

TENDENCIAS ACTUALES EN EL MODELADO DE LA PRECIPITACION DIARIA

José Roldán

E.T.S.I. Agrónomos y de Montes
Universidad de Córdoba

INTRODUCCION

La vida, y la mayoría de las actividades económicas, pueden estar limitadas por el agua, fundamentalmente, en regiones áridas y semiáridas donde las aportaciones naturales son irregulares y escasas. La evaluación de los recursos hídricos permite una planificación con vista a la optimización del aprovechamiento del agua y su distribución entre los diferentes sectores demandantes: humano, agrícola, industrial, medioambiental, etc.

La Hidrología de una región depende, en primer lugar, de su clima, de lo que se deriva la necesidad de conocer los procesos meteorológicos que lo determinan. Entre éstos, cabe destacar la lluvia como magnitud fundamental en el balance hídrico. En muchas partes del mundo, el clima es el factor con mayor influencia tanto en la agricultura como sobre otras muchas actividades ingenieriles, y gran parte de las decisiones que sobre las mismas se adoptan deben tenerlo en cuenta.

Los aspectos que del comportamiento de las lluvias interesan son aquellos relativos a conocer los períodos secos y lluviosos: época de aparición, frecuencia, duración, intensidad, etc. Directamente derivado de las rachas de días secos y lluviosos se encuentra el estudio de las labores agrícolas que requieran días sin lluvia, a lo largo del año o en ciertos períodos del mismo (Lund y Grantham, 1.977; Insúa y col., 1.981). También puede ser interesante saber sobre la viabilidad de determinados cultivos en secano (Lomas, 1.972) o sobre las especies vegetales mejor adaptadas con especial referencia al tiempo óptimo de siembra (Fraiser y col., 1.987). Dentro de una cuenca, se puede evaluar la escorrentía como una consecuencia del establecimiento del balance hídrico (Haan, 1.972) o los peligros de la erosión y los efectos de la misma sobre la productividad agrícola (Williams y Renard, 1.985). En relación con la aplicación de agua a los cultivos es interesante conocer su incidencia sobre la planificación de riegos (Jensen, 1.972) y sobre el diseño de sistemas de riego (Palmer y col., 1.982). Por último, los modelos de lluvias pueden usarse en procesos de simulación junto con modelos de programación de riegos (Hub-bard y Willhite, 1.987; Villalobos y Fereres, 1.989) o de control de plagas (Welch, 1.984). Estos modelos

requieren un input de variables climáticas que no son sólo la precipitación. Richardson y Wright (1.984) y

Woolhiser y col. (1.988) trabajan con modelos multi-variados que incluyen, además, la temperatura y la radiación solar. Roldán y col. (1.982) modelan la ocurrencia y la intensidad del viento. Artacho y col. (1.989) estudian la temperatura y la humedad relativa y Artacho (1.991) caracteriza las principales variables (temperatura, humedad relativa y horas de sol) que influyen en la evapotranspiración.

Los registros de precipitación que se necesitan deben ser lo más largos posible debido a que, por cada característica analizada, cada año proporciona una única observación. No obstante, y a pesar de que dichos registros han sido recogidos durante mucho tiempo y en una gran diversidad de estaciones climáticas, poco uso pueden hacerse de la información contenida en los mismos dada su inmanejable naturaleza.

Para resolver este problema, se han hecho diversos intentos tendentes a resumir los registros de lluvias en formas más útiles. Así, por ejemplo, cabe citar los trabajos de Shaw y col. (1.960) y Feyerherm y col. (1.965), entre otros, en los que se publicaban tablas de parámetros de diversas funciones de distribución para lluvia diaria en estaciones de los Estados Unidos.

No obstante, estos trabajos, aunque más útiles que los datos en bruto, no son adecuados para su uso en modelos de simulación ni tampoco proporcionan una descripción suficientemente concisa de la precipitación.

Como puede observarse, la complejidad de los procesos naturales y el desconocimiento de las causas que determinan los fenómenos meteorológicos han obligado a renunciar a estudios analíticos y a usar series cronológicas de sucesos observados de dichos fenómenos. Los datos meteorológicos se consideran como realizaciones de un proceso estocástico y el análisis de los mismos establecerá las bases que rigen su comportamiento (Foufoula-Georgiou y Georgakakos, 1.991).

Posteriormente, se han establecido modelos de precipitación diaria basados en la estructura estocástica del proceso. Estos modelos describen tanto la ocurrencia de la precipitación como la distribución de la cantidad

en un punto en el espacio de una forma mucho más concisa (Smith y Schreiber, 1.973, 1.974; Todorovic y Woolhiser, 1.975; Haan y col, 1.976; Buishand, 1.977; Katz, 1.977a; Woolhiser y Pegram, 1.979; Stern, 1.980a, 1.980b; Roldán y Woolhiser, 1.982; Woolhiser y Roldan, 1.982). Una completa y precisa revisión de los mismos ha sido hecha por Woolhiser (1.992). Modelos más complejos como los espacio-temporales se encuentran aún en fase de exploración (Kavvas y Herd, 1.985).

Sin embargo, estos modelos tienen en cuenta algunos aspectos físicos del proceso que orientan sobre las funciones de distribución a usar. Así, por ejemplo, para tener en cuenta la persistencia observada en las rachas consecutivas de días secos y lluviosos (Quetelet, cuyo trabajo de 1.952 es citado por Katz, 1.984; Newnhan, 1.916), se ha desarrollado un caso especial de lo que se llama ahora la cadena de Markov con dos estados.

En aras de una deseable simplicidad, el número de parámetros debe ser pequeño, lo que a su vez obliga a la variación estacional de los mismos. La variación estacional en los parámetros de los modelos estocásticos ha sido reconocida desde bastante tiempo atrás, pero la forma de considerarla ha variado notablemente. En un principio, se estimaban los parámetros para períodos de tiempo oscilando entre unos pocos días y varios meses y se suponía que durante esos períodos los parámetros eran constantes (Roldan, 1.979; García Guzmán y col., 1.981; Richardson y Wright, 1.984). Posteriormente, series de Fourier finitas se han ajustado por mínimos cuadrados a los parámetros del modelo (Woolhiser y col., 1.973; Coe y Stern, 1.982). Como una alternativa, Woolhiser y Pegram (1.979) introdujeron estimaciones numéricas directas por máxima verosimilitud de los coeficientes de Fourier.

Aunque el fenómeno de la precipitación ocurre en tiempo continuo, y sería, por tanto, esperable conseguir una mejor descripción del proceso de ocurrencia con este tipo de modelado, dificultades de tipo práctico tales como: mayor complejidad teórica, escasez de datos en forma continua y más ardua estimación de los parámetros referentes a la intensidad de lluvia (García Guzmán, 1.988), lo hacen actualmente más inviable. También cabe señalar que, aunque el registro pluviométrico es continuo, hay que definir de forma artificial el tiempo mínimo que debe transcurrir para que podamos apreciar un cambio de lluvia a no lluvia. La consideración de tiempo discreto supone disponer de registros donde la lluvia es medida a intervalos pequeños de tiempo (horas o días), siendo lo más habitual encontrar largos registros con datos diarios, razón por la cual este trabajo se centra en el modelado de los mismos.

La elección de uno u otro modelo de precipitación dependerá, en gran medida, del uso que se le vaya a dar a dicho modelo. En este sentido, los modelos más simples, cuya aplicación práctica es inmediata, pueden ser más útiles que los más complejos cuya utilización tal cual es poco probable y que, por lo tanto, requieren de suposiciones que los alejan de su objetivo final.

REGISTROS DE LLUVIAS

Antes de hablar de los modelos más o menos complejos que a lo largo de muchos años se han desarrollado por diversos equipos de científicos, conviene hacer una reflexión sobre la calidad de los datos que van a usar dichos modelos y que, en gran medida, van a ser responsables de su éxito o fracaso. Algunos de los factores que más influyen sobre la calidad de los datos de lluvia fueron puestos de manifiesto y analizados por Woolhiser y Roldan (1.986). Woolhiser (1.992) amplía y comenta algunos otros factores que pueden inducir a error en la toma de datos:

Situación de la estación meteorológica

El cambio de ubicación de la estación o del pluviómetro puede resultar en registros no homogéneos o en muestras de datos que no se derivan de la misma población. También se debe evitar que el pluviómetro quede cubierto por un árbol y que se construyan edificios demasiado próximos al mismo.

Tiempo de observación

Al objeto de que las características de los registros pluviométricos de las diferentes estaciones que se están analizando sean comparables, la toma de datos se debe realizar siempre a la misma hora del día. En España, dicha hora está fijada a las ocho de la mañana hora solar. En estaciones de primer orden, donde un observador está siempre presente, los datos son fidedignos y se cumple regularmente con el tiempo de observación. Sin embargo, esto no suele suceder así en otro tipo de estaciones. En las estaciones automatizadas se presentan otro tipo de problemas que se comentan posteriormente.

Dado que existe una notable variabilidad diurna en la ocurrencia de la lluvia, cabe esperar que diferencias en el tiempo de observación puedan afectar al número de días lluviosos y a la distribución de las cantidades de lluvia por día. Así fue demostrado por Woolhiser y Roldan (1.986) trabajando con el mismo registro diario de lluvias, del que se disponía de datos horarios, empezando a contar en tres horas diferentes del día.

Errores metodológicos de lectura

Resulta significativo constatar que las estaciones de segundo orden suelen tener un número de días

lluviosos más pequeño y cantidades diarias medias de precipitación más elevadas que estaciones de primer orden muy próximas a ellas [ver tabla 1 (Alcaide, 1.986), correspondiente al período 1.953-82].

Tabla 1. Características pluviométricas de varias estaciones del valle del Guadalquivir.

Estación	Tipo	Precipitación media anual (mm)	Media anual de días lluviosos	Precipitación media en días lluviosos (mm)
Córdoba	Completa	607'3	69	8'80
Alcalá de Guadaira	Pluviometric	611'9	58	10'55
Sevilla	Completa	583'9	68	8'59
Almonte	Termopluviometrica	614'9	53	11'60

Tales diferencias pueden deberse a fallos ocasionales en la lectura del pluviómetro en el primer o dos primeros días lluviosos, de modo que la lluvia total acumulada se registra en el siguiente o siguientes días, o a la evaporación de pequeñas cantidades de precipitación antes de que se mire el pluviómetro. Las diferencias serán más aparentes en días con pequeñas cantidades de lluvia como fue puesto de manifiesto por Woolhiser y Roldan (1.986) al comparar los registros de dos estaciones próximas considerando diferentes umbrales de lluvia. En efecto, al incrementar el valor del umbral el número esperado de días lluviosos tendía a coincidir en ambas estaciones.

Los pluviómetros automáticos que registran el valor de la lluvia por pesada proporcionan los datos tanto en forma analógica como digital mientras que los de cangilón basculante los dan en forma digital. Ha sido documentado que estos últimos registran valores inferiores en el caso de tormentas muy intensas. Por otro lado, los de pesada con salida analógica sobre papel pueden subestimar el número de días con pequeñas cantidades de lluvia si el tambor sobre el que se dispone el papel gira diariamente o más frecuentemente, debido a que el espesor de la tinta del plumín puede ocultar pequeñas subidas.

MODELOS ESTOCASTICOS DE PRECIPITACION DIARIA

El proceso de precipitación es descrito mediante una secuencia de dos variables aleatorias $\{(X_t, Y_t); t = 1, 2, \dots\}$, donde:

- X_t es una variable discreta que representa el estado del proceso en el tiempo t . Su valor es igual a la unidad si la lluvia es igual o mayor que un umbral T y a cero en caso contrario.
- Y_t es una variable continua que representa la cantidad de lluvia en el día t . Con la consideración

del umbral para distinguir entre un día seco y uno lluvioso, la variable a usar es: $U(t) = Y(t) - T$.

Ambos sucesos, ocurrencia y cantidad de lluvia, son tratados independientemente, aunque la forma de estimar los parámetros, el proceso de optimización seguido, etc., son análogos para los dos.

Ocurrencia

Como se acaba de mencionar, una realización del proceso de ocurrencia de la precipitación es una secuencia de ceros y unos. El modelado del proceso de ocurrencia se ha hecho siguiendo, fundamentalmente, dos caminos:

Procesos de renovación alternativa

Se define una racha de días secos de longitud k como la secuencia de k días secos consecutivos limitados en cada lado por un día lluvioso y una racha de días lluviosos análogamente. Los procesos de renovación alternativa (el término "renovación" se deriva de la independencia entre las longitudes de rachas secas y lluviosas, mientras que el término "alternativo" se debe a la alternancia de ambos tipos de rachas) se especifican por las leyes de probabilidad de las longitudes de períodos secos y lluviosos. Buishand (1.977) propuso el uso de la distribución binomial negativa truncada (DBNT) para describir la función de distribución de la longitud de dichas rachas, tanto secas como lluviosas. Roldan y Woolhiser (1.982) usaron sólo la DBNT para las rachas secas y una distribución geométrica truncada para las lluviosas.

Cadena de Markov

El modelo más simple que considera el fenómeno de persistencia es, como se ha comentado, la cadena de Markov de primer orden (el estado del proceso en un

día sólo depende del estado en el día anterior) con dos estados (seco y lluvioso), definida por las probabilidades de transición:

$$p_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_{t-1} = i) \quad (1)$$

$$i, j = 0, 1 \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, 365$$

Sólo son necesarios dos parámetros, P_{00} y P_{10} , ya que se cumple:

$$p_{11}(t) = 1 - p_{10}(t) \quad (2)$$

Una cadena de Markov estacionaria de primer orden fue primeramente usada por Gabriel y Neumann (1.962). Posteriormente, otros autores usaron las cadenas no estacionarias (Feyerherm y Bark, 1.965; Woolhiser y Pegram, 1.979; Stern y Coe, 1.984).

Una cadena de Markov de orden superior al primero es recomendable para describir grandes persistencias o a medida que la longitud del registro aumenta (Chin, 1.977; Eidsvik, 1.980).

Haan y col. (1.976) y Carey y Haan (1.978) propusieron una cadena de Markov de primer orden con varios estados. Katz (1.979) y García Guzmán y col. (1.981) muestran que este modelo más complejo no es necesariamente superior por lo que, al requerir un mayor número de parámetros, no es recomendable. Foufoula-Georgiou y Lettenmaier (1.987) desarrollaron el llamado modelo de renovación de Markov donde la probabilidad de tener un día lluvioso no depende del estado del día previo sino del número de días transcurridos desde la última lluvia.

Roldán y Woolhiser (1.982) compararon la cadena de Markov de primer orden con un modelo de renovación alternativa, llegando a la conclusión que Markov era superior de acuerdo al criterio de información de Akaike (Akaike, 1.974) (ver *Proceso de Optimización*). Una de las desventajas de los procesos de renovación alternativa es que la estacionalidad es difícil de manejar.

Stern y Coe (1.984) y Zucchini y Adamson (1.984) han usado la transformación logarítmica:

$$g(t) = \log \frac{p(t)}{1 - p(t)} \quad (3)$$

que transforma las probabilidades de transición $p(t)$, acotadas entre cero y uno, en $g(t)$, limitada entre más y menos infinito, lo cual puede resolver problemas de ajuste de series de Fourier a las variaciones estacionales de los parámetros (ver *Propuestas sobre Nuevas Metodologías*).

Cantidad

La distribución de $U(t)$ está altamente sesgada y exige

una gran variabilidad estacional (Woolhiser, 1.992). Buishand (1.977) distinguió entre tres diferentes tipos de días lluviosos: días lluviosos solitarios; días lluviosos limitados en un lado por un día lluvioso y por el otro por un día seco y días lluviosos limitados en ambos lados por un día lluvioso. También encontró que hay una pequeña correlación entre las cantidades de precipitación recogidas en días lluviosos sucesivos.

Sin embargo, y en aras de obtener parsimonia en los modelos, lo habitual ha sido suponer que $U(t)$ es independiente tanto de la ocurrencia de lluvia en días previos como de la cantidad recogida en los mismos y, entonces, ajustar alguna distribución teórica a la misma teniendo en cuenta su carácter sesgado [*exponencial*: Todorovic y Woolhiser (1.974, 1.975); *mixta exponencial*: Smith y Schreiber (1.974), Woolhiser y Pegram (1.979), Woolhiser y Roldan (1.986), Alcaide (1.986); *gamma*: Ison y col. (1.971), Katz (1.977a), Ibáñez (1.982), Stern y Coe (1.984); *uniforme*: Haan y col. (1.976), Roldan (1.979); *kappa*: Mielke (1.973)]. La función de distribución viene dada por:

$$F_1(u) = P\{U_t \leq u \mid X_0, U_1, X_1, \dots, X_{t-1}, U_{t-1}, X_t\} \quad (4)$$

$$= P\{U_t \leq u \mid X_t = 1\}$$

$$t = 1, 2, \dots, 365 \quad ; \quad u = y - T > 0$$

Una segunda hipótesis de trabajo ha sido suponer que las cantidades de precipitación son independiente pero que la función de distribución depende de si el día anterior fue seco o lluvioso [proceso de cadena dependiente (Katz, 1.977b)]. En este caso:

$$F_{ti}(u) = P\{U_t \leq u \mid X_t = 1, X_{t-1} = i\} \quad (5)$$

$$i = 0, 1 \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, 365 \quad ; \quad u > 0$$

$$i = 0, 1 \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, 365 \quad ; \quad u > 0$$

García Guzmán y Torrez (1.985) desarrollan un modelo que permite a las probabilidades de ocurrencia de la lluvia depender de la cantidad de lluvia en el día anterior.

Woolhiser y Roldán (1.982) y Alcaide (1.986) compararon las distribuciones independientes, exponencial, gamma y mixta exponencial, entre sí y con otras cuatro de cadena dependiente: exponencial-exponencial, exponencial-gamma, gamma-exponencial y gamma-gamma (la citada en primer lugar modela los días lluviosos precedidos por uno seco y la otra los precedidos por uno lluvioso). De acuerdo con el criterio de información de Akaike (Akaike, 1.974), la distribución mixta exponencial resultó superior a las demás en las diferentes condiciones climáticas estudiadas (cuatro estaciones muy diversas en Estados Unidos y diecisiete localizadas en el valle del Guadalquivir). La función de distribución de la mixta

exponencial es como sigue:

$$f_t(u) = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \exp\left(-\frac{u}{\beta(t)}\right) + \frac{1-\alpha(t)}{\theta(t)} \exp\left(-\frac{u}{\theta(t)}\right) \quad (6)$$

$$u > 0 ; 0 \leq \alpha(t) \leq 1 ; 0 < \beta(t) < \theta(t) ; t = 1, 2, \dots, 365$$

La distribución mixta exponencial puede interpretarse como el resultado de una muestra aleatoria de dos distribuciones exponenciales donde la distribución con la media más pequeña, $\beta(t)$, se muestrea con probabilidad $\alpha(t)$ y la distribución con la media más grande, $\theta(t)$, se muestra con probabilidad $[1 - \alpha(t)]$.

DEFINICION DE LOS MODELOS

Estacionalidad

Como ya se ha mencionado, una de las características más importantes del proceso de precipitación es su variabilidad estacional.

La variación estacional de cada parámetro del modelo puede describirse por la forma polar de una serie de Fourier finita:

$$a(t) = a_0 + \sum_{i=1}^m \left\{ C_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{365} + \phi_i\right) \right\} \quad (7)$$

donde:

- $a(t)$ = valor del parámetro en el día t
($t= 1, 2, \dots, 365$)
- a_0 = media del parámetro.
- m = número máximo de armónicos.
- C_i = amplitud del armónico i .
- ϕ_i = ángulo de fase del armónico i .

Woolhiser y Pegram (1.979) señalaron que la estimación por mínimos cuadrados de los coeficientes de Fourier presenta dos deficiencias fundamentales. Por un lado, los parámetros estimados para cada periodo son estadísticos con diferentes varianzas a causa del diferente tamaño de la muestra y, sin embargo, reciben el mismo peso. Por otro lado, no existe un procedimiento estadístico adecuado que permita decidir sobre la significación de los armónicos individuales. En su lugar, recomendaron el uso de estimaciones numéricas directas por máxima verosimilitud de los coeficientes de Fourier y el test de la razón de verosimilitud (Hoel, 1.971; Mielke y Johnson, 1.973) para determinar la significancia de los armónicos (ver *Proceso de Optimización*).

Estimación de los parámetros

La metodología seguida para estimar los parámetros de las distribuciones elegidas para describir tanto el proceso de ocurrencia como el de la cantidad de lluvia es análogo. Teniendo en cuenta que en un registro de N años sólo se dispone de N datos de precipitación por cada día, éste número resulta estadísticamente insuficiente a los efectos de estimación de parámetros en un modelo de precipitación diaria aun disponiendo de registros considerados como largos (30 σ 40 años). Es por ello, que los datos se agrupan en periodos de r días y los parámetros se calculan por métodos de máxima verosimilitud en cada período suponiendo que se mantienen constantes dentro de los mismos.

Este procedimiento fue propuesto por Woolhiser y Pegram (1.979) que usaron periodos de 14 días. Posteriormente, Woolhiser y col. (1.988) trabajaron tanto con periodos de 14 como de 28 días. En este segundo caso se reduce el número de periodos por año (que pasa de 26 a 13) con el consiguiente ahorro de tiempo de ordenador

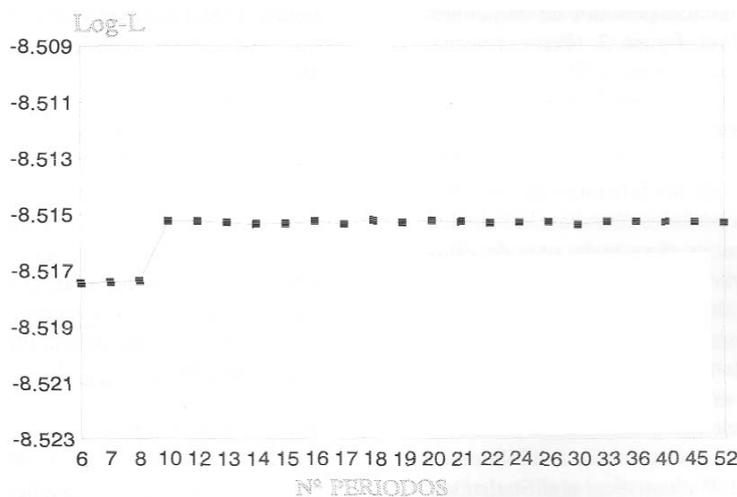


Figura 1. Variación del Log-L de la distribución ME con el número de periodos pañi la estación de Córdoba.

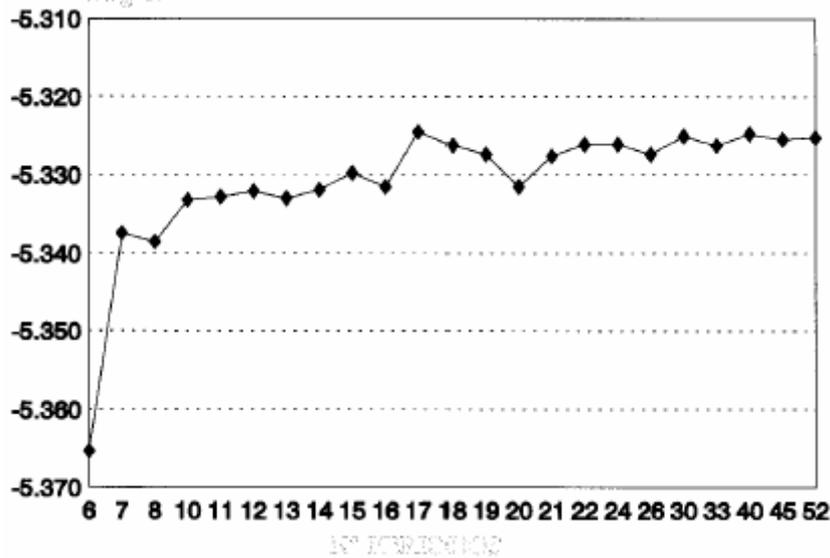


Figura 2. Variación del Log-L di- la CM con el número de períodos para la estación de Sevilla.

No obstante, y como se va a señalar en el Proceso de Optimización, esta estimación de parámetros es un paso inicial dentro de un proceso de optimización más complejo, por lo que la longitud de los períodos elegidos puede afectar el ajuste final. Pérez Lucena (1.994) calculó el logaritmo de la función de verosimilitud, **Log-L**, en un modelo denominado **CMME** (cadena de Markov, **CM**, de primer orden para la ocurrencia y distribución mixta exponencial, **ME**, para la cantidad) conforme se variaba la longitud de los períodos iniciales en un intervalo que oscilaba entre 7 y 60 días por período. Los datos usados correspondían a 40 años (1.953-1.992) de precipitación diaria de las estaciones meteorológicas de Córdoba-aeropuerto y Sevilla-aeropuerto. Los resultados obtenidos muestran que para la ME la duración de los períodos no afecta al ajuste [ver Figura 1 (Pérez Lucena, 1.994)]. Por el contrario, para la CM el valor del **Log-L**, y por tanto el ajuste, mejoraba al tomarse períodos de duraciones inferiores a un mes [ver figura 2 (Pérez Lucena, 1.994)].

Proceso de optimización

Una vez los parámetros de las funciones de distribución son estimados para períodos de **r** días, se calculan los coeficientes de Fourier para cada uno de ellos usando técnicas de mínimos cuadrados. Estos coeficientes se usan como valores iniciales para la estimación por máxima verosimilitud de los mismos, empleando para ello alguna técnica de optimización multivariada existente en bibliotecas de programas estadísticos. Así, por ejemplo, Woolhiser y Roldan (1.986) usaron la **ZXMIN** perteneciente a la biblioteca del I.M.S. (International Mathematical and Statistical) y basada en un artículo de Fletcher (1.972), mientras que Woolhiser y col. (1.988) trabajaron con la **SIMPLX** de la misma biblioteca y derivada del trabajo de Nelder y Mead (1.965). La segunda estimación de los coeficientes se hace permitiendo a los parámetros variar diariamente de

acuerdo con la forma polar de la serie de Fourier dada por la expresión (7).

El proceso de optimización seguido tiende a maximizar la función de verosimilitud de las distribuciones seleccionadas empleando para ello el menor número posible de coeficientes de Fourier por cada parámetro. Así, se trata de determinar si los sucesivos armónicos que se consideran son o no significativos de acuerdo a algún criterio estadístico previamente fijado. Habitualmente, se usa el test de la razón de verosimilitud, como se ha indicado en el apartado de *Estacionalidad*, que se expresa por el estadístico:

$$E = -2 \log \frac{L(H_0)}{L(H_1)} \quad (8)$$

donde: **L(H₀)** es el valor de la función de verosimilitud bajo la hipótesis nula **H₀**, y **L(H₁)** bajo la alternativa **H₁**

La distribución de **E** se aproxima a la de χ^2 con un número de grados de libertad igual al número de coeficientes fijados por **H₀**. Así, por ejemplo, para determinar si el primer armónico de un parámetro es significativo o no, el número de coeficientes bajo la hipótesis nula es sólo uno, la media del parámetro, y bajo la alternativa tres, media y amplitud y ángulo de fase del primer armónico. Por tanto, el número de grados de libertad es de dos.

Tal como se demuestra en trabajos previos [ver, por ejemplo, Alcaide (1.986)], los armónicos de cada parámetro no son independientes y, en el caso de algunas distribuciones como la ME, ni siquiera los parámetros son independientes entre sí. Esto ha dado lugar al desarrollo de varias técnicas de optimización: Roldan y Woolhiser (1.982) y Woolhiser y Roldan (1.982)

presentan una optimización secuencial dado el alto tiempo necesitado para una optimización conjunta de todos los coeficientes implicados. Woolhiser y Roldan (1.986) y Woolhiser y col. (1.988) mejoran la optimización secuencial anterior mediante un proceso de doble optimización que afectaba sólo a los coeficientes declarados significativos en una primera ronda. El desarrollo de los microordenadores y ordenadores personales ha permitido a Pérez Lucena (1.994) realizar una optimización conjunta que, de acuerdo al criterio de información de Akaike (CIA):

$$CIA = -2 (\text{Log } L - n) \quad (9)$$

con n igual al número de coeficientes utilizados proporciona mejores resultados (valor de CIA más pequeño).

Sin embargo, uno de los objetivos básicos del establecimiento de modelos de lluvias es, una vez se ha analizado su evolución estacional en un punto en el espacio, presentar un modelo regionalizado de la misma (ver *Variabilidad Espacial*). Con esta intención, la optimización secuencial puede ser deseable frente a la conjunta dado el inferior número de coeficientes requerido.

Variabilidad espacial

El carácter espacial del proceso de precipitación diaria puede describirse por los campos aleatorios $a_0(\mathbf{v})$, $c_i(\mathbf{v})$ y $\phi_i(\mathbf{v})$, donde \mathbf{v} es un vector de coordenadas espaciales: $\mathbf{v} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$; $i = 1, 2, \dots, m$. Dado que las medidas de la precipitación se hacen en puntos en el espacio, las propiedades de los campos aleatorios continuos se deben inferir de las estimaciones de los parámetros en P estaciones con coordenadas: $\mathbf{v}_p = (\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$ ($p = 1, 2, \dots, P$). Se considera, de este modo, sólo la variabilidad espacial del proceso de precipitación diaria como consecuencia de los cambios en el espacio de los campos aleatorios continuos que describen la variación temporal de los parámetros de dicho proceso. No se entra, por tanto, en procesos tiempo-espacio de precipitación diaria como ya se mencionó en la introducción de este trabajo.

Creutin y Obled (1.982) revisaron y evaluaron diversas técnicas para representación en mapas de los campos de lluvias. Los métodos considerados deben ser entendidos, de acuerdo con lo indicado, como métodos espaciales antes que como métodos climatológicos, y se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Estación más próxima.
- Media aritmética de las estaciones más próximas.
- Inverso de la distancia al cuadrado (Dean y Snyder, 1.977).
- Krigeado (Carrera y Samper, 1.985).
- Ajuste a superficies con el criterio óptimo de suavidad [splines o varillas de juncos (Lancaster y Salkaustas, 1.986)].

Los resultados obtenidos por Woolhiser y Roldán (1.986) usando datos de estaciones localizadas en el estado de South Dakota, EE.UU., y por Roldan y col. (1.989) con datos de estaciones ubicadas en el valle del Guadalquivir, vienen a recomendar las técnicas más simples frente a las más sofisticadas. No obstante, los parámetros interpolados para las estaciones testigo fueron, en algunos casos, significativamente diferentes de los parámetros identificados a partir de los registros históricos. En este sentido, la consideración de estación más próxima no en el sentido geográfico sino bajo el supuesto de semejantes valores de precipitación media anual o de número medio anual de días lluviosos, etc., como se ha hecho en zonas montañosas (Hanson y col., 1.989) podría conducir a mejores resultados (ver *Propuestas sobre Nuevas Metodologías*).

PROPUESTAS SOBRE NUEVAS METODOLOGÍAS

Transformación logarítmica

En el apartado de ocurrencia se comentaba el uso de la transformación logarítmica que sustituye las probabilidades de transición de la cadena de Markov por otros parámetros cuyo intervalo de variación dejaba de estar acotado entre cero y uno pasando a oscilar entre $\pm\infty$ [ecuación (3)].

Esta nueva metodología ha sido propuesta para mejorar el ajuste de las series de Fourier a las variaciones estacionales de los parámetros, fundamentalmente en los casos de climas donde un período relativamente seco es seguido rápidamente por una estación húmeda, o viceversa. En efecto, en estos supuestos las probabilidades tienden a tomar valores superiores a la unidad que obligan, a su vez, al uso de funciones de castigo. Los parámetros se alejan de su valor óptimo, inferior pero próximo a uno, conduciendo a óptimos locales de la función de verosimilitud, inferiores en magnitud a los obtenidos usando la transformación logarítmica (Woolhiser, 1.992). Pérez Lucena y col. (1.994) llegan a la misma conclusión como se observa en la Tabla 2.

Woolhiser (1.992) señala que estas ventajas no se han encontrado en estaciones más húmedas y, de hecho, el algoritmo desarrollado por Woolhiser y Roldan (1.986) condujo a mejores valores de la función de verosimilitud, aunque requiriendo un mayor tiempo de ordenador. En general, y a pesar de que los coeficientes de los armónicos se estiman simultáneamente, el procedimiento de estimación es más rápido que los anteriores.

Orden de la cadena de Markov

El orden apropiado de la cadena de Markov ha sido estudiado por diversos autores (ver *Ocurrencia*).

Tabla 2. Valores del Log-L y del criterio de información de Akaike (C.I.A.) obtenidos para la cadena de Markov con y sin transformación logarítmica. Estaciones de Córdoba y Sevilla (1.953-1.992).

	CORDOBA				SEVILLA			
	Log-L	Armónicos	Coefficientes	C.I.A	Log-L	Armónicos	Coefficientes	C.I.A
Transformación logarítmica	-5.642'56	4	18	11.321'12	-5.318'53	4	18	10.673'06
Sin transformación logarítmica	-5.653'31	3	14	11.334'62	-5.327'37	2	10	10.674'76

Aparte de lo entonces comentado cabe añadir que Eidsvik (1.980) expone que, con muestras muy largas, el criterio de información de Akaike produce incertidumbre no siendo apropiado para determinar el orden de la cadena. Katz (1.981) usó el criterio de información bayesiano propuesto por Schwarz (1.978) aunque ligeramente modificado.

Moreno y col. (en preparación) han desarrollado las ecuaciones necesarias para aplicar la cadena de Markov de segundo orden usando los parámetros de la transformación logarítmica en lugar de las probabilidades de transición.

Índice de oscilación del sur

Woolhiser y col. (1.988) muestran que los modelos de precipitación diaria existentes conducen a subestimar la varianza de la precipitación anual. Esto puede deberse a tendencias reales de la lluvia a largo plazo, a cambios en la técnica de recogida de datos o en la exposición de los pluviómetros, y/o a la existencia de pautas de circulación atmosférica que no exhiben periodicidades anuales (Woolhiser y col., 1.993). La oscilación del sur es un ejemplo de tales pautas y se define como la variación coherente de las presiones barométricas a intervalos interanuales que se relacionan con fenómenos meteorológicos en una escala global, particularmente en los trópicos y subtropicos (Enfield, 1.989). Esta oscilación se describe cuantitativamente por el índice de oscilación del sur (I.O.S.) o series de tiempo de las anomalías de las diferencias de presión atmosférica entre Papeete, Tahití, y Darwin, Australia. La oscilación del sur es la contraparte atmosférica de la corriente de El Niño en el océano.

Woolhiser y col. (1.993) usaron el procedimiento propuesto por Woolhiser (1.992) consistente en una nueva técnica para identificar los efectos sobre la precipitación en varias estaciones del suroeste de Estados Unidos de la oscilación del sur. Dicha técnica consistió en usar el I.O.S. para perturbar los parámetros del modelo de precipitación diaria cadena de Markov-mixta exponencial. Los resultados muestran que el régimen de lluvias es condicionado por la evolución del I.O.S. 90 días antes, lo cual resultaría muy interesante por la posibilidad de simular lluvias con una gran

antelación. El procedimiento desarrollado por los autores mencionados permite identificar explícitamente los efectos del I.O.S. sobre la frecuencia de la precipitación y sobre las cantidades. Dado que se trata de la circulación atmosférica a escala global pueden esperarse correlaciones con la lluvia en otras regiones del planeta.

Nuevas técnicas de regionalización

La regionalización (ver *Variabilidad Espacial*) pretende, una vez seleccionado un modelo de precipitación diaria, calcular los parámetros de dicho modelo de la mejor forma posible en una localización donde no exista registro de lluvias. En el supuesto de que no hubiera grandes diferencias de elevación, Woolhiser y Roldán (1.986) y Roldán y col. (1.989) han propuesto algunas técnicas de interpolación cuyos defectos ya han sido mencionados. En los casos de grandes diferencias en elevación, Hanson y col. (1.989) usaron relaciones estimadas localmente entre los parámetros del modelo y la precipitación media anual.

Para resolver los problemas existentes parece razonable proponer una estimación y ajuste de los parámetros del modelo de modo que, en el proceso de ocurrencia, se mantenga el número anual medio estimado de días lluviosos, y, en el caso de las cantidades, se preserve la precipitación anual media. A tal efecto, hay que decidir qué parámetros del modelo deberán ser ajustados (sólo dos porque ese es el número de características a fijar) y qué información de las estaciones vecinas ha de ser ponderada en el proceso de ajuste.

Moreno y col. (en preparación) están usando como parámetros P_{00} y μ (media de la distribución usada para describir la cantidad de lluvia) por exhibir muy buena correlación con la precipitación media anual. El ajuste del valor estimado de la probabilidad de transición \hat{p}_{00} hace de modo que se conserve el número medio anual de días lluviosos, y el de $\hat{\mu}$ para preservar el de la precipitación media anual una vez que el anterior ha sido ya fijado. Como funciones de ponderación se usan las estaciones más próximas no sólo en el sentido geográfico sino también en cuanto a precipitación media anual, número de días lluviosos, etc. Asimismo, se consideran aspectos relativos a elevación, vegetación, distancia a la fuente de humedad, etc.

El trabajo en curso se está aplicando a las estaciones del valle del Guadalquivir usadas por Alcaide y col. (1.986) y Roldan y col. (1.989), tratando de mejorar la información proporcionada por las técnicas de interpolación entonces usadas. A modo de lo realizado por Woolhiser y col. (1.988) con diversas estaciones localizadas en el estado de South Dakota, Estados Unidos, se pretende proporcionar un fácil acceso a la estadística de la lluvia (probabilidad de una racha de k días secos o lluviosos comenzando un determinado día del año, probabilidad de que llueva una determinada cantidad en k días consecutivos, etc.) en estaciones con registros o sin registros una vez que en estas últimas se hayan simulado datos a partir de los parámetros estimados y ajustados por los procedimientos descritos. Todo ello puede realizarse de modo interactivo en la pantalla del ordenador donde se representa el mapa de la región afectada.

CONCLUSIONES

Los modelos de lluvias que describen la ocurrencia mediante una cadena de Markov de primer orden y la cantidad de precipitación por una distribución mixta exponencial, usando series de Fourier finitas para la variabilidad estacional con coeficientes estimados por técnicas de máxima verosimilitud, proporcionan una suficiente aproximación en una gran variedad de climas. No obstante, transformaciones como la logarítmica aplicadas a las probabilidades de transición de la cadena de Markov mejoran el valor de la función de verosimilitud con ahorro de tiempo de ordenador, fundamentalmente en estaciones con transiciones bruscas entre períodos húmedos y relativamente secos. Por otro lado, un incremento en el orden de la cadena de Markov puede ser aconsejable a medida que la longitud del registro aumenta.

En lo que respecta al análisis regional, las técnicas de interpolación que sólo se basan en la proximidad geográfica con estaciones meteorológicas no producen resultados suficientemente satisfactorios. Más prometedoras se presentan otras técnicas que ajustan los parámetros estimados preservando el número medio anual de días lluviosos y la precipitación media anual. Además de estos factores y de la propia cercanía, aspectos tales como elevación, vegetación, etc., deben considerarse en el ajuste.

Por último, técnicas que como el índice de oscilación del sur relacionan determinados sucesos meteorológicos a una escala global, pueden permitir predicciones sobre el comportamiento de la lluvia en una región con una gran antelación, lo que podría conducir a importantes desarrollos en el manejo de los recursos hídricos.

AGRADECIMIENTOS

La realización de un trabajo científico no suele ser únicamente obra de una sola persona. Por el contrario, muchos otros colaboran tanto de una forma directa, aportando su contribución al tema objeto del trabajo, como indirecta, permitiendo que el autor no tenga que dedicarse a otras tareas que distraerían su atención. A todos les agradezco su labor, pero, especialmente, quiero citar entre los primeros tanto a los que fueron mis maestros, Adela García Guzmán y David A. Woolhiser, como a los que, modestamente, considero mis discípulos, Miguel Alcaide y Jorge Pérez Lucena. Sin alguno de ellos no hubiera sido posible este trabajo.

REFERENCIAS

- Akaike, H. 1.974. A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Autom. Control*, 19(6):716-723.
- Alcaide, M. 1.986. *Análisis estacional y regional de la precipitación en el valle del Guadalquivir*. Tesis Doctoral, Universidad de Córdoba, 249 pp.
- Alcaide, M.; J. Roldan y A. Losada. 1.986. Análisis estacional y regional de la precipitación en el valle del *Guadalquivir*. *Comunicaciones a las V Jornadas Técnicas sobre Riegos*, Málaga, pp. 3-19.
- Artacho, C. 1.991. *Caracterización estocástica de las principales variables meteorológicas que influyen en la evapotranspiración*. Tesis Doctoral, Universidad de Córdoba.
- Artacho, C.; J. Roldán; A. García Guzmán y M. Alcaide. 1.989. Modelado de la temperatura y humedad relativa en Andalucía Occidental. *Riegos y Drenajes XXI*, 28:32-34.
- Buishand, T.A. 1.977. Stochastic modeling of daily rainfall sequencs. *Mededeelingen Landbouwhogeschool*, Rep. 77-3, Wageningen, 211 pp.
- Carey, D.A. y C.T. Haan. 1.978. Markov process for simulating daily point rainfall. *J. of Irrig. and Drain. Div.*, 104(1): 111-125.
- Carrera, J. y J. Samper. 1.985. *Métodos geoestadísticos aplicados a la hidrología subterránea*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.
- Chin, E.H. 1.977. Modeling daily precipitación occurrence process with Markov chain. *Water Resour. Res.*, 13(6):949-956.

- Coe, R. y R.D. Stern. 1982. Fitting models to daily rainfall data. *J. Appl. Meteorol.*, 21:1024-1031.
- Creutin, J.D. y C. Obled. 1982. Objective analyses and mapping techniques for rainfall fields: an objective comparison. *Water Resour. Res.*, 18(2):413-431.
- Dean, J.D. y W.M. Snyder. 1977. Temporally and areally distributed rainfall. *J. of the Irrig. and Drain. Div.*, 103(2):221-229.
- Eidsvik, K.J. 1980. Identification of models for some time series of atmospheric origin with Akaike's information criterion. *J. of Appl. Meteorol.*, 19(4):357-369.
- Enfield, D.B. 1989. El Niño. Past and present. *Rev. Geophys.*, 21:159-187.
- Feyerherm, A.M. y L.D. Bark. 1965. Statistical methods for persistent precipitation patterns. *J. Appl. Meteor.*, 4:320-328.
- Feyerherm, A.M.; L.D. Bark y W.C. Burrows. 1965. Probabilities of sequences of wet and dry days in South Dakota. *North Central Reg. Res. Publ. 161*, Kansas State Univ., Manhattan.
- Fletcher, R. 1972. *Fortran subroutines for minimization by quasi-Newton methods*. Rep. AERE-R7125, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Gran Bretaña.
- Foufoula-Georgiou, E. y D.P. Lettenmaier. 1987. A Markov renewal model for rainfall occurrences. *Water Resour. Res.*, 23(5):875-884.
- Foufoula-Georgiou, E. y K.P. Georgakakos. 1991. Hydrologic advances in space-time precipitation modelling and forecasting. En: *Recent advances in the modeling of hydrologic systems*, D.S. Bowles y P.E. O'Connell (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda, pp. 47-65.
- Frasier, G.W.; J.R. Cox y D.A. Woolhiser. 1987. Wet-dry cycle effects on warm-season grass seedling establishment. *J. of Range Management*, 40(1):2-6.
- Gabriel, K.R. y J. Neuman. 1962. A Markov chain model for daily rainfall in Tel-Aviv. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 88:90-95.
- García Guzmán, A. 1988. *La lluvia: formación y distribución (2ª parte)*. Apuntes del Curso de Doctorado Hidrología, E. T.S. I. Agrónomos, Universidad de Córdoba.
- García Guzmán, A. y W.C. Torrez. 1985. Daily rainfall probabilities: conditional upon prior occurrence and amount of rain. *J. of Clim. and Appl. Meteor.*, 24(10):10009-1014.
- García Guzmán, A.; J. Roldán y A. Losada. 1981. Caracterización del régimen de lluvias en Córdoba. *I Simposio sobre el Agua en Andalucía*, Granada, Vol. 1:31-45.
- Haan, C.T. 1972. A water yield model for small watersheds. *Water Resour. Res.*, 8(1):58-68.
- Haan, C.T.; D.M. Alien y J.O. Street. 1976. A Markov chain model for daily rainfall. *Water Resour. Res.*, 12(3):443-449.
- Hanson, C.L.; H.B. Osborn y D.A. Woolhiser. 1989. Daily precipitation simulation model for mountainous areas. *Trans. ASAE*, 32(3):865-873.
- Hocll, P.G. 1971. *Introduction to mathematical statistics*. J. Wiley, New York.
- Hubbard, K.G. y D.A. Willhite. 1987. *A demonstration and evaluation of the use of climate information to support irrigation scheduling and other agricultural operations*. Report 87-4, Center for Agricultural Meteorology and Climatology, Univ. of Nebraska, Lincoln.
- Ibáñez, V. 1982. *Elaboración de una metodología para estimar la persistencia de las precipitaciones. Su aplicación al cultivo del arroz en Levante*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, 269 pp.
- Insúa, F.; A. García Guzmán y J. Roldán. 1981. Influencia del régimen pluviométrico sobre las labores agrícolas. *J. Simposio sobre el Agua en Andalucía*, Vol. 1:63-76, Granada.
- Ison, N.T.; A.M. Feyerherm y L.D. Bark. 1971. Wet period precipitation and the gamma distribution. *J. of Appl. Meteor.*, 10(4):658-665.
- Jensen, M.E. 1972. Programming irrigation for greater efficiency. En: *Optimizing the soil physical environment toward greater crop yields*, D. Hillel (ed.), Academic Press, New York, pp. 113-162.
- Katz, R.W. 1977a. Precipitation as a chain-dependent process. *J. Appl. Meteor.*, 16(7):671-676.
- Katz, R.W. 1977b. An application of chain-dependent processes to meteorology. *J. Appl. Prob.*, 14:598-603.

- Katz, R.W. 1979. Parsimony in modeling daily precipitation. *Water Resour. Res.*, 15(6):1628-1630.
- Katz, R.W. 1981. On some criteria for estimating the order of a Markov chain. *Technometrics*, 27(3):243-249.
- Katz, R.W. 1984. Discusión del artículo de Stern y Coe. *J. R. Statist. Soc.*, A, 147, parte 1:29.
- Kavvas, M.L. y K.R. Herd. 1985. A radar based stochastic model for short time increment rainfall. *Water Resour. Res.*, 21(9): 1437-1455.
- Lancaster, P. y K. Salkaustras. 1986. *Curve and surface fitting. An introduction.* Academic Press, Londres.
- Lomas, J. 1972. Economic significance of dry-land farming in the arid northern Negev of Israel. *Agrie. Meteor.*, 10:383-392.
- Lund, L.A. y D.A. Grantham. 1977. Persistence, runs and recurrence of precipitation. *J. Appl. Meteor.*, 16:346-358.
- Mielke, P.W. 1973. Another family of distributions for describing and analyzing precipitation data. *J. of Appl. Meteor.*, 10(2):275-280.
- Mielke, P.W. y E.S. Johnson. 1973. Three-parameter kappa distribution maximum likelihood estimates and likelihood ratio tests. *Mon. Weather Rev.*, 101(9):701-707.
- Moreno, F.; D.A. Woolhiser y J. Roldán. *Regionalización de parámetros en modelos estocásticos de precipitación diaria.* En preparación.
- Nelder, J.A. y R. Mead. 1965. A simplex method for function minimization. *Compu. J.*, 7(4):308-313.
- Newnhan, E.V. 1916. The persistence of wet and dry weather. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 42:153-162.
- Palmer, W.L.; B.J. Barfield y C.T. Haan. 1982. Sizing farm reservoirs for supplemental irrigation of corn. Part I: Modeling reservoir size yield relationships. *Trans. ASAE*, 25:372-376.
- Richardson, C.W. y D.A. Wright. 1984. WGEN: A model for generating daily weather variables. *U.S.D.A., Agrie. Res. Serv.*, ARS-8:1-83.
- Pérez Lucena, J. 1994. *Modelo estocástico de la precipitación diaria. Aplicación a las estaciones de Córdoba y Sevilla.* Trabajo Fin de Carrera, E.T.S.I.-Agrónomos y de Montes, Universidad de Córdoba, 151 pp.
- Pérez Lucena, J.; J. Roldán; M. Alcaide y D.A. Woolhiser. 1994. Techniques to improve the fit on stochastic rainfall models in southwestern Spain. Presentado a la XIX General Assembly of the European Geophysical Society, 25-29 abril, Greno-bje, Francia.
- Roldán, J. 1979. *Caracterización del régimen hidrológico de una región: sistemas de vientos y lluvias.* Tesis Doctoral, Universidad de Córdoba, 216 pp.
- Roldán, J. y D.A. Woolhiser. 1982. Stochastic daily precipitation models. 1. A comparison of occurrence processes. *Water Resour. Res.*, 18(5): 1451-1459.
- Roldán, J.; A. García Guzmán y A. Losada. 1982. A stochastic model for wind occurrence. *J. of Appl. Meteor.*, 21(5):740-744.
- Roldán, J.; M. Alcaide; A. Laguna y J.V. Giráldez. 1989. Mapping techniques for rainfall fields. En: *Application of computerized EC soil map and climate data.* EUR 12039, Commission of the European Communities, Luxemburgo, pp. 167-176.
- Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statist.*, 6:461-464.
- Shaw, R.H.; G.L. Barger y R.F. Dale. 1960. *Precipitation probabilities in the North Central States.* Bull. 753, Missouri Agrie. Exp. Sta., Co-lumbia, Mo.
- Smith, R.E. y H.A. Schreiber. 1973. Point process of seasonal thunderstorm rainfall. 1. Distribution of rainfall events. *Water Resour. Res.*, 9(4):871-884.
- Smith, R.E. y H.A. Schreiber. 1974. Point process of seasonal thunderstorm rainfall. 2. Rainfall depth probabilities. *Water Resour. Res.*, 10(3):418-423.
- Stern, R.D. 1980a. Analysis of daily rainfall at Samaru, Nigeria, using a simple two-part model. *Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimatol*, Ser. B, 28:123-135.
- Stern, R.D. 1980b. The calculation of probability distributions of models of daily precipitation. *Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimatol*, Ser. B, 28:137-147.
- Stern, R.D. y R. Coe. 1984. A model fitting analysis of daily rainfall data. *J. Roy. Statist. Soc.*, A, 147, parte 1:1-34.
- Todorovic, P. y D.A. Woolhiser. 1974. Stochastic model of daily rainfall. *U.S.D.A. Misc. Publ* 1215:232-246.

- Todorovic, P. y D.A. Woolhiser. 1975. Stochastic model of n-day precipitation. *J. Appl. Meteor.*, 14(1): 17-24.
- Villalobos, F.J. y E. Fereres. 1989. A simulation model for irrigation scheduling under variable rainfall. *Trans. ASAE*, 32(1): 181-188.
- Welch, S.M. 1984. Developments in computer-based IPM extension delivery systems. *Ann. Rev. of Entomology*, 29:359-381.
- Williams, J.R. y K.G. Renard. 1985. Assessments of soil erosion and crop productivity with process models (EPIC). Cap. 5. En: *Soil erosion and crop productivity*, R.F. Follett y B.A. Stewart (eds.), American Society of Agronomy y Crop Science Society of America, Madison, WI, pp. 67-103.
- Woolhiser, D.A. 1992. Modeling daily precipitation. Progress and problems. En: *Statistics in the environmental and earth sciences*, A. Walden y P. Guttorp (eds.), Edward Arnold, Londres, pp. 71-89.
- Woolhiser, D.A. y G.G.S. Pegram. 1979. Maximum likelihood estimation of Fourier coefficients to describe seasonal variations of parameters in stochastic daily precipitation models. *J. Appl. Meteorol.*, 18:34-42.
- Woolhiser, D.A. y J. Roldán. 1982. Stochastic daily precipitation models. 2. A comparison of distribution of amounts. *Water Resour. Res.*, 18(5):1461-1468.
- Woolhiser, D.A. y J. Roldán. 1986. Seasonal and regional variability of parameters in Stochastic daily precipitation models: South Dakota, U.S.A. *Water Resour. Res.*, 22(6):965-978.
- Woolhiser, D.A.; E.W. Rovey y P. Todorovic. 1973. Temporal and spatial variation of parameters for the distribution of n-day precipitation. En: *Floods and Droughts, Proceedings of the Second International Symposium in Hydrology*, E.F. Schulz, V.A. Koelzer y K. Mahmood (eds.), Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, pp. 605-614.
- Woolhiser, D.A.; C.L. Hanson y C.W. Richardson. 1988. Microcomputer program for daily weather simulation. *U.S.D.A., Agric. Res. Serv.*, ARS-75, 49 pp.
- Woolhiser, D.A.; T.O. Keefer y K.T. Redmond. 1993. Southern oscillation effects on daily precipitation in the southwestern U.S. *Water Resour. Res.*, 29(4): 1287-1295.
- Zucchini, W. y P.T. Adamson. 1984. The occurrence and severity of droughts in South Africa. Dept. of Civil Engineering, Univ. of Stellenbosch y Dept. of Water Affairs, *WRC Repon No. 91/1/84*, 198 pp.