MSEL
MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING

MODELLING IN SCIENCE EDUCATION AND LEARNING
Volume 3, No. 5, 2010.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza

Irene Ferrando[1]
IES SECCIÓ REI JAUME I. PICASSENT (VALÈNCIA)
irferpa@doctor.upv.es

Carlos Segura
IES CÀRCER. CÀRCER. VALÈNCIA
carlos.segura@uv.es

Abstract

El objetivo de este artículo es mostrar la relación existente entre una rama de la botánica, la filotaxis, y las matemáticas. Repasaremos la historia de la filotaxis desde la antigüedad hasta nuestros días y comentaremos algunos modelos de filotaxis basados en la sucesión de Fibonacci.

In this article we show the relationship between one branch of Botanic, the phyllotaxis, and the Mathematics. We will review the history of phyllotaxis, from the Greeks to nowadays and we will comment some models of phyllotaxis based on Fibonacci's sequence.

Keywords: Modelos Matemáticos, Botánica, Filotaxis, Sucesión de Fibonacci

[1]This work was supported by Proyecto MEC and FEDER MTM 2009-14483-C02-02, Vicerrectorado de Investigación UPV PAID-06-09 Ref. 3093 and Generalitat Valenciana Proyecto GV 2009/102

1 Introducción

Filotaxis es una palabra de origen griego que literalmente significa ordenación de las hojas alrededor de un tallo, de *Phillon*, hoja y *Taxis*, ordenación. En un sentido más amplio, la filotaxis es la rama de la botánica que estudia la distribución de los elementos de una planta: flores, hojas, semillas, ramas, etc. En lo que respecta a la distribución de las hojas en el tallo el primero en realizar un estudio riguroso es el botánico suizo Charles Bonnet, gracias a sus trabajos -en particular [2]- actualmente se distinguen dos grandes grupos: plantas con distribución alterna, en la que de cada nudo sólo crece una hoja y con distribución verticilada en la que de cada nudo brotan dos o más hojas. Dentro de estos grandes grupos también hay distinciones. Decimos que la filotaxis alterna es dística cuando las hojas crecen opuestas en el tallo y helicoidal cuando cada hoja está girada respecto a la anterior en un ángulo inferior a 180º. Dentro de las plantas con filotaxis verticilada, las decusadas son aquellas en las que de cada nudo brotan exactamente dos hojas. En este trabajo nos centraremos en la distribución de las hojas en las plantas con filotaxis helicoidal. En las plantas con dicha distribución, se define el ángulo de divergencia como sigue: fijamos la hoja más baja en el tallo y rotamos alrededor del tallo hasta alcanzar la hoja que esté superpuesta a la fijada, el ángulo de divergencia es la proporción de 360º que se obtiene diviendo en número de rotaciones del tallo entre el número de hojas que hemos pasado. A lo largo del trabajo veremos que dicho ángulo tiende a tomar un valor constante e intentaremos encontrar una explicación a este fenómeno presentando algunos modelos realizados desde finales del siglo XIX hasta nuestros días.

La filotaxis no se limita al estudio de la distribución de las hojas, sino que también se centra en la distribución de las escamas de una piña o de las semillas de un girasol. En este trabajo también pretendemos por tanto buscar un explicación a la distribución en espiral en estos casos, pues también existe cierta regularidad en ella. Basta observar detenidamente las semillas de un girasol o de una margarita para distinguir dos tipos de espirales llamadas por los botánicos *paristiquios*, veremos que el número de paristiquios en cada sentido también tiene ciertas propiedades matemáticas curiosas e intentaremos encontrar una expliación matemática y física a este fenómeno.

Hemos preferido no extendernos en lo que respecta a la sucesión de Fibonacci y el número áureo pues su construcción y sus propiedades son bien conocidas, como referencia recomendamos los libros de M. Ghyka [7, 8] así como el libro de divulagción de F. Corbalón [5] recientemente publicado. Simplemente recordemos que la sucesión de Fibonacci debe su nombre al matemático Leonardo de Pisa (1175-1240) que en su tratado *Liber Abaci* introduce una sucesión definida por recurrencia como sigue: fijando los dos primeros términos con valor igual a 1, cada término se obtiene sumando los dos anteriores, de este modo se obtiene la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. La relación entre esta sucesión y el número áureo ha sido ampliamente estudiada, en particular nos interesa saber que el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión converge al número áureo, también concido como Φ en honor al escultor griego Fidias.

El trabajo está estructurado de forma cronológica, pasearemos a lo largo de la historia para descubrir a aquellos que se han interesado en la filotaxis y en su relación con las matemáticas desde la antigua Grecia hasta nuestros días, observando cómo los avances científicos y tecnológicos han permitido encontrar una explicación racional a lo que antiguamente sólo se intuía. Como referencia sobre la historia de la filotaxis recomendamos el exhaustivo artículo de Adleret al., ver [1].

2 Los inicios de la filotaxis

Las primeras referencias conocidas sobre el estudio de la filotaxis se remontan al siglo III a. C. El filósofo griego Teofrasto, conocido por ser el autor de dos importantes tratados de botánica, estudia la disposición de las hojas en los tallos. En uno de los seis libros que componen su obra *De causis plantarum* Teofrasto apunta *aquellas plantas que tienen hojas planas, las tienen distribuidas de forma regular*. Más de tres siglos más tarde, Plinio el Viejo en su libro *Historia natural* es más preciso y describe la disposición de las hojas en algunas especies concretas. Vemos a través de estos autores que en la antigüedad ya se reconocían distintos patrones de crecimiento de las hojas y que estas distinciones permitían clasificar distintas especies. Además en sus trabajos hicieron constar algo que es fácil observar a simple vista, que en la mayoría de las plantas las hojas no crecen una encima de la otra.

El primero en intentar dar una explicación a la disposición de la hojas en el tallo fue Leonardo da Vinci. Este genio del Renacimiento observó que en muchos casos las hojas se sitúan en el tallo siguiendo grupos de 5, es decir que el ángulo de divergencia sería un múltiplo de $\frac{1}{5}$. La explicación de Leonardo es que este ángulo es el que permite que tanto el sol como el agua de lluvia puedan llegar al un mayor número de hojas. Algunos años más tarde, el botánico italiano Andrea Caesalpino clasifica en su *De Plantis Libri* las plantas según la disposición de sus hojas, sus semillas o sus frutos y observa la regularidad geométrica en las distribuciones.

Charles Bonnet, biólogo y filósofo suizo está acreditado como el primer estudioso de la filotaxis formal. En su libro *Recherches sur l' usage des Feuilles dans les plantes*, publicado en 1754, describe los 4 tipos de distribuciones de las hojas anteriormente comentados (decusada, helicoidal, dística y verticilada). Es el primero en definir el ángulo de divergencia y en observar que uno de los más habituales es $\frac{2}{5}$ de rotación, es decir, 144º. La explicación que da Bonnet a esta distribución sigue la línea de la dada por Leonardo, es decir, facilitar la llegada de agua y sol a todas las hojas. En este punto, no debemos olvidarnos del gran astrónomo Johannes Kepler, anterior a Bonnet (vivió entre 1571 y 1630), también realizó interesantes observaciones relativas a la filotaxis. Kepler estaba fascinado con el número 5 por presencia casi mágica en la naturaleza, flores con 5 pétalos formando un pentágono, frutas, como la manzana, cuyas semillas se distribuyen siguiendo un pentágono estrellado, etc. Como conocía bien la sucesión de Fibonacci, observó que aparecía a menudo en la distribución de las hojas. Puesto que la sucesión de Fibonacci se genera por una regla de adición, Kepler concluyó que el crecimiento de los árboles (sus ramas) seguían un patrón similar al del crecimiento auto generativo de la sucesión de Fibonacci. En cierto sentido, supuso que la sucesión de Fibonacci gobernaba el crecimiento de las plantas por su capacidad de propagarse a sí misma. Evidentemente esta suposición es falsa, ya que la sucesión no se propaga sino que se construye por una simple recurrencia, como muchas otras sucesiones. Como veremos a continuación, Kepler fue el primero pero no el ultimo en relacionar el crecimiento de las plantas con la sucesión, aunque su justificación era parcialmente errónea.

3 Los primeros modelos

En la década de los años 30 del siglo XIX, empieza un estudio sistemático de la filotaxis desde un punto de vista matemático gracias al naturalista alemán Karl Schimper (1803-1867) y al biólogo, también alemán, Alexander Braun (1805-1877). Schimper publica en 1830 un artículo (véase [13]) en el que estudia las distribuciones helicoidales de las hojas y define el ángulo de divergencia de algunas especies. Supuso que todos los ángulos de divergencia eran fracciones racionales y descubrió que los más comunes se podían escribir como fracciones de elementos alternos de la sucesión de Fibonacci. Evidentemente, Schimper era consciente de que estaba realizando aproximaciones al ángulo de divergencia, sin embargo nunca se planteó que pudiera ser un irracional. Lo cierto es que no andaba desencaminado ya que, por citar algunos ejemplos, el olmo y el tilo tienen un ángulo de divergencia $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ es el del el avellano y el haya, $\frac{2}{5}$ el del roble y el albaricoque, encontramos el álamo y el peral que tienen un ángulo de $\frac{3}{8}$, etc.

Un gran amigo de Schimper, el botánico Alexander Braun también dedicó parte de su trabajo al estudio de la filotaxis. Éste se centró en el examen minucioso de la distribución de las escamas en las piñas. Braun observó que en muchos casos, el numero de espirales visibles que aparecían en dirección horaria y antihoraria eran dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. A partir de los trabajos de estos dos biólogos se definió la serie de Schimper-Braun, formada por los cocientes $\frac{a_n}{a_{n+2}}$ que sirvió para clasificar muchas especies según su ángulo de divergencia, puesto que éste es constante para cada una de ellas. Si recordamos que el cociente entre dos términos consecutivos tiende a Φ, tendremos que la serie de Schimper-Braun tenderá a $\frac{1}{\Phi^2}$ que como veremos más adelante será mas o menos el ángulo de divergencia *ideal*. Así, gracias a los estudios de Schimper y Braun, la sucesión de Fibonacci y la botánica quedaron unidas.

Para comprobar realmente las afirmaciones de Braun, en 1968, el matemático norteamericano Alfred Brosseau hizo un estudio con 4290 piñas de diez especies diferentes de pinos de California y pudo comprobar que, con la insignificante excepción de 74, todas las demás seguían la sucesión de Fibonacci, lo que supone una coincidencia del 98,3 por cien. Como sucede a menudo, pasado un tiempo y sin que hubiera una explicación razonable a estas coincidencias, la comunidad científica mostró su escepticismo y repitió el análisis en 1992. El botánico Roger V. Jean, tal y como explica en su libro dedicado a la filotaxis matemática (véase [10]), amplió el estudio a 12750 observaciones de 650 especies diferentes. Los resultados son alentadores, el 92 por cien de las piñas seguían el patrón de los números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Lo curioso es que un 2 por cien de las que no seguían el patrón de la sucesión de Fibonacci, seguían la sucesión de Lucas (construida con la misma recurrencia $2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots$ las fracciones de términos consecutivos también convergen a Φ).

Los hermanos Bravais intentaron dar una respuesta parcial al hecho de que la sucesión de Schimper-Braun gobernara el crecimiento de las hojas, de hecho ellos fueron los primer en obtener modelos para explicar este fenómeno. En su artículo [3] publicado en 1837 los Bravais introducen novedosos métodos para estudiar la filotaxis, algunos de los cuales aun están vigentes: modelizaron la distribución de las hojas en el tallo como un retículo de puntos en un cilindro como se puede ver en la Figura 5.1. Observaron que en la distribución helicoidal de las hojas se pueden distinguir espirales primarias (generadoras) y secundarias, y -discrepando con Schimper y Braun- aseguran que el ángulo de divergencia más habitual es irracional, exactamente $\frac{1}{\Phi^2}$ (el límite de la serie Schimper-Braun), que corresponde a 137º, el llamado ángulo áureo y definido a partir de la sucesión de Fibonacci. Sin embargo, también observaron que hay otros ángulos habituales como 99º30", o 77º57", relacionados con las sucesiones $1, 3, 4, 7, 11, \ldots$ y $1, 4, 5, 9, 14, \ldots$, ambas construidas con la misma ley de recurrencia que la de Fibonacci.

4 Los modelos más recientes

Esta sección la vamos a dedicar a comentar algunos modelos del crecimiento de las semillas en las flores, veremos que tanto matemáticos, como físicos y por supuesto biólogos han dado

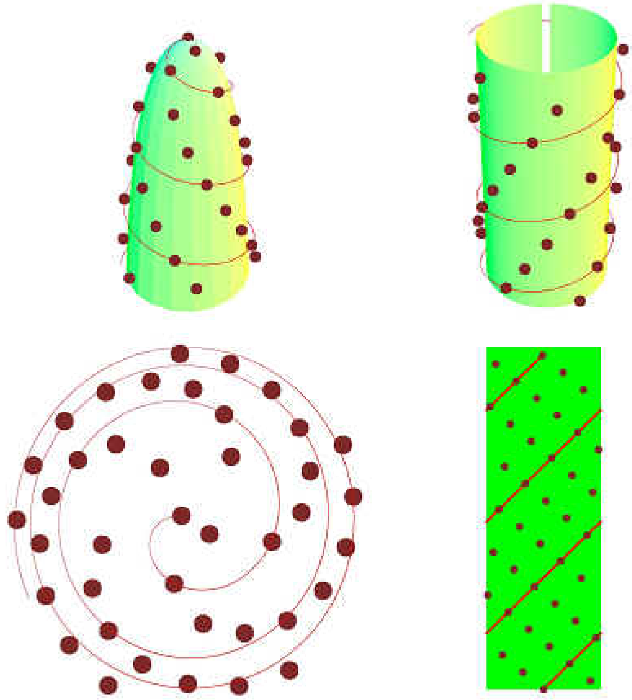

Figure 5.1: Modelo reticular de los hermanos Bravais

diferentes respuestas al hecho de que el crecimiento de las flores también esté ligado al misterioso número Φ. Como ya se ha comentado en la introducción, al observar detenidamente las semillas de un girasol o de una margarita es fácil distinguir los paristiquios, una mirada con más detalle nos permite descubrir en la zona central de la flor un tejido indiferenciado formado de abultamientos. Los botánicos descubrieron que cada una de las partes de los frutos (las pipas) que forman los paristiquios se desarrollaban desde esta zona central, a partir de los llamados *primordios*. Numerando los primodios según su edad se forma una nueva espiral mucho más cerrada que la formada por los paristiquios y no visible a simple vista, la llamada *espiral generativa*, como muestran las figuras 5.2 y 5.3 distinguimos dos espirales en sentido horario y antihorario, contando el número de espirales en cada sentido obtenemos respectivamente 21 y 34, 34 y 55 u 89 y 144, siempre términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Si definimos el ángulo de divergencia como áquel que forman dos primordios consecutivos (véase figura 5.4), se observa que que dicho ángulo es constante. Veamos cuál puede ser este ángulo de divergencia; si fuera, por ejemplo, un ángulo de un cuarto de giro, 90º, nuestro girasol adulto resultaría muy diferente al que conocemos ya que quedarían grandes espacio vacíos entre las semillas; de hecho, en este caso, el girasol tendría los frutos -las pipas- dispuestos en forma de cruz. Algo similar ocurriría si el ángulo fuera de un sexto de giro ,60º, ya que en este caso el girasol tendría los frutos dispuestos en una rueda de seis radios. En general este razonamiento nos lleva a concluir que, para que no haya grandes espacios vacíos entre los frutos, el ángulo de divergencia no puede ser un múltiplo racional de 360ª. Luego el ángulo de divergencia debe ser un múltiplo irracional de 360º, de hecho así sucede pues, mediante una sencilla medición, se comprueba que es exactamente 360 divido entre el número áureo. La explicación puramente matemática de este fenómeno es que el número Φ es, en un sentido matemático muy profundo, el más irracional de todos los números tal y como demuestra el teorema de Hurwitz (véase en [9] el resultado original y en [4] una prueba sencilla del mismo). Hurwitz asegura que para

Figure 5.2: Margarita con 21 espirales en sentido antihorario

Figure 5.3: Margarita con 34 espirales en sentido horario

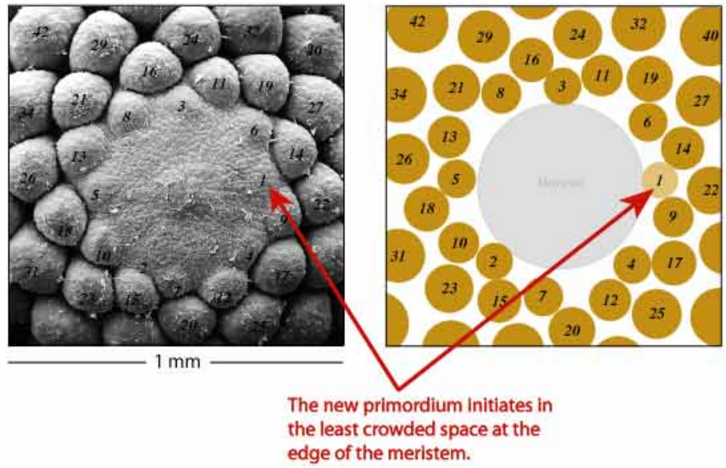

Figure 5.4: Detalle de los primordios

todo número irracional α, existen infinitos racionales $\frac{p}{q}$ diferentes que distan de alpha menos que $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$; de hecho la constante $\sqrt{5}$ es óptima como se ve aplicando la acotación al número Φ (tomando $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $A > \sqrt{5}$ existe sólo una cantidad finita de irracionales tales que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Aq^2}$). Esta sería por tanto la explicación matemática de la aparición recurrente de Φ en el crecimiento de las flores; sin embargo, teniendo en cuenta que los girasoles no entienden de álgebra, intentemos encontrar una explicación física.

Para explicar el porqué de la forma de espiral con ángulo áureo que se observa en las flores debemos entender primero cómo se generan los primordios que forman dichas espirales. El primero en presentar un modelo del crecimiento de los primordios fue Hofmeister en 1868, para realizar el mismo se basó en la idea de que los primordios aparecen a intervalos regulares en el espacio más grande disponible. Basándose en esta idea obtuvo espirales con ángulo áureo. Durante la primera mitad del siglo XX el matrimonio Snow confirmó y refinó las ideas de Hofmeister (véase [14]), su hipótesis era que sólo aparece un nuevo primordio cuando hay un espacio suficientemente grande, es decir que cada uno de estos primordios se desplaza radialmente hacia fuera debido a la presión ejercida por los nuevos primordios que se van desarrollando, además la velocidad de desplazamiento es proporcional a su distancia al centro, este hecho explicaría el crecimiento logarítmico de las espirales.

Algunos años más tarde, en 1952, A. Turing presenta su trabajo *Fundamentos Químicos de la Morfogénesis* (cf. [16] y [15]), en él se plantea que un posible mecanismo de los genes de los primordios puede determinar la estructura del organismo. Define la *morfogénesis* como el conjunto de procesos que llevan a un sistema a tomar una forma concreta, y los *morfógenos* como las sustancias responsables de setos procesos. A traves de unos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales Turing realizo el siguiente modelo: partió de una tira de células de manera que cada una de ellas sólo entra en contacto con las dos adyacentes. En cada célula se sintetizan dos tipos de moléculas que interaccionan entre sí y pueden difundirse a las células vecinas. Modeliza cada célula como un punto que depende de dos variables (los morfógenos que corresponden a un par de concentraciones químicas). Turing demostró a través de este modelo que la difusión y la interacción no lineal podía generar un order macroscópico.

Recientemente un equipo de científicos de la Université de Provence en Marsella liderados por N. Rivier intentaron buscar otra explicación matemática a la aparición de las espirales áureas en los girasoles. Tal y como explican en un publicación aparecida en 1984 en el Journal de Physique (véase [12]), diseñaron un algoritmo matemático para modelizar las semillas de un girasol, y observaron que con un ángulo de crecimiento igual al ángulo áureo, se obtienen estructuras similares a girasoles reales. Su conclusión fue que los propios requisitos de homogeneidad y auto similitud limitan de forma drástica las estructuras posibles siendo la espiral de ángulo de divergencia $\frac{360}{\Phi}$ la estructura ideal.

Sin embargo, como auguraba Turing, parece que hay más razones que justifican esta distribución, recientes experimentos realizados por L.S. Levitov en 1991 y por S. Douady e Y. Coudier (entre 1992 y 1996) con campos magnéticos ofrecen una explicación física a este fenómeno. El experimento que Douady y Couder presentan en sus trabajos [6] es especialmente interesante: colocaron un plato lleno de aceite de silicona en un campo magnético que era más intenso alrededor del borde. Derramaron periódicamente gotas de un fluido magnético que actuaban como pequeños imanes en el centro del plato. Como era de esperar, los pequeños imanes se repelían mutamente a causa del gradiente magnético. Al observar la forma en que quedaban los imanes, Douady y Couder encontraron patrones que eran oscilantes pero que, en general, convergían a una espiral en la cual el ángulo de divergencia era de nuevo $\frac{360}{\Phi}$. Teniendo en cuenta que los sistemas físicos usualmente encuentran el equilibrio en el estado que representa la mínima energía, del experimento de Douady y Coudier se deduce que la filotaxis basada en el número Φ simplemente representa el estado de energía mínima.

5 Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos pretendido mostrar cómo un rama de la botánica, la filotaxis, se ha ido entrelazando con distintas ramas de la matemática y de la física a lo largo del tiempo conforme los científicos intentaban encontrar explicaciones más profundas sobre una cuestión tan sencilla como el porqué de la disposición de las hojas en un tallo. Sin embargo, nuestro objetivo no se reduce a repasar la historia, consideramos que los distintos modelos y explicaciones que presentamos pueden ser de utilidad a la hora de responder a la inquietante pregunta, a menudo escuchada en las aulas: ¿para qué sirven las matemáticas? Por otro lado, cabe destacar la sorpresa que nos causó descubrir que actualmente existen varios grupos de investigación multidisciplinares (formados por botánicos, físicos y matemáticos) muy activos trabajando en la filotaxis matemáticas, lo cual abre también una vía para posibles colaboraciones futuras.

Referencias

[1] Adler, I., Barabe, D. y Jean, R. V., *A history of the study of phyllotaxis*, Annals of Botany, **80**, 231-244, (1997).

[2] Bonnet, C. *Recherches sur l'usage des feuilles dans les plantes*, Göttingen and Leyden E., Luzac, fils (1754).

[3] Bravais, L. y Bravais, A. *Essai sur la disposition des feuilles curvisériées*, Annales des sciences naturelles, botanique, **7**, 42-110, 193-221, 291-348, **8**, 11-42, (1837).

[4] Benito, M. y Escribano, J.J. *An easy proof of Hurwitz theorem*, American Math. Monthly, **101** (10), 916- 918, (2002).

[5] Corbalán F. *La proporción áurea*, RBA Coleccionables S.A., (2010).

[6] Douady, S. y Couder Y., *Phyllotaxis as a physical self-organized process.* Physical Review Letters, **68**, 2098-2101, (1992).

[7] Ghyka, M. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, ed. Poseidón, Buenos Aires, 1953.

[8] Ghyka, M. *El número de oro*, ed. Poseidón, Barcelona, 1992.

[9] Hurwitz, A. *Ueber di angeriaherte daustellung des irationalzahlen dirchrational brüche (On the aproximation of irrational numbers by rational numbers)*, Mathematische Annalen, **32** (2), 279-284, (1891).

[10] Jean, R. V., *Phytomathématique*, Québec: les presses de l'Université du Québec, 1978.

[11] Levitov, L. S., *Phyllotaxis of flux lattices in layred superconductors*, Phys. Rev. Lett., **66**, 224-227, (1991).

[12] Rivier, N., Occelli, R., Pantaloni, J. y Lissowski, A., *Structure of Bénard connection cells, phyllotaxis and crystallography in cylindrical symmetry*, J. Physique, **45**, 49-63, (1984).

[13] Schimper, C. F., *Beschreibung des Symphytum Zeyheri und seiner zwei deutschen Verwandten der S. bulborum Schimper und S. tubesorum Jaqu*, Geiger's Magazin für Pharmacie, **29**, 1-92, (1830).

[14] Snow, M. y Snow, R., *The interpretation of phyllotaxis*, Biological Reviews, **9** (1), 132-137, (1934).

[15] Turing, A. M., *The chemical basis of morphogenesis*, Philosophical transactions of Royal Soc. of London, Series B, Biological Sciences, **237** (641), 37-72, (1952).

[16] Turing, A. M., *Morphogenesis*, ed. P. T. Saunders, Collected Works of A. M. Turing, North-Holland, Amsterdam-London, 1992.