MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
Volume 1, No. 1, 2008.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

La ingeniería como escenario y los modelos matemáticos como actores

Joan Gómez i Urgellés
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
joang@ma4.upc.edu

Abstract

En este artículo se presenta una experiencia de innovación educativa en el ámbito del currículum de las ingenierías. Incluye el trabajo en proyectos como una componente del proceso de enseñanza-aprendizaje, analizándose la validez y la viabilidad de la modelización matemática como metodología. Algunos de los modelos analizados, entre otros, están basados en el estudio de electrocardiogramas, destacando la importancia de las series de Fourier como modelo para la interpretación de los mismos. El cambio metodológico propuesto es una tendencia cognitiva i heurística que pone énfasis en la epistemología de las matemáticas y revisa el proceso de evaluación, frente a la enseñanza tradicional.

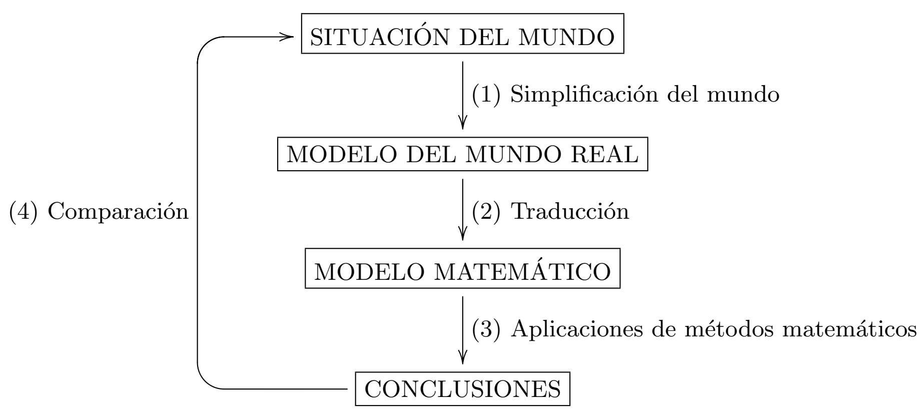
An experience of innovative teaching in the engineering curriculum is presented. It includes work in projects as a component of teaching-learning, analysing the validity and viability of the methodology of mathematical modelling processes. Some of the analysed models, among others, are based on the study of electrocardiograms, emphasizing the importance of Fourier series as a model to interpret this situation. The methodological change versus traditional teaching stands out, and it acquires a heuristic and cognitive trend emphasising the epistemology of mathematics and re-examining the evaluation processes.

1 Antecedentes: matemáticas e ingeniería, una relación necesaria

En una sociedad tecnológicamente avanzada del siglo XXI es preciso usar pedagogía del siglo XXI ante una pedagogía, quizás obsoleta, del siglo XIX, para ello se hace necesario redefinir contenidos y metodologías en la formación de usuarios de las matemáticas. El paso de la tradición a la innovación no es un cambio de soporte, es verificar y analizar nuevas formas de educación / aprendizaje que proporcionen resultados cognitivos óptimos, para ello se requiere una buena formación no sólo matemática, sino didáctica y interdisciplinaria. Describiré experiencias que han obtenido resultados de mejora de la calidad docente y a su vez destacan las producciones matemáticas y tecnológicas mostradas por los alumnos. Puig Adam apuntaba. "Uno de los defectos fundamentales que tenia la enseñanza matemática, para técnicos en los comienzos del siglo era su exceso de abstracción, su inconsciente apartamiento de toda aplicación inmediata al mundo real.... la culpa de su incapacidad no radicaba en la matemática en sí, sino en el modo cómo se las había enseñado". El cómodo pretexto: "Ustedes verán cómo esto se aplica en..." rara vez tenía confirmación.

2 Metodología docente experimentada

La propuesta metodológica está basada en la modelización matemática como herramienta de enseñanza-aprendizaje. La modelización matemática consiste en formular un problema de la vida cotidiana o situación técnica en términos matemáticos, resolverlo si es posible y interpretar los resultados en términos del problema y de la situación planteada. El marco teórico se fundamenta en el trabajo realizado por M. Niss (Niss,1992) y en el siguiente esquema:

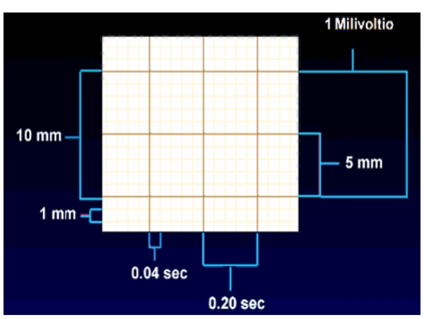


La experiencia se desarrolla en alumnos de primer curso de ingeniería de la Universidad Politécnica de Catalunya implementando la modelización en la realización de proyectos. Estos aspectos metodológicos se estructuran en lo que denomino proyectos, en los cuales el estudiante aprende los conceptos y no es un mero espectador en la adquisición de conocimientos. El objetivo de los proyectos es averiguar si los alumnos son capaces de desarrollar un problema real a partir de la información facilitada por el profesor y construir una teoría que explique el fenómeno estudiado. Como referencia a esta tipología de prácticas destaco la experiencia realizada en Portugal por P. Abrantes (Abrantes,1989). El proyecto es defendido públicamente en la última semana lectiva del curso y contempla las intervenciones de los demás alumnos; en la exposición el profesor interpela a los alumnos y las intervenciones se registran en vídeo. Los proyectos están concertados (a grupos de entre 3 y 4 personas) en una entrevista previa con el profesor. Hay una componente de investigación: el estudiante ha de recoger información con el fin de desarrollar las actividades propuestas, de esta forma se pretende que el alumno tome contacto con el mundo extra-académico. Destacar que en la elaboración de proyectos hay involucradas otras áreas de conocimiento, lo cual proporciona una mayor conexión entre el binomio matemática-realidad. Entenderemos la realización de un proyecto como una forma de aprendizaje interdisciplinario basado en la experiencia y capaz de convivir con otras formas tradicionales de aprendizaje. La inclusión de proyectos queda justificada por los siguientes aspectos: La adquisición de conceptos. Un aprendizaje activo. Desarrollo de habilidades. Trabajo en grupo. Asumir responsabilidades. En cada proyecto se incluye una plantilla de evaluación que cumplimenta el profesor y que sirve para obtener información del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Esta parrilla contempla aspectos de diseño global, contenido matemático, claridad, actitud matemática, conclusiones y comentarios, puntuación final (Gómez,2000). En la investigación didáctica se plantea una articulación del contenido de la matemática que favorezca la perspectiva interdisciplinar utilizando y descubriendo conceptos matemáticos mediante el planteamiento de situaciones reales. Se enfatiza el cambio metodológico versus la enseñanza tradicional adquiriendo una vertiente heurística que destaca la epistemología de la matemáticas y replantea los procesos de evaluación.

3 Descripción de algunos modelos

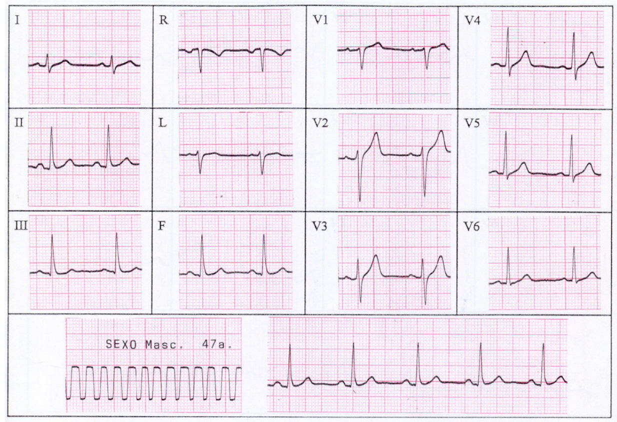
3.1 Modelizando un electrocardiograma

El objetivo es construir un modelo matemático que nos facilite información sobre la salud del corazón. Para ello se recogen muestras reales de electrocardiogramas de diversas topologías (corazón sano, corazón enfermo, pruebas realizadas en adultos, en niños,...). El trabajo lleva explícito la simulación y aproximación por ordenador de los gráficos que nos muestra el aparato; de esta forma aparecen necesariamente las series de Fourier. Mediante la simulación en MAPLE se obtienen que los valores de los coeficientes de Fourier no son los mismos si se trata de un corazón sano o enfermo, ni necesariamente los mismos si el rango de edad del paciente es distinto. La gráfica del electrocardiograma se presenta en papel milimetrado que mide verticalmente el voltaje y horizontalmente el tiempo, determinado por el desplazamiento del papel.



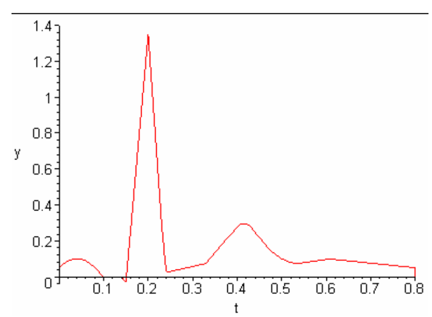
Los datos a tener en cuenta son:
- Velocidad del electrocardiograma igual a 25mm/seg.
- 1mm = 0.04 seg.
- 5mm = 0.20 seg.
- 1mm vertical = 0.01 mvolt.

Así pues, mediante el análisis visual de un gran número de electrocardiogramas, es posible generalizar que con algo tan simple como fijarnos en el valor de amplitud de onda del electrocardiograma podemos conjeturar si este pertenece a un corazón sano o enfermo. Con el trabajo se puede establecer la conclusión de que comprobando únicamente que esos valores se encuentren entre 0.15mvolt y 0.08mvotls, el electrocardiograma correspondiente pertenece a una persona sana .En la ilustración se muestra un electrocardiograma normal correspondiente al corazón de un varón de 40 años (Cabrara,1998).



Con la ayuda de MAPLE7 podemos simular analíticamente y visualizar la función. Notemos que la gráfica simulada está definida en el intervalo $(0, 0.8)$. Esta función es extendida periódicamente con un período de 0.8 segundos.

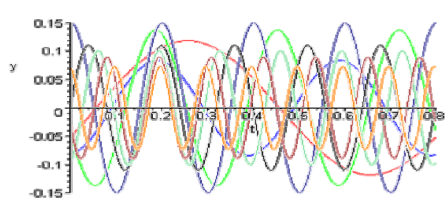
$$\left.\begin{array}{cc}
.2\mathtt{sin}(5.714285714\pi\mathtt{t} + .2702702703\pi) - .1 & -t \leq 0 \text{ and } t < .08 \\
-2.5\mathtt{t} + .25.08 & -\mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .1 \\
0 & .1 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .14 \\
-3\mathtt{t} + .42 & .14 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .15 \\
7.6\mathtt{t} - 4.17 & .15 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .2 \\
-35\mathtt{t} + 8.35 & .2 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .23 \\
-27.5\mathtt{t} + 6.625 & .023 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .24 \\
.55\mathtt{t} - .108 & .24 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .33 \\
2.91\mathtt{t} - .8850 & .33 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .39 \\
.2\mathtt{sin}(9.280742459\pi\mathtt{t} + .6493506494\pi) + .1 & .39 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .44 \\
.2\mathtt{sin}(1.428571429\pi\mathtt{t} + .7369196758\pi) + 2.075 & .44 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .53 \\
.35\mathtt{t} - .114 & .53 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .6 \\
-.25\mathtt{t} + .25 & .6 - \mathtt{t} \leq 0 \text{ and } \mathtt{t} < .8
\end{array}\right\}$$



Se usan las series de Fourier que nos permitirán calcular los coeficientes y a su vez se comparan diversos electrocardiogramas. Realizando cálculos para la expresión:

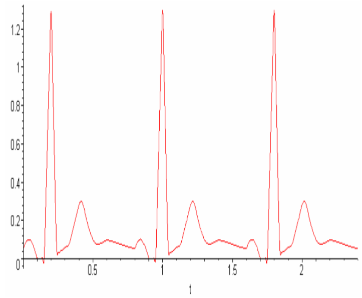
$$Sf(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nwt) + b_n \mathrm{sen}(nwt)\big).$$

con $T = 0.8$ y $w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8}$. Superponiendo 8 armónicos se obtiene:



La suma de los mismos se aproxima a la función inicial pero utilizando MAPLE nos permite obtener una información más precisa, para ello consideramos 50 armónicos y mostraremos la visualización gráfica representada en tres intervalos consecutivos de período 0.8 segundos:

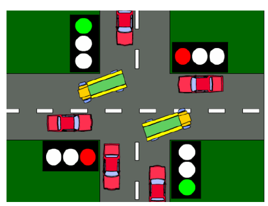
$$\texttt{plot}\left(\frac{.3195816819}{8}+\sum_{n=1}^{50}\left(\cos\left(\frac{n2\pi t}{.8}\right)a_n+\sin\left(\frac{n2\pi t}{.8}\right)b_n\right), t=0..2.4, \texttt{colour}=\texttt{red}\right)$$



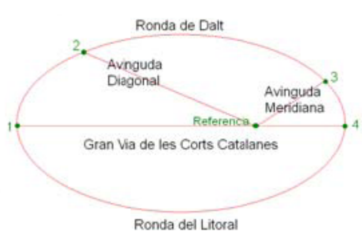
Observemos que hemos conseguido un mejor modelo del electrocardiograma.

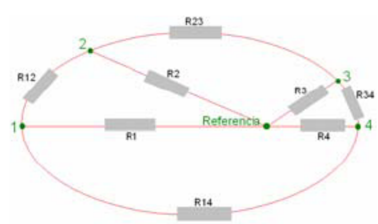
3.2 Intersección regulada por semáforos

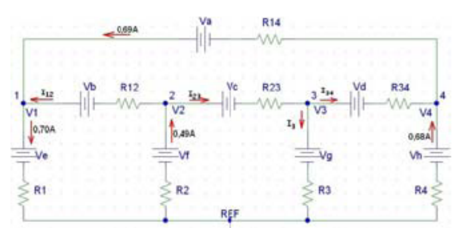
En este caso se analiza el funcionamiento de una red de circulación vial. En concreto se elige una intersección regulada por semáforos para estudiar la evolución del tráfico.
En el proyecto se establece la analogía entre los elementos clásicos de la teoría de circuitos y las características del tráfico rodado: Leyes de Kirchoff, teoría de grafos,...y se intenta mostrar resultados como una primera aproximación al problema de la gestión del tráfico. Se escogió una intersección real y se ilustró utilizando flash de MACROMEDIA e incluso se construyó una maqueta para simular la red vial tal como muestran las siguientes ilustraciones.



A continuación se plasma la secuencia-esquema seguida para modelizar:

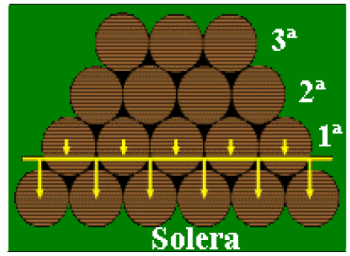






3.3 Método de la Solera

El vino más añejo está en la fila inferior de barriles y el más nuevo en el piso de más arriba. Cada año, la mitad del contenido de los barriles del suelo se embotella como jerez y se llena con vino de los barriles de la fila inmediatamente superior. El proceso se completa añadiendo vino nuevo a los barriles de la fila de más arriba. El problema es buscar un modelo matemático que nos determine la cantidad de vino de n años que se extrae de k filas de barriles (Larson,2003. Cálculo I).



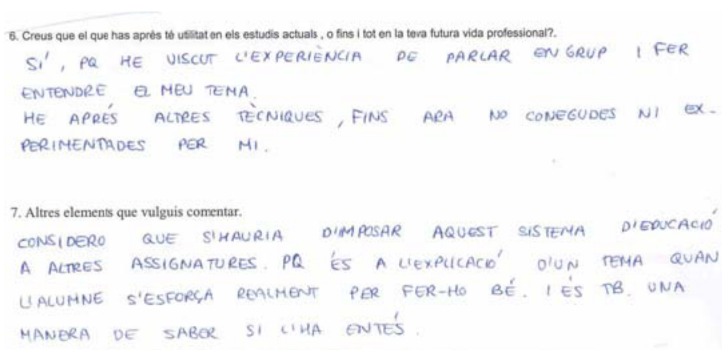
Los alumnos dedujeron, a partir de considerar series numéricas, que la expresión que determina la cantidad de vino de n años que se extrae de k filas de barricas es:

$$f(n,k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \text{ para } k < n.$$

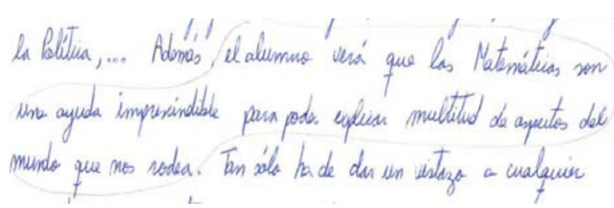
Este es otro ejemplo de modelización que muestra la componente epistemológica de las mismas.

4 Conclusiones: de la tradición a la innovación

Los principales instrumentos de evaluación para validar la eficacia de la metodología son los comentarios de los alumnos, grabaciones en vídeo y cassete y inventario del rendimiento académico a partir del material recopilado. Mostraré algunos comentarios realizados por los propios estudiantes:


6. Creus que el que has après té utilitat en els estudis actuals , o fins i tot en la teva futura vida professional?.
SÍ, PQ HE VISCUT L'EXPERIÈNCIA DE PARLAR EN GRUP I FER ENTENDRE EL MEU TEMA.
HE APRÉS ALTRES TÈCNIQUES, FINS ARA NO CONEGUDES NI EXPERIMENTADES PER MI.

7. Altres elements que vulguis comentar.
CONSIDERO QUE S'HAURIA D'IMPOSAR AQUEST SISTEMA D'EDUCACIÓ A ALTRES ASSIGNATURES. PQ ÉS A L'EXPLICACIÓ D'UN TEMA QUAN L'ALUMNE S'ESFORÇA REALMENT PER FER-HO BÉ. I ÉS TB. UNA MANERA DE SABER SI L'HA ENTÈS.


la Política, ... Además, el alumno verá que las Matemáticas son una ayuda imprescindible para poder explicar multitud de aspectos del mundo que nos rodea. Tan sólo ha de dar un vistazo a cualquier

Entre los comentarios destacan "...he aprendido a hablar en público...es necesario incluir esta metodología y he aprendido técnicas nuevas...contextualizar aspectos del mundo que nos rodea ...".

A través de la experiencia y de los comentarios de los alumnos destaco que han adquirido un conocimiento interdisciplinar: **como funcionan algunas máquinas de electrocardiogramas, proceso de elaboración de vinos, Funcionamiento del editor de ecuaciones de word y aprendizaje de programas de cálculo simbólico. Y a nivel de producciones matemáticas: concepto de grafo, inducción, interpretación de gráficas, funciones periódicas, análisis de Fourier, interpretar la transformada Z, sumatorios y series,...**

En el ámbito epistemológico se consigue una mayor conexión con el currículum de ingeniería y se destaca la interdisciplinariedad, mostrando las matemáticas no desvinculadas de la realidad y del entorno profesional. Destaca el aspecto formativo de las matemáticas, en el sentido de que las técnicas de modelización permiten estimular el interés por el descubrimiento y la creatividad. **Involucra protocolos de trabajo nuevos, que están ausentes en la docencia tradicional como son el trabajo en grupo, la verificación de hipótesis , el manejo de bibliografía , la defensa oral, el uso de nuevas tecnologías,...** En el ámbito heurístico se favorece el trabajo en grupo, como característica presente en una sociedad avanzada del siglo XXI, fomentando el debate y a la vez potenciando el sentido crítico. La enseñanza tradicional mantiene excesivos formalismos que a menudo se alejan de la realidad del futuro ingeniero. En la modelización se evita la carga de formalismos apostando por un aprendizaje más intuitivo y próximo a las situaciones técnicas. En el ámbito cognitivo podemos establecer que la modelización matemática es una buena herramienta para la enseñanza / aprendizaje de las matemáticas y **presenta nuevas formas de evaluación, continuada y formativa. Esta metodología y experiencias de trabajos en proyectos a nivel universitario se realiza también en colaboración con colegas de la Universitat Politècnica de València (Garcia, 1998).**

En este tipo de experiencias se plasma el papel relevante de la modelización matemática en la escena curricular de ingeniería, adquiriendo un protagonismo el aprendizaje producido por los propios alumnos que a su vez asumen el papel de actores en su propio aprendizaje. **De esta forma hacemos realidad el viejo sueño de Puig Adam!!**

5 Bibliografía

[1] P. Abrantes. “Matemática,reqalidade e trabalho de projecto na escola secundária”. Lisboa. Educaçao Matemática 12. 1989.

[2] C. Alsina, C. Burgués, J.M. Fortuny. “Ensenyar Matemàtiques”. Graó. 2001.

[3] G. Cabrara. “Semiología del electrocardiograma, Análisis e interpretación”, Ed. Grupo Aula médica. 1998.

[4] COMAP. “Matemáticas y vida cotidiana”. Addison-Wesley. 2000.

[5] L.M. Garcia. “Proyectos de Matemática Aplicada para ingenieria”. Publicaciones UPV. 1998.

[6] J. Gómez. “Per un nou ensenyament de les matemàtiques”. Edit. CEAC. 2000.

[7] Larsson. “Cálculo I” .Edit. Pirámide Grupo Anaya. 2003.

[8] M. Niss. “Applications and modelling in school Mathematics-directions for future development”, in I.Wrszup I Steint (ed) Development in school mathematics around the world V.3 NCTM.Reston. 1992.

[9] P. Puig Adam. “Cálculo Integral”. Edición 1972.10.

[10] Web de modelización:

http://www.upc.edu/epsevg/modelitzacio