

CUESTIONES SOBRE EL POLÍGONO NO CONSTRUIBLE DE LEON BATTISTA ALBERTI

QUESTIONS ABOUT THE NON-CONSTRUCTABLE POLYGON OF LEON BATTISTA ALBERTI

Albert Samper Sosa

doi: 10.4995/ega.2018.10402

Es conocido el proceso geométrico trazado por Leon Battista Alberti al diseñar armónicamente la composición de la fachada de Santa María de la Novella en Florencia. Además, en ella encontramos 48 detalles ornamentales elaborados mediante la construcción de polígonos regulares, concretamente: 7 realizados con base pentagonal, 3 con base hexagonal, 36 con base octogonal y 2 con base icosakaihexagonal –26 lados–. Es, a nuestro entender, interesante que Alberti, después de trazar de manera precisa la configuración de la fachada, decidiera rematar las volutas laterales con un diseño circular a partir de un polígono regular de 26 lados; pues se trata de un polígono regular no construible “con regla y compás”. Por ello, en esta investigación

comparamos, de forma teórica y con técnicas matemáticas, métodos geométricos aproximados de construcción del Icosakaihexágono para determinar cuál de ellos es el que más se ajusta a la configuración de esta especial decoración renacentista.

PALABRAS CLAVE: ICOSAKAIHEXÁGONO. POLÍGONOS. SANTA MARIA NOVELLA. ALBERTI. GEOMETRÍA CLÁSICA

The process followed by Alberti when designing the façade of the Santa Maria Novella in Florence is well-known. This façade contains 48 ornamental elements which were created through the construction of regular polygons: 7 elements have a pentagonal base, 3 have an hexagonal base, 36 have an octagonal base, and 2 have an icosikaihexagonal base (26

sides). It's interesting that Alberti, having designed all ornaments on the basis of regular polygons which can be constructed using a straightedge and a compass only, decided to top the lateral scrolls with a circular design arising from a 26-sided regular polygon, since this regular polygon cannot be constructed using only a compass and a straightedge. We use a mathematical approach to theoretically compare several approximate methods for constructing an icosikaihexagon using a compass and a straightedge, in order to ascertain which of these methods best suits the point pattern of this special ornament.

KEYWORDS: ICOSAKAIHEXAGON. POLYGENS. SANTA MARIA NOVELLA. ALBERTI. CLASSIC GEOMETRY



Introducción

La arquitectura renacentista se desarrolló en Italia a partir del siglo xv. Concretamente fue en la ciudad de Florencia donde arquitectos como Filippo Brunelleschi abrieron camino al Renacimiento redescubriendo las formas geométricas encontradas y aplicadas en el clasicismo griego y romano. Muchos fueron los arquitectos que siguieron los pasos de Brunelleschi, por ejemplo: Donato Bramante, Michelozzo, Bernardo Rossellino o Leon Battista Alberti. Todos ellos utilizaron la geometría clásica trazada con “regla y compás” para dotar de proporción y belleza los edificios que diseñaban (Lozano, 1582; Rivera, 1991). Este orden geométrico, no sólo lo aplicaban de manera general en el diseño de las construcciones sino que, además, lo ejecutaban también en los detalles compositivos de las fachadas. Un ejemplo claro de esta aplicación de belleza de la geometría clásica desde una escala global y particular lo encontramos en el objeto de estudio del presente trabajo de investigación: La Iglesia de Santa María Novella de Leon Battista Alberti (Fig. 1).

Es conocido el proceso geométrico realizado con «regla y compás» que usó el arquitecto Alberti al diseñar la composición de la fachada de la Iglesia de Santa María Novella (Fig. 1) (Lunardi et al., 2003). Este proceso de diseño ofreció una exactitud en la concreción de todas las partes y objetos que forman la fachada principal del templo. Ahora bien, analizando con detalle las ornamentaciones que configuran la fachada del edificio podemos destacar lo siguiente:

a) Existen 7 decoraciones circulares realizadas a partir de la construc-

ción de un pentágono. De todas ellas, destacamos las que se encuentran en el friso transversal.

- b) Existen 3 decoraciones circulares realizadas a partir de la construcción de un hexágono. De todas ellas, destacamos la decoración más elevada situada en el centro del frontón triangular.
- c) Existen 36 decoraciones circulares realizadas a partir de la construcción de un octógono. La mayoría de estos detalles se encuentran en las culminaciones de ambas volutas laterales.
- d) Existen 2 decoraciones circulares realizadas a partir de la construcción de un icosaihexágono. Estos dos detalles, están situados en el centro de ambas volutas laterales. Siendo el de la derecha original de Alberti.

Una vez clasificados los 48 polígonos que conforman la decoración que encontramos en la fachada de la iglesia (Fig. 2), observamos que:

- 1) Las dos decoraciones realizadas a partir del polígono de 26 lados predominan notablemente, por su tamaño, en comparación con el resto de detalles poligonales decorativos.
- 2) No se puede realizar, con regla y compás, la división de la circunferencia en 26 partes iguales (Cox, 2012). Aunque en esa época se dispusiera de métodos “con regla y compás” para tal división –ver Sección 2–, la configuración de estos dos detalles ornamentales fue aproximada y no exacta; pues tales métodos eran no correctos en su precisión de manera insoslayable.

Es, a nuestro entender, interesante que el arquitecto Alberti, después de llevar a cabo un diseño total-

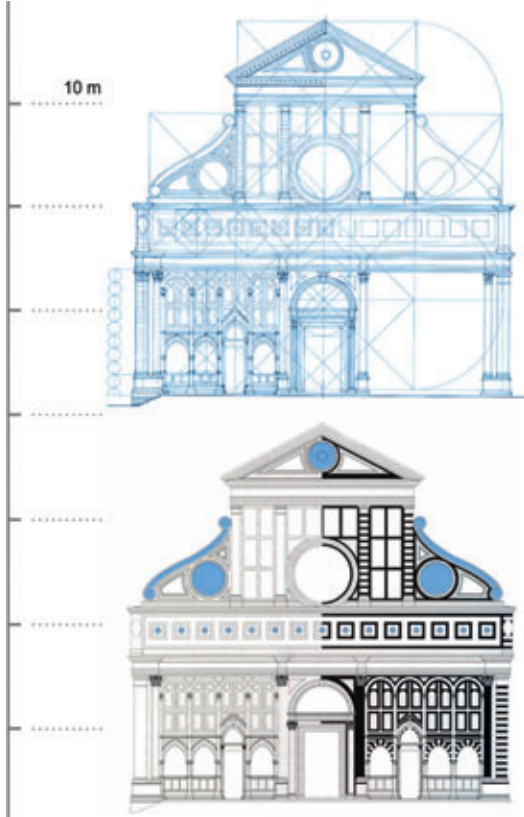
Introduction

Renaissance architecture flourished in Italy from the fourteenth century onwards. More specifically, it was in Florence where architects such as Filippo Brunelleschi led the way to Renaissance by rediscovering the geometric shapes which had been found and used in the Greek and Roman classicism. Many architects followed in the footsteps of Brunelleschi, i.e.: Donato Bramante, Michelozzo, Bernardo Rossellino or Leon Battista Alberti. In order to design buildings which are proportional and beautiful, all of them used the classic geometry shapes which can be constructed using a compass and a straightedge (Lozano, 1582; Rivera, 1991). These constructible shapes were not only used for the general design of buildings, but also for the compositional details of the façades. An example of this harmonious implementation of classic geometry is the study object of this paper: Santa Maria Novella church, designed by Leon Battista Alberti (Fig. 1). The geometric process followed by Leon Battista Alberti when designing the façade of the Santa Maria Novella church (Fig. 1) is well-known (Lunardi et al., 2003). This design approach using a compass and a straightedge provides maximum accuracy and precision in all the parts and objects that make up the main façade of the church. After analysing in detail the ornaments on the façade, we stand out as follows:

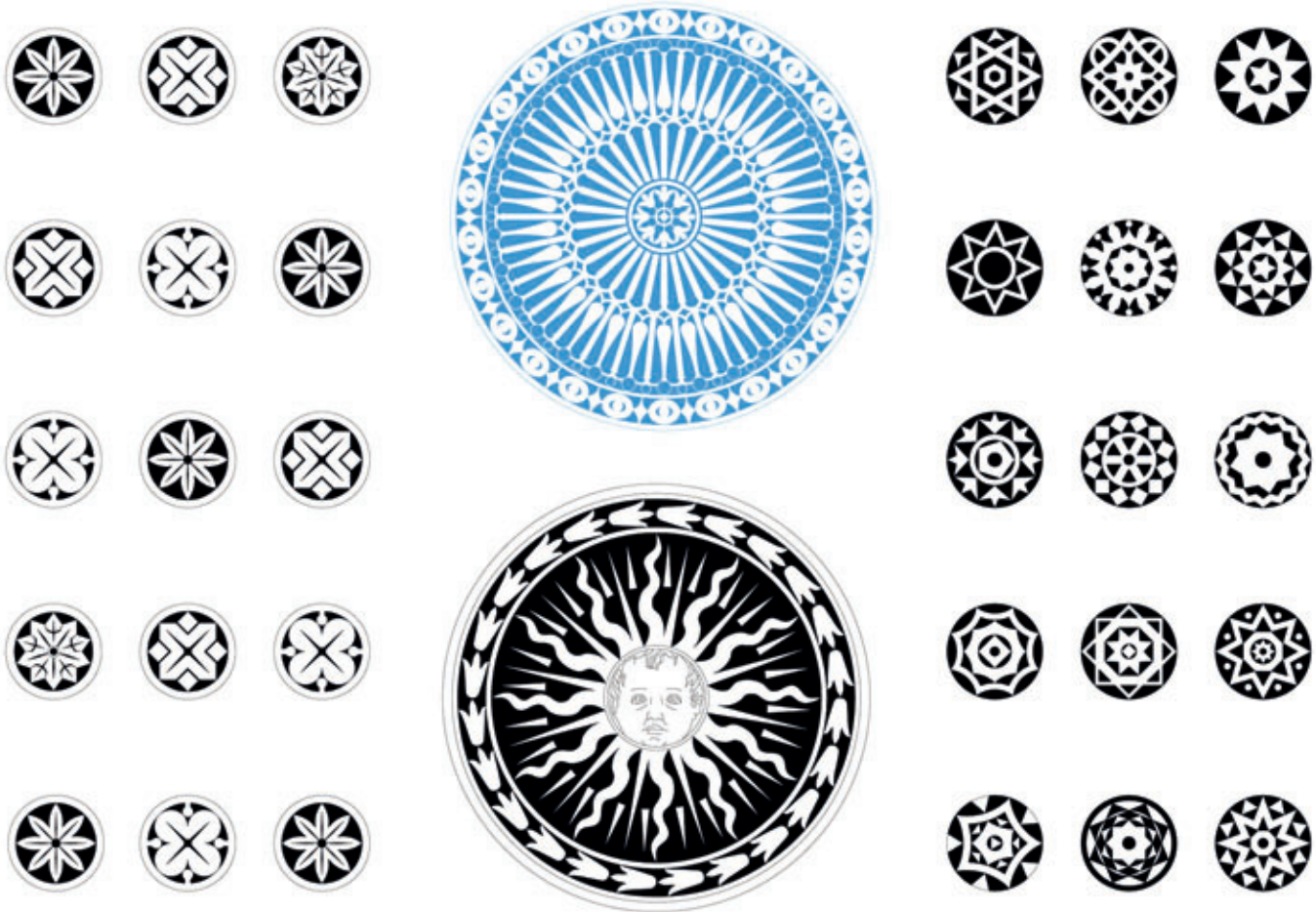
- a) There are 7 circular ornaments which derive from a regular pentagon. Amongst them, we wish to highlight those on the transversal frieze.
- b) There are 3 circular ornaments which derive from a regular hexagon. Amongst them, we wish to highlight the highest ornament in the center of the triangular pediment.
- c) There are 36 circular ornaments which derive from a regular octagon. Most of these ornaments are located on the top of both lateral scrolls.
- d) There are 2 circular ornaments which derive from a regular icosikaihexagon. These 2 ornaments are located in the center of both lateral scrolls. The left one was designed by Alberti.

After sorting the 48 polygons which make up the decorations on the church façade (Fig. 2), we find that:

- 1) The two ornaments which derive from the 26-sided polygon are much bigger than the rest of polygonal decorations.



1



2



1. Fachada de Santa María Novella. En la figura se resalta, en color azul, los elementos de estudio
2. Dibujo de los 48 polígonos que se encuentran en la fachada

1. Façade of Santa Maria Novella. The ornaments are highlighted in blue
2. Drawings of the 48 polygons on the façade

mente proporcionado y preciso en la configuración de toda la fachada y de la mayoría de los detalles ornamentales que la configuran, decidiera rematar las dos volutas laterales con un diseño trazado a partir de un polígono regular de 26 lados, el cual es no construible “con regla y compás”. Y, además, que exagerara esta decisión al hacerla más visible desatancando estos dos elementos del resto de ornamentaciones poligonales.

A nosotros nos es imposible saber el porqué el arquitecto Alberti decidió resaltar, de los 48 polígonos representados en toda la fachada, dos elementos decorativos que no pueden ser contruidos con regla y compás. No obstante, el hecho de que esta singularidad se encuentra en una de las obras más importantes del Renacimiento hace que sea merecedora de un gasto de energía por nuestra parte estudiándola geoméricamente con atención. Por ello, en esta investigación pretendemos comparar, de forma teórica y con técnicas matemáticas, métodos geométricos aproximados de construcción del icosakaihexágono, con regla y compás, para encontrar cuál de ellos es el que más se ajusta estadísticamente a la configuración de esta especial decoración de la fachada principal de Santa María de la Novella. El estudio que aquí presentamos lo realizamos sobre el detalle de la izquierda, original de Alberti.

Además de lo anterior, es conocido que son muchos los autores que a lo largo de la historia han construido elementos arquitectónicos diseñados a partir de polígonos no construibles con “regla y compás” (Bechmann, 1991; Dürer, 1525); por ello, analizando estas referen-

cias, consideramos que el objeto de estudio del puede ser de interés para los lectores.

Resumimos los pasos a seguir en la investigación:

- a) En la Sección 2 recopilamos gráficamente los métodos que resuelven de forma aproximada la construcción del icosakaihexágono.
- b) En la Sección 3 explicamos el proceso de captura de información geométrica del detalle ornamental y describimos los pasos para realizar el análisis geométrico/estadístico.
- c) En la Sección 4 exponemos los resultados de todos los cálculos aplicados a cada uno de los métodos y realizamos las respectivas comparaciones geométrico/estadísticas con el detalle ornamental.
- d) Finalmente, con técnica y rigor matemático concluimos nuestro estudio en la Sección 5.

Métodos de construcción aproximada del icosakaihexágono

En esta sección recopilamos, de forma gráfica, cinco métodos M_j , $j=1\div 5$, de resolución aproximada del icosakaihexágono regular mediante construcciones con “regla y compás” (Gleason, 1988; Virasoro, 1976) (Tabla 1).

Captura de información y control geométrico/estadístico

Captura de información

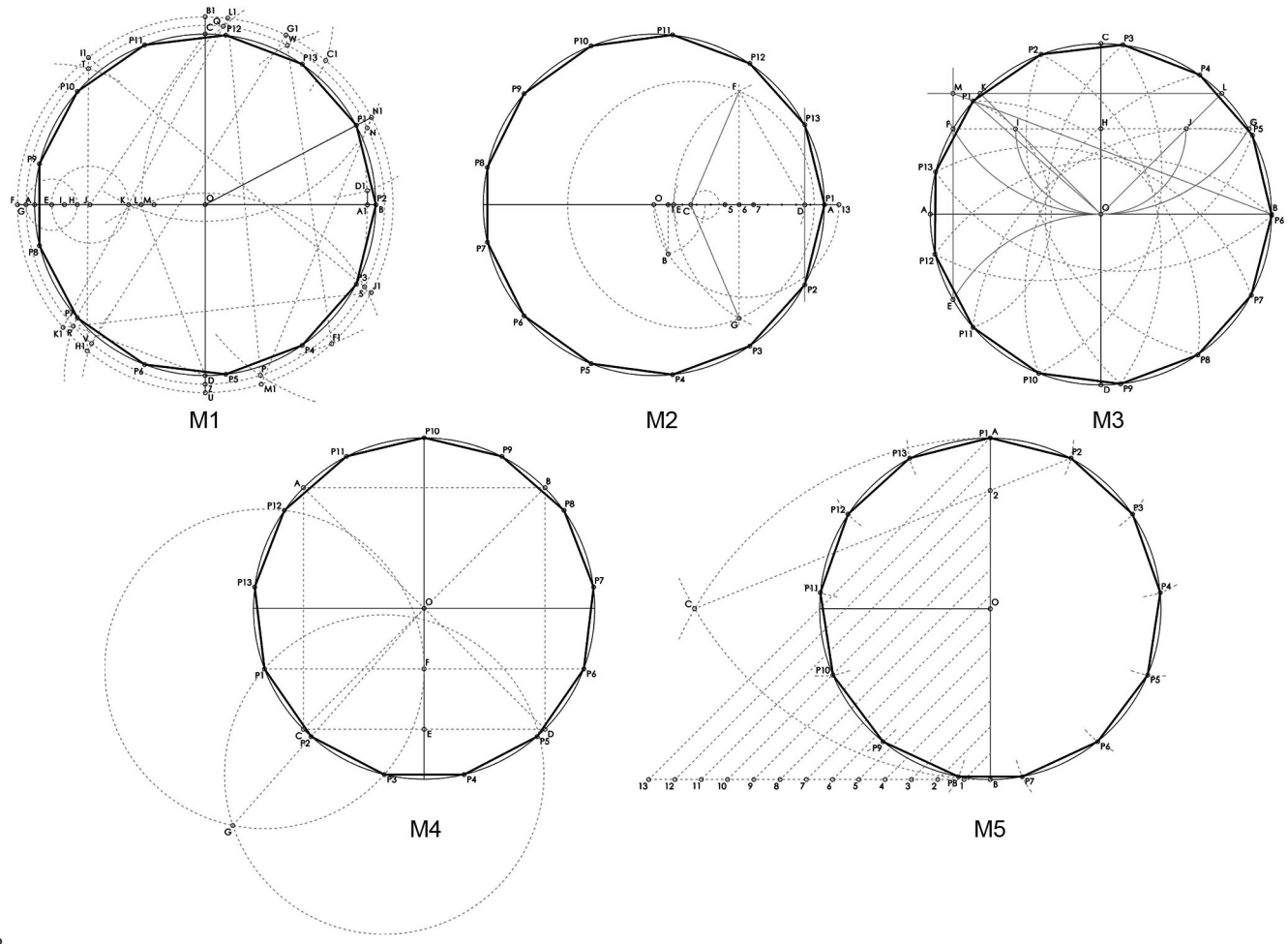
La toma de datos se ha realizado mediante una fotografía frontal con las siguientes especificaciones gráficas: 4.000x4.000 píxeles y 400 píxeles/pulgada (Fig. 4). Con

- 2) A circumference cannot be divided into 26 equal parts using a straightedge and a compass only (Cox, 2012). Even though several methods were available at that time for performing that division with a straightedge and a compass –see Section 2–, the shape of these two ornaments is approximate, since those methods were inherently inaccurate.

In our view, it is interesting that Alberti, having designed all ornaments on the façade on the basis of regular polygons which can be constructed using a straightedge and a compass only, decided to top the two lateral scrolls with a circular design arising from a 26-sided regular polygon, which cannot be constructed using a compass and a straightedge. Besides, he exaggerated his decision by making these two elements stand out from the rest of polygonal ornaments.

It is impossible to tell why, amongst the 48 polygons included in the façade, Alberti decided to highlight two ornaments which cannot be constructed using a compass and a straightedge only. Nonetheless, since this unique feature is present in one of the most important buildings of the Renaissance period, it deserves a thorough geometric analysis on our part. Therefore, in this paper we use a mathematical approach to theoretically compare several approximate methods for constructing an icosikaihexagon using a compass and a straightedge, in order to ascertain which of these methods best suits the point pattern of this special ornament on the main façade of Santa Maria Novella church. This analysis is based on the left-side ornament, designed by Alberti himself. Many authors throughout history are known to have designed architectural elements on the basis of polygons which cannot be constructed using a straightedge and a compass only (Bechmann, 1991; Dürer, 1525). After analysing those references, we believe that the study object may be of potential interest to the reader. For clarity, we summarize the research steps to be taken:

- a) In section 2 we graphically compile the approximate methods to construct an icosikaihexagon.
- b) In section 3 we explain how to gather the geometric information of the ornament and we describe the steps to be followed for a geometric/statistical analysis.



3

- c) In section 4 we present the calculations made for each method and we make the respective geometric/statistical comparisons with the ornament.
- d) Lastly, in section 5 we present our conclusions with full mathematical thoroughness.

Approximate methods for constructing an icosikaihexagon

In this section we graphically compile five approximate methods $M_j, j=1\div 5$, to construct a regular icosikaihexagon using a straightedge and a compass only (Gleason, 1988; Virasoro, 1976) (Table 1).

Gathering of information and geometric/statistical control

Gathering of information

The information has been gathered from an orthophoto having the following graphic specifications: 4000x4000 pixels and 400

Autocad, hemos determinando las coordenadas del plano (x,y) de los 26 vértices, Tabla 2.

Regresión geométrica

A continuación, se debe clarificar la base geométrica con la que procederemos al cálculo. Para ello, primero fijamos los puntos coordenados $v_i (i = 1\div 26)$, o sea la i va de 1 a 26) que configuran el polígono del elemento decorativo (Fig. 4). Seguidamente, observando la posición de los 26 vértices v_i , vemos que no existe ninguna circunferencia que pase por más de 3 puntos a causa de los desgastes producidos a lo largo de estos 600 años, además del propio proceso de ejecución. Por ello, con la posición (v_i, y_i) de estos v_i (Tabla 2) y aplicando ecuaciones normales de Gauss encontramos la ecuación de de regresión cuadrática $C [1]$:

$$[1] C = 0.257(x^2 + y^2) - 0.83x - 0.77y + 1 = 0$$

3. Métodos considerados en el trabajo Tabla 1. Ángulos obtenidos para cada método. Están ordenados en sentido horario empezando por el ángulo más superior a las figuras presentadas. Para el análisis geométrico, cada ángulo se ha partido por dos Tabla 2. Coordenadas en metros de los 26 vértices de la decoración

3. Methods considered in our paper Table 1. Angle measures obtained for each method. Measures are in clockwise order, starting with the highest vertex of the respective drawing. Each angle is divided into two for the geometric construction of the 26 polygon Table 2. Coordinates (in meters) of the 26 vertices of the ornament



Cuyo centro de C es (1.612, 1.495) y su radio es $R=0.974 m$.

Procediendo al cálculo, encontramos que en esta regresión cuadrática por circunferencia C se rechaza la hipótesis nula h_0 de “no correlación cuadrática por circunferencia”, aplicando el test F de *Ficher-Snedecor*, con nivel de significancia $\alpha=1-G(8992.96; 3,22)=0$. Y además, el tanto por ciento de coordenadas y explicadas por las coordenadas x , de la regresión cuadrática por circunferencia C , es el coeficiente de determinación de Pearson ajustado del $\eta^2_{adj} \times 100=99.98\%$.

cor, con nivel de significancia $\alpha=1-G(8992.96; 3,22)=0$. Y además, el tanto por ciento de coordenadas y explicadas por las coordenadas x , de la regresión cuadrática por circunferencia C , es el coeficiente de determinación de Pearson ajustado del $\eta^2_{adj} \times 100=99.98\%$.

pixels per inch (Fig. 4). We have used Autocad to find the coordinates (x,y) of the 26 vertices on the plane, Table 2.

Geometric regression

Now we must define the geometric basis for calculations. To do so, we first define the coordinated points v_i ($i=1+26$), o sea la i va de 1 a 26) which make up the polygon underlying the ornament (Fig. 4). Next, if we look at the positions of the 26 vertices v_i , we can see that, owing to the erosion occurred during the last 600 years and the building process itself, there is no circle passing through more than 3 points (of these 26). For this reason, considering the positions (v_i, y_i) of these vertices v_i (Table 2) and using Gauss normal equations we obtain the equation corresponding to the quadratic regression circle C [1]:

$$[1] C = 0.257(x^2 + y^2) - 0.83x - 0.77y + 1 = 0$$

The center of circle C is (1.612, 1.495) and its radius is $R=0.974 m$.

After applying the F-test by *Ficher-Snedecor* in this circular quadratic regression, the null hypothesis h_0 of non-correlation is rejected at a significance level $\alpha=1-G(8992.96; 3,22)=0$. The percentage of y coordinates (vertex coordinates) which are accounted for by the x coordinates (coordinates of the circular quadratic regression) is calculated with Pearson's adjusted coefficient of determination. This percentage is $\eta^2_{adj} \times 100=99.98\%$ because

$$\eta^2_{adj} = 1 - (1 - \eta^2) \frac{26-1}{26-3-1},$$

$$\text{where } \eta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{26} (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{26} (y_i - \bar{y})^2} = 1$$

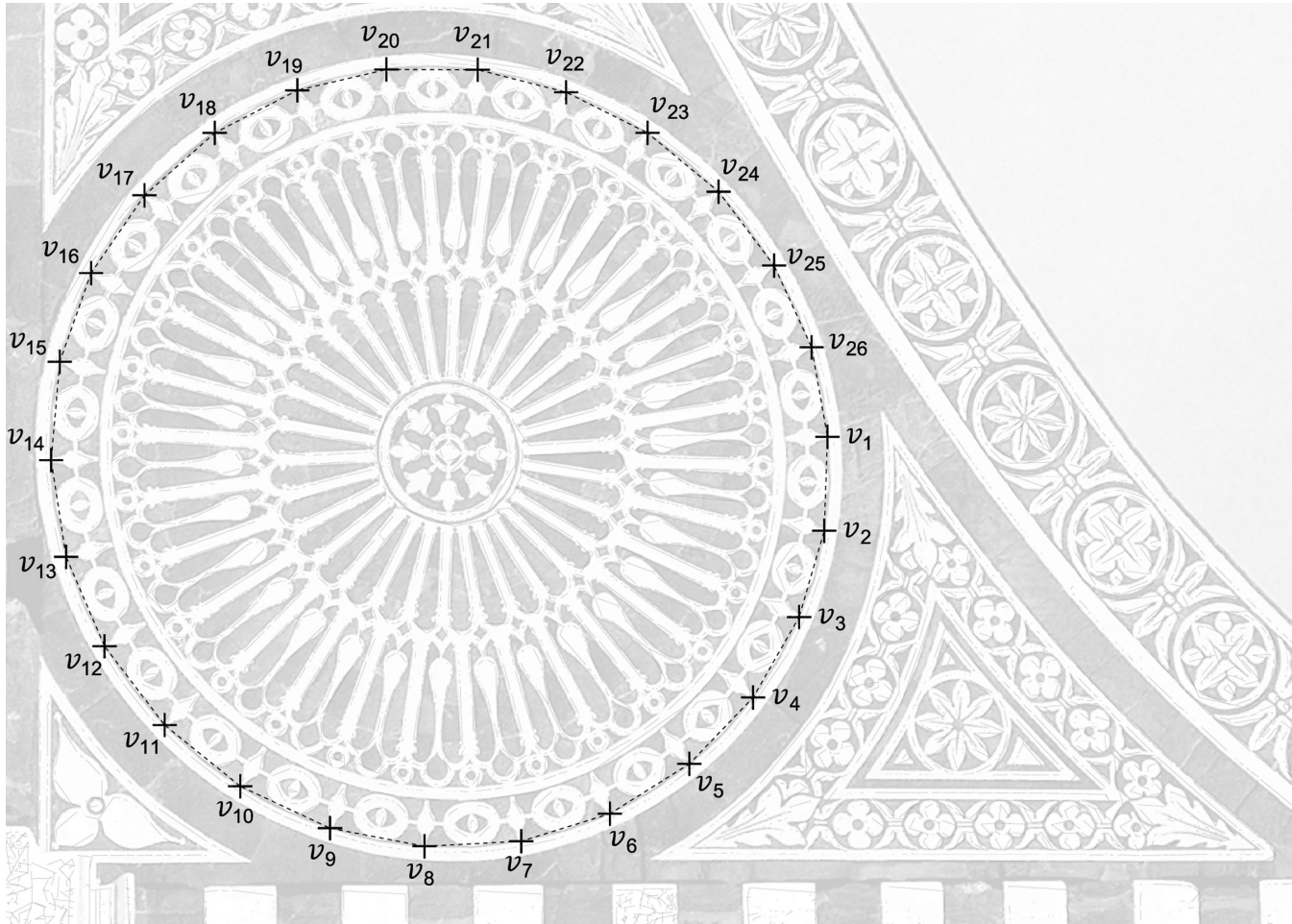
is Pearson's coefficient of determination for C , where $\bar{y} = \sum_{i=1}^{26} \frac{y_i}{26}$, and \hat{y}_i is the y coordinate corresponding to the x_i coordinate obtained as a result of the circular regression C . The distribution is the *Fisher-Snedecor* distribution, where I is the regularized incomplete beta function. In other words, C provides a circular quadratic correlation between the coordinates of the 26 vertices of the ornament. The probability that this correlation exists is 1, and 99.98% of the points' coordinates are accounted for by this correlation. Therefore, circle C is not only the best approximation but a perfect approximation, and for that reason we can consider it to be the initial circle of the ornament's real pattern.

| | M ₁ | M ₂ | M ₃ | M ₄ | M ₅ |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 27,69230769 | 27,89628852 | 27,94286426 | 27,04811057 | 28,20800982 |
| 2 | 27,69230769 | 27,89628852 | 27,12855541 | 27,88556679 | 28,20800982 |
| 3 | 27,69230768 | 27,89628852 | 27,94286426 | 27,88556685 | 28,20800982 |
| 4 | 27,69230769 | 27,89628852 | 27,94286426 | 27,88556685 | 28,20800982 |
| 5 | 27,69230769 | 27,89628853 | 27,12855541 | 27,88556684 | 28,20800982 |
| 6 | 27,69230769 | 27,89628852 | 27,94286426 | 27,88556684 | 28,20800982 |
| 7 | 27,69230769 | 27,89628852 | 27,94286426 | 27,04811055 | 21,5038822 |
| 8 | 27,6923077 | 27,89628852 | 27,12855541 | 27,88556684 | 28,20800982 |
| 9 | 27,69230769 | 27,89628852 | 27,94286427 | 27,88556684 | 28,20800982 |
| 10 | 27,69230771 | 25,2445377 | 27,94286426 | 27,88556685 | 28,20800982 |
| 11 | 27,6923077 | 27,89628852 | 27,12855541 | 27,88556683 | 28,20800982 |
| 12 | 27,6923077 | 27,89628852 | 27,94286427 | 27,88556682 | 28,20800982 |
| 13 | 27,69230769 | 27,89628852 | 27,94286426 | 27,04811057 | 28,20800982 |

Tabla/Table 1

| Coordenadas/ Coordinates (x_i, y_i) | | | | | |
|---------------------------------------|--------|--------|---------------|--------|--------|
| Puntos/Points | x_i | y_i | Puntos/Points | x_i | y_i |
| v_1 | 1,5606 | 2,4631 | v_{14} | 1,6187 | 0,5232 |
| v_2 | 1,7951 | 2,4551 | v_{15} | 1,3733 | 0,5448 |
| v_3 | 2,0104 | 2,3923 | v_{16} | 1,1518 | 0,6231 |
| v_4 | 2,2111 | 2,2773 | v_{17} | 0,9577 | 0,7565 |
| v_5 | 2,3768 | 2,1181 | v_{18} | 0,8021 | 0,9321 |
| v_6 | 2,5012 | 1,9195 | v_{19} | 0,6956 | 1,1384 |
| v_7 | 2,5698 | 1,6981 | v_{20} | 0,6436 | 1,3609 |
| v_8 | 2,5826 | 1,4563 | v_{21} | 0,6436 | 1,5892 |
| v_9 | 2,5373 | 1,2201 | v_{22} | 0,7003 | 1,8099 |
| v_{10} | 2,4327 | 0,9957 | v_{23} | 0,8018 | 2,0134 |
| v_{11} | 2,2798 | 0,8068 | v_{24} | 0,9487 | 2,1911 |
| v_{12} | 2,0832 | 0,6567 | v_{25} | 1,1331 | 2,3298 |
| v_{13} | 1,8602 | 0,5605 | v_{26} | 1,3371 | 2,4234 |

Tabla/Table 2



4

Geometric comparison

Taking into account the pattern generated by the 26 vertices v_i and the pattern generated by each method, next we describe the geometric/statistical steps which are followed in order to obtain results:

- 1) Each of the 5 methods M_j (where $j=1\div 5$, i.e. j ranges from 1 to 5) generates a particular point pattern on the plane (also called M_j .) which is made up by 26 points

$$\{u_{i,j}\}_{i=1}^{26}$$

We consider that, for all 5 methods, the vertices are located on a circle centered at $(0, 0)$ and having radius 1.

- 2) For each of the vertices v_i in Table 1, we will make a rotation around point $(0, 0)$ until the coordinates of that vertex are $(x, 0)$, i.e., until that vertex reaches the positive x-semiaxis. This rotation repositions the remaining vertices and generates a particular pattern of 26 points $\{v_{i,k}\}_{k=1}^{26}$, $k=1\div 26$, on the plane. We will call this pattern F_i . Since this rotation is made for each vertex

Este valor es debido a que

$$\eta_{adj}^2 = 1 - (1 - \eta^2) \frac{26-1}{26-3-1},$$

$$\text{donde } \eta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{26} (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{26} (y_i - \bar{y})^2} = 1$$

es el coeficiente de determinación de Pearson de C , con $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{26} y_i}{26}$, y donde \bar{y}_i es la coordenada y correspondiente a la x_i obtenida por la ecuación de la circunferencia de regresión C . La distribución

$$G(x; d_1, d_2) = I_{\frac{d_1 x}{d_1 x + d_2}} \left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2} \right)$$

es la distribución de *Fisher-Snedecor*, donde I es la función beta incompleta regularizada. Dicho de otra forma, C ofrece una correlación cuadrática por circunferencia entre las coordenadas de los 26 puntos del elemento decorativo con probabilidad total 1 y esta correlación explica al 99.98% las coordenadas de los mismos. Por lo tanto, no sólo es la circunferencia

que mejor aproxima sino que además aproxima perfectamente y por ello podemos considerarla como circunferencia inicial del modelo real de ornamentación.

Comparación geométrica

Con las configuraciones de los 26 vértices v_i y de cada uno de los métodos, describiremos los pasos geométrico/estadísticos que seguiremos para la obtención de resultados:

1. Cada uno de los 5 métodos M_j , $j=1\div 5$, o sea la j va de 1 a 5, generan una configuración concreta, que también llamaremos M_j , de 26 puntos $\{u_{i,j}\}_{i=1}^{26}$ en el plano. Consideramos que los 5 métodos inscriben sus vértices en circunferencia de radio 1 centrada en el $(0, 0)$.



4. Selección de los 26 vértices de la decoración

4. The 26 vertices of the ornament

2. Realizaremos 26 giros entorno el punto (0,0) de tal manera que cada uno de los v_i de la Tabla 1 tenga coordenadas $(x,0)$, o sea, se encuentre sobre el semieje de abscisas positivo; con lo que para cada giro, el resto de vértices quedan recolocados, obteniendo así una configuración concreta sobre el plano de 26 puntos $\{v_{i,k}\}_{k=1}^{26}$, $k=1 \div 26$, a la cual llamaremos F_i . Ahora bien, como este giro se hace para cada uno de los v_i , tendremos para cada M_j un total de 26 configuraciones diferentes de puntos $\{v_{i,k}\}_{i,k=1}^{26}$ en el plano, que llamaremos F_i , $i=1 \div 26$. Antes de hacer los giros, hemos trasladado los vértices de la Tabla 2 y aplicado una homotecia de tal forma que el centro de la circunferencia de regresión C es el punto (0,0) y su radio es 1.
3. Seguidamente, fijada la configuración M_j de uno de los 5 métodos y fijada una de las 26 configuraciones F_i del elemento decorativo, compararemos ambas figuras geométricas calculando los siguientes parámetros:
 - 3a) El coeficiente P de existencia de correlación lineal entre ambas configuraciones. Concretamente, calcularemos el coeficiente de correlación lineal P entre configuración M_j y la configuración F_i ; con tal coeficiente se calcula la probabilidad con la que se puede descartar la hipótesis nula $h_0 =$ "No existe correlación lineal entre la configuración M_j y la configuración F_i " aplicando el *Test-t* de *Student* con 26-2 grados de libertad.
 - 3b) La proporción en que una configuración M_j explica la otra configuración F_i mediante los coeficientes de determinación y

determinación ajustada de Pearson. Concretamente, vía la correlación anterior mostraremos en qué proporción la figura M_j explica la figura F_i . Esta proporción está calculada con $\eta_{adj}^2 \times 100$, donde $\eta_{adj}^2 = 1 - (1 - \eta^2) \frac{26-1}{26-2-1}$, η es el coeficiente de determinación de Pearson y η_{adj} es el ajustado.

3c) Desviación de la regresión. Concretamente, calcularemos la desviación d , de la recta correspondiente a la correlación lineal entre M_j y F_i respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Tal bisectriz tiene por ecuación $y=x$ y la recta de regresión entre M_j y F_i tiene por ecuación $y=b+x \tan \theta$. Cuanto más se parezca la configuración M_j a la configuración F_i , entonces la máxima separación d entre ambas rectas en el intervalo de parámetros del problema – rango de coordenadas de los vértices de los métodos M_j – más pequeña será la desviación d . Concretamente, siendo $d = \max_{x \in [-1,1]} |b + x \tan \theta - x|$ tenemos que cuanto más se parece M_j a F_i más próximo es d a cero. Los cálculos de los parámetros b y θ los haremos con el cálculo clásico de medias, variancias y covariancias. Esta desviación no ofrece una medida mejor que las verdaderas medidas estadísticas P y $\eta_{adj}^2 \times 100$; realmente se trata de un valor desligado de los anteriores y es sólo informativo en el sentido de que si realmente hay parecido en las configuraciones que se comparan entonces este valor es pequeño. En la Tabla 3 y a modo de ejemplo para los demás métodos, se muestra los parámetro comentados anteriormente aplicados al M_1 y cada configuración F_i .

v_i , we will obtain a total of 26 different point patterns $\{v_{i,k}\}_{i,k=1}^{26}$ on the plane. We will call these patterns F_i , $i=1 \div 26$. Before making the rotations, we have translated the vertices in Table 2 and we have carried out a homothetic transformation such that the center of the regression circle C is point (0,0) and its radius is 1.

3. Next, after choosing the pattern M_j generated by one of the 5 methods and choosing one of the 26 ornament patterns F_i , we will compare both geometric patterns by calculation of the following parameters:
 - 3a) The probability P of linear correlation between pattern M_j and pattern F_i . More precisely, we will calculate the linear correlation coefficient P between pattern M_j and pattern F_i . With this coefficient, through application of Student's *Test-t* with 26-2 degrees of freedom, we calculate the probability of rejecting the null hypothesis $h_0 =$ "There is no linear correlation between pattern M_j and pattern F_i ".
 - 3b) The extent to which one pattern M_j accounts for the other pattern F_i . This extent is calculated by means of Pearson's adjusted coefficient of determination and Pearson's coefficient of determination. More precisely, by means of the above-mentioned correlation we will find out to what extent pattern M_j accounts for pattern F_i . This extent is calculated by means of $\eta_{adj}^2 \times 100$, where $\eta_{adj}^2 = 1 - (1 - \eta^2) \frac{26-1}{26-2-1}$ is Pearson's coefficient of determination and η_{adj} is Pearson's adjusted coefficient of determination.
 - 3c) The regression deviation d . More precisely, we will calculate the deviation d between the regression line (the straight line showing the linear correlation between pattern M_j and pattern F_i) and the first and third quadrants bisector. The equation of such bisector is $y=x$, and the equation of the regression line for patterns M_j and F_i is $y=b+x \tan \theta$. The greater the similarity between pattern M_j and pattern F_i , the smaller the deviation d . More specifically, being $d = \max_{x \in [-1,1]} |b + x \tan \theta - x|$, we can see that the greater the similarity between M_j and F_i , the closer is d to zero. Parameters b and θ are determined using the classical means, variances and

covariances calculation. This deviation does not provide a better measure than the above-mentioned statistical measures (P and $\eta^2_{adj} \times 100$); it is a merely informative value, in the sense that if there is really a similarity between the compared point patterns, then this value is small.

As an example for the remaining methods, Table 3 shows the above-mentioned parameters in the comparison between M_1 and each pattern F_i .

4. These calculations result into $5 \times 26 = 130$ geometric comparisons with their respective parametric values (5 methods $M_j \times 26$ ornament patterns F_i).

Results

We compare each method with the 26 point patterns, and each time we calculate Pearson's adjusted coefficient of determination. Table 4 below ranks the methods in descending order according to the measure of the highest Pearson's adjusted coefficient of determination. The pattern which best fits the ornament located on the scroll of the main façade is the pattern generated by method M_2 .

Conclusiones

After this geometrically and statistically thorough analysis of the only ornament of the façade of Santa Maria Novella church which was designed on the basis of a polygon which cannot be constructed using a straightedge and a compass only, we can claim that, from a statistical point of view, method M_2 is the one which best suits this ornament's design when superimposing this method's vertices over the points of pattern F_2 . We emphasise that, even though the angle values resulting from methods M_4 and M_1 are very close to the ideal angle value of the 26-sided polygon, we have shown that Alberti did not use these methods to design this ornament.

Despite the foregoing, we want to make clear that we have not demonstrated that Alberti used method M_2 . We only claim that, from the 130 patterns considered, pattern F_2 from method M_2 is the one which best suits this façade ornament. We really do not have sufficient statistical evidence to undoubtedly conclude that the architect used such method,

Tabla 3. Comparaciones estadísticas del método M_1 con las 26 configuraciones

Tabla 4. Ranking de comparación

5. Resultado sobre la ornamentación

4. Con lo anterior, obtenemos $5 \times 26 = 130$ comparaciones geométricas con sus respectivos valores paramétricos anteriores –5 modelos de método $M_j \times 26$ configuraciones del elemento decorativo F_i .

Resultados

La Tabla 4 muestra por orden descendiente el ranking que ocupa cada uno de los métodos, ello en función de la medida estadística del coeficiente ajustado de determinación de Pearson más alto de las 26 configuraciones en cada una de las

Table 3. Parametric values corresponding to the comparison between method M_1 and the 26 point patterns

Table 4. Methods ranked in descending order according to the comparison results

5. Result on the ornament

comparaciones de los cinco métodos. La configuración que más se ajusta al elemento decorativo de la voluta de la fachada principal es la generada con el método M_2 .

Conclusiones

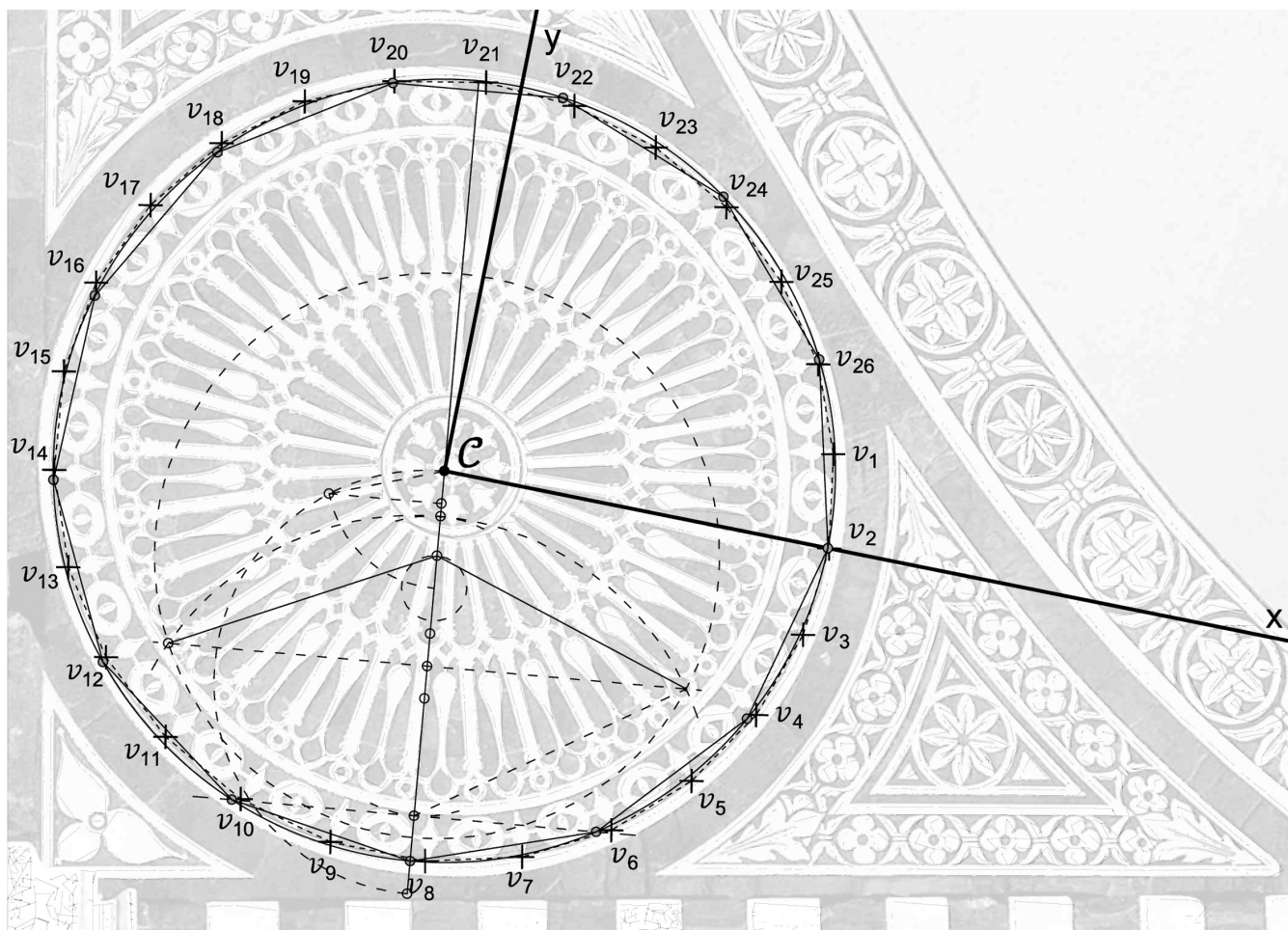
Una vez examinado, con rigor geométrico y estadístico, el único elemento decorativo de la fachada de Santa María de la Novella diseñado a partir de un polígono no construible con “regla y compás”; desvelamos que la configuración F_2 del método M_2 es el que más se ajusta

| i | P | $\eta^2_{adj} \times 100$ | d | i | P | $\eta^2_{adj} \times 100$ | d |
|-----|----------|---------------------------|----------|-----|----------|---------------------------|----------|
| 1 | 0.999639 | 99.924968 | 0.013811 | 14 | 0.999195 | 99.832586 | 0.014357 |
| 2 | 0.999643 | 99.925662 | 0.014024 | 15 | 0.998762 | 99.742538 | 0.014837 |
| 3 | 0.999393 | 99.873723 | 0.013732 | 16 | 0.998833 | 99.757143 | 0.014000 |
| 4 | 0.999192 | 99.831881 | 0.012652 | 17 | 0.998889 | 99.768787 | 0.012436 |
| 5 | 0.998864 | 99.763635 | 0.011059 | 18 | 0.998967 | 99.785110 | 0.010210 |
| 6 | 0.998678 | 99.724985 | 0.008734 | 19 | 0.999105 | 99.813865 | 0.007434 |
| 7 | 0.998403 | 99.667762 | 0.006111 | 20 | 0.999294 | 99.853081 | 0.004292 |
| 8 | 0.998699 | 99.729327 | 0.002513 | 21 | 0.999418 | 99.878792 | 0.001020 |
| 9 | 0.998972 | 99.786049 | 0.003091 | 22 | 0.999502 | 99.896396 | 0.003150 |
| 10 | 0.999413 | 99.877871 | 0.006017 | 23 | 0.999565 | 99.909475 | 0.006153 |
| 11 | 0.999598 | 99.916400 | 0.008814 | 24 | 0.999610 | 99.918805 | 0.008906 |
| 12 | 0.999605 | 99.917710 | 0.011294 | 25 | 0.999657 | 99.928679 | 0.011174 |
| 13 | 0.999470 | 99.889777 | 0.013160 | 26 | 0.999680 | 99.933326 | 0.012799 |

Tabla/Table 3

| Método Method | Configuración i Pattern i | P | $\eta^2_{adj} \times 100$ | d |
|------------------|----------------------------------|----------|---------------------------|----------|
| M_2 | 2 | 0.999758 | 99.949534 | 0.010680 |
| M_4 | 26 | 0.999689 | 99.935349 | 0.011703 |
| M_1 | 26 | 0.999680 | 99.933326 | 0.012799 |
| M_3 | 26 | 0.999645 | 99.926214 | 0.013326 |
| M_5 | 11 | 0.999610 | 99.918797 | 0.001061 |

Tabla/Table 4



5

ta estadísticamente a este elemento de ornamentación. Destacamos que a pesar que los ángulos resultantes de la construcción de los métodos M_4 y M_1 son muy próximos al ángulo ideal del polígono de 26 lados, hemos demostrado que Alberti no los usó para diseñar este elemento compositivo.

A pesar de lo dicho, aclaramos que no es cierto que hayamos demostrado que Alberti usara el método M_2 ; pero, sí es cierto que: de las 130 configuraciones que hemos considerado, es la F_2 del método M_2 la que mejor aproxima el elemento decorativo. Realmente no tenemos suficiente evidencia estadística para poder afirmar que el arquitecto usó tal método ya que en nuestros cálculos no hemos obtenido la medida 99.99 en el parámetro $\eta^2_{adj} \times 100$. Tal nivel de evidencia estadística es el que nos imponemos a nosotros

mismos para hacer afirmaciones geométricas, objetivamente irrefutables, vía técnicas estadísticas. ■

Referencias

- BECHMANN, R., 1991. *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIIIe siècle et sa communication*. Paris: Picard Éditeur.
- COX, D., 2012. *Galois Theory*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. Publication.
- DÜRER, A., 1525. *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt: in Linien Ebenen vo gantzen Corporen*. Nürnberg: Hieronymus Andreae.
- GLEASON, A. M., 1988. Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon. *The American Mathematical Monthly*, no. 95 (3), pp.185-194.
- LOZANO, F., 1582. *Los diez libros de arquitectura de León Baptista Alberto*. Madrid: Gómez Alonso Ediciones.
- LUNARDI, R., MOROLLI, G., LEONCINI, G., y FABBRI, M. C., 2003. *Santa Maria Novella*. Italy: Verdon, Timothy.
- RIVERA, J., 1991. *De Re Aedificatoria, Leon Battista Alberti*. Madrid: Ediciones Akal, S. A.
- VIRASORO, C., 1976. *Dibujo Geométrico*. Buenos Aires: Eudeba Manuales.

because in our calculations we have not obtained measure 99.99 for parameter $\eta^2_{adj} \times 100$. This is the level of statistical evidence that we impose upon ourselves in order to make objective and irrefutable geometric claims using statistical techniques. ■

References

- BECHMANN, R., 1991. *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIIIe siècle et sa communication*. Paris: Picard Éditeur.
- COX, D., 2012. *Galois Theory*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. Publication.
- DÜRER, A., 1525. *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt: in Linien Ebenen vo gantzen Corporen*. Nürnberg: Hieronymus Andreae.
- GLEASON, A. M., 1988. Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon. *The American Mathematical Monthly*, no. 95 (3), pp.185-194.
- LOZANO, F., 1582. *Los diez libros de arquitectura de León Baptista Alberto*. Madrid: Gómez Alonso Ediciones.
- LUNARDI, R., MOROLLI, G., LEONCINI, G., y FABBRI, M. C., 2003. *Santa Maria Novella*. Italy: Verdon, Timothy.
- RIVERA, J., 1991. *De Re Aedificatoria, Leon Battista Alberti*. Madrid: Ediciones Akal, S. A.
- VIRASORO, C., 1976. *Dibujo Geométrico*. Buenos Aires: Eudeba Manuales.