

Control deslizante fraccionario de la trayectoria y orientación de un quadrotor con cargas suspendidas desconocidas

Nasim Ullah^a, Muhammad Asghar Ali^b, Asier Ibeas^{c*}, Jorge Herrera^{d,e}

^a Department of Electrical Engineering and Technology, University of Technology Nowshera, Nowshera, Paquistán.

^b Qurtuba University of Science and Information Technology, Dera Ismail Khan, Paquistán.

^c Departamento de Telecomunicaciones e Ingeniería de Sistemas, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193, Bellaterra (Barcelona), España.

^d Departamento de Ingeniería, Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería, Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 110111, Bogotá D. C., Colombia.

^e Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, Facultad de Ingenierías, Instituto Tecnológico Metropolitano, 050036, Medellín, Antioquia, Colombia.

Resumen

Este artículo diseña un sistema de control para el problema de seguimiento de trayectorias de un vehículo quadrotor con una carga suspendida desconocida. La presencia de esta carga desconocida incrementa considerablemente la complejidad del problema, y su oscilación actúa como una perturbación incierta que afecta a la dinámica propia del vehículo. De esta forma, la trayectoria global del quadrotor puede verse enormemente afectada a pesar de la existencia de un controlador nominal para él. Este artículo propone el diseño de un control deslizante de orden fraccionario para la solución de este problema. Junto con el diseño de la ley de control se prueba la estabilidad del sistema en lazo cerrado a través del método de Lyapunov para sistemas fraccionarios. El desempeño obtenido por el controlador propuesto se compara con el control en modo deslizante clásico observando que el controlador propuesto mejora significativamente los resultados obtenidos.

Palabras Clave:

Control de quadrotores; Control en modo deslizante; Control fraccionario; Sistemas dinámicos inciertos; control de trayectoria.

Sliding Fractional Order Trajectory and Attitude Control of a Quadrotor Transporting Cable-Suspended Unknown Payloads

Abstract

This article designs a control system for the trajectory tracking problem of a quadrotor vehicle with an unknown suspended load. The presence of this unknown load considerably increases the complexity of the problem while its oscillation acts as an unknown perturbation that affects the dynamics of the vehicle. In this way, the overall trajectory of the quadrotor can be greatly affected despite the existence of a nominal controller for it. This article proposes the design of a fractional order sliding mode control for the solution of this problem. Along with the design of the control law, the stability proof of the closed-loop system is carried out by using the Lyapunov method for fractional systems. The performance obtained by the proposed controller is compared with the classic sliding mode control, observing that the proposed controller significantly improves the results.

Keywords:

Quadrotor control; sliding-mode control; Fractional control; Uncertain dynamic systems; Trajectory control.

1. Introducción

En los últimos tiempos los rotores cuádruples (quadrotores) han encontrado numerosas aplicaciones en la industria de defensa, vigilancia de campos de petróleo, agricultura y transporte de cargas suspendidas, por citar algunas de ellas. Generalmente, la dinámica global de seis

grados de libertad que describe la traslación y rotación de un rotor cuádruple se modela como seis ecuaciones diferenciales no lineales (Gupte *et al.*, 2012). El modelo de seis grados de libertad obtenido de esta forma permite la formulación de los controladores de altitud, posición horizontal (posición en tres dimensiones, en definitiva) y actitud (orientación). Dada la complejidad del modelo matemático, la formulación de los

*Autor para la correspondencia: asier.ibeas@uab.cat

To cite this article: Nasim Ullah, Muhammad Asghar Ali, Asier Ibeas, Jorge Herrera. 2019. Sliding Fractional Order Trajectory Control of Quadrotor Transporting Cable-Suspended Unknown Payloads. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 16, 321-331.

<https://doi.org/10.4995/riai.2018.9951>

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)

lazos de control y la demostración de estabilidad pueden ser tareas muy complicadas, (Cruz *et al.*, 2015), (Yáñez-Vadillo *et al.*, 2017). Éste es el caso de las aplicaciones de transporte de cargas suspendidas, en las que la dinámica propia del quadrotor se acopla a la dinámica de la carga, lo que aumenta la complejidad del sistema. Debido a que la carga suspendida puede oscilar en el plano bidimensional paralelo al movimiento horizontal del quadrotor, el sistema completo dispone de, al menos, ocho grados de libertad. La dinámica de la carga útil oscilante suspendida del cuerpo de la nave puede interpretarse como una perturbación desconocida que afecta ostensiblemente a la dinámica original del vehículo. En consecuencia, incluso en presencia de un sistema de control para el quadrotor nominalmente estable, el vuelo puede ser inestable (Cruz *et al.*, 2015), (Dai *et al.*, 2014). Esta situación puede ser aún más complicada cuando la carga útil suspendida es desconocida.

Se han realizado muchos esfuerzos de investigación orientados a tratar el problema del control de vuelo de quadrotores con cargas suspendidas desconocidas. Los autores de (Dai *et al.*, 2014) propusieron un controlador adaptable para un rotor cuádruple portador de una masa desconocida suspendida cuyo modelo dinámico se explica en (Sadr *et al.*, 2014). El trabajo (Outeiro *et al.*, 2018) presenta el control de la altura de un quadrotor también basado en un controlador adaptable, que automáticamente ajusta las ganancias de un control LQR. El sistema de control incorpora una estrategia multi-modelo para estimar el peso de la carga suspendida y las variables de estado del sistema, incluyendo la velocidad vertical del vehículo. Adicionalmente, (Feng *et al.*, 2015) propone un sistema de control adaptable basado en la teoría de Lyapunov para el control de la altura y orientación del quadrotor. El controlador logra mantener la estabilidad del lazo cerrado y consigue un buen desempeño en el seguimiento. El sistema de control adaptable funciona adecuadamente cuando las incertidumbres varían en el tiempo de forma lenta. Si se desea que el quadrotor realice un movimiento de alta maniobrabilidad con cargas suspendidas, entonces la dinámica del sistema se vuelve muy compleja y el sistema de control adaptable puede no ser suficiente para conseguir la respuesta deseada. En (Goodarzi *et al.*, 2014) se propone un método de estabilización geométrica para este problema. En este trabajo, los autores modelan el cable suspendido como una cadena flexible compuesta por n componentes y utilizan una transformación del modelo a otro libre de coordenadas para formular un control geométrico no lineal. El modelo tan complicado utilizado para el cable aumenta considerablemente la complejidad del modelo dinámico total, lo que conlleva el diseño de un controlador complejo. Los trabajos presentados en (Klausen *et al.*, 2015), (Wu *et al.*, 2015), (Tang *et al.*, 2015) se centran en la formulación de un sistema de control no lineal y su optimización a través de programación entera mixta. En (Shi *et al.*, 2018) se diseña un sistema de control de la orientación anti-balanceo para la fase de vuelo diseñado a través de la teoría de Lyapunov y el método de *Backstepping*. El sistema de control compensa la perturbación que produce el balanceo a través de la estimación del mismo por medio de un observador armónico de estado extendido. Los autores de (Raffo *et al.*, 2016), (Raffo *et al.*, 2018) diseñan un sistema de control anti-balanceo para el seguimiento de trayectoria a través de una linealización entrada-salida del modelo no-

lineal del vehículo seguida de un control lineal basado en control robusto H_2/H_∞ . En (Das, 2018) se presenta un control de trayectoria basado en inversión dinámica del modelo del sistema para obtener un vuelo estable con un balanceo limitado de la carga. Por otro lado, en (Cruz *et al.*, 2017) se discute una estrategia de control específicamente para la fase de elevado de un quadrotor con una carga suspendida que también emplea el método de la inversión dinámica. En (Yi *et al.*, 2017) se diseña un sistema de control basado en modos deslizantes. El diseño diferencia los problemas de seguimiento de trayectoria y de orientación y está basado en un control deslizante entero clásico donde la superficie deslizante es de tipo proporcional derivativa. En (Wu *et al.*, 2017) se propone un control basado en linealización a lo largo de la trayectoria planeada y control PID para el seguimiento de la trayectoria y orientación del quadrotor. El control no elimina el balanceo de la carga pero mantiene limitada su amplitud. Asimismo, en (Allothman *et al.*, 2016) se presenta un control óptimo LQR iterativo para conseguir el seguimiento de trayectoria sin balanceo. El algoritmo de control diferencia la fase de despegue de la de vuelo y linealiza el sistema alrededor de la trayectoria del vehículo para resolver el problema de diseño del controlador. El trabajo (Sreenath *et al.*, 2013a) diseña un control geométrico no-lineal basado en la propiedad de planitud (*flatness*) del sistema para conseguir el control de una de las variables siguientes: orientación del quadrotor, posición u orientación de la carga, a elección del diseñador. Finalmente, en (de Crousaz *et al.*, 2014) se presenta un sistema de control óptimo basado en LQG iterativo para solucionar el problema de control de trayectoria del quadrotor con cargas suspendidas.

Para la realización de tareas más desafiantes por medio de los UAV, se prefiere usualmente la manipulación cooperativa, en la que varios vehículos trabajan juntos en grupo. Para que múltiples vehículos realicen una misma tarea, es vital establecer un algoritmo de coordinación inteligente. A modo de ejemplo, (Sreenath *et al.*, 2013b) presenta uno de estos algoritmos. Los autores de (Sreenath *et al.*, 2013b) propusieron un sistema de control dinámico y un algoritmo de planificación apropiado para la manipulación cooperativa utilizando múltiples UAV. Los autores de (Mellinger *et al.*, 2013), (Thomas *et al.*, 2014), (Faust *et al.*, 2014), (Liberi *et al.*, 2015) propusieron nuevos métodos de control para la realización de tareas cooperativas a través de múltiples robots, mientras que el algoritmo de aprendizaje de refuerzo por lotes de muestreo finito se propone en (Faust *et al.*, 2013) para entrenar el sistema de control de tal manera que se obtengan trayectorias libres de balanceo.

Por otro lado, el control en modo deslizante encuentra muchas aplicaciones en la industria aeroespacial. A modo de ejemplo, (Sumantri *et al.*, 2014), (Cruz *et al.*, 2014), (Riccardi *et al.*, 2014) proponen controladores robustos en modo deslizante para el problema considerado. Además, en (Muñoz-Vázquez *et al.*, 2014) los autores presentaron algunos resultados en donde aplican el control en modo deslizante de orden fraccionario. El control robusto de orden fraccionario se ha utilizado anteriormente para resolver el problema de control en sistemas no lineales con incertidumbre (Ullah *et al.*, 2015), (Ullah *et al.*, 2016), (Asghar *et al.*, 2017), (Ullah *et al.*, 2017), (Aghababa *et al.*,

2014), (Efe, 2008), (Ebrahimkhani, 2016), (Kang et al., 2017) así como para resolver el problema de control de la orientación del quadrotor (Izaguirre-Espinosa et al., 2016). No obstante, los métodos de control introducidos para el caso de cargas suspendidas tan sólo ofrecen una solución parcial del problema, puesto que o bien se basan en la dinámica lineal del sistema, o bien se formulan para una aplicación más simple como únicamente el despegue o el aterrizaje de los quadrotores o bien no resuelven simultáneamente el problema de seguimiento de la posición y orientación del quadrotor. A partir del análisis de los trabajos previos, *este artículo propone un sistema de control robusto basado en modos deslizantes de orden fraccionario para tratar el problema de seguimiento de trayectoria (tanto de posición como de orientación) de un quadrotor con cargas suspendidas desconocidas, en cualquier fase de vuelo.* El sistema de control está compuesto por tres lazos que controlan, respectivamente, la orientación, la altitud y la posición en el plano horizontal. Este trabajo formula el algoritmo de control, se prueba en un escenario general a través de simulación numérica y se comparan los resultados obtenidos con el controlador en modo deslizante clásico. Los resultados obtenidos muestran un desempeño superior del controlador deslizante propuesto frente al control deslizante convencional.

El artículo está organizado de la siguiente forma. La sección 2 presenta el modelo matemático del sistema compuesto por el quadrotor y la carga suspendida. La sección 3 introduce el diseño del controlador y la demostración de estabilidad mientras que la sección 4 contiene los resultados de simulación y su discusión. Finalmente, la sección 5 presenta las conclusiones del artículo.

2. Modelado matemático del sistema

Esta sección describe el modelo dinámico no lineal que representa a un quadrotor que transporta una carga suspendida desconocida. Se realizan las siguientes suposiciones:

Suposición 1. El quadrotor se comporta como un sólido rígido simétrico.

Suposición 2. La carga se encuentra suspendida del centro de masas del quadrotor a través de un cable sin masa.

Suposición 3. La resistencia del aire al avance de todo el sistema está incluida en el modelo.

Los símbolos y notaciones utilizadas son:

X, Y, Z Posición del centro de masas del quadrotor en el sistema de coordenadas tierra

ϕ Ángulo de giro del quadrotor alrededor del eje x, ángulo de *roll*

θ Ángulo de giro del quadrotor alrededor del eje y, ángulo de *pitch*

ψ Ángulo de giro del quadrotor alrededor del eje z, ángulo de *yaw*

ϕ_L Ángulo de giro alrededor del eje x (*roll*) de la carga suspendida

θ_L Ángulo de giro alrededor del eje y (*pitch*) de la carga suspendida

m_Q Masa del quadrotor

m_L Masa de la carga suspendida

l Longitud del brazo del quadrotor

L Longitud del cable que conecta la carga con el quadrotor

I_x, I_y, I_z Momentos de inercia del quadrotor alrededor de los ejes x, y, z

T_c Tensión del cable

Ω_r Velocidad angular del quadrotor

U Señales de control

g Aceleración de la gravedad

Con la notación introducida y las Suposiciones (1)-(3) realizadas anteriormente el modelo dinámico del sistema acoplado quadrotor-carga suspendida se puede expresar como, (Gupte et al., 2012):

$$\ddot{X} = (\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} - \sin\theta_L \cos\phi_L \frac{T_c}{m_Q} \quad (1)$$

$$\ddot{Y} = (-\cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} + \sin\theta_L \sin\phi_L \frac{T_c}{m_Q} \quad (2)$$

$$\ddot{Z} = g - (\cos\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} + \sin\theta_L \sin\phi_L \frac{T_c}{m_Q} - \cos\theta_L \frac{T_c}{m_Q} \quad (3)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta} \Omega_r + \frac{l}{I_x} U_2 \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{J_r}{I_y} \dot{\theta} \Omega_r + \frac{l}{I_y} U_3 \quad (5)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{l}{I_z} U_4 \quad (6)$$

$$\ddot{\phi}_L = \frac{l}{m_L} - L \sin\theta_L \cos\phi_L \frac{T_c}{m_L} \quad (7)$$

$$\ddot{\theta}_L = \frac{l}{m_L} - L \sin\theta_L \cos\phi_L \frac{T_c}{m_L} \quad (8)$$

Las ecuaciones (1)-(6) representan el modelo dinámico del quadrotor mientras que (7)-(8) describen la carga que se balancea suspendida y que está colgando del centro de masas del quadrotor. Las ecuaciones (1)-(3) muestran asimismo que la dinámica traslacional del quadrotor está afectada por la dinámica de balanceo de la carga suspendida, (Gupte et al., 2012). El problema de control a resolver es obligar al quadrotor a seguir una trayectoria de referencia de posición y orientación predeterminada, a pesar del desconocimiento de la masa suspendida.

3. Diseño del controlador

Esta sección está dedicada al diseño de los controladores de orientación, altitud y posición del quadrotor. La Figura 1 muestra los tres lazos de control utilizados con este propósito.

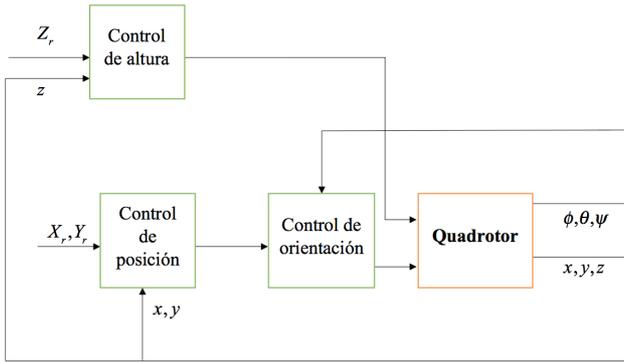


Figura 1. Esquema de control de tres lazos.

En la Figura 1 se observa cómo el problema global de seguimiento de trayectoria se resuelve con el diseño de tres lazos anidados, en donde cada uno de ellos dispone de un cometido específico. Uno de los objetivos de mayor importancia desde el punto de vista del control es la estabilización de la orientación del quadrotor en el espacio libre. El lazo interno del sistema de control se utiliza para lograr este objetivo primordial. Una vez se ha conseguido estabilizar la orientación, los otros dos lazos permiten garantizar el seguimiento de las consignas de referencia de posición (en el plano) y altitud en las coordenadas x, y y z . En particular, el lazo exterior es el encargado de garantizar el seguimiento de la altitud mientras que el que se encuentra en la posición intermedia se encarga de la posición en el plano horizontal.

3.1. Control de la orientación

En esta sección se muestra el diseño del controlador de orientación basado en modo deslizante fraccionario. Sean los ángulos de referencia de orientación (consignas de orientación) ϕ_d, θ_d, ψ_d . Se diseñará un controlador para cada ángulo a partir de la definición de una superficie deslizante fraccional adecuada. El diseño comienza para el ángulo de roll ϕ y continúa con el resto de ángulos que definen la orientación. Entonces, la superficie deslizante fraccional se elige como*:

$$S_\phi = k_1 e_\phi + D^{1-\frac{\alpha}{2}} \dot{e}_\phi \tag{9}$$

donde k_1 es una constante positiva de diseño y $e_\phi = \phi - \phi_d, \dot{e}_\phi = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d$. Si tomamos ahora el operador de derivación fraccional en ambos lados de (9) obtenemos:

$$D^\alpha S_\phi = k_1 D^\alpha e_\phi + D^{\frac{\alpha}{2}} \ddot{e}_\phi \tag{10}$$

Esta ecuación será utilizada más adelante en el cálculo de la derivada de la función de Lyapunov propuesta para demostrar la estabilidad del lazo cerrado del control de orientación (Ecuación (18)), de acuerdo a los resultados de estabilidad fraccionaria discutidos en (Aghababa et al., 2014) y (Efe, 2008). Si (4) y (10) se combinan para obtener:

$$D^\alpha S_\phi = k_1 D^\alpha e_\phi + D^{\frac{\alpha}{2}} (a_1 \dot{\theta} \dot{\psi} - a_2 \dot{\theta} \Omega_r + b_1 U_2 - \ddot{\phi}_d) \tag{11}$$

* En todo el artículo, la notación D^α indica la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

en donde $a_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}, a_2 = \frac{J_x}{I_x}, b_1 = \frac{l}{x}, a_3 = \frac{I_z - I_x}{I_y},$

$a_4 = \frac{J_r}{I_y}, b_2 = \frac{l}{I_y}, a_5 = \frac{I_x - I_y}{I_z}$ y $b_3 = \frac{l}{I_x}$, entonces las leyes de control equivalente U_{2eq} y conmutado U_{2sw} se pueden representar como:

$$U_{2eq} = \frac{1}{b_1} (-k_1 D^{\alpha/2} e_\phi - a_1 \dot{\theta} \dot{\psi} + a_2 \dot{\theta} \Omega_r + \ddot{\phi}_d) \tag{12}$$

$$U_{2sw} = \frac{k_{d1}}{b_1} D^{-\alpha/2} (\text{sgn}(S_\phi)) \tag{13}$$

A partir de estas ecuaciones podemos definir la ley de control final como $U_2 = U_{2eq} - U_{2sw}$. Con esta ley de control podemos garantizar la estabilidad y seguimiento de referencia para el ángulo ϕ . La derivación del controlador para el resto del ángulos sigue un camino similar. Si elegimos ahora las superficies deslizantes como $S_\theta = k_2 e_\theta + D^{1-\frac{\alpha}{2}} \dot{e}_\theta$ y

$S_\psi = k_3 e_\psi + D^{1-\frac{\alpha}{2}} \dot{e}_\psi$, los controladores U_3 y U_4 se formulan como:

$$U_{3eq} = \frac{1}{b_2} (-k_2 D^{\alpha/2} e_\theta - a_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + a_4 \dot{\phi} \Omega_r + \ddot{\theta}_d) \tag{14}$$

$$U_{3sw} = \frac{k_{d2}}{b_2} D^{-\alpha/2} (\text{sgn}(S_\theta)) \tag{15}$$

$$U_{4eq} = \frac{1}{b_3} (-k_3 D^{\alpha/2} e_\psi - a_5 \dot{\phi} \dot{\theta} + \ddot{\psi}_d) \tag{16}$$

$$U_{4sw} = \frac{k_{d3}}{b_3} D^{-\alpha/2} (\text{sgn}(S_\psi)) \tag{17}$$

con $U_3 = U_{3eq} - U_{3sw}$ y $U_4 = U_{4eq} - U_{4sw}$. Los parámetros $k_1, k_2, k_3, k_{d1}, k_{d2}, k_{d3}$ que aparecen en (9)-(17) representan constantes positivas de libre diseño y deben ser seleccionadas de tal forma que se garantice la estabilidad del lazo cerrado. Con objeto de demostrar que el controlador propuesto es capaz de garantizar la estabilidad y conseguir el seguimiento de las trayectorias de referencia para la orientación se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov,

$V = \frac{1}{2} S_\phi^2$ (se muestra la demostración de estabilidad en el caso del ángulo ϕ mientras que la demostración para el resto de ángulos es semejante). Si aplicamos el operador de derivación fraccionaria D^α a V obtenemos (Aghababa et al., 2014), (Efe, 2008):

$$D^\alpha V = S_\phi D^\alpha S_\phi + \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(1+\alpha)}{\Upsilon(1-j+\alpha)\Upsilon(1+j)} D^j S_\phi D^{\alpha-j} S_\phi \right| \tag{18}$$

Por otro lado, se tiene que (Ullah et al., 2015):

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(1+\alpha)}{\Upsilon(1-j+\alpha)\Upsilon(1+j)} D^j S_\phi D^{\alpha-j} S_\phi \right| \leq \Omega(S_\phi) \tag{19}$$

donde Ω es una constante positiva que puede depender de S_ϕ . Si combinamos ahora (11), (12), (13), (18) y (19) obtenemos:

$$D^\alpha V \leq S_\phi(k_1 D^\alpha e_\phi + D^{\frac{\alpha}{2}}(a_1 \dot{\theta} \dot{\psi} - a_2 \dot{\theta} \Omega_r + b_1 U_2 - \ddot{\phi}_d)) + \Omega(S_\phi) \quad (20)$$

que puede re-escribirse como:

$$D^\alpha V \leq S_\phi((-k_{d1}(\text{sgn}(S_\phi)))) + \Omega(S_\phi) \quad (21)$$

Si elegimos la constante de tal forma que $k_{d1} > \Omega + \sigma$, donde σ es una constante estrictamente positiva, entonces se puede probar fácilmente que $D^\alpha V \leq 0$, de tal forma que se satisfice la condición de llegada a la superficie deslizante y se consigue que $S_\phi = 0$, logrando el objetivo de control.

4.2. Controladores de altitud y posición horizontal

En esta sección se muestra el diseño de los controladores de altitud y posición horizontal del quadrotor del que cuelga una carga de masa desconocida. En primer lugar se diseña el controlador de altitud y, a continuación, se formula el controlador de posición. Dada la complejidad de la dinámica traslacional del vehículo, en primer lugar se diseñarán unas leyes de control virtuales de donde posteriormente se obtendrán las leyes de control a aplicar efectivamente. Finalmente, de los controladores de posición se calculará la referencia de orientación para el vehículo a través de una transformación matricial apropiada (ver Figura 1). Si z_d representa la consigna de altura deseada, la superficie deslizante se define como:

$$S_z = k_4 e_z + D^{1-\frac{\alpha}{2}} \dot{e}_z \quad (22)$$

en donde k_4 es una constante positiva de diseño y $e_z = z - z_d, \dot{e}_z = \dot{z} - \dot{z}_d$. Si tomamos el operador de derivación fraccional D^α en ambos lados de (22) obtenemos:

$$D^\alpha S_z = k_4 D^\alpha e_z + D^{\frac{\alpha}{2}} \ddot{e}_z \quad (23)$$

Si combinamos ahora (23) y (3) el resultado es:

$$D^\alpha S_z = k_4 D^\alpha e_z + D^{\frac{\alpha}{2}}(g - (\cos\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} + \sin\theta_L \sin\phi_L \frac{T_c}{m_Q} - \cos\theta_L \frac{T_c}{m_Q} - \ddot{z}_d) \quad (24)$$

en donde $F = \left(\sin\theta_L \sin\phi_L \frac{T_c}{m_Q} - \cos\theta_L \frac{T_c}{m_Q} \right)$ es un valor desconocido que depende del valor de la carga suspendida. Entonces, el controlador de altitud se escribe como:

$$U_z = (k_4 D^{\frac{\alpha}{2}} e_z - \ddot{z}_d + k_{d4} D^{-\alpha/2} \text{sgn}(S_z)) \quad (25)$$

en donde el término $U_z = \ddot{Z} = g - (\cos\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q}$ representa una ley de control virtual, puesto que hemos

diseñado el control para U_z cuando la señal de control real es U_1 . Se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V_z = \frac{1}{2} (S_z^2 + \frac{1}{\zeta_1} F^2) \quad \text{para probar la estabilidad del lazo}$$

cerrado de altitud. Si aplicamos el operador D^α de derivación fraccionaria a V_z se obtiene:

$$\left\{ D^\alpha V_z = S_z D^\alpha S_z + \frac{1}{\zeta_1} F D^\alpha F + \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(1+\alpha)}{\Upsilon(1-j+\alpha)\Upsilon(1+j)} D^j S_z D^{\alpha-j} S_z \right| + \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(1+\alpha)}{\Upsilon(1-j+\alpha)\Upsilon(1+j)} D^j F D^{\alpha-j} F \right| \right\} \quad (26)$$

Si combinamos ahora (19), (24), (25) y (26) llegamos a:

$$D^\alpha V_z \leq S_z (-k_{d4}(\text{sgn}(S_z)) + F + \frac{1}{\zeta_1} F D^\alpha F + \Omega(S_z) + \Omega(F)) \quad (27)$$

que puede re-escribirse como:

$$D^\alpha V_z \leq -k_{d4} |S_z| + S_z F + \frac{1}{\zeta_1} F D^\alpha F + \Omega(S_z) + \Omega(F) \quad (28)$$

Si hacemos que $D^\alpha F = -\zeta_1 S_z$ y elegimos $k_{d4} > \Omega(S_z) + \Omega(F)$ es fácil probar que $D^\alpha V_z \leq 0$, lo que demuestra que la estabilidad y el objetivo del control se cumplen. Para diseñar el sistema de control de posición se parte de las ecuaciones simplificadas del movimiento horizontal plano, dadas por:

$$\ddot{X} = (\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} + F_1 \quad (29)$$

$$\ddot{Y} = (-\cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} + F_2 \quad (30)$$

en donde $F_1 = -\sin\theta_L \cos\phi_L \frac{T_c}{m_Q}$ y $F_2 = \sin\theta_L \sin\phi_L \frac{T_c}{m_Q}$

representan perturbaciones (desconocidas) que actúan en los ejes X, Y debido al balanceo que realiza la carga de pago suspendida del quadrotor. Consideremos las superficies deslizantes dadas por:

$$\begin{cases} S_x = k_5 e_x + D^{1-\frac{\alpha}{2}} \dot{e}_x \\ S_y = k_6 e_y + D^{1-\frac{\alpha}{2}} \dot{e}_y \end{cases} \quad (31)$$

donde k_5 y k_6 son constantes positivas de diseño y $e_x = X - X_d, \dot{e}_x = \dot{X} - \dot{X}_d, e_y = Y - Y_d, \dot{e}_y = \dot{Y} - \dot{Y}_d$.

Si aplicamos el operador fraccionario D^α en ambos lados de (31) y combinamos el resultado con (29) y (30) se obtiene:

$$\begin{cases} D^\alpha S_x = k_5 D^\alpha e_x + D^{\frac{\alpha}{2}} ((\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} + F_1 - \ddot{X}_d) \\ D^\alpha S_y = k_6 D^\alpha e_y + D^{\frac{\alpha}{2}} ((-\cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} + F_2 - \ddot{Y}_d) \end{cases} \quad (32)$$

Simplifiquemos ahora (32) definiendo las leyes de control virtuales para x e y como U_x y U_y dadas por

$$U_x = \ddot{X} = (\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q} \quad y$$

$$U_y = \ddot{Y} = (-\cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi) \frac{U_1}{m_Q}$$

Las expresiones de control para U_x y U_y se escriben entonces como:

$$\begin{cases} U_x = (\ddot{X}_d - k_3 D^{\alpha/2} e_x - k_{d5} D^{\frac{-\alpha}{2}} \text{sgn}(S_x)) \\ U_y = (-\ddot{Y}_d + k_6 D^{\alpha/2} e_y - k_{d6} D^{\frac{-\alpha}{2}} \text{sgn}(S_y)) \end{cases} \quad (33)$$

Se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov, $V_{xy} = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + \frac{1}{\zeta_2} F_1^2 + \frac{1}{\zeta_3} F_2^2)$, para probar la estabilidad del sistema de control de posición horizontal. Si derivamos V_{xy} con el operador D^α obtenemos:

$$\begin{cases} D^\alpha V_{xy} = S_x D^\alpha S_x + S_y D^\alpha S_y + \frac{1}{\zeta_2} F_1 D^\alpha F_1 + \frac{1}{\zeta_3} F_2 D^\alpha F_2 + \\ \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(1+\alpha)}{\Upsilon(1-j+\alpha)\Upsilon(1+j)} D^j S_{xy} D^{\alpha-j} S_{xy} \right| \\ + \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(1+\alpha)}{\Upsilon(1-j+\alpha)\Upsilon(1+j)} D^j F_1 D^{\alpha-j} F_1 \right| \\ + \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(1+\alpha)}{\Upsilon(1-j+\alpha)\Upsilon(1+j)} D^j F_2 D^{\alpha-j} F_2 \right| \end{cases} \quad (34)$$

Si utilizamos ahora (19) podemos simplificar (34) y tener:

$$\begin{cases} D^\alpha V_{xy} \leq S_x (D^\alpha S_x) + S_y (D^\alpha S_y) + \frac{1}{\zeta_2} F_1 D^\alpha F_1 + \frac{1}{\zeta_3} F_2 D^\alpha F_2 + \Omega(S_{xy}) + \\ \Omega(F_1) + \Omega(F_2) \end{cases} \quad (35)$$

Si combinamos ahora (35) con (32) y (33) se tiene:

$$\begin{cases} D^\alpha V_{xy} \leq -k_{d5} |S_x| + F_1 S_x + \frac{1}{\zeta_2} F_1 D^\alpha F_1 - k_{d6} |S_y| + F_2 S_y \\ + \frac{1}{\zeta_3} F_2 D^\alpha F_2 + \Omega(S_{xy}) + \Omega(F_1) + \Omega(F_2) \end{cases} \quad (36)$$

Si elegimos ahora las leyes adaptativas fraccionarias para estimar la perturbación que supone la carga suspendida como $D^\alpha F_1 = -\zeta_2 S_x$, $D^\alpha F_2 = -\zeta_3 S_y$, entonces la selección de $k_{d5}, k_{d6} > \Omega(S_{xy}) + \Omega(F_1) + \Omega(F_2)$ permite probar que $D^\alpha V_{xy} \leq 0$, satisfaciéndose el objetivo de control. Para calcular el empuje real T , y las trayectorias de referencia *roll* y *pitch* θ_d y ϕ_d respectivamente, la dinámica nominal descrita por (1), (2) y (3) se puede combinar de la siguiente forma (Zuo et al., 2010):

$$\dot{V} = gZ_e + \frac{TRZ_e}{m_Q} \quad (37)$$

donde $\dot{V} = (\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z})^T$ y $Z_e = (0, 0, 1)^T$ y la matriz de transformación R se define en la forma (Zuo et al., 2010):

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \sin\theta \cos\psi \sin\phi - \sin\psi \cos\phi & \sin\theta \cos\psi \cos\phi + \sin\psi \cos\phi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\theta \sin\psi \sin\phi + \cos\psi \cos\phi & \sin\theta \sin\psi \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \quad (38)$$

Si en (37) movemos el término $m_Q g Z_e$ a la izquierda de la ecuación y multiplicamos la ecuación resultante por R^T llegamos a:

$$R^T (U - gZ_e) = \frac{TZ_e}{m_Q} \quad (39)$$

en donde $U = \dot{V} = (U_x, U_y, U_z)^T$ y de donde podemos despejar el empuje total T . Si utilizamos ahora el procedimiento descrito en (Zuo et al., 2010), las referencias para el empuje (mostradas en la Figura 1), y los ángulos de *roll* y *pitch* se expresan como:

$$\begin{cases} \theta_d = \tan^{-1} \left(\frac{U_x \cos\psi_c + U_y \sin\psi_c}{U_z} \right) \\ \phi_d = \sin^{-1} \left(\frac{U_x \sin\psi_c - U_y \cos\psi_c}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}} \right) \\ T = m_Q \begin{bmatrix} U_x (\sin\theta \cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi) \\ + U_y (\sin\theta \sin\psi \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) + U_z \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \end{cases} \quad (40)$$

De esta forma hemos concluido el diseño de los controladores deslizantes de tipo fraccionario.

4. Resultados numéricos y discusión

Esta sección presenta algunos resultados numéricos de simulación con objeto de mostrar el buen funcionamiento del controlador propuesto. Los resultados obtenidos con el controlador deslizante fraccionario se compararán con los de un control deslizante clásico cuando además del balanceo desconocido existe una incertidumbre del 25% en los parámetros que describen la dinámica traslacional del quadrotor. De esta forma probamos el controlador en una situación muy exigente. En primer lugar se han ajustado los parámetros del control deslizante clásico para obtener una buena respuesta de seguimiento con la menor oscilación posible. En este sentido, el control deslizante clásico se ha sintonizado para obtener el mejor resultado posible. Posteriormente, se han utilizado los mismos valores como parámetros del controlador deslizante fraccional y adicionalmente se ha determinado el orden fraccionario. De esta manera se puede observar cómo el control propuesto es capaz de mejorar el mejor comportamiento que se podría obtener con el controlador deslizante clásico. El valor de $\alpha = 0.78$ fue elegido a través de la *toolbox* de optimización de Matlab para conseguir una buena respuesta del quadrotor en el seguimiento de trayectorias de tipo escalón en los tres ejes. Los parámetros nominales del quadrotor utilizados en la simulación están recogidos en la Tabla 1. Los parámetros de configuración del controlador se han determinado como:

$$\alpha = 0.78, k_1 = 350, k_2 = 509, k_3 = 95, k_4 = 97,$$

$$k_5 = 329, k_6 = 322, k_{d1} = 425, k_{d2} = 53, k_{d3} = 465,$$

$$k_{d4} = 305,$$

$$k_{d5} = 150, k_{d6} = 367, \zeta_1 = 500, \zeta_2 = 400, \zeta_3 = 468$$

Tabla 1: Parámetros del quadrotor

Símbolo	Caso 1	Caso 2	Unidades
m	0.65	0.65	kg
l	0.23	0.23	m
b	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$N s^2$
d	$7.5 \cdot 10^{-7}$	$7.5 \cdot 10^{-7}$	$N m s^2$
J_r	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
I_x	7.5	5.6	$10^{(-3)} N s^2 rad$
I_y	7.5	5.6	$10^{(-3)} N s^2 rad$
I_z	1.3	0.98	$10^{(-2)} N s^2 rad$

La masa de la carga suspendida y la longitud del cable están dados por ($m_L = 0.2Kg$) y ($L = 0.5$), respectivamente. Las derivadas fraccionarias se han implementado a través del método propuesto por Oustalop siguiendo los pasos descritos en (Ebrahimkhani, 2016), Sección 2 y (Kang et al., 2017), Sección 3.3.

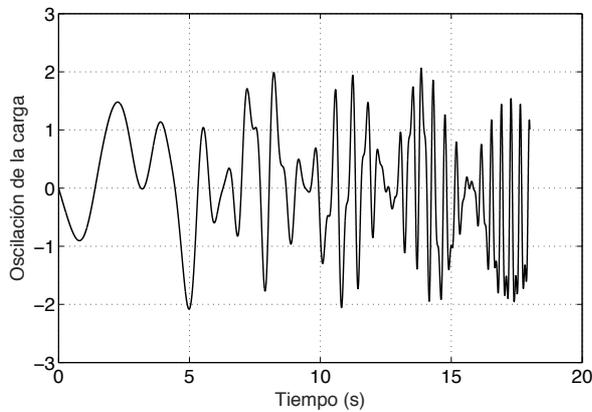


Figura 2. Figura ilustrativa con una simulación del movimiento de balanceo de la carga suspendida.

La Figura 2 muestra un ejemplo del perfil de balanceo de la carga suspendida, cuya dinámica afecta a la dinámica del quadrotor en la forma de una incertidumbre añadida. La referencia de posición se ha elegido como $X_r = ramp(t)$, $Y_r = sin(t)$, and $Z_r = sin(t)$. La Figura 3 muestra las trayectorias tridimensionales de referencia y las obtenidas con el controlador propuesto y el deslizante clásico. Las Figuras 4a, 4b y 4c muestran la posición y altura separadas por componentes. Las Figuras 5 muestran los errores de seguimiento de la posición del centro de masas del quadrotor en los tres ejes obtenidos por cada uno de los controladores, en donde las Figuras 5(b) representan el zoom en el intervalo de cero a dos segundos de las Figuras 5(a). En color rojo se

puede ver el comportamiento del control deslizante clásico (SMC) mientras que en azul se muestra el comportamiento del control fraccionario propuesto (AFSMC). De los resultados numéricos obtenidos se observa que el controlador propuesto consigue un mejor seguimiento de la trayectoria de referencia (un menor error de seguimiento) con menos oscilaciones no deseadas que un control deslizante clásico.

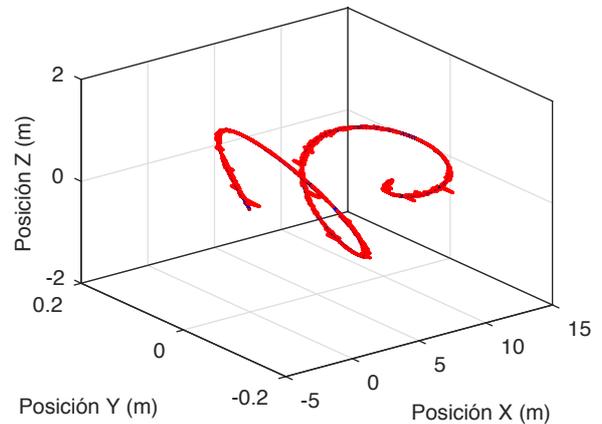
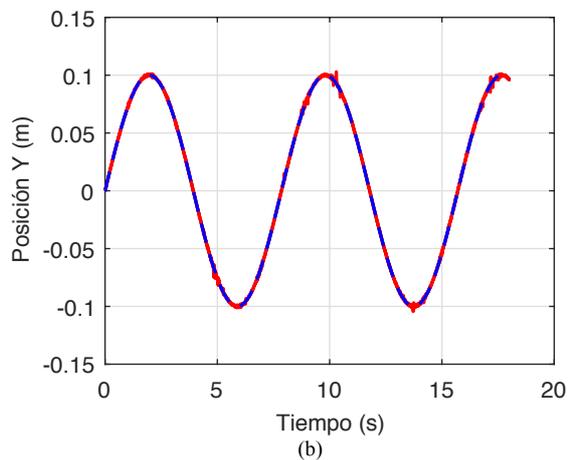
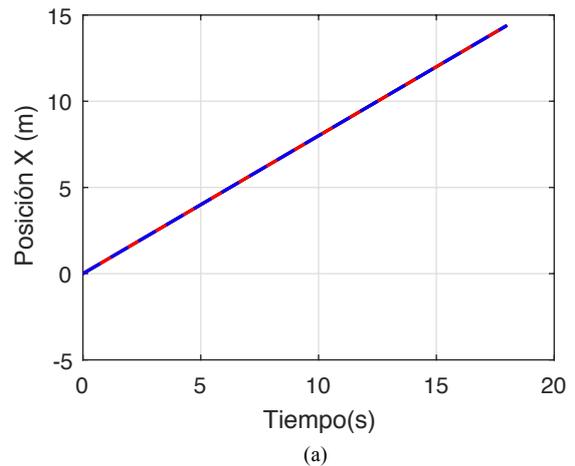
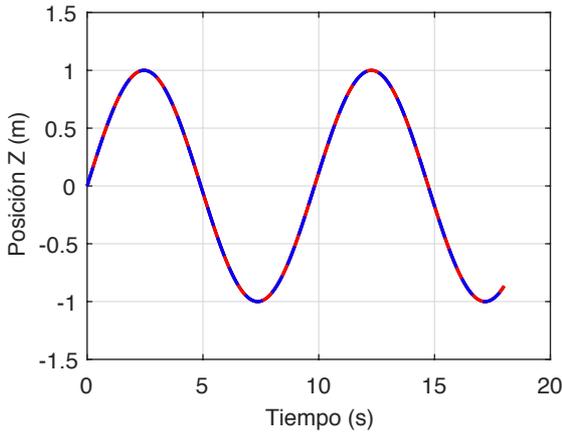


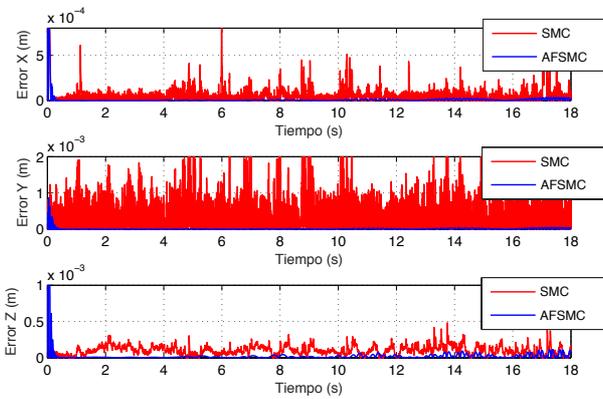
Figura 3. Trayectoria tridimensional de posición y altura.



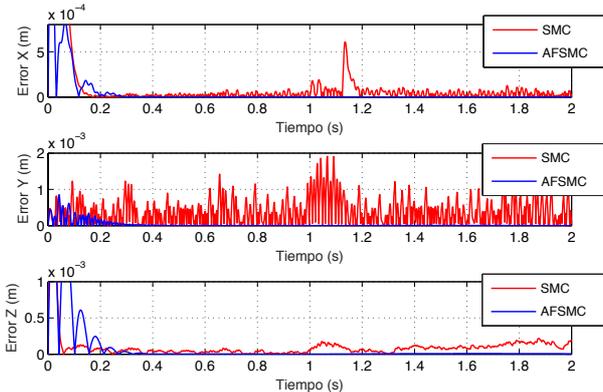


(c)

Figura 4(a), (b) y (c). Gráficas de seguimiento de la posición y altura. En rojo se muestra el desempeño del control deslizante clásico mientras que en azul se muestra el resultado obtenido con el control fraccionario propuesto. En negro se encuentra la referencia, por debajo de las gráficas roja y azul.



(a)

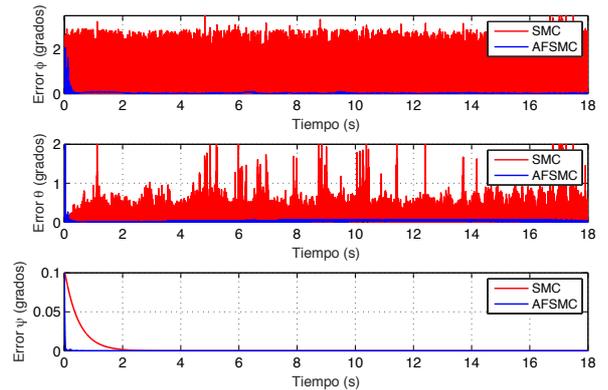


(b)

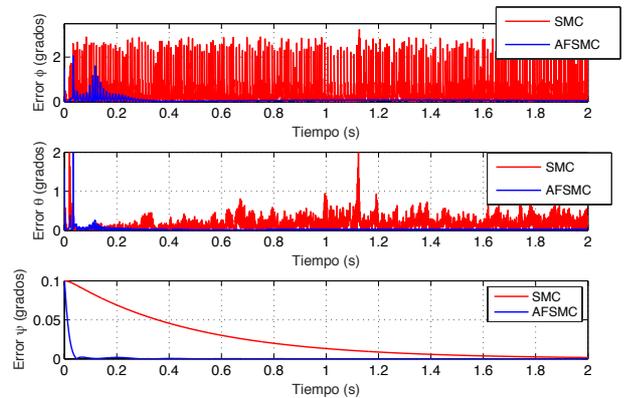
Figura 5(a) y (b). Errores de seguimiento de posición y altitud.

El desempeño obtenido en el seguimiento de la orientación por parte del quadrotor se muestra en la Figura 6, en donde las Figuras 6(b) representan el zoom en el intervalo de cero a dos segundos de las Figuras 6(a). De los resultados obtenidos se concluye que el controlador diseñado permite el seguimiento preciso de las trayectorias y orientación de referencia con unas prestaciones mejores que con un controlador deslizante clásico, para el que existen grandes errores en estado estacionario y oscilaciones no deseadas en el permanente. La Figura 7 muestra la señal de control en los

casos del controlador propuesto y el control deslizante clásico. De esta figura se puede concluir que el esquema de control fraccionario propuesto ofrece un rendimiento superior al control deslizante clásico al presentar un tiempo de convergencia a la superficie deslizante menor y un menor *chattering*. La Figura 8, finalmente, muestra una estimación de los términos de incertidumbre (que corresponden al balanceo de la carga suspendida). El movimiento de balanceo “real” es el que se obtiene de la simulación numérica de las ecuaciones (1)-(8), que describen el sistema acoplado quadrotor-carga con los parámetros indicados en la Tabla 1.

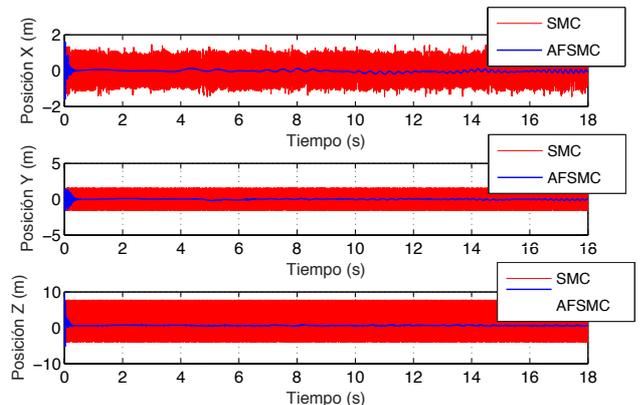


(a)

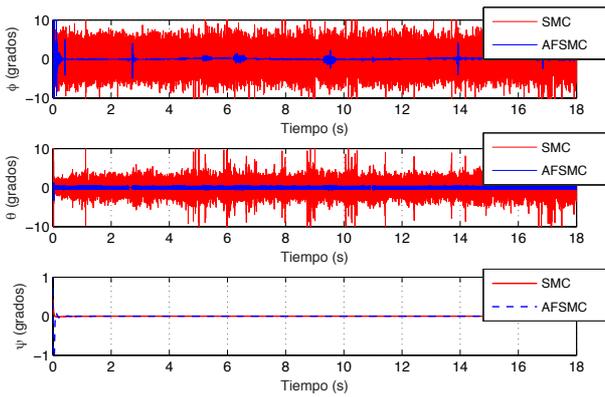


(b)

Figura 6(a) y (b). Errores de seguimiento en la orientación.

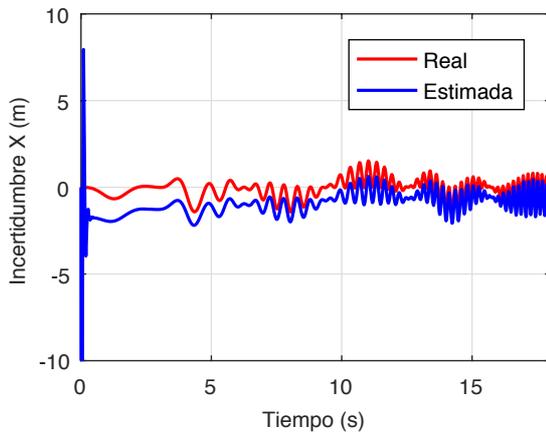


(a)

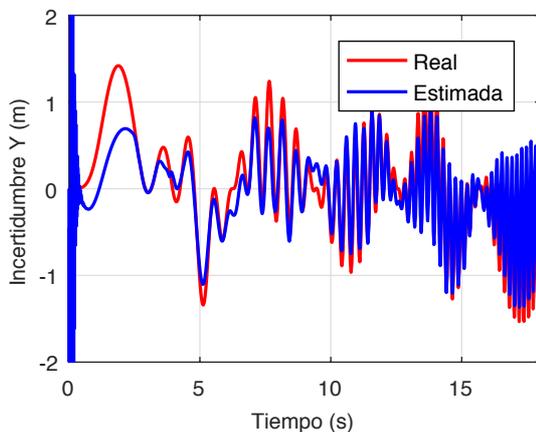


(b) Figura 7. Comparación del valor de la señal de control con el controlador propuesto y el deslizando clásico (a) Control de posición y altura, (b) Control de orientación.

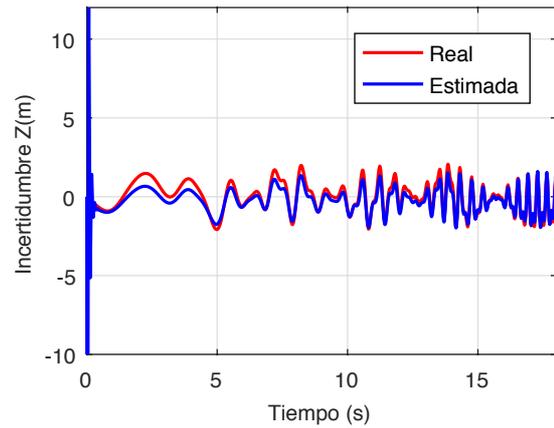
Por otro lado, la estimación de las incertidumbres está calculada a través de los estimadores introducidos en la Sección 3 y dados por las ecuaciones $D^\alpha F_1 = -\zeta_2 S_x$, $D^\alpha F_2 = -\zeta_3 S_y$ y $D^\alpha F = -\zeta_1 S_z$. Así, la Figura 8(a) representa la estimación del término F_1 , la Figura 8(b) la estimación de F_2 mientras que la 8(c) la de F .



(a)



(b)



(c) Figura 8. Estimación de la incertidumbre en cada eje con el estimador fraccional de la Sección 3.

De esta forma se simula el sistema real y la estimación del mismo por medio de los estimadores. El lazo de control adaptable propuesto permite lograr un lazo cerrado más insensible a la perturbación generada por el balanceo de la carga suspendida. Los resultados numéricos obtenidos en esta sección muestran, en definitiva, un comportamiento superior del esquema presentado en comparación con los esquema de control deslizando tradicionales.

5. Conclusiones

En este artículo se propone un sistema de control deslizando adaptable de orden fraccional para el seguimiento de la posición, altitud y orientación de un vehículo de cuatro rotores que lleva una carga suspendida desconocida. El sistema de control propuesto se compara con el controlador deslizando clásico cuando el balanceo de la carga suspendida es desconocido y además cuando existe incertidumbre paramétrica en los parámetros del quadrotor. De los resultados numéricos obtenidos se concluye que el controlador propuesto muestra un rendimiento superior sobre el sistema de control basado en un control deslizando convencional.

Agradecimientos

El trabajo de A. Ibeas está parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España a través del proyecto DPI2016-77271-R y por la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea a través del proyecto PPG17/33.

Referencias

Aghababa, M.P., A Lyapunov-based control scheme for robust stabilization of fractional chaotic systems, *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, no. 3, pp. 2129-2140, 2014.
 Alothman, Y., Gu, D. B. Quadrotor transporting Cable-suspended load using iterative linear quadratic regulator (iLQR), 8th Computer Science and Electronic Engineering Conference, 28-30 Sep, Essex, UK, 2016.
 Asghar M., Ullah N., Performance comparison of wind turbine based doubly fed induction generator system using fault tolerant fractional and integer order controllers, *Renewable Energy*, pp. 1-21, 2017.

- Cruz P., Fierro R., Autonomous lift of a cable-suspended load by an unmanned aerial robot, IEEE Conference on Control Applications (CCA), Juan Les Antibes, pp. 802-807, 2014.
- Cruz, P. J. Oishi M., Fierro R., Lift of a cable-suspended load by a quad rotor: A hybrid system approach, 2015 American Control Conference (ACC) Chicago IL, pp. 1887-1892, 2015.
- Cruz P.J., Fierro, R., Cable-suspended load lifting by a quadrotor UAV: hybrid model, trajectory generation and control, Autonomous Robots, vol. 41, no. 8, pp. 1629-1643, 2017.
- Dai, S. Lee T., Bernstein D.S., Adaptive control of a quad rotor UAV transporting a cable suspended load with unknown mass, 53rd IEEE Conference on Decision and Control Los Angeles CA, pp. 6149-6154, 2014.
- Das, H., Dynamic inversion control of a quadrotor with a suspended load, 5th IFAC Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems, Hyderabad, India, 18-22 Febrero, 2018.
- de Crousaz C, Farshidian F., Buchli J, Aggressive Optimal Control for Agile Flight with a Slung Load, In IROS 2014 Workshop on Machine Learning in Planning and Control of Robot Motion, 2014.
- Ebrahimkhani, S., Robust fractional order sliding mode control of doubly-fed induction generator (DFIG)-based wind turbines, ISA Transactions, vol 63, pp. 343-354, 2016.
- Efe, M.O., Fractional fuzzy adaptive sliding mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol. 38, pp. 1561-1570, 2008.
- Faust A., Palunko I., Cruz P., Fierro R. and Tapia L, Learning swing-free trajectories for UAVs with a suspended load, Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on, Karlsruhe, 2013.
- Faust A., Palunko I., Cruz P., Fierro R., Tapia L., Artificial Intelligence, Available online 19 December, 2014.
- Feng Y., Rabbath CA, Rakheja S., Su CY, Adaptive controller design for generic quadrotor aircraft platform subject to slung load, 28th IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, pp. 1135-1139, 3-6 Mayo Halifax, Canada, 2015.
- Goodarzi F. A., Lee D., Lee T., Geometric stabilization of a quad rotor UAV with a payload connected by flexible cable, 2014 American Control Conference Portland OR, pp. 4925-4930, 2014.
- Gupte, S., Mohandas P. I. T., Conrad J.M., A survey of quad rotor Unmanned Aerial Vehicles, Southeastcon Proceedings of IEEE Orlando FL, pp. 1-6, 2012.
- Izaguirre-Espinosa C., Muñoz-Vázquez A. J., Sánchez-Orta A., Parra-Vega V., Castillo P., Attitude control of quadrotors based on fractional sliding modes: theory and experiments, IET Control Theory and Applications, vol. 10, no. 7, pp. 825-832, 2016.
- Kang, J., Zhu, Z. H., Wang, W., Li, A., Wang, C., Fractional order sliding mode control for tethered satellite deployments with disturbances, Advances in Space Research, vol. 59, no. 1, pp. 263-273, 2017.
- Klausen K., Fossen T. I., Johansen T. A., Nonlinear control of a multi rotor UAV with suspended load, International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS) Denver, CO, pp. 176-184, 2015.
- Liberi B., Ton C., Komerath N., Divergence Speed Prediction for Practical Slung Load Shapes, ASME Proceedings | Symposium on Uncertainty Quantification in Flow Measurements and Simulations, Paper No. 2015-27543, pp.V001T27A001; 11 pages, 2015.
- Mellinger D., Shomin M., Michael N., Kumar V, Cooperative Grasping and Transport Using Multiple Quadrotors, Distributed Autonomous Robotic Systems, Volume 83 of the series Springer Tracts in Advanced Robotics pp 545-558, 2013.
- Muñoz -Vázquez AJ, Parra-Vega V., Sánchez.Orta A., Garcia O., Izaguirre-Espinosa C., Attitude tracking control of a quadrotor based on absolutely continuous fractional integral sliding modes, IEEE Conference on Control Applications (CCA), Juan Les Antibes, pp.717-722(2014), 2014.
- Outeiro, P., Carneira, C., Oliveira, P., Adaptive/Multi-model height control system of a quadrotor constant unknown load transportation, 2018 IEEE International Conference on Autonomous robot systems and competitions, pp. 65-70, 25-27 Abril, Torres Vedras, Portugal, 2018.
- Raffò, G. V., de Alameida, M.M., Nonlinear Robust Control of a Quadrotor UAV for Load transportation with Swing Improvement, American Control Conference 2016, pp. 3156-3162, Boston, MA, USA, 2016.
- Raffò, G. V., de Alameida, M.M., A load transportation nonlinear control strategy using a Tilt-Rotor UAV, Journal of Advanced Transportation, Article ID 1467040, 2018.
- Riccardi F., Lovera M., Robust attitude control for a variable-pitch quadrotor, IEEE Conference on Control Applications (CCA), Juan Les Antibes, pp. 730-735, 2014.
- Sadr S., Ali S., Moosavian A., Zarafshan P., Dynamics Modeling and Control of a Quad rotor with Swing Load, Journal of Robotics, Volume 2014, Article ID 265897, 12 pages, 2014.
- Shi, D., Wu Z., Chou, W. S., Harmonic Extended State Observer Based Anti-Swing Attitude Control for Quadrotor with Slung Load, Electronics, vol. 7, no. 6, Article number 83, 2018.
- Sreenath, K., Lee, T., Kumar, V., Geometric control and differential flatness of a quadrotor UAV with a cable-suspended load, 2013 IEEE conference on Decision and Control, 10-13 Dic, Florencia, Italia, pp. 2269-2274, 2013.
- Sreenath K., Kumar V., Dynamics Control and Planning for Cooperative Manipulation of Payloads Suspended by Cables from Multiple Quad rotor Robots, Robotics: Science and Systems (RSS), 2013.
- Sumantri B., Uchiyama N., Sano S., Second order sliding mode control for a quad rotor helicopter with a nonlinear sliding surface, IEEE Conference on Control Applications (CCA), Juan Les Antibes, pp. 742-746, 2014.
- Tang S., Kumar V., Mixed Integer Quadratic Program Trajectory Generation for a Quad rotor with a Cable-Suspended Payload, IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2015.
- Thomas J., Loianno G., Polin J., Sreenath K., Kumar V., Toward autonomous avian-inspired grasping for micro aerial vehicles, Bioinspiration and Biomimetics, Volume 9, Number 2, 2014.
- Ullah N., Shaoping W., Khattak M. I., Shafi M., Fractional order adaptive fuzzy sliding mode controller for a position servo system subjected to aerodynamic loading and nonlinearities, Aerospace Science and Technology, Volume 43, Pages 381387, 2015.
- Ullah N., Han S., Khattak M. I., Adaptive fuzzy fractional-order sliding mode controller for a class of dynamical systems with uncertainty, Transactions of the Institute of Measurement and Control, vol. 38 no. 4 402-413, 2016.
- Ullah N., Asghar M., Ahmed R., Khattak M. I., Fractional order control of Static series synchronous compensator with parametric uncertainty, IET Generation Transmission & distribution, vol. 11, no. 1, pp. 289-302, 2017.
- Wu G., Sreenath K., Variation-Based Linearization of Nonlinear Systems Evolving on SO(3) and S2, IEEE Access, Vol. 3, PP. 1592-1604, 2015.
- Wu, C.F., Fu, Z.Z., Yang, J., Wei, Y. R., Nonlinear control and Analysis of a quadrotor with slung load in path tracking, 2017 Chinese Control Conference, 26-28 Julio, Dalian, China, pp. 6519-6524, 2017.
- Yañez-Badillo H., Ruben Rapia-Olvera R., Aguilar-Mejía O., Beltran-Carbajal F., Control neuronal en línea para la regulación y seguimiento de trayectorias de posición para un Quadrotor, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, vol. 14, pp. 141-151, 2017.
- Yi, K., Gu, F., Yang, L.Y., He YQ., Han, J.D., Sliding mode control for a quadrotor slung system, 2017 Chinese Control Conference, 26-28 Julio, Dalian, China, pp. 3697-3703, 2017.
- Zuo Z., Zhu M. and Zheng Z., Trajectory Tracking Control of a Quad rotor Unmanned Mini-Helicopter, 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 4 - 7 January, Orlando, Florida, pp. 1-13, 2010.

Apéndice A. Control deslizante clásico

En este apéndice se introducen las ecuaciones utilizadas para el diseño del controlador deslizante clásico usado como marco de comparación en el artículo.

Derivación del controlador de orientación

La superficie deslizante clásica para el control de orientación está dada por:

$$S_{\phi} = k_1 e_{\phi} + \dot{e}_{\phi} \quad (33)$$

La ley de control se deduce a partir de la dinámica del quadrotor siguiendo el mismo procedimiento descrito en las secciones anteriores. El resultado es:

$$\begin{cases} U_2 = U_{2eq} - U_{2sw} \\ U_{2eq} = \frac{1}{b_1}(-k_1\dot{e}_\phi - a_1\dot{\theta}\dot{\psi} + a_2\dot{\theta}\Omega_r + \ddot{\phi}_d) \\ U_{2sw} = \frac{k_{d1}}{b_1}(\text{sgn}(S_\phi)) \end{cases} \quad (34)$$

La derivación del control de los ángulos *pitch* y *yaw* sigue los mismos pasos que en la secciones anteriores. Si elegimos las superficies deslizantes como $S_\theta = k_2e_\theta + \dot{e}_\theta$ y $S_\psi = k_3e_\psi + \dot{e}_\psi$, los controladores U_3 y U_4 se formulan como:

$$\begin{cases} U_3 = U_{3eq} - U_{3sw} \\ U_{3eq} = \frac{1}{b_2}(-k_2\dot{e}_\theta - a_3\dot{\phi}\dot{\psi} + a_4\dot{\phi}\Omega_r + \ddot{\theta}_d) \\ U_{3sw} = \frac{k_{d2}}{b_2}(\text{sgn}(S_\theta)) \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} U_4 = U_{4eq} - U_{4sw} \\ U_{4eq} = \frac{1}{b_3}(-k_3\dot{e}_\psi - a_5\dot{\phi}\dot{\theta} + \ddot{\psi}_d) \\ U_{4sw} = \frac{k_{d3}}{b_3}(\text{sgn}(S_\psi)) \end{cases} \quad (36)$$

donde los parámetros $k_1, k_2, k_3, k_{d1}, k_{d2}, k_{d3}$ representan constantes (positivas) de diseño del control.

Control de altura y de posición

La superficie deslizante clásica está dada por:

$$S_z = k_4e_z + \dot{e}_z \quad (37)$$

La ley de control virtual de altura se obtiene a través de los mismos pasos que anteriormente y el resultado es:

$$U_z = (k_4\dot{e}_z - \ddot{z}_d + k_{d4}\text{sgn}(S_z)) \quad (38)$$

donde k_4 es una constante de diseño en (37) mientras que k_{d4} es la ganancia de conmutación del término discontinuo en (38), ambas positivas.

De modo semejante, las superficies deslizantes para el control de posición en las coordenadas X e Y se expresan como:

$$\begin{cases} S_x = k_5e_x + \dot{e}_x \\ S_y = k_6e_y + \dot{e}_y \end{cases} \quad (39)$$

donde k_5 y k_6 son constantes de diseño. Si utilizamos ahora la dinámica simplificada horizontal expresada en las ecuaciones (29) y (30), la ley de control de posición se puede obtener como:

$$\begin{cases} U_x = (\ddot{X}_d - k_5\dot{e}_x - k_{d5}\text{sgn}(S_x)) \\ U_y = (-\ddot{Y}_d + k_6\dot{e}_y - k_{d6}\text{sgn}(S_y)) \end{cases} \quad (40)$$

donde k_{d5} y k_{d6} , que son las ganancias de los términos discontinuos de control, son elegidas de tal forma que se garantice la estabilidad del lazo cerrado. Las referencias de empuje, y ángulos *roll* y *pitch* se calculan como (Zuo et al., 2010):

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_d &= \tan^{-1}\left(\frac{U_x \cos\psi_c + U_y \sin\psi_c}{U_z}\right) \\ \phi_d &= \sin^{-1}\left(\frac{U_x \sin\psi_c - U_y \cos\psi_c}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}}\right) \\ T &= m_Q \left[\begin{aligned} &U_x (\sin\theta \cos\psi \cos\phi + \sin\psi \sin\phi) \\ &+ U_y (\sin\theta \sin\psi \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) + U_z \cos\theta \cos\phi \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$