier dirección.

Estas tres propiedades son independientes entre sí. Para construir nuestra teoría hemos aceptado de entrada que la materia es continua, pero las otras dos hipótesis podemos admitirlas o no según convenga al problema que pretendamos plantear. En este texto, salvo mención explícita en contra, supondremos que se cumplen todas.

El medio continuo definido hasta aquí permite estudiar problemas de sólidos (cuerpos que mantienen su forma y volumen, o al menos que oponen resistencia a cambiarlos) y de fluidos (cuerpos que adaptan su forma a la del recipiente que los contiene). El objeto de nuestro estudio serán los sólidos; para remarcar la diferencia con los sólidos rígidos, que son objeto de estudio de la Mecánica Racional, hablaremos de sólidos deformables.

1.3 Fuerzas de superficie y de volumen

Cualquier ciencia se basa en unos pocos conceptos que no se definen, sino que se aprehenden de la intuición, la razón o la experiencia. Constituyen la base mínima conocida a partir de la cual se establecen nuevas definiciones y se comienza a construir la teoría. Son los llamados conceptos primeros —o primitivos, básicos, o fundamentales—. Un ejemplo de ello es el concepto de conjunto en matemáticas: podemos aceptarlo como conocido, o definirlo como «una colección de elementos», o como «una reunión de elementos», pero entonces deberemos aceptar que previamente sabemos que es una colección, o una reunión; siempre necesitaremos partir de una idea conocida.

En Mecánica, el concepto de fuerza, como los de espacio y de tiempo, pertenece a esta categoría. Por ello, renunciaremos a intentar definirlo, y nos limitaremos a señalar que mediante fuerzas representamos la acción mutua entre partículas y cuerpos. Esta acción puede ejercerse por contacto, como cuando empujamos una mesa o levantamos una silla, y a distancia, como la atracción gravitatoria.

Las fuerzas se caracterizan por ejercerse en una dirección y un sentido determinados, con una cierta intensidad —módulo—. Así pues, en los cálculos deberán representarse mediante vectores. El lector recordará que, en Mecánica de Sólidos Rígidos, las fuerzas se consideraban como vectores deslizantes. Sin embargo, en Mecánica de los Sólidos Deformables deben tratarse como vectores ligados, ya que su punto de aplicación determina la deformación del cuerpo. Para justificarlo se presenta la figura 1-1, donde aparece una esfera, considerada rígida en la línea superior y deformable en la inferior, sometida a la misma fuerza **F** pero actuando en distintos puntos de la recta que define; en ambos casos se desprecia el peso de la pieza y el rozamiento con la superficie en que se apoya. El dibujo muestra que, aunque el sistema de aceleraciones que van a producir las fuerzas **F** —representado por su resultante $\Sigma\mathbf{a}$— fuera independiente del punto de aplicación de estas fuerzas, la deformación del cuerpo no lo sería.

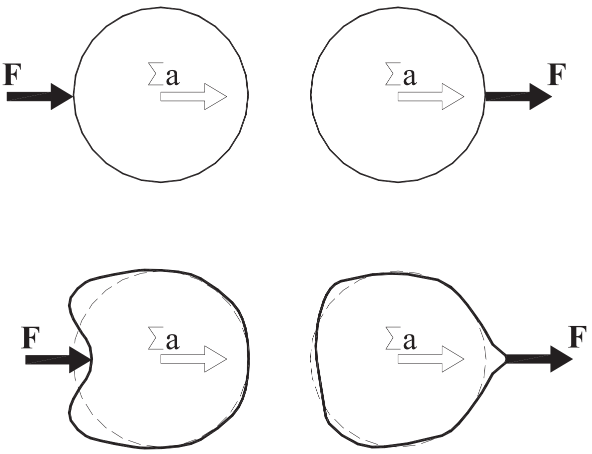


Figura 1-1. Fuerzas sobre sólidos rígidos y sólidos deformables

Clasificación de las fuerzas. Las fuerzas que pueden solicitar a un cuerpo se dividen en:

- exteriores, que representan la acción del resto del universo sobre el cuerpo objeto de nuestro estudio, y pueden ser de volumen o de superficie, e
- interiores, que representan la acción de unas partes del cuerpo sobre otras —y serán objeto de un estudio más detallado en el tema siguiente—.

Nótese que las fuerzas no son intrínsecamente interiores o exteriores, sino que ello depende de cual sea el cuerpo a estudiar en cada instante. Por ejemplo, si estudiamos una escalera de mano, las fuerzas que se ejercen entre uno de los travesaños y los largueros serán fuerzas internas, mientras que si nuestro estudio se centra en el travesaño en cuestión, dichas fuerzas las consideraremos externas.

Las fuerzas de volumen, que denotaremos por **b** —del inglés *body force*—, representan la acción de los cuerpos que están alejados del que estudiamos sobre él. Se consideran fuerzas repartidas sobre su volumen, lo que significa que sobre cada diferencial de volumen d*V* del cuerpo actúa una fuerza **b**d*V*. El peso del propio cuerpo, que es la atracción gravitatoria que el resto del universo ejerce sobre él, y las atracciones y repulsiones electrostáticas o electromagnéticas son ejemplos de este tipo de fuerzas[1].

Las fuerzas de superficie o de contacto, que denotaremos por $\bar{\mathbf{t}}$ —del inglés *traction*—, representan la acción mutua entre cuerpos en contacto y se distribuyen sobre la

[1] **b** es una función vectorial, que en el sistema cartesiano O*XYZ* en el que se plantea el problema puede expresarse como $b_X\mathbf{i} + b_Y\mathbf{j} + b_Z\mathbf{k}$; cada una de las componentes es una función escalar de *X, Y* y *Z*.

superficie de separación. Esto significa que, sobre cada diferencial de área dA de dicha superficie, actúa una fuerza $\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}A$. La presión hidrostática sobre un cuerpo sumergido es un ejemplo de este tipo de fuerza[2].

Quizás haya sorprendido al lector que, en esta clasificación, no hayan aparecido las fuerzas puntuales. Se debe a que estas fuerzas representan la interacción entre partículas materiales sin dimensiones, pero no tienen sentido en un medio continuo. En éste no tenemos partículas individuales, sino una distribución continua de masa; por ello, tampoco cabe considerar fuerzas puntuales entre partículas, sino sólo fuerzas distribuidas sobre el volumen o el contorno del cuerpo.

No obstante, en ocasiones nos encontraremos con fuerzas de superficie repartidas sobre áreas muy pequeñas en comparación con el conjunto de la pieza que se pretende estudiar —la acción de la rueda de un camión sobre el tablero de un puente, de la pata de una mesa sobre el forjado de un edificio, etcétera—. En tales casos, parece lógico pensar en sustituirlas por fuerzas puntuales para simplificar los cálculos. Así lo haremos en numerosos ejemplos a lo largo del curso. El principio de Saint-Venant, que trataremos en un tema posterior, autoriza esta práctica y especifica cuándo y cómo puede realizarse.

1.4 Cuerpo y configuración

Llamaremos cuerpo al objeto material que pretendemos estudiar en sí, y configuración a cada una de las posiciones que ocupa en el espacio a lo largo del tiempo. Los atributos del cuerpo son independientes de su localización en el espacio; los que varían con ésta se consideran propios de cada configuración. Si conviene, usaremos el sustantivo posición como sinónimo de configuración.

La principal característica del cuerpo es su masa, que permanece constante aunque la pieza se mueva o deforme. Sin embargo, este último hecho puede originar el cambio del volumen de la pieza, y con él, el de su densidad; así pues, volumen y densidad no son parámetros propios del cuerpo, sino de cada una de sus configuraciones.

En este texto nos vamos a ocupar, exclusivamente, de problemas estáticos, en los que sólo es necesario considerar dos posiciones del cuerpo: la configuración inicial, que se supone conocida, y la final o deformada, que es aquélla a la que llega el cuerpo como consecuencia de una solicitación exterior. En esta última se produce el equilibrio de fuerzas, tanto para el conjunto del cuerpo como para cada una de sus partes; por ello también se denomina configuración de equilibrio.

[2] $\bar{\mathbf{t}}$ es una función vectorial, que en el sistema cartesiano OXYZ en el que resolveremos el problema puede expresarse como $\bar{t}_X\mathbf{i}+\bar{t}_Y\mathbf{j}+\bar{t}_Z\mathbf{k}$; cada una de sus componentes es una función escalar de X, Y y Z.

1.5 Formulaciones lagrangiana y euleriana

El problema del movimiento de un medio continuo se puede abordar mediante dos planteamientos diferentes: analizando qué le ocurre a cada partícula del cuerpo o qué ocurre en cada punto del espacio.

El primer planteamiento constituye la llamada formulación lagrangiana del problema, que identifica cada partícula del cuerpo mediante las coordenadas de la posición que ocupaba en cierta configuración de referencia, que puede elegirse arbitrariamente, aunque habitualmente se toma como tal la configuración inicial. Estas coordenadas se convierten en la *etiqueta* que identifica cada partícula a lo largo del proceso y, por ello, se denominan coordenadas materiales. Constituyen, junto con el tiempo, las variables independientes del problema.

El segundo planteamiento se denomina formulación euleriana del problema y sus variables independientes son el tiempo y las posiciones del espacio en que se desarrolla el fenómeno, o dicho en otras palabras, las posiciones ocupadas por cada partícula en el instante que se está considerando. A las coordenadas que identifican estas posiciones se les denomina coordenadas espaciales.

En este texto se representará las coordenadas materiales mediante letras mayúsculas y las espaciales mediante letras minúsculas.

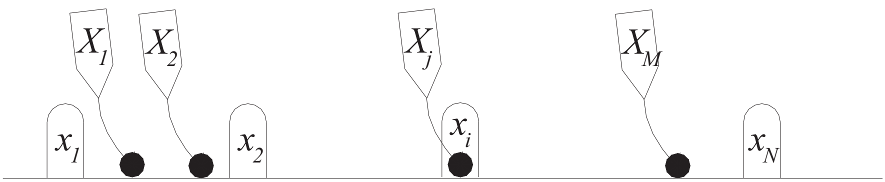


Figura 1-2. Coordenadas materiales y espaciales

Para aclarar estas ideas se plantea el ejemplo siguiente —figura 1.2—. Consideremos una serie de partículas que se desplazan a lo largo de una trayectoria rectilínea. Para identificar cada partícula se ha etiquetado con las coordenadas del punto X_1, X_2,… X_M que ocupaba en el instante inicial y para identificar cada posición a lo largo de la trayectoria se ha colocado en ella un mojón que indica la distancia al origen de coordenadas (abscisas x_1, x_2,… x_N.). Una descripción lagrangiana del movimiento diría que en el instante t la partícula X_j ocupa la posición x_i del espacio y tiene una velocidad $v(X_j,t)$ y una aceleración $a(X_j,t)$, mientras que una formulación euleriana nos informaría que en el instante t la partícula que ocupa la posición x_i tiene una velocidad $v(x_i,t)$ y una aceleración $a(x_i,t)$; en esta segunda formulación no es importante identificar la partícula que ocupa cada posición del espacio.

La formulación lagrangiana es la forma habitual de plantear los problemas en Mecánica de los Sólidos Deformables, mientras que la euleriana lo es en Mecánica de Fluidos.

1.6 Las leyes del movimiento de Euler

Las leyes de Newton se interpretan fácilmente si se considera una partícula, pero no si se trata de un cuerpo tridimensional. Por ejemplo, si tratamos de aplicar la segunda ley, que establece que *el cambio del movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se realiza en la dirección en que tal fuerza se imprime*, y se escribe como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

inmediatamente nos preguntaremos en qué punto del cuerpo se aplica la fuerza **F**, qué punto adquiere la aceleración **a**, qué ocurre si en dos puntos diferentes del cuerpo se aplican dos fuerzas distintas, etc.

Este conflicto no es difícil de resolver para un sistema con un número finito de partículas. A partir de las leyes de Newton aplicadas a las diferentes partículas se demuestran los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético, que sustituyen a la segunda ley de Newton en el estudio del sistema como un todo. Sin embargo, la justificación no puede extenderse a sistemas de infinitas partículas como lo sería un sólido deformable. Por ello, las generalizaciones a sistemas continuos de los citados teoremas simplemente se postulan como principios que sustituyen a la segunda ley de Newton en el estudio de dichos medios continuos; se denominan leyes del movimiento de Euler. En este texto se ha adoptado la formulación de las mismas que aparece en Malvern (1969, págs. 213-215).

La primera y la tercera ley de Newton también deben adaptarse para aplicarlas a sistemas continuos, aunque en muchos textos se omite este paso que sólo suele aparecer en aquellos que buscan una formalización matemática rigurosa. Más adelante se indicarán los principios que, siguiendo a Truesdell (1977, pág. 63 y 66), se postulan para sustituirlas.

1.6.1 Principio de la cantidad de movimiento

También se denomina primera ley del movimiento de Euler. Establece que la resultante **F** de las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo $\mathscr{C}$ en una determinada configuración, en la que ocupa la región v del espacio, es igual a la velocidad de cambio —o tasa de variación temporal— de la cantidad de movimiento que experimenta el cuerpo en ese instante. Matemáticamente se expresa como

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\int_v \mathbf{v}\,\rho\, dv \tag{1-1}$$

donde **v** representa el campo de velocidades de los puntos del cuerpo, ρ el de densidades, dv el diferencial de volumen y el símbolo $d()/dt$ representa la llamada derivada material, que permite determinar la variación instantánea de una propiedad ligada al cuerpo —en este caso, la cantidad de movimiento— pero conocida en función de la posición que el cuerpo ocupa en el espacio —la región v que ocupa en ese instante—.

1.6.2 Principio del momento cinético

También se denomina segunda ley del movimiento de Euler. Determina que el momento $\mathbf{M}_O$, momento resultante respecto a cierto punto fijo O de las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo $\mathscr{C}$ en una determinada configuración, en la que ocupa la región v del espacio, es igual a la velocidad de cambio del momento cinético respecto al mismo punto O que experimenta el cuerpo en ese instante. Matemáticamente se expresa como

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}\int_v (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O) \times (\rho\,\mathbf{v})\,dv \tag{1-2}$$

donde **x** es el vector posición del punto genérico donde se sitúa dv, $\mathbf{x}_O$ es el vector posición del punto O, $\times$ representa el producto vectorial y el resto de símbolos mantienen el significado establecido en el punto anterior.

1.6.3 Principio de acción y reacción

La resultante y el momento resultante respecto a cierto punto O de las fuerzas ejercidas por un cuerpo A sobre otro cuerpo B son iguales en módulo y dirección, y de sentido contrario, a la resultante y el momento resultante de las fuerzas ejercidas por B sobre A.

1.6.4 Principio de inercia

La cantidad de movimiento del cuerpo $\mathscr{C}$ es constante si, y sólo si, sobre $\mathscr{C}$ no actúa ninguna fuerza exterior.

Alternativamente, este principio se puede enunciar como: El centro de gravedad de un cuerpo $\mathscr{C}$ permanece en reposo o se mueve sobre una línea recta a velocidad constante si, y sólo si, sobre $\mathscr{C}$ no actúa ninguna fuerza exterior.

1.7 Teoremas integrales

Se recogen a continuación algunos teoremas que se utilizarán en diferentes demostraciones a lo largo del texto. En general se usarán en demostraciones rigurosas que se ofrecerán como alternativa de segunda lectura a las más sencillas que se utilizarán para presentar la materia a los estudiantes que se inician en ella. Este apartado puede omitirse en la primera lectura.

En lo que sigue V representará una región del espacio euclídeo tridimensional cuyo contorno es la superficie cerrada S, regular a trozos —es decir, formada por un número finito de partes tales que sobre cada una el vector normal **n** constituye un campo continuo, unidas entre sí en aristas o vértices donde, naturalmente, **n** no está definido (por ejemplo un hexaedro, una pirámide o un cono)—, **n** será el vector unitario normal al contorno, apuntando al exterior del cuerpo, φ representará un campo escalar y **q** uno vectorial, ambos continuos y diferenciables con continuidad tanto en *V* como en *S*.

Además, x^i serán las coordenadas del sistema curvilíneo considerado, $q^i{}_{|j}$ representará la derivada covariante de q^i respecto a x^j y se utilizará la notación habitual de superíndices y subíndices para denotar, respectivamente, componentes contravariantes (q^j) y covariantes (q_j).

1.7.1 Teorema del gradiente

$$\int_V (\mathbf{grad}\,\varphi)\,dV = \int_S (\varphi\,\mathbf{n})\,dS$$
$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,dV = \int_S (\varphi\,n_i)\,dS \qquad \textbf{(1-3)}$$

1.7.2 Teorema de Gauss o de la divergencia

$$\int_V (\mathrm{div}\,\mathbf{q})\,dV = \int_S (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\,dS$$
$$\int_V q^i_{|i}\,dV = \int_S \left(q^i\,n_i\right)dS \qquad \textbf{(1-4)}$$

La demostración del teorema de la divergencia, y la del teorema del gradiente como caso particular del anterior, puede consultarse en Fung (1965, pág. 116 y ss.), Malvern (1969, pág. 197 y ss.) o Flügge (1972, pág. 76 y ss.).

1.7.3 Teorema de arrastre (o de transporte) de Reynolds

Sea un cuerpo $\mathscr{C}$ que, en una determinada configuración, ocupa la región *V* del espacio cuyo contorno es la superficie cerrada *S*, regular a trozos y supóngase una propiedad del cuerpo representada por la integral sobre *V* del campo $\mathscr{L}$, escalar, vectorial o tensorial. Se trata de determinar la variación instantánea de esa propiedad cuando el cuerpo está en movimiento en el espacio —y, por lo tanto, varía no solamente el integrando sino también los límites de integración—.

Según el teorema de arrastre de Reynolds dicha variación queda determinada por

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathscr{L}\,dV = \int_{\mathrm{V}} \left(\frac{d\mathscr{L}}{dt} + \mathscr{L}\frac{\partial v^i}{\partial x^i}\right)dV \qquad \textbf{(1-5)}$$

donde $d()/dt$ representa la derivada material, $\partial()/\partial()$ la derivada parcial, v^i las componentes contravariantes del campo de velocidades del cuerpo $\mathscr{C}$ en la configuración considerada y x^i las coordenadas espaciales de ésta. La demostración puede consultarse en Fung (1965, pág. 120) o Malvern (1969, pág. 210). Recuérdese que la derivada material de una función $\mathscr{L}(x^1, x^2, x^3, t)$, escalar, vectorial o tensorial, se calcula como

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} + v^i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i} \qquad \textbf{(1-6)}$$

Por último, cuando el integrando que define la propiedad puede expresarse como el producto de la densidad ρ por el campo $\mathscr{L}$, utilizando la ecuación de continuidad se puede simplificar la expresión anterior del teorema de arrastre de Reynolds (Malvern, 1969, pág. 211)y transformarla en

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho\mathscr{L})\,dV = \int_V \rho\frac{d\mathscr{L}}{dt}\,dV \qquad \textbf{(1-7)}$$

2
Deformaciones y relaciones cinemáticas

La Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, sin ocuparse de las causas que lo producen. En este tema examinaremos la cinemática de los sólidos deformables, en el caso particular de que los desplazamientos sean pequeños —en rigor, infinitesimales—.

En un cuerpo deformable, parte del desplazamiento se puede explicar como resultado de un movimiento de sólido rígido, y el resto es consecuencia de la deformación. El primer tipo de movimiento lo estudia la Mecánica Racional, que ya debe conocer el lector. Nuestro objetivo actual es caracterizar y medir la deformación del cuerpo, y para alcanzarlo descompondremos el desplazamiento de cada punto del cuerpo en las dos partes citadas y estudiaremos con detalle la segunda de ellas. La hipótesis de pequeños desplazamientos nos permitirá hacerlo con relativa facilidad.

2.1 Deformación: concepto y medidas elementales

En Mecánica Racional se denomina sólido rígido a aquel en el que la distancia entre dos partículas cualesquiera permanece constante durante su movimiento. Por exclusión, un sólido deformable será el que no satisface esta propiedad, y la deformación será, simplemente, el cambio de la distancia entre las partículas de un cuerpo.

Quizás el fenómeno físico que con más claridad refleja el concepto que todos tenemos de deformación es el alargamiento de un muelle. Nos servirá también para mostrar los problemas que plantea medir de la deformación, y para buscar una forma de hacerlo.

Imaginemos un muelle cuya longitud inicial sea L_0 y que, sometido a la acción de una fuerza, se alarga hasta una longitud L. Vamos a proponer, para luego confrontarlas, dos formas de medir su deformación:

- La primera es, simplemente, mediante el alargamiento ΔL del muelle

$$\Delta L = L - L_0 \qquad \textbf{(2-1)}$$

- La segunda es mediante el alargamiento unitario ε, que es el mismo alargamiento ΔL, pero expresado en tanto por uno de su longitud inicial,

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \qquad \textbf{(2-2)}$$

Para compararlas vamos a considerar dos muelles distintos, el primero de longitud inicial 1 m y final 2 m, y el segundo de longitud inicial 10 m y final 11 m. El alargamiento ΔL es de 1 m en ambos casos, pero la intuición nos dice que el primer muelle está mucho más deformado que el segundo. Así pues, esta función no es una medida adecuada de la deformación, porque no nos sirve para comparar la de los dos resortes. El alargamiento unitario es 1 —sin dimensiones— en el primer caso y 0,1 en el segundo; este parámetro sí que indica qué muelle está más deformado, de acuerdo con nuestra intuición. Puede, pues, servir como medida de la deformación.

Nótese que para medir la deformación necesitamos una función de la longitud inicial L_0 y la final L que dé cero si ambas coinciden, sea positiva si el muelle se alarga ($L>L_0$) y negativa si se acorta ($L<L_0$), y que, además, sea mayor en valor absoluto cuando la intuición nos dice que el resorte está más deformado. Podemos encontrar muchas funciones que satisfagan estas condiciones, y adoptar una u otra como medida para la deformación. El alargamiento unitario, definido por la relación (2-2), es la más sencilla de estas funciones y se conviene en adoptarlo como medida de la deformación. Téngase en cuenta que esta elección es casi arbitraria, pues está guiada únicamente por la simplicidad; podríamos haber escogido otra función, lo que hubiese conducido a unos resultados distintos en lo que queda de tema, pero igual de válidos.

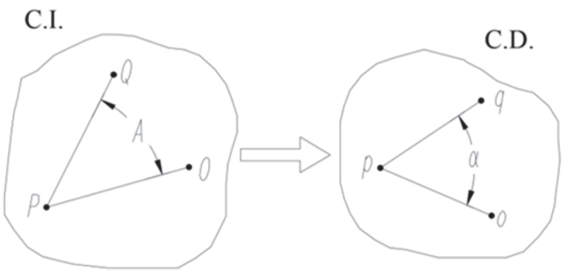


Figura 2-1. Transformación del entorno de un punto

En un sólido tridimensional el problema es algo más complicado que en un elemento unidimensional. Al deformarse varía la distancia entre dos cualesquiera de sus partículas, lo que da lugar a que varíe la longitud de los segmentos determinados por dos de ellas, pero también el ángulo que forman entre si estos segmentos —véase la figura 2-1—. Por ello, para estudiar los sólidos tridimensionales hace falta considerar también un parámetro que cuantifique esta variación angular. Sean *P, Q* y *O* tres puntos infinitamente próximos, situados en el interior de un sólido y sean *p, q* y *o* sus imágenes en la configuración deformada —véase de nuevo la figura 2-1—; para medir la deformación en un entorno infinitesimal de *P*, convenimos en adoptar las siguientes medidas elementales de la deformación:

- El alargamiento unitario o deformación longitudinal, que es el alargamiento de un segmento expresado en tanto por uno de su longitud inicial, y por lo tanto es adimensional. El del segmento *PQ* se calcula mediante

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{pq - PQ}{PQ} \qquad \textbf{(2-3)}$$

  Cuando el segmento se alarga es positivo; cuando se acorta, negativo.

- La distorsión angular o deformación angular, que es la diferencia entre el ángulo que formaban dos segmentos antes de la deformación y el que forman después, expresada en radianes. También es, pues, una magnitud adimensional. La fórmula que la determina, entre los segmentos *PO* y *PQ* de la figura, es

$$\gamma_{OPQ} = \mathrm{A} - \alpha \qquad \textbf{(2-4)}$$

  Cuando el ángulo formado por los dos segmentos se cierra con la deformación, la distorsión angular es positiva; cuando se abre, negativa.

Las definiciones anteriores no hubiesen tenido sentido si los segmentos iniciales no hubiesen sido infinitesimales, ya que entonces la deformación los hubiera convertido en arcos de alguna curva, no en segmentos de recta.

Por ahora nos hemos basado en los segmentos definidos por dos partículas para medir la deformación en el entorno de un punto, pero del mismo modo podíamos considerar que estas partículas definen vectores, y hablar de módulo del vector en lugar de hacerlo de longitud del segmento. En los apartados posteriores va a resultar más conveniente hacerlo así.

Por último, diremos que conocemos el estado deformacional en un entorno del punto *P* cuando conozcamos el alargamiento unitario de cualquier segmento diferencial con origen en *P* y la distorsión angular entre dos cualesquiera de ellos.

Antes de continuar conviene señalar que el alargamiento unitario es una medida de la deformación adecuada cuando las variaciones de longitud son pequeñas, pero no resulta satisfactoria cuando son muy grandes. Por ejemplo, si la longitud final es el doble de la inicial (L=2L_0,) el alargamiento unitario es 1, mientras que si se reduce a la mitad vale -0,5 contradiciendo la intuición que nos hace esperar el mismo valor absoluto pero signos contrarios. Yendo a casos extremos, si el muelle se alargara hasta el infinito ($L \to \infty$) o si se acortara hasta desaparecer ($L \to 0$), esperaríamos que la medida de la deformación tendiera a más y menos infinito, respectivamente, y sin embargo el alargamiento unitario tiende a más infinito en el primer caso y -1 en segundo. Estas dificultades se salvan con la llamada deformación natural, que se representa por e y se define como (Hill, 1950, pág. 9)

$$e = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \tag{2-5}$$

la cual tiene el mismo valor absoluto pero signo contrario para $L=\alpha L_0$ y $L=L_0/\alpha$, tiende a infinito si L tiende a infinito y a menos infinito si L tiende a cero. Sin embargo, para alargamientos unitarios pequeños (L=1,01L_0 y ε=0.01, por ejemplo) los valores del alargamiento unitario y la deformación natural prácticamente coinciden (ε=0.01 y e=0,00995 en el ejemplo propuesto). El desarrollo en serie de la deformación natural muestra que cuanto menor sea el alargamiento unitario más próximas serán ambas medidas de la deformación. Como en los casos que tienen interés práctico los alargamientos unitarios son muy pequeños, bastante menores que el del ejemplo planteado, prima la simplicidad y se adopta el mencionado alargamiento unitario como medida de la deformación.

2.2 Campo de desplazamientos

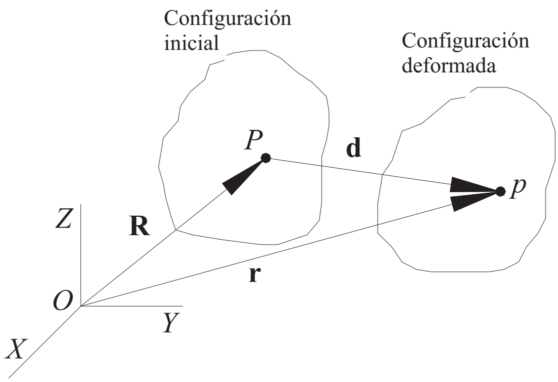


Figura 2-2. Notación

Consideremos una partícula material cualquiera del cuerpo, y convengamos en denotar por P al punto que ocupa en la configuración inicial, por p al que ocupa en la deformada, por $\mathbf{R}$ a su vector posición en la primera de estas configuraciones y por $\mathbf{r}$ a dicho vector en la segunda. Llamaremos vector desplazamiento, y lo representaremos por $\mathbf{d}$, al que une la posición inicial y la final de la partícula, y por tanto tienen por origen al punto P y por extremo al p. La figura 2-2 resume esta información.

En el sistema de referencia cartesiano OXYZ, escogido para resolver el problema, los vectores $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{d}$ se representan como

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k} \\
\mathbf{r} &= x(X,Y,Z)\mathbf{i} + y(X,Y,Z)\mathbf{j} + z(X,Y,Z)\mathbf{k} \\
\mathbf{d} &= u(X,Y,Z)\mathbf{i} + v(X,Y,Z)\mathbf{j} + w(X,Y,Z)\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2-6}$$

Para cada partícula del cuerpo, el vector **R** es conocido y se pretende determinar su posición final, definida por **r** o por **d**. Por ello, las componentes de estos últimos se consideran función de las del primero, que son las variables independientes del problema. Obsérvese que esta manera de proceder corresponde a la que en el apartado 1.5 denominamos formulación lagrangiana del problema: las coordenadas (*X, Y, Z*) de la posición inicial identifican una partícula concreta del cuerpo y el resto de funciones incógnita nos informan sobre que le ocurre en cada instante (dónde está, cuánto se ha desplazado…).

Salvo cuando pretendamos enfatizar su dependencia de (*X,Y,Z*), escribiremos los vectores **r** y **d** simplemente como

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \\
\mathbf{d} &= u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + w\,\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2-7}$$

En Elasticidad y en Resistencia de Materiales se prefiere usar el vector desplazamiento **d** en lugar del vector posición **r** para definir la localización final de cada partícula. La relación entre ambos queda definida en la figura 2-2 y es

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{d} \tag{2-8}$$

o bien, escrita componente a componente,

$$\begin{aligned}
x &= X + u \\
y &= Y + v \\
z &= Z + w
\end{aligned} \tag{2-9}$$

Habrá observado el lector que, como criterio general de notación, se ha escogido representar con letras mayúsculas los parámetros relativos a la configuración inicial y con letras minúsculas los correspondientes a la de equilibrio.

2.3 La hipótesis de pequeños desplazamientos

Comenzaremos este apartado viendo las simplificaciones que se producen en los cálculos al admitir que tanto las componentes de **d**, que se denominan desplazamientos, como sus derivadas parciales respecto a las coordenadas del sistema de referencia —las derivadas covariantes si se trata de un sistema curvilíneo—, son infinitamente pequeñas**.** Nos referiremos a estas dos suposiciones, respectivamente, como hipótesis de desplazamientos infinitesimales e hipótesis de gradiente del desplazamiento infinitesimal o, simplemente, hipótesis de deformaciones infinitesimales. Las expresaremos matemáticamente como

$$\begin{aligned} u(X,Y,Z) &= \varepsilon\,\hat{u}(X,Y,Z) \\ v(X,Y,Z) &= \varepsilon\,\hat{v}(X,Y,Z) \\ w(X,Y,Z) &= \varepsilon\,\hat{w}(X,Y,Z) \end{aligned} \tag{2-10}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial X}=\varepsilon\frac{\partial \hat{u}}{\partial X}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial Y}=\varepsilon\frac{\partial \hat{u}}{\partial Y}\quad\ldots\qquad \frac{\partial w}{\partial Z}=\varepsilon\frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \tag{2-11}$$

donde ε es un infinitésimo de primer orden y $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \partial\hat{u}/\partial X, \partial\hat{u}/\partial Y \ldots \partial\hat{w}/\partial Z$ son funciones acotadas en la región que ocupa el cuerpo en su configuración inicial. Debe señalarse que algunos textos citan conjuntamente ambas suposiciones como una sola hipótesis que suele denominarse de desplazamientos infinitesimales.

Las hipótesis (2-10) y (2-11) implican que los desplazamientos y sus derivadas sean despreciables frente a la unidad, y que el producto de dos de ellos lo sea frente a otro cualquiera, como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} & 1+u=1+\varepsilon\,\hat{u}\cong 1 \\ & u\,v=(\varepsilon\,\hat{u})(\varepsilon\,\hat{v})=\varepsilon^2\,\hat{u}\,\hat{v} << \varepsilon\,\hat{u}=u \\ & \frac{\partial v}{\partial Z}\frac{\partial w}{\partial Y}=\left(\varepsilon\frac{\partial \hat{v}}{\partial Z}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial \hat{w}}{\partial Y}\right)=\varepsilon^2\frac{\partial \hat{v}}{\partial Z}\frac{\partial \hat{w}}{\partial Y} << \varepsilon\frac{\partial \hat{w}}{\partial Y}=\frac{\partial w}{\partial Y} \end{aligned} \tag{2-12}$$

Estas propiedades permiten simplificar algunas relaciones que aparecen al estudiar la cinemática del movimiento tanto de los sólidos tridimensionales en general, que aparecen en el estudio de la Mecánica de los Sólidos Deformables o la Elasticidad Lineal, como de los modelos bidimensionales o unidimensionales que aparecen en las formulaciones simplificadas, como la Teoría de Vigas o la Teoría de Placas.

Otra consecuencia de nuestras suposiciones es que las configuraciones inicial y deformada sean infinitamente próximas, lo que permite identificarlas en todos los cálculos, salvo en los destinados a medir su diferencia. En efecto, si simplificamos (2-9) teniendo en cuenta (2-10) obtenemos

$$\begin{aligned} x &= X+u\cong X \\ y &= Y+v\cong Y \\ z &= Z+w\cong Z \end{aligned} \tag{2-13}$$

es decir, que despreciando infinitésimos de primer orden —los desplazamientos *u, v* y *w*—, la posición final de un punto, (*x, y, z*), se puede aproximar por la inicial, (*X, Y, Z*). Por otra parte, si volvemos a (2-9), pasamos *X, Y* y *Z* al primer miembro y consideramos entonces (2-10), llegamos a

$$x - X = u \neq 0 \quad , \quad y - Y = v \neq 0 \quad , \quad z - Z = w \neq 0 \qquad \textbf{(2-14)}$$

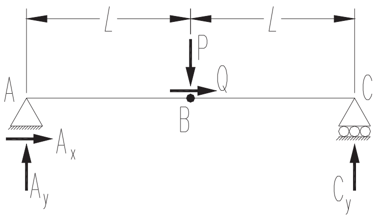
que muestra que, pese a lo anterior, la diferencia entre las configuraciones no debe considerarse nula.

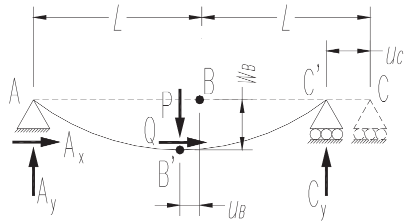
La identificación de las dos configuraciones es extraordinariamente útil en la práctica, ya que permite aproximar los parámetros geométricos de la posición final, que es una de las incógnitas del problema, por los de la inicial, conocida. Por ejemplo, permite:

- Aproximar el vector normal al contorno del cuerpo después de la deformación, que interviene en las condiciones de contorno estáticas, por la normal a dicha superficie antes de la deformación.
- Sustituir la región que ocupa el cuerpo al final del movimiento por la que ocupa al principio como dominio de integración, al hallar la energía de deformación, el trabajo de las fuerzas exteriores, la energía potencial, etc.
- Plantear las ecuaciones de equilibrio en la configuración inicial, como si se tratase de un sólido rígido.

La posibilidad de plantear las ecuaciones de equilibrio en la configuración inicial representa una de las simplificaciones más provechosas que las hipótesis formuladas introduces en los cálculos. A la vez, es la menos evidente de las citadas, por lo que nos detendremos a justificarla mediante un ejemplo sencillo: la determinación de las reacciones en una viga biapoyada analizándola, en primer lugar, como sólido rígido y en segundo, como cuerpo deformable. Los cálculos se resumen en la tabla 2-1.

Tabla 2-1





Incógnitas	A_x, A_y y C_y	A_x, A_y, C_y, u_B, u_C, y w_B
$\Sigma F_x=0$	$A_x + Q = 0$	$A_x + Q = 0$
$\Sigma F_y=0$	$A_y + C_y - P = 0$	$A_y + C_y - P = 0$
$\Sigma M_A=0$	$-PL + C_y\, 2L = 0$	$-P(L-u_B) + C_y(2L-u_C) + Qw_B = 0$
		despreciando infinitésimos queda
		$-PL + 2LC_y = 0$

Las figuras que encabezan cada columna definen la geometría, las cargas, y, cuando procede, los desplazamientos. La segunda fila tiene como finalidad recordarnos que, si la viga es deformable, los desplazamientos de todos sus puntos, y en particular los de *B* y *C*, son incógnitas a determinar. En las tres filas siguientes se plantean las ecuaciones de equilibrio. Téngase en cuenta que deben satisfacerse cuando éste se alcanza, es decir, en la configuración final, y por lo tanto es en ella donde deben plantearse. Esta posición coincide con la inicial si el cuerpo es rígido; si no lo es, queda determinada por los desplazamientos, que entonces también aparecen en las ecuaciones. No obstante, se comprueba que al considerarlos infinitesimales y despreciarlos frente a cantidades finitas, las ecuaciones se reducen a las mismas que se hubiese obtenido formulándolas de entrada en la posición inicial.

Hasta aquí, hemos presentado las hipótesis de desplazamientos infinitesimales y deformaciones infinitesimales y hemos descrito las ventajas que reportan. Por desgracia, ni los corrimientos[3] reales ni sus derivadas espaciales son infinitésimos y, en consecuencia, las simplificaciones descritas, en todo rigor, no son válidas en problemas reales. No obstante, sabemos que, por exigencias de tipo funcional y resistente, los movimientos y las deformaciones que sufre una estructura deben ser muy pequeños. La hipótesis de pequeños desplazamientos, que aceptaremos en adelante y constituirá uno de los pilares básicos de la teoría que vamos a desarrollar, supone que unos y otras son lo suficientemente pequeños para que todas las simplificaciones que se justifican suponiéndolos infinitesimales pueden seguir aceptándose como aproximaciones válidas.

Así pues, en adelante desarrollaremos la teoría suponiendo que los desplazamientos y sus derivadas son infinitesimales, pero luego utilizaremos sus resultados exigiendo sólo que sean pequeños. Dedicaremos el resto de este apartado a intentar cuantificar qué debemos entender por desplazamiento pequeño, y a mostrar que estas teorías se pueden aplicar con gran generalidad. También pondremos de manifiesto las contradicciones a que puede dar lugar esta aproximación.

¿Qué debemos entender por desplazamiento pequeño? Si pudiéramos expresar los desplazamientos reales mediante relaciones del mismo estilo que (2-10) y (2-11), pero considerando que ε representa una constante muy pequeña (10^{-3}, 10^{-4}, etc.) y $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \partial\hat{u}/\partial X, \partial\hat{u}/\partial Y \ldots \partial\hat{w}/\partial Z$ funciones acotadas, las simplificaciones (2-12) seguirían siendo válidas, con carácter aproximado —en lugar de despreciar infinitésimos de orden superior, estaríamos depreciando términos del orden de ε^2 frente a términos del orden de ε, 10^{-6} frente a 10^{-3} si este último es el valor de ε—. Como las restantes simplificaciones descritas se basaban en las (2-12), todas ellas serían aplicables con carácter aproximado. Sin embargo, no podemos razonar sobre esta base, ya que, como *u, v* y *w* tiene

[3] A veces, en Resistencia de Materiales se utiliza la palabra *corrimiento* para referirse a cualquiera de las funciones *u, v* y *w*, y, en general, como sinónimo de desplazamiento.

dimensiones de longitud, el valor de la constante ε depende de las unidades en que se expresan y el hecho de considerar pequeños los desplazamientos no puede depender de ello.

En vez de argumentar a partir de (2-10) y (2-11) trataremos de mostrar que los desplazamientos reales y sus derivadas, en una estructura bien diseñada, satisfacen las relaciones (2-12) con suficiente aproximación, es decir, que tanto unos como otras son despreciables frente a la unidad, y que el producto de dos de estos parámetros lo es frente a otro cualquiera.

Comenzaremos estudiando las derivadas, que no plantean dudas relacionadas con las unidades, ya que son adimensionales. Más adelante en este mismo tema veremos que las derivadas parciales de u, v y w respecto a X, Y y Z determinan las componentes del tensor de deformaciones; tres de ellas representan los alargamientos unitarios en las direcciones de los ejes. Por otra parte, se sabe que el acero plastifica a tracción cuando el mayor de estos alargamientos unitarios es del orden de 0,002 y que el hormigón se rompe cuando dichos parámetros están entre -0,002 —a compresión— y -0,0035 —a flexión—, aproximadamente. Esto nos proporciona el orden de magnitud que, como máximo, pueden alcanzar las derivadas de los desplazamientos; las supondremos menores que 4×10^{-3}. Es obvio que son despreciables frente a la unidad ($1\cong1\pm0{,}004$), al igual que sus cuadrados lo son frente a ellas

$$0{,}004 - 0{,}004^2 = 0{,}003984 \cong 0{,}004$$

$$0{,}004 + 0{,}004^2 = 0{,}004016 \cong 0{,}004$$

Los propios desplazamientos son mucho más difíciles de analizar, ya que el orden de magnitud de su valor depende de las unidades en que se expresen ($1\ \text{cm} = 10\ \text{mm} = 10^8\ \text{Å} = 0{,}01\ \text{m} = 10^{-5}\ \text{km}$), como ya habíamos adelantado. Por ello, no tiene sentido compararlos con 1. En lugar de ello, pensemos con qué necesitamos compararlos y frente a qué podemos considerarlos despreciables, si es que podemos. Las simplificaciones directamente relacionadas con la pequeñez de los desplazamientos se basaban en que las posiciones inicial y final eran tan próximas que podían identificarse. En la práctica, cuando se diseña una estructura, debe asegurarse que los desplazamientos que en ella originarán las cargas a que pueda verse sometida no superan ciertas limitaciones. A título de ejemplo podemos citar los siguientes valores aproximados: la flecha debe ser inferior a la luz dividida por 250 en vigas de cubierta, por 300, 400 o 500, según los casos, en vigas de plantas intermedias de edificios, y por 500 en puentes; el desplome —razón del desplazamiento horizontal en la punta a la altura— en estructuras altas no debe superar 1/500, etc. Estas restricciones, entre otros fines, persiguen que los elementos no estructurales no sufran daños y que la deformación no sea apreciable a simple vista, porque cuando se ve da sensación de inseguridad. Si nuestra estructura cumple todas estas condiciones, tenemos la garantía de que la configuración inicial y la deformada son tan próximas que no pueden distinguirse a simple vista. Es, pues, razonable pensar que no cometeremos un error importante aproximando una por la otra, y dando por buenas todas las simplificaciones que de ello se derivan.

Por otra parte, en la tabla 2-1 hemos visto que, al plantear las ecuaciones de equilibrio en la configuración inicial, estamos despreciando los desplazamientos frente a la longitud de la viga —$L+u_B \cong L$, $Q{\cdot}w_B << PL$—, y acabamos de exponer que el valor máximo de éstos no debe superar a la longitud significativa de la pieza dividida por 250, 300, 400 ó 500. Comprobamos, pues, que no es descabellado despreciar los desplazamientos frente a las dimensiones significativas de la estructura.

En resumen, hemos argumentado que, en general, en una estructura bien diseñada, es razonable aceptar las simplificaciones que se establecen suponiendo infinitesimales los desplazamientos y las deformaciones, puesto que las posiciones inicial y deformada prácticamente se confunden y las derivadas de los desplazamientos son mucho menores que uno. Esta hipótesis es uno de los pilares en los que se apoyan la Elasticidad Lineal y todas las teorías que de ella se derivan. En determinados casos, que quedan fuera del alcance de este texto, no es adecuado basarse en ellas. El lector interesado en las estructuras aprenderá a identificar tales casos cuando avance en su formación.

2.4 Ecuaciones cinemáticas. Tensor de deformaciones

En el apartado 2.2 presentamos las variables que definen el movimiento de una partícula P del cuerpo y vimos cuáles considerábamos independientes y cuáles función de estas. Las variables en cuestión eran:

- el vector posición de la partícula en la configuración inicial, **R**;
- el vector posición de la partícula en la configuración deformada, **r**; y
- el desplazamiento de la partícula, **d**.

Más arriba convinimos en denotar las componentes de estos vectores como

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= x(X,Y,Z)\mathbf{i} + y(X,Y,Z)\mathbf{j} + z(X,Y,Z)\mathbf{k} \\ \mathbf{d} &= u(X,Y,Z)\mathbf{i} + v(X,Y,Z)\mathbf{j} + w(X,Y,Z)\mathbf{k} \end{aligned} \qquad \textbf{(2-6)}$$

y en admitir como variables independientes las coordenadas del punto ocupado por la partícula en la situación inicial, *(X,Y,Z)*. En consecuencia, las componentes de **r** y **d** se consideran función de estas coordenadas.

La relación entre estos tres vectores, que quedó establecida en el punto 2.2, también se pone de manifiesto en la figura 2-3. Es la siguiente

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{d} \qquad \textbf{(2-8)}$$

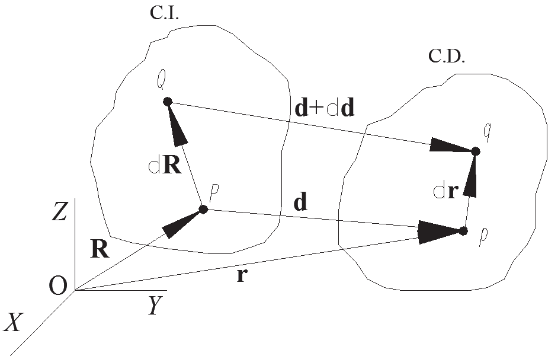


Figura 2-3. Cambio de configuración de un diferencial de vector posición

o bien, especificando las componentes

$$\begin{Bmatrix} x(X,Y,Z) \\ y(X,Y,Z) \\ z(X,Y,Z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(X,Y,Z) \\ v(X,Y,Z) \\ w(X,Y,Z) \end{Bmatrix} \tag{2-9}$$

En esta sección nos proponemos estudiar cómo se transforma un vector

$$d\mathbf{R} = dX\mathbf{i} + dY\mathbf{j} + dZ\mathbf{k} \tag{2-15}$$

definido en la configuración inicial por dos partículas P y Q, infinitamente próximas, al pasar a la configuración deformada —véase de nuevo la figura 2-3—. Como admitimos por hipótesis que la posición deformada del cuerpo se puede describir mediante funciones diferenciables de las variables independientes *(X,Y,Z)* —recuérdese que postulamos que el medio es continuo precisamente para usar el cálculo diferencial—, podremos hallar las componentes del vector $d\mathbf{r}$, imagen de $d\mathbf{R}$ en la configuración deformada, en función de las de este último, simplemente diferenciando las ecuaciones (2-9) que relacionan **r** con **R**. Así obtenemos

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial X} & \dfrac{\partial u}{\partial Y} & \dfrac{\partial u}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial X} & \dfrac{\partial v}{\partial Y} & \dfrac{\partial v}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial X} & \dfrac{\partial w}{\partial Y} & \dfrac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} \tag{2-16}$$

que, de forma más compacta, podemos escribir de cualquiera de las dos formas siguientes:

$$\{dr\} = \{dR\} + [H]\{dR\}$$
$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{H}\,d\mathbf{R} \qquad \textbf{(2-17)}$$

La primera recurre a la notación habitual del álgebra matricial, y en ella $\{dR\}$ y $\{dr\}$ representan las componentes de dR y dr escritas como vector columna y $[H]$ a la matriz que aparece en el segundo sumando de (2-16), que llamaremos tensor gradiente del desplazamiento. La segunda usa la notación de Gibbs.

La denominación tensor gradiente del desplazamiento se debe a que **H** determina el diferencial de desplazamiento $d\mathbf{d}$; para comprobarlo, nótese que escribiendo las componentes de **d** —definidas en (2-6)— como vector columna y derivando se llega a

$$\{dd\} = [H]\{dR\} \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{d} = \mathbf{H}\,d\mathbf{R} \qquad \textbf{(2-18)}$$

donde $\{dd\} = \{du,dv,dw\}^{t}$ representa las componentes del citado diferencial $d\mathbf{d}$.

Nótese que (2-16) también se puede escribir como

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\partial u}{\partial X} & \dfrac{\partial u}{\partial Y} & \dfrac{\partial u}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial X} & 1+\dfrac{\partial v}{\partial Y} & \dfrac{\partial v}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial X} & \dfrac{\partial w}{\partial Y} & 1+\dfrac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2-19)}$$

o. de forma más compacta, como

$$\{dr\} = [F]\{dR\} \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{r} = \mathbf{F}\,d\mathbf{R} \qquad \textbf{(2-20)}$$

donde $[F]$ representa la matriz que aparece en el segundo sumando de (2-19), que denominaremos tensor gradiente de la deformación —aunque quizás fuera más adecuado llamarlo tensor gradiente de la configuración o gradiente de la posición—. Comparando (2-16) con (2-19) resulta evidente que

$$[F] = [I] + [H] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H} \qquad \textbf{(2-21)}$$

donde $[I]$ representa la matriz unidad. Por coherencia, en notación de Gibbs se ha escrito **G**, que se usará para representar el tensor métrico —o tensor unidad— del sistema de coordenadas que se esté utilizando para describir la configuración inicial; lógicamente, en cartesianas queda determinado por la matriz unidad.

Pasaremos ahora a transformar la relación (2-17), descomponiendo el gradiente del desplazamiento en suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica, del modo siguiente

$$\{dr\} = \{dR\} + \tfrac{1}{2}\left([H] + [H]^{t}\right)\{dR\} + \tfrac{1}{2}\left([H] - [H]^{t}\right)\{dR\} = \ldots \qquad \textbf{(2-22)}$$

$$\ldots = \{dR\} + [E]\{dR\} + [\Omega]\{dR\}$$

Antes de continuar señalaremos que la parte simétrica de [*H*], que se denota por [*E*] y se denomina tensor de deformaciones lineal —o, si no hay peligro de ambigüedad, simplemente tensor de deformaciones—, tiene las siguientes componentes

$$[E] = \frac{1}{2}\left([H] + [H]^t\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial X} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} + \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Z} + \dfrac{\partial w}{\partial X}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} + \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial Y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial Z} + \dfrac{\partial w}{\partial Y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Z} + \dfrac{\partial w}{\partial X}\right) & +\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial Z} + \dfrac{\partial w}{\partial Y}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2-23)}$$

y que la parte antisimétrica de [*H*], que se denota por [Ω] y se denomina tensor de rotaciones, las siguientes

$$[\Omega] = \frac{1}{2}\left([H] - [H]^t\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} - \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Z} - \dfrac{\partial w}{\partial X}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} - \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial Z} - \dfrac{\partial w}{\partial Y}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Z} - \dfrac{\partial w}{\partial X}\right) & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial Z} - \dfrac{\partial w}{\partial Y}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2-24)}$$

Más adelante se justificará estas denominaciones.

Recordemos que, en la presentación del tema, hablamos de separar los desplazamientos en un movimiento de sólido rígido y una parte que no puede explicarse como tal, que forzosamente será una deformación. Vamos a demostrar que esto es precisamente lo que nos proporciona la expresión (2-22), basándonos en la interpretación física sus sumandos.

Por motivos de claridad, comenzaremos exponiendo la interpretación física de (2-22) en un ejemplo bidimensional. Así pues, por el momento supondremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} \\ \mathbf{r} &= x(X,Y)\,\mathbf{i} + y(X,Y)\,\mathbf{j} \\ \mathbf{d} &= u(X,Y)\,\mathbf{i} + v(X,Y)\,\mathbf{j} \end{aligned} \quad \textbf{(2-25)}$$

lo que implica que ahora

$$\{dR\} = \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} \quad , \quad \{dr\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial X} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} + \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} + \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2-26)}$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} - \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial Y} - \dfrac{\partial v}{\partial X}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

La expresión (2-22) define cómo se transforma el entorno de un punto P. La utilizaremos para estudiar cómo cambia el rectángulo $PQRS$ contenido en él —$P(X_0, Y_0)$, $Q(X_0 + \mathrm{d}X, Y_0)$, $R(X_0 + \mathrm{d}X, Y_0 + \mathrm{d}Y)$, $S(X_0, Y_0 + \mathrm{d}Y)$—. Para ello, todas las funciones de X e Y, y en particular las matrices $[E]$ y $[\Omega]$, deben evaluarse en $P(X_0, Y_0)$, por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos suponerlas dadas por

$$[E] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad , \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y ω son constantes.

Para facilitar la exposición, llamaremos $\{dr_1\}$, $\{dr_2\}$ y $\{dr_3\}$ a los tres sumandos de (2-22), que ahora escribiremos como

$$\{dr\} = \{dr_1\} + \{dr_2\} + \{dr_3\}$$

siendo $\{dr_1\} = \{dR\}$, $\{dr_2\} = [E]\{dR\}$ y $\{dr_3\} = [\Omega]\{dR\}$.

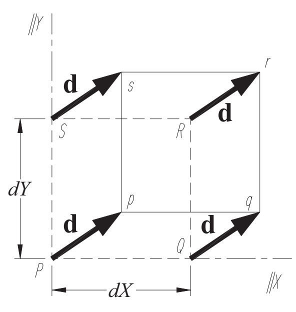


Figura 2-4. Traslación

El sentido físico del primer sumando

$$\{dr_1\} = \{dR\},$$

es evidente. Representa el resultado de una traslación de vector **d** de todo el entorno del punto P, por lo que la posición relativa entre sus puntos, definida por el vector $\{dR\}$, no varía. La figura 2-4 muestra como los vectores PQ, PR y PS, como consecuencia de la traslación que los transforma en pq, pr y ps, no se ven modificados salvo en su punto de aplicación.

Por otra parte, el tercer sumando,

$$\{dr_3\} = [\Omega]\{dR\}$$

define una rotación como sólido rígido del entorno de P. Para demostrarlo, calculamos la imagen $\{dr_3\}$ de los vectores $PQ = (dX,0)$, $PR = (dX, dY)$ y $PS = (0, dY)$, utilizando la matriz $[\Omega]$ anteriormente definida. Resulta

$$\begin{Bmatrix} dx_3 \\ dy_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega dY \\ -\omega dX \end{Bmatrix}$$

donde hay que sustituir los valores concretos de dX y dY en cada caso. La figura 2-5 muestra la alteración sufrida por el rectángulo elemental $PQRS$ como consecuencia de esta transformación, que se ve claramente que es un giro como sólido rígido de $-\omega$ rad, alrededor del punto P.

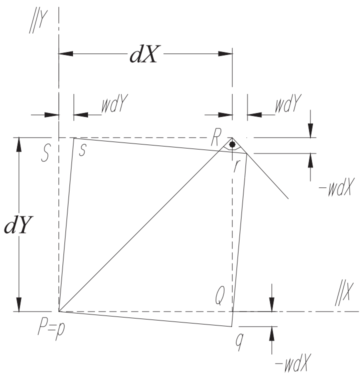


Figura 2-5. Rotación

Por último, operando como en el caso anterior, mostraremos que el segundo sumando

$$\{dr_2\} = [E]\{dR\}$$

determina la deformación del entorno del punto P. La imagen de un vector (dX, dY) genérico por esta aplicación es

$$\begin{Bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} adX + bdY \\ bdX + cdY \end{Bmatrix}$$

Particularizando esta relación a los casos de los vectores *PQ*, *PR* y *PS* se obtienen los desplazamientos de los puntos *Q, R* y *S* debidos a esta transformación, que se han representado en la figura 2.5. Es evidente que dan lugar a la deformación del rectángulo *PQRS*, que se transforma en el romboide *pqrs*.

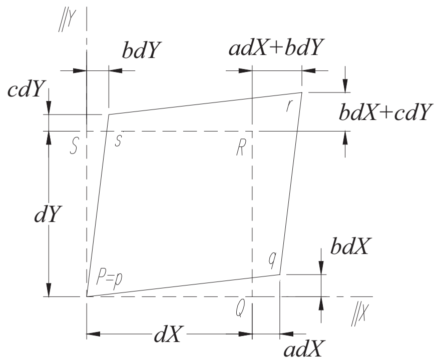


Figura 2-6. Deformación

Así pues, en resumen, del ejemplo bidimensional se deduce que dos de los sumandos de (2-22), el primero $\{dr_1\}=\{dR\}$, y el tercero $\{dr_3\}=[\Omega]\{dR\}$, determinan un movimiento del entorno de *P* como sólido rígido, mientras que el segundo sumando $\{dr_2\}=[E]\{dR\}$ define su deformación.

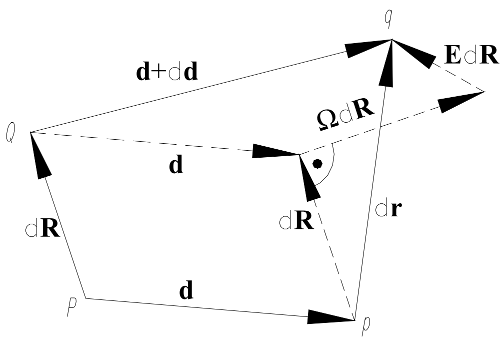


Figura 2-7. Componentes de *d*r

Para seguir leyendo haga click aquí