

## Seguimiento de trayectorias con incertidumbre del modelo usando un diferenciador robusto

Sánchez-Sánchez, P.<sup>a,\*</sup>, Gutiérrez-Giles, A.<sup>b</sup>, Pliego-Jiménez, J.<sup>c</sup>, Arteaga-Pérez, M. A.<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Departamento de Robótica y Control, Puebla, México

<sup>b</sup>Department of Electrical Engineering and Information Technology, University of Naples Federico II, Naples, Italy

<sup>c</sup>CONACYT-CICESE, Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, Ensenada, Baja California, México

<sup>d</sup>Departamento de Control y Robótica, División de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México D. F., México

### Resumen

En este artículo se presenta el uso de un diferenciador robusto de Levant aplicado a robots manipuladores cuyo objetivo es realizar el seguimiento de una trayectoria deseada. El modelo dinámico de los robots es desconocido. La velocidad obtenida empleando el diferenciador robusto se aplica en la estructura de control con la finalidad de cumplir con la tarea de seguimiento. Se realiza un estudio comparativo entre el diferenciador robusto de Levant y las técnicas más usadas para calcular la velocidad. Son presentados resultados experimentales.

### Palabras Clave:

Índice de desempeño, Control, Dinámica de robots, Planificación y seguimiento de trayectorias, Robots manipuladores, Diferenciador robusto

### Track trajectories with model uncertainty using a robust differentiator

### Abstract

In this article, we present the Levant's Robust Differentiator applied to robot manipulators whose objective is to follow a desired trajectory. The robots' dynamic model is unknown. The velocity obtained using the Robust Differentiator is applied in the control structure in order to fulfill the tracking task. A comparative study is made between the Levant's Robust Differentiator and the most-used techniques to calculate the velocity. Experimental results are presented.

### Keywords:

Performance index, Control, Robot dynamics, Planning and tracking, Robot manipulators, Robust differentiator

### 1. Introducción

El diseño de algoritmos de control basados en el modelo depende directamente de la exactitud con la que se describe el sistema. De igual forma, realizar simulaciones sin el conocimiento exacto de la dinámica de la planta lleva a errores tanto de diseño como de implementación, (Swevers *et al.*, 1997). Además, ya que los parámetros proporcionados por el fabricante son insuficientes, inexactos y en algunos casos inexistentes, (Radkhah *et al.*, 2007), y como la medición directa de los parámetros físicos en la mayoría de los casos no es posible debido a la complejidad de los mecanismos, la identificación paramétrica ex-

perimental es una forma eficiente de obtener una aproximación del modelo, (Swevers *et al.*, 1997). La validez de la estimación de los parámetros depende de la calidad de la señal de entrada-salida y de la selección de la trayectoria de referencia, la cual debe excitar apropiadamente la dinámica del robot (Calafiore *et al.*, 2001). Por otro lado, para interactuar con su ambiente y cumplir con la tarea deseada, los robots necesitan una gran cantidad de sensores, lo cual puede ser un problema debido al incremento en los costos (Martínez-Rosas *et al.*, 2006). Por lo que a falta de un sensor de velocidad económico y de fácil montaje, es típico calcular la velocidad en base a la derivada de la posición usando diferenciación numérica, (Loria, 2016).

\*Autor para correspondencia: lepable@hotmail.com

La principal ventaja de usar diferenciación numérica es que no dependen del modelo matemático, lo que los hace fáciles de programar, siendo un recurso útil para obtener información de variables que no son accesibles ni medibles. Sin embargo, la velocidad calculada por este método es imprecisa para velocidades bajas y altas, esto debido a la alta resolución de los encoders y la elevada frecuencia de muestreo (Levant, 1993, 2003).

Por otro lado, en sistemas lineales, la aproximación de la función de transferencia de un diferenciador en una banda de frecuencia ha sido extensamente utilizada (Rabiner y Steiglitz, 1970; Kumar y Dutta, 2001). Los observadores de alta ganancia también han sido muy usados como diferenciadores, y aplicados al control por retroalimentación de salida, dando algunos resultados de separación en esquemas de control no lineal (Atassi y Khalil, 2000; Khalil, 1996).

Los diferenciadores de alta ganancia proporcionan una derivada exacta cuando sus ganancias tienden a infinito, (Atassi y Khalil, 2000). Desafortunadamente, al mismo tiempo, su sensibilidad a pequeños ruidos de alta frecuencia también crece infinitamente. Con cualquier valor de ganancia finita, este diferenciador también tiene un ancho de banda finito. Otro inconveniente de los diferenciadores de alta ganancia es su efecto de pico: el valor máximo de salida durante el transitorio crece infinitamente cuando las ganancias tienden a infinito, (Levant, 2003). No obstante, el diferenciador robusto de Levant no presenta este fenómeno ya que el sobre-paso durante el transitorio puede ser atenuado mediante una apropiada selección de ganancias (Cruz-Zavala et al., 2001).

Otra opción es estimar la velocidad por medio de un filtro estable paso altas de primer orden con grado relativo cero, cuya salida tiende al valor de la derivada de la entrada (Moreno y Kelly, 2002). Este método de diferenciación aproximada, comúnmente conocido como *derivada sucia* (*dirty-derivative*), reemplaza el operador derivada  $\rho$  por  $bs/(s+a)$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas (Stotsky y Kolmanovsky, 2001). Se ha comprobado que con la derivada sucia se obtiene un mejor desempeño que con el enfoque tradicional de diferenciación numérica, por lo que es comúnmente utilizada en aplicaciones que requieren regulación de velocidad (Kelly et al., 1994; Loria, 2016).

Otra alternativa usada para estimar la velocidad es el uso de observadores los cuales usan el modelo matemático disponible. Hay observadores adaptables que se basan en el conocimiento del sistema y las mediciones existentes (Parsa y Aghili, 2001). Obviamente, el desempeño del observador depende del modelo utilizado para estimular su dinámica, pero aún así, no se requiere un modelo preciso para generar una mejor estimación de ciertos estados no medibles. Una opción es el observador lineal de Luenberger, que permite observar los estados no medibles de una planta lineal, siempre que se cumpla la condición de observabilidad (Hacksel et al., 1994).

Una alternativa más precisa al observador lineal de Luenberger es el observador de alta ganancia, que se puede usar para estimar los estado de una planta ya sea lineal o no lineal. Este observador incorpora la dinámica no lineal de la planta para producir la estimación de los estados no medibles (Alcocer et al., 2003).

El uso de estructuras de control-observador es otra alternativa para estimar la velocidad; sin embargo, esta técnica requiere del conocimiento del modelo (Martínez-Rosas et al., 2006). La

mayoría de los artículos que usan este método asumen que la dinámica del manipulador está disponible, y por lo tanto, todos los términos no lineales pueden ser compensados (Khatib, 1987). En Martínez-Rosas et al. (2006) se diseña un observador de velocidad lineal, evitando el uso de sensores de velocidad en esquemas de movimiento libre. Más tarde en Martínez-Rosas y Arteaga-Pérez (2008) este enfoque se mejora al incluir un observador de fuerza. No obstante, en la mayoría de los casos no se cuenta con información del modelo dinámico. La desventaja los diferenciadores (observadores) conocidos es que su tiempo de convergencia tiende a infinito cuando la norma de las condiciones iniciales crece sin cota. Esto significa, que para sistemas híbridos no hay certeza de que el estimador brinde el valor exacto de los estados antes de que ocurra la siguiente conmutación, si no se conoce una cota de las condiciones iniciales a priori. Para el control por retroalimentación de salida basado en un observador de estados, significa que no se puede asegurar que el observador converja antes de que las trayectorias de la planta se escapen a infinito, si una cota de las condiciones iniciales no es dada a priori (Cruz-Zavala et al., 2001). Esto motiva la importancia de tener diferenciadores (observadores) que converjan en tiempo finito, con tiempo de convergencia acotado por una constante. La convergencia en tiempo finito es una propiedad crucial para la estimación de estados en sistemas híbridos, o para propiedades de separación de sistemas no lineales (Cruz-Zavala et al., 2001). El diferenciador de Levant cumple con esta característica, además de que es exacto frente perturbaciones o ruido y no necesita procesamiento excesivo para su implementación, (Levant, 2003).

Debido a que el interés principal de este trabajo está en las técnicas aplicables para la estimación en línea y el uso posterior de la información estimada en la estructura de control, este artículo se concentra únicamente en estimadores causales. Las técnicas disponibles para resolver este problema pueden clasificarse en dos categorías: la primera incluye las técnicas basadas en la interpolación de muestras pasadas por funciones polinomiales, (Diop et al., 1994). En este caso la aproximación resultante puede diferenciarse para obtener su derivada y la variable desconocida. La segunda categoría se basa en el diseño de estructuras de control que se pueden usar para realizar la estimación de la variable desconocida. Dichos controladores pueden interpretarse como observadores y, de hecho, esta interpretación es la más común en la literatura, (Swevers et al., 1997). Las técnicas de diseño, estrechamente relacionadas con las técnicas en línea (o diferenciación numérica) se pueden basar en observadores de alta ganancia, observadores de modo deslizante, observadores de Luenberger y filtros derivados *sucios*, (Dabroom y Khalil, 1997; Levant, 1998; Stotsky et al., 1997).

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la segunda sección se presenta un estudio comparativo entre técnicas usadas para obtener la velocidad del sistema. En la tercera sección se muestran los resultados experimentales. Las conclusiones se presentan en la cuarta sección.

## 2. Algoritmos

Una breve descripción de los algoritmos basados en el diseño de estructuras de control interpretados como observadores y sus propiedades de convergencia se realiza en la siguiente sección.

### 2.1. Observador de Nicosia

El primer observador que se estudia es el propuesto en (Nicosia et al., 1990), el cual es de alta ganancia asintótico con una estructura lineal desacoplada. El observador es diseñado bajo la condición no restrictiva de que existe una ley de control retroalimentada tal que el vector de posición articular sigue la trayectoria de referencia, por lo que el sistema de lazo cerrado es uniformemente asintóticamente estable. Se define el vector de estados  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T]^T$  donde  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$  y  $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$  son las coordenadas generalizadas y la velocidad, respectivamente. Se considera que solo la posición articular está disponible, (Nicosia et al., 1990). El observador se describe en el siguiente modelo

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{H}_p (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_1) \quad (1)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{H}_v (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_1) \quad (2)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{x}}_1^T \quad \hat{\mathbf{x}}_2^T]^T$  con  $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2$  son los valores estimados de  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ .  $\mathbf{H}_p$  y  $\mathbf{H}_v$  son las ganancias del observador.  $\varepsilon$  es una constante positiva lo suficientemente pequeña. Debe tenerse en cuenta que para valores lo suficientemente pequeños de  $\varepsilon$  el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable. Además, la región de convergencia estimada puede ser maximizada al realizar la selección adecuada de  $\varepsilon$ , (Nicosia et al., 1990). El observador de Nicosia se ilustra en la Figura 1.

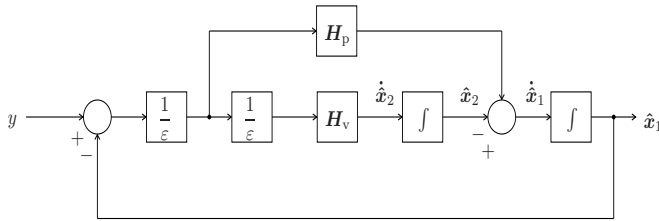


Figura 1: Observador de Nicosia

### 2.2. Observador de Berghuis–Nijmeijer

Considérese el siguiente observador lineal

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}_d (\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{L}_p (\mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}}) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  representa las coordenadas generalizadas,  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$  representa la trayectoria deseada,  $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\hat{(\cdot)}$  es la estimación de  $(\cdot)$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{e} - \hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\tilde{(\cdot)}$  es el error de  $(\cdot)$ ,  $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p^T > \mathbf{0}$  y  $\mathbf{L}_d = \mathbf{L}_d^T > \mathbf{0}$  son la ganancia proporcional y derivada del observador, respectivamente, (Berghuis y Nijmeijer, 1994). El diagrama a bloques se presenta en la Figura 2.

El observador descrito en (3) y (4) genera un estado de error estimado  $[\hat{\mathbf{z}}^T \quad \hat{\mathbf{e}}^T]^T$  del error de seguimiento  $\mathbf{e}$ . El control lineal usará este estado en el lazo de retroalimentación, (Berghuis y Nijmeijer, 1994).

**Suposición 1. (Berghuis y Nijmeijer, 1994)**  $\mathbf{L}_p$  y  $\mathbf{L}_d$  satisfacen

$$\mathbf{L}_p = \lambda \mathbf{I}_d \quad (5)$$

$$\mathbf{L}_d = (\lambda + \mathbf{l}_d) \mathbf{I} \quad (6)$$

donde  $\lambda > 0$  y  $\mathbf{l}_d > 0$  son escalares.  $\Delta$

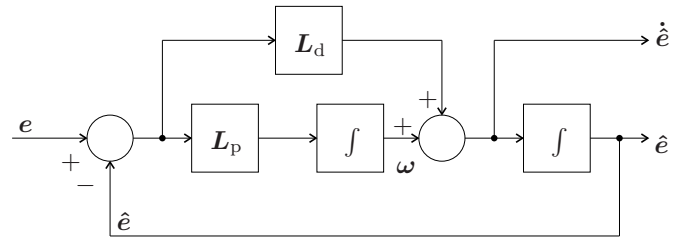


Figura 2: Observador de Berghuis–Nijmeijer

### 2.3. Derivada sucia

Sea el sistema

$$\dot{z} = x + y \quad (7)$$

donde  $x$  es la variable desconocida,  $y$  y  $z$  son las variables medibles, (Stotsky et al., 1997).

Como el objetivo es estimar  $x$  usando mediciones de  $y$  y  $z$ ; se prosigue a despejar  $x$  de (7), así se tiene

$$x = \dot{z} - y = \rho z - y \quad (8)$$

donde  $\rho$  es el operador derivada (en términos de Laplace). En ésta técnica  $\rho$  se reemplaza por

$$\frac{bs}{s+a} \quad (9)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas, (Stotsky et al., 1997; Loria, 2016). Nótese que (9) describe la función de transferencia de un filtro en su forma normalizada.

El cambio del operador derivada  $\rho$  permite estimar  $x$  evaluando la llamada *derivada sucia* (dirty derivative) de  $z$ , es decir

$$\hat{x} = \frac{bs}{s+a} z - y. \quad (10)$$

Obsérvese que existe un acoplamiento directo entre  $\hat{x}$  y  $y$  en (10), donde  $y = \dot{x}$ . Al evaluar el error de estimación de (10) se observa que el límite superior del error de estimación depende del límite superior en la segunda derivada de  $z$ , es decir de  $\ddot{z}$ ,

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \geq \sqrt{(x(0) - \hat{x}(0))^2 e^{-\gamma t} + \tau^2 b_2^2}, \quad (11)$$

es decir,  $|\ddot{z}(t)| \leq b_2$  donde  $b_2 > 0$ ,  $\gamma > 0$  y  $\tau > 0$ .

El diagrama a bloques de (10) se describe en la Figura 3.

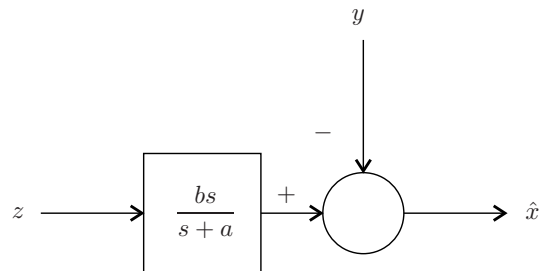


Figura 3: Estimación de  $\hat{x}$  a través de la derivada sucia

2.4. Diferenciador de Levant

Sea  $q_L : [0, \infty]$  una señal localmente acotada cuya derivada  $\dot{q}_L$  es una señal Lipschitz. El diferenciador se define como

$$\dot{q}_L = \omega - \lambda_1 \sqrt{|q_L - q|} \text{sign}(q_L - q) \tag{12}$$

$$\dot{\omega} = -\lambda_2 \text{sign}(q_L - q) \tag{13}$$

garantizándose que  $z = q_L - q$  tienda a cero para  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , (Levant, 1998). La señal  $\dot{q}_L$  es la salida del diferenciador de Levant. El esquema básico del diferenciador se muestra en la Figura 4.

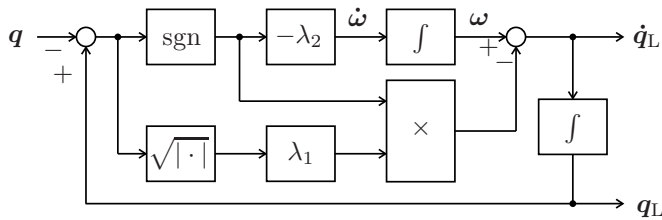


Figura 4: Diferenciador de Levant

**Teorema 1. (Levant, 1998)** En ausencia de ruido para cualquier  $\lambda_2 > L$  y para todo  $\lambda_1$  suficientemente grande,  $\dot{q}_L$  convergen en tiempo finito a  $\dot{q}$ , mientras  $q_L$  converge a  $q$ . Las condiciones de convergencia son

$$\lambda_2 > L \tag{14}$$

$$\lambda_1^2 \geq 4L \frac{\lambda_2 + L}{\lambda_2 - L} \tag{15}$$

donde  $L > 0$  es una constante global Lipschitz.  $\Delta$

3. Descripción del sistema experimental

Los experimentos se realizaron con un brazo robot de dos grados de libertad (2 GDL) (Figura 5). Cada articulación tiene un motor de transmisión directa (direct-drive) y cada eslabón es de aluminio 6061, el cual es un material rígido a temperaturas y presiones normales por lo que su elasticidad es despreciable. Los servomotores operan en modo de torque (torque mode), lo que permite que el motor actúe como una fuente de torque aceptando señales de voltaje analógico como señales de referencia. Las características de los servomotores de la marca Parker Compumotor Inc. se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros de los servomotores

Eslabón	Modelo	Torque	p/rev
Hombro	DR1100E	100 Nm	819,200.00
Codo	DR1004C	4 Nm	655,360.00

La información de la posición se obtiene de los encoders incrementales localizados en los motores. Los sensores de posición cuentan con una tarjeta driver manufacturada por la empresa Precision MicroDynamic Inc. El algoritmo de control se ejecuta en una computadora Pentium II a 333 MHz. Los algoritmos de control se programan en lenguaje C con un período de muestreo de 25 milisegundos (25 ms).



Figura 5: Robot Experimental ROTRADI

El diagrama del robot de 2 grados de libertad (2 GDL) se muestra en la Figura 6

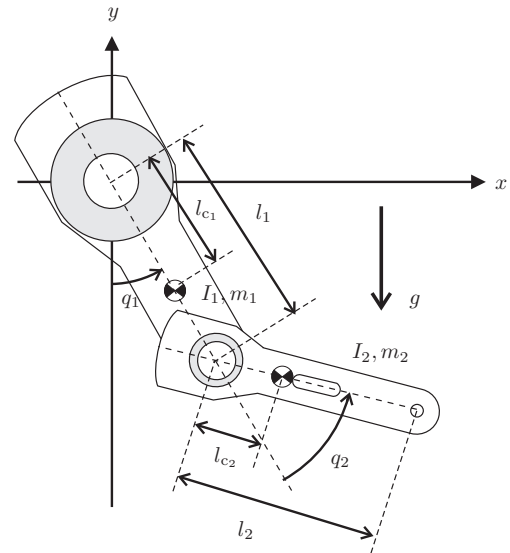


Figura 6: Robot de 2 grados de libertad (2 GDL)

El modelo dinámico se obtiene a partir de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \tau \tag{16}$$

donde

$$h_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1^2 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2 \tag{17}$$

$$h_{12} = m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2 \tag{18}$$

$$h_{21} = m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2 \tag{19}$$

$$h_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \tag{20}$$

$$c_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \tag{21}$$

$$c_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \tag{22}$$

$$c_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \tag{23}$$

$$c_{22} = 0 \tag{24}$$

$$g_1 = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \tag{25}$$

$$g_2 = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \tag{26}$$

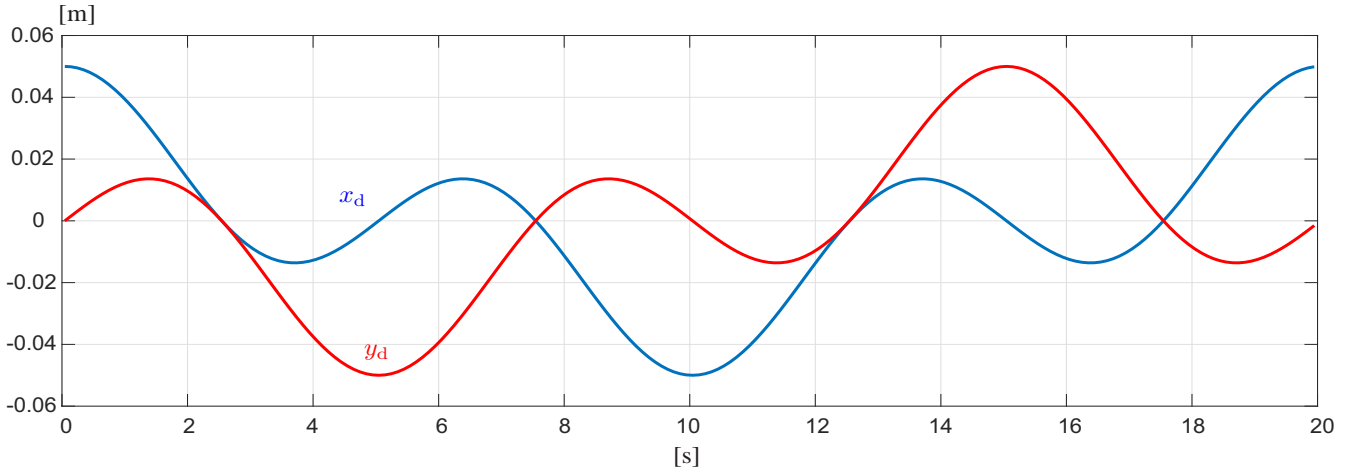


Figura 7: Trayectorias deseadas: (—)  $x_d$  definida en (29) y (—)  $y_d$  definida en (30)

donde  $l_i$  representa la longitud del  $i$ -ésimo eslabón ( $i = 1, 2$ );  $l_{c_i}$  es la longitud al centro de masa del  $i$ -ésimo eslabón;  $m_i$  define la masa del  $i$ -ésimo eslabones;  $I_i$  es la inercia del  $i$ -ésimo eslabón respecto al centro de masa, y  $g$  es la aceleración de la gravedad, (Kelly y Santibáñez, 2003).

### 3.1. Modelo cinemático inverso

Desde el punto de vista práctico, el modelo cinemático inverso es de gran importancia ya que permite obtener las posiciones articulares  $q$  en términos de la posición y orientación del extremo final del último eslabón con respecto al sistema de referencia de la base, (Kelly y Santibáñez, 2003). Para el caso del robot de 2 (GDL), el modelo cinemático inverso se define como:

$$q_{d1} = \tan^{-1} \left( \frac{y_d}{x_d} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{l_2 \sin(q_{d2})}{l_1 + l_2 \cos(q_{d2})} \right) \quad (27)$$

$$q_{d2} = \cos^{-1} \left( \frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (28)$$

A partir de estas ecuaciones se pueden obtener las relaciones de velocidad y aceleración, (Kelly y Santibáñez, 2003).

### 3.2. Trayectoria deseada

El objetivo del experimento es que el efector final del robot de 2 (GDL) siga una trayectoria deseada, la cual se define como

$$x_d = h + r \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \quad [\text{m}] \quad (29)$$

$$y_d = k + r \cos(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \quad [\text{m}] \quad (30)$$

donde  $h = 0.0$  [m] y  $k = 0.0$  [m] indican el centro de la trayectoria, es decir  $(h, k)$ ,  $r = 0.05$  [m] es el radio,  $\omega_1 = 0.6283$  [m/s] y  $\omega_2 = 0.3142$  [m/s] son las velocidades angulares. Las trayectorias se definen en función a las frecuencias  $f_1 = 0.1000$  [Hz] y  $f_2 = 0.0500$  [Hz], respectivamente; y a su período  $T_1 = 10$  [s] y  $T_2 = 20$  [s], respectivamente. La Figura 7 muestra el perfil de la trayectoria deseada para ambas articulaciones.

La trayectoria realizada por el brazo robot de 2 (GDL) en el espacio cartesiano se ilustra en la Figura 8, la cual es una gráfica  $x_d$  contra  $y_d$ .

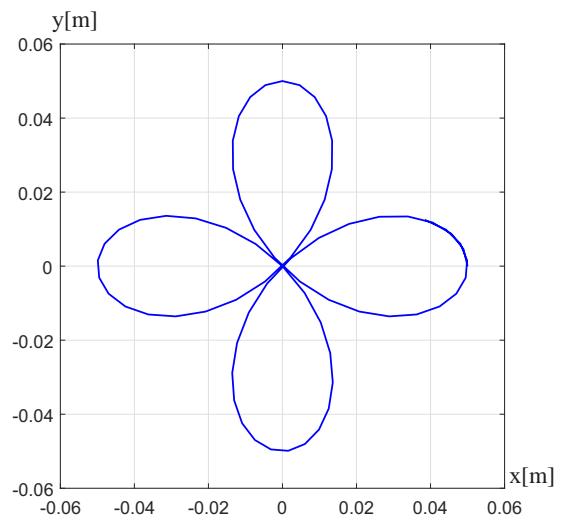


Figura 8: Trayectoria deseada ( $x_d$  vs.  $y_d$ )

A partir de (29) y (30) es posible obtener analíticamente las velocidades deseadas, las cuales se definen como:

$$\dot{x}_d = -\omega_1 r \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) - \omega_2 r \cos(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \quad (31)$$

$$\dot{y}_d = -\omega_1 r \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) + \omega_2 r \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \quad (32)$$

La velocidad deseada se muestra en la Figura 9.

### 3.3. Procedimiento

El desempeño de los observadores se compara al usar las velocidades estimadas en una ley de control la cual es diseñada en tiempo continuo y cuyo objetivo es seguir la trayectoria deseada definida en (29) y (30). Los esquemas de control-observador son implementados en tiempo discreto con un tiempo de muestreo de  $T = 25$  milisegundos. Los mismos valores de  $K_p$  y  $K_v$  son usados en todos los casos. Las pruebas son realizadas imponiendo variaciones en ambas articulaciones a través del modelo cinemático inverso según la trayectoria deseada. El desempeño del control usando las velocidades estimadas se compara con la velocidad obtenida a través de la diferenciación numérica. Las ganancias usadas se presentan en la Tabla 2.

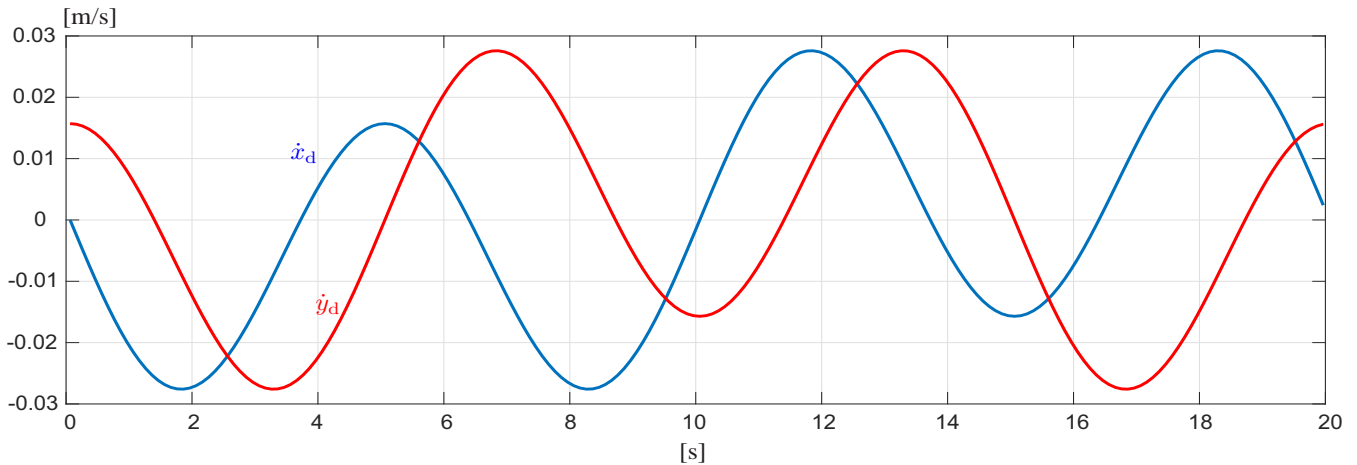


Figura 9: Velocidad deseada calculada analíticamente: (—)  $\dot{x}_d$  definida en (31) y (—)  $\dot{y}_d$  definida en (32)

Tabla 2: Parámetros usados en los experimentos.

Bloque	Variable	Valor
Observador Nicosia	$\varepsilon$	0.000300
	$H_p$	10.00000
	$H_v$	500.0000
Observador Nijmeijer	$L_p$	11.32600
	$L_d$	26.17920
Derivada sucia	$a$	500.0000
	$b$	500.0000
Diferenciador de Levant	$L$	2.314300
	$\lambda_1$	10.00000
	$\lambda_2$	60.00000
Control PD	$K_p$	1618.000
	$K_v$	80.44870

La Figura 10 describe el sistema experimental. Las entradas al bloque **Observador** generan la velocidad estimada que alimenta al bloque **Control**, generando el par necesario para seguir la trayectoria deseada.

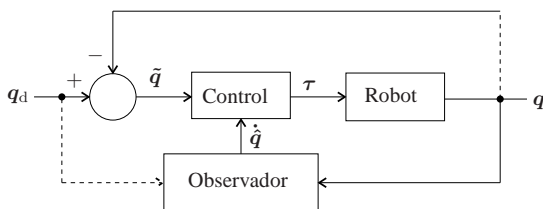


Figura 10: Diagrama a bloques del sistema experimental

### 3.4. Control PD con compensación de gravedad

El control PD con compensación de gravedad está dada por

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + g(q) \tag{33}$$

donde  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas definidas positivas. Esta ley de control hace uso explícito del conocimiento

parcial del modelo del manipulador específicamente  $g(q)$ . Para implementar el esquema de control se define  $g(q)$  como

$$g(q) = \begin{bmatrix} 3.845 \text{sen}(q_1) + 1.82 \text{sen}(q_1 + q_2) \\ 1.82 \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \tag{34}$$

donde  $q = [q_1 \ q_2]^T \in \mathbb{R}^n$  representa la posición real de las articulaciones del robot de 2 (GDL).  $q_1$  y  $q_2$  son la posición de la primera y segunda articulación, respectivamente. Cabe señalar que los datos técnicos para definir el vector  $g(q)$  se encuentran disponibles para el robot experimental utilizado. Además, la demostración de estabilidad de esta estructura de control puede consultarse en (Kelly y Santibáñez, 2003).

### 3.5. Resultados experimentales

Para facilitar la interpretación de los resultados experimentales estos son presentados en coordenadas cartesianas. Sin embargo, el sistema completo (**Control, Robot, Observador**) requiere de la información en coordenadas articulares. La Figura 12 presenta las gráficas ( $x_d$  vs  $y_d$ ). La respuesta del observador de Nicosia se muestra en la Figura 13, el seguimiento de la trayectoria deseada (Figura 13(a)), el error de seguimiento (Figura 13(b)), la estimación de la velocidad (Figura 13(c)), el error de estimación (Figura 13(d)), indican que el observador de Nicosia converge a la trayectoria deseada en un tiempo finito. De igual forma en las Figuras 14, 15 y 16 se define la respuesta del observador de Berghuis–Nijmeijer, la Derivada Sucia y el diferenciador de Levant, respectivamente. La señal de control que alimenta al bloque **Robot**, se ilustra en el inciso e) de las Figuras 13, 14, 15 y 16. Se observa que la señal de control es ruidosa, esto debido a la estimación de la velocidad. Nótese que el único observador que realiza saturación al cumplir con la trayectoria deseada es el de Berghuis–Nijmeijer, el cual excede el par de 100 Newtons. Las protecciones de los drivers permiten continuar con el seguimiento de la trayectoria. Las señales de control más ruidosas son las generadas por el observador de Nicosia y el observador de Berghuis–Nijmeijer. En la implementación esto genera un poco de vibración en el brazo robot, mientras que la Derivada Sucia y el Diferenciador de Levant tienen el mismo tipo de señal de control. Se observa que todas las estructuras control-observador estiman satisfactoriamente la velocidad del



sistema lo que permite cumplir con el seguimiento de la trayectoria. Para determinar cual de las estructura estima mejor la velocidad se usa el índice de desempeño.

### 3.6. Índice de desempeño

El índice de desempeño se usa para medir la norma  $\mathcal{L}^2$  del error de la variable de interés. Un valor pequeño de dicha norma representa un error pequeño y por lo tanto, indica un mejor desempeño, (Khalil, 1996). En general, este índice se define como

$$\mathcal{L}^2 = \sqrt{\frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t \|\mathbf{q}\|^2 dt} \quad (35)$$

donde  $\mathbf{q}$  es la variable de error que se desea analiza,  $t$  y  $t_0$  es el intervalo de tiempo del experimento. Para este caso  $\mathbf{q}$  representa  $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ . La gráfica del índice de desempeño se encuentra en la Figura 11. En esta figura se observa que el Diferenciador de Levant tiene el mejor desempeño mientras que el observador de Berghuis-Nijmeijer es el que tiene el peor desempeño.

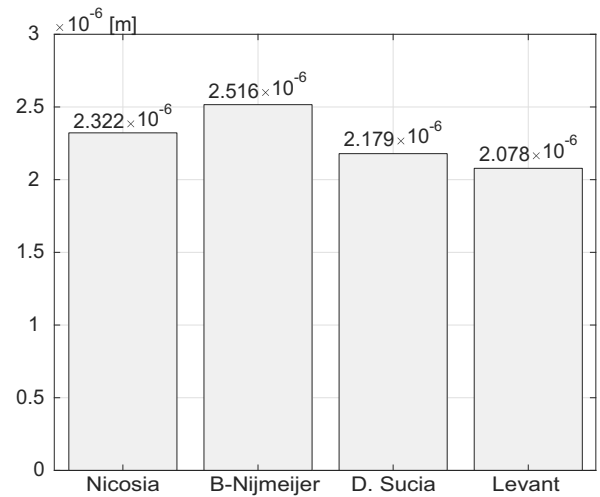
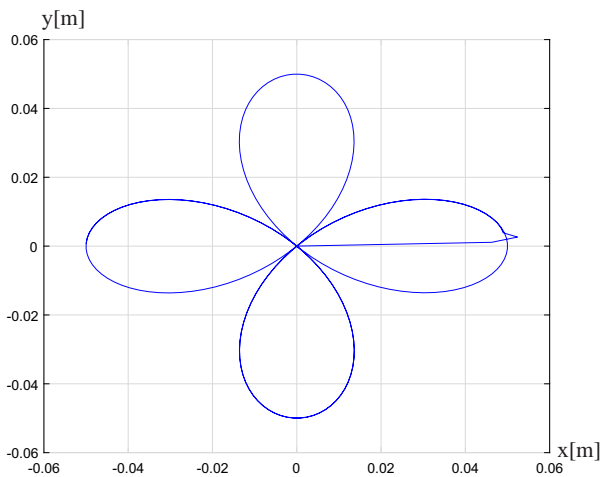
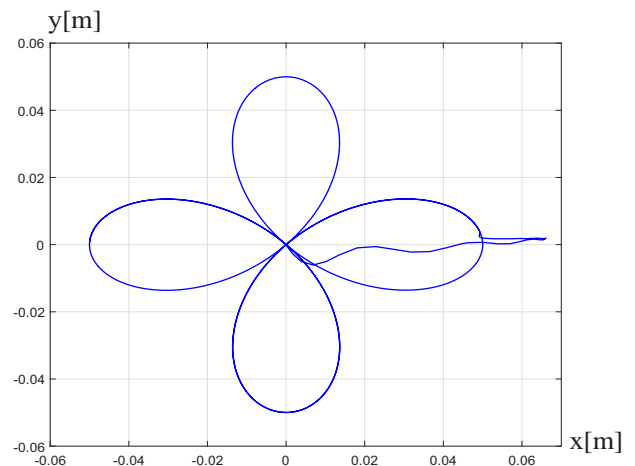


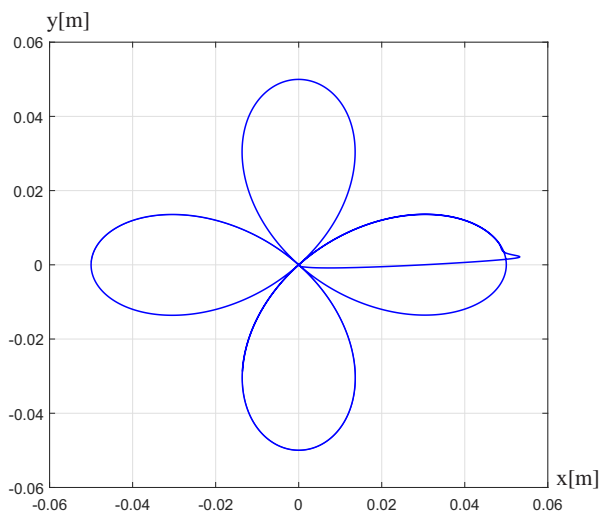
Figura 11: Índice de desempeño



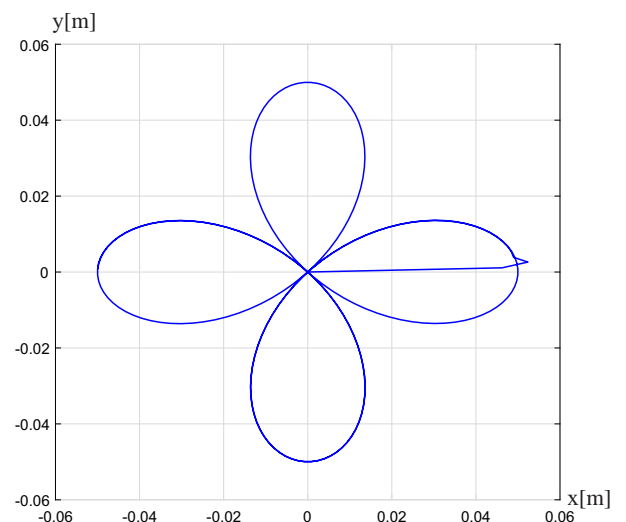
(a) Observador de Nicosia



(b) Observador de Berghuis-Nijmeijer

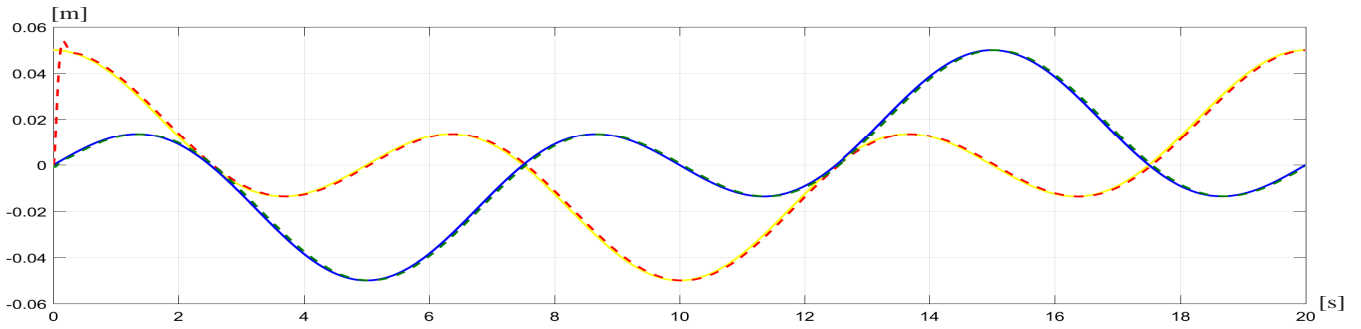


(c) Derivada sucia

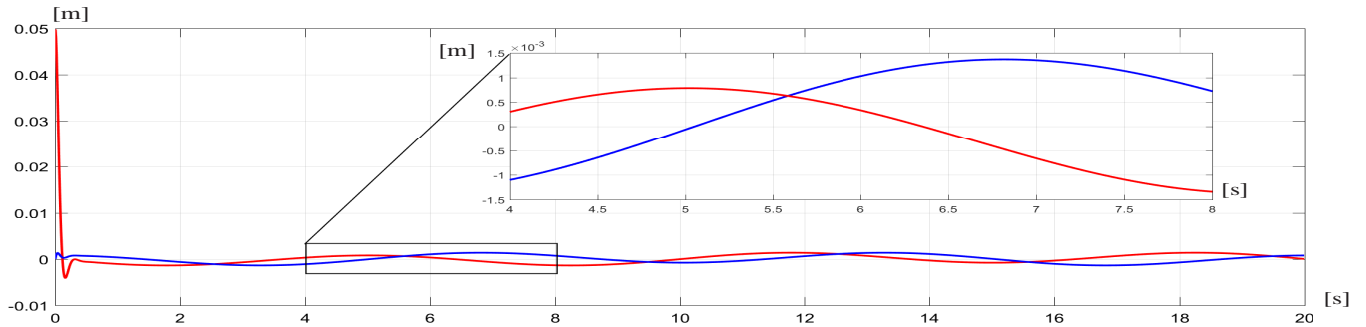


(d) Diferenciador de Levant

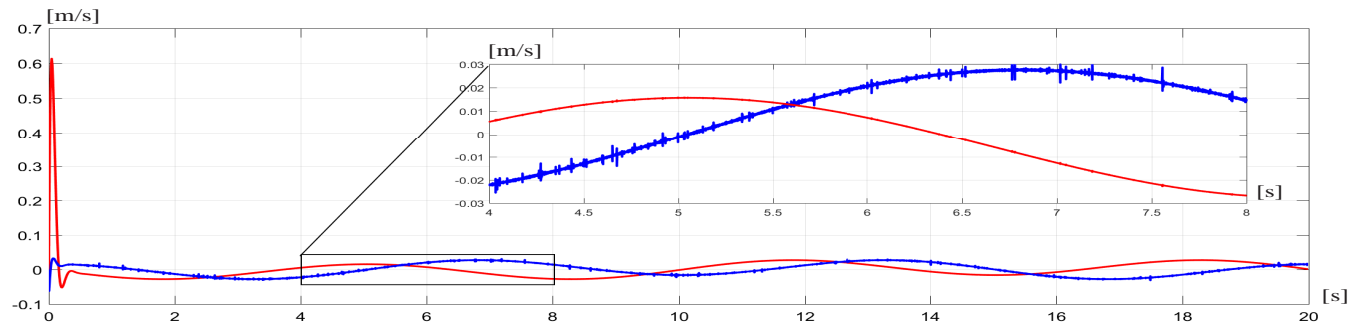
Figura 12: Seguimiento de la trayectoria deseada ( $x_d$  vs  $y_d$ ).



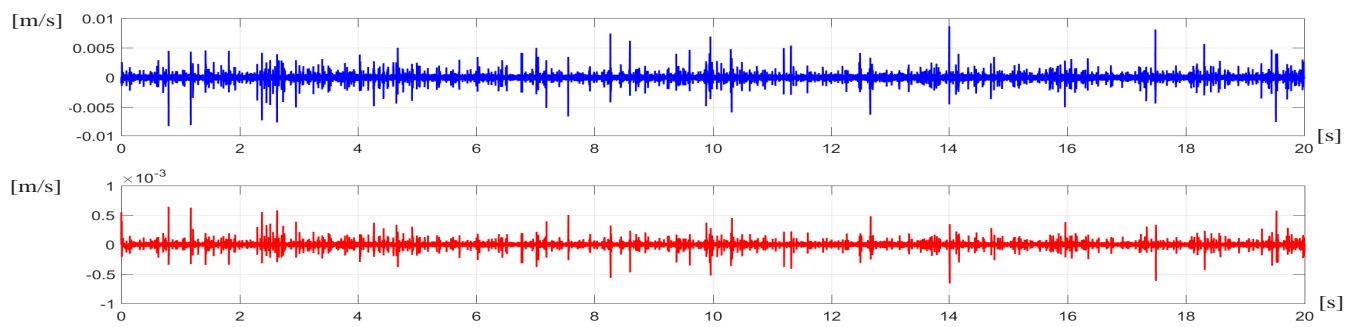
(a) Seguimiento de posición: posición real  $x$  (---), posición deseada  $x_d$  (—), posición real  $y$  (---), y posición deseada  $y_d$  (—)



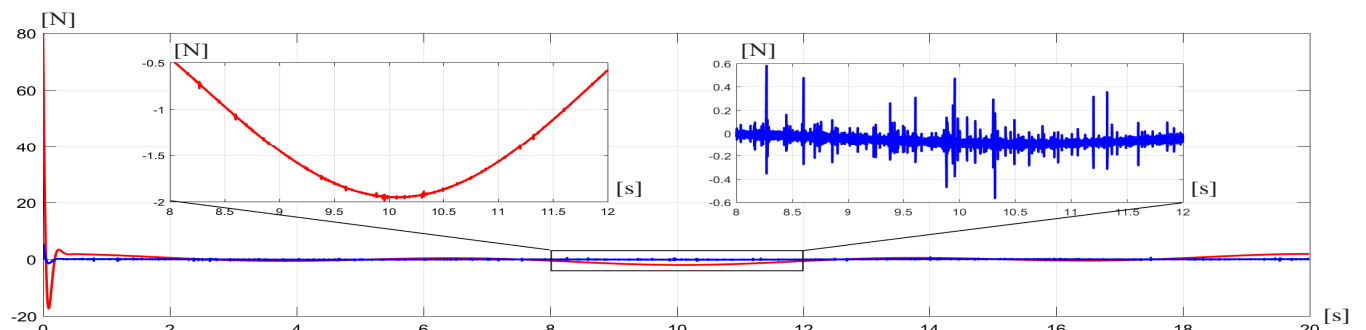
(b) Error de seguimiento de posición: error de posición  $\tilde{x} = x - x_d$  (—) y error de posición  $\tilde{y} = y - y_d$  (—)



(c) Estimación de Velocidad (observador): velocidad estimada  $\hat{x}$  (—) y velocidad estimada  $\hat{y}$  (—)



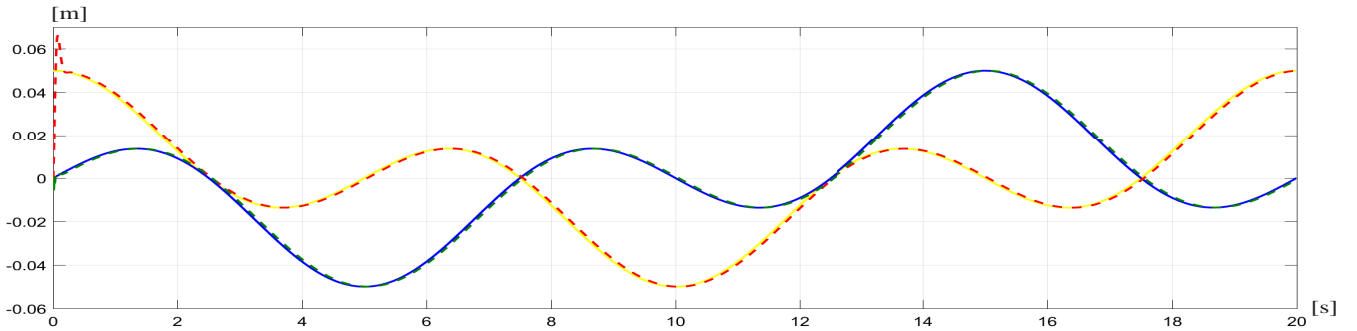
(d) Error de estimación (error de observación): error de observación  $e_x = \dot{x} - \hat{x}$  (—) y error de observación  $e_y = \dot{y} - \hat{y}$  (—)



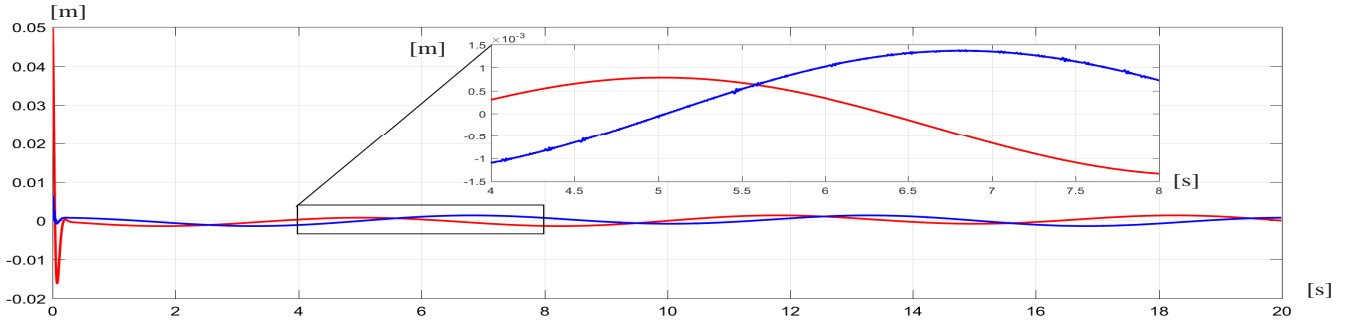
(e) Par aplicado en el hombro (—) y par aplicado en el codo (—)

Figura 13: Gráficas del observador de Nicosia.

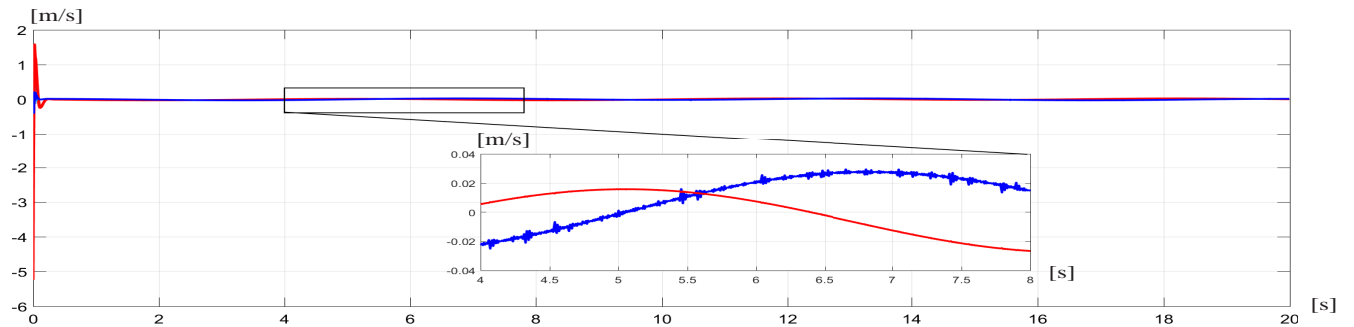




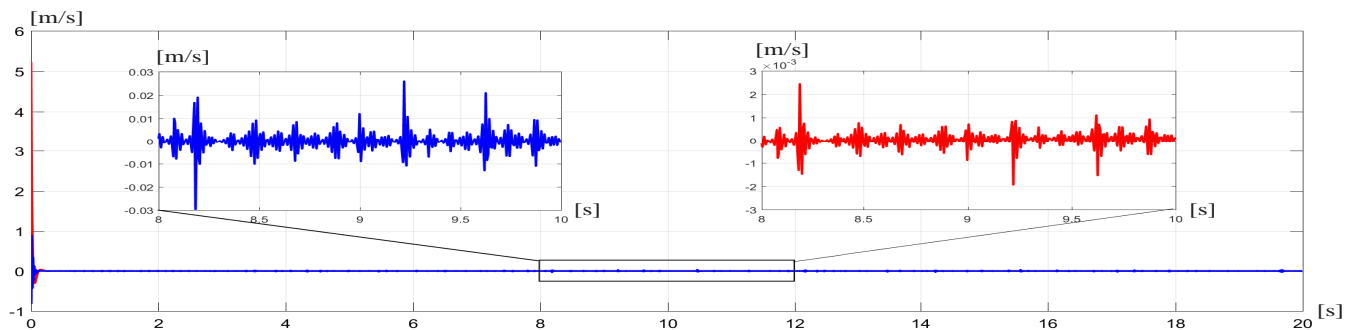
(a) Seguimiento de posición: posición real  $x$  (---), posición deseada  $x_d$  (—), posición real  $y$  (---), y posición deseada  $y_d$  (—)



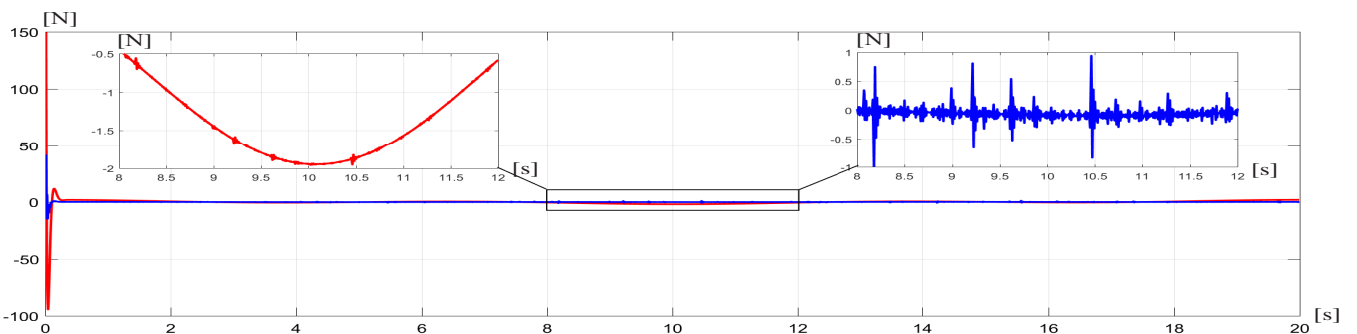
(b) Error de seguimiento de posición: error de posición  $\tilde{x} = x - x_d$  (—) y error de posición  $\tilde{y} = y - y_d$  (—)



(c) Estimación de Velocidad (observador): velocidad estimada  $\hat{\dot{x}}$  (—) y velocidad estimada  $\hat{\dot{y}}$  (—)

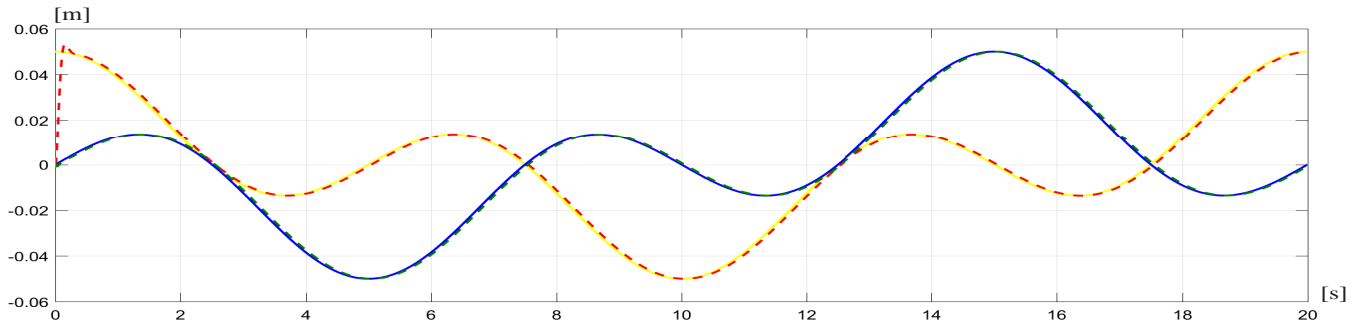


(d) Error de estimación (error de observación): error de observación  $e_x = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$  (—) y error de observación  $e_y = \dot{y} - \hat{\dot{y}}$  (—)

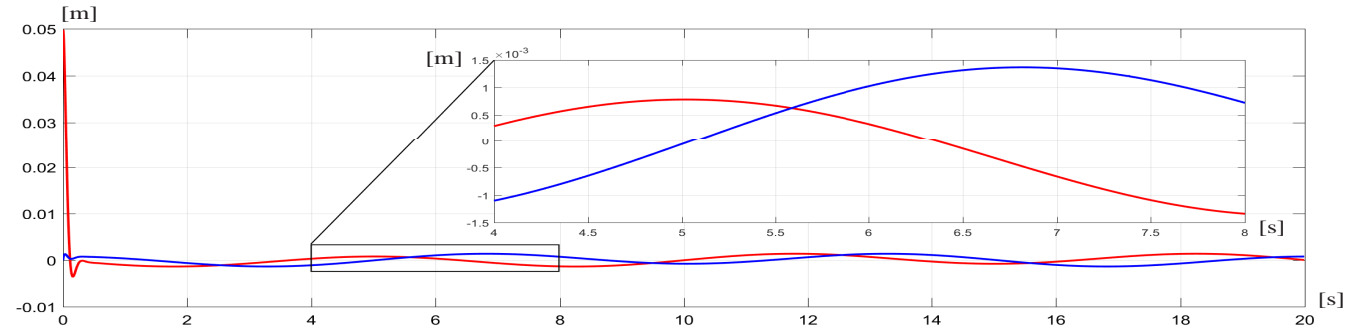


(e) Par aplicado en el hombro (—) y par aplicado en el codo (—)

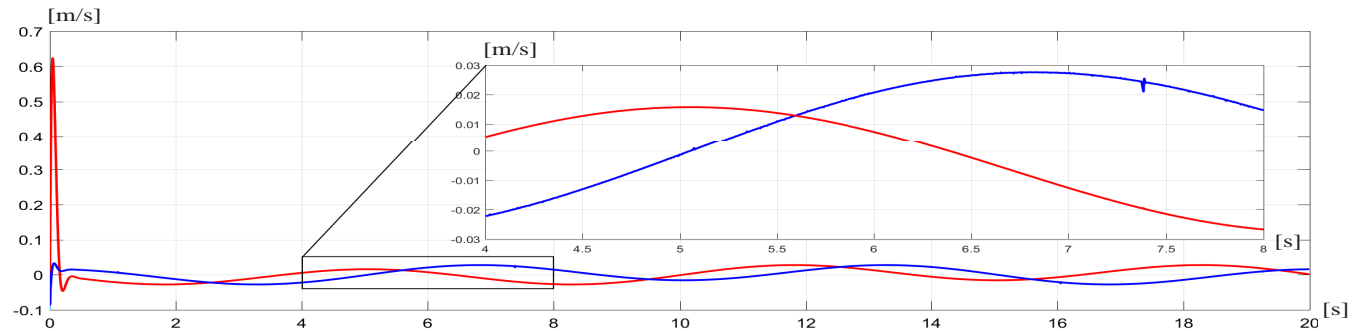
Figura 14: Gráficas del observador de Berghuis-Nijmeijer.



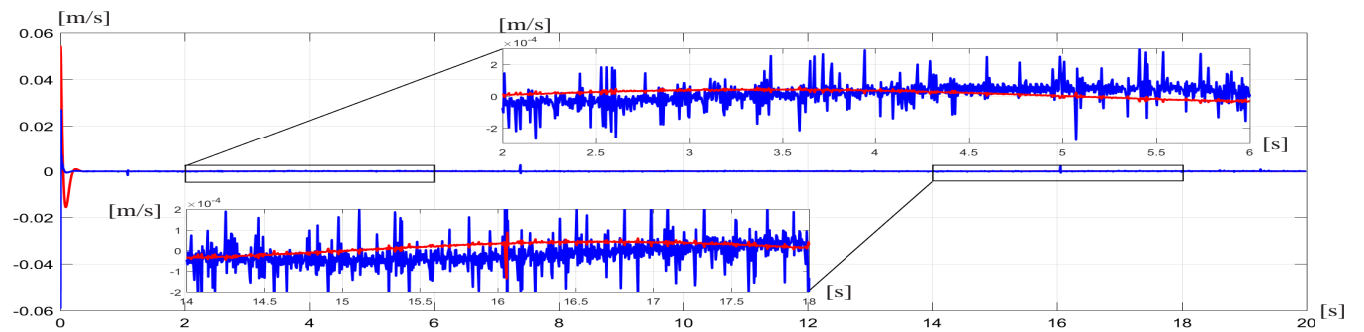
(a) Seguimiento de posición: posición real  $x$  (---), posición deseada  $x_d$  (—), posición real  $y$  (---), y posición deseada  $y_d$  (—)



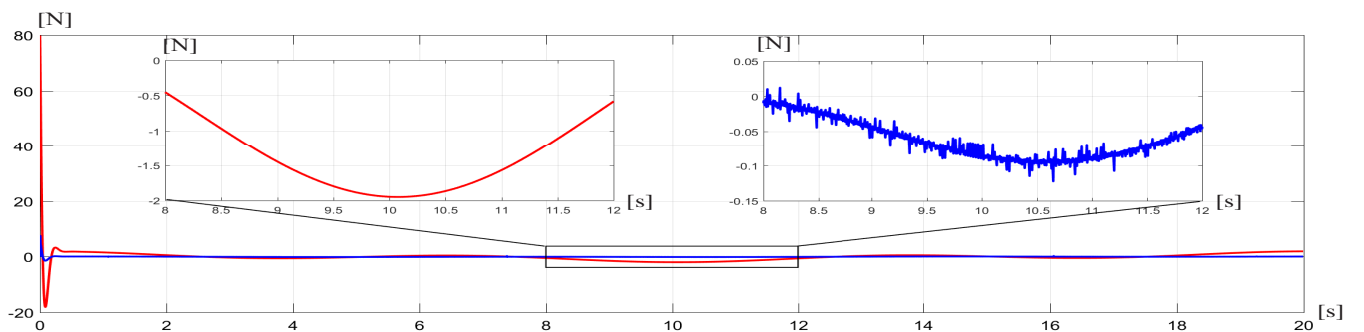
(b) Error de seguimiento de posición: error de posición  $\tilde{x} = x - x_d$  (—) y error de posición  $\tilde{y} = y - y_d$  (—)



(c) Estimación de Velocidad (observador): velocidad estimada  $\hat{x}$  (—) y velocidad estimada  $\hat{y}$  (—)

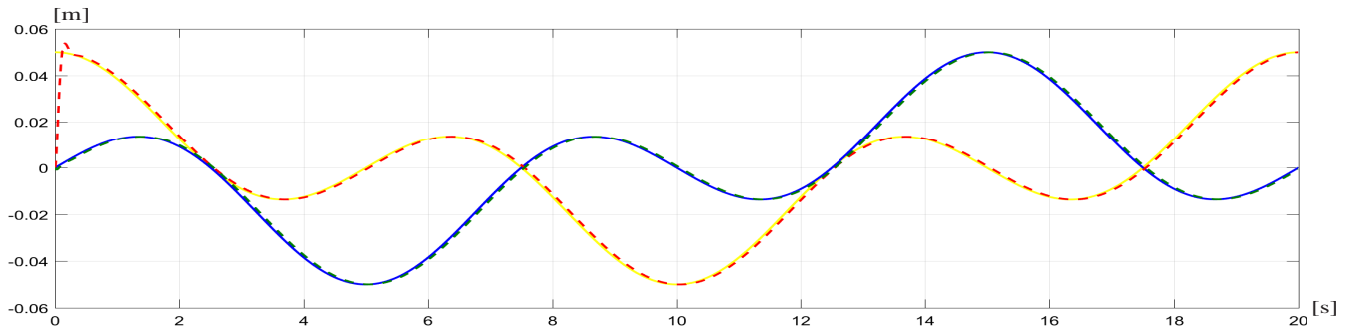


(d) Error de estimación (error de observación): error de observación  $e_x = \tilde{x} - \hat{x}$  (—) y error de observación  $e_y = \tilde{y} - \hat{y}$  (—)

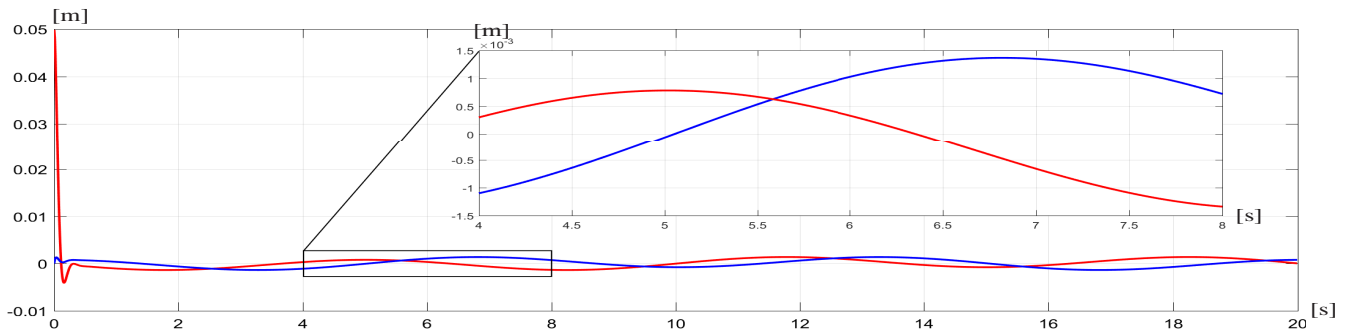


(e) Par aplicado en el hombro (—) y par aplicado en el codo (—)

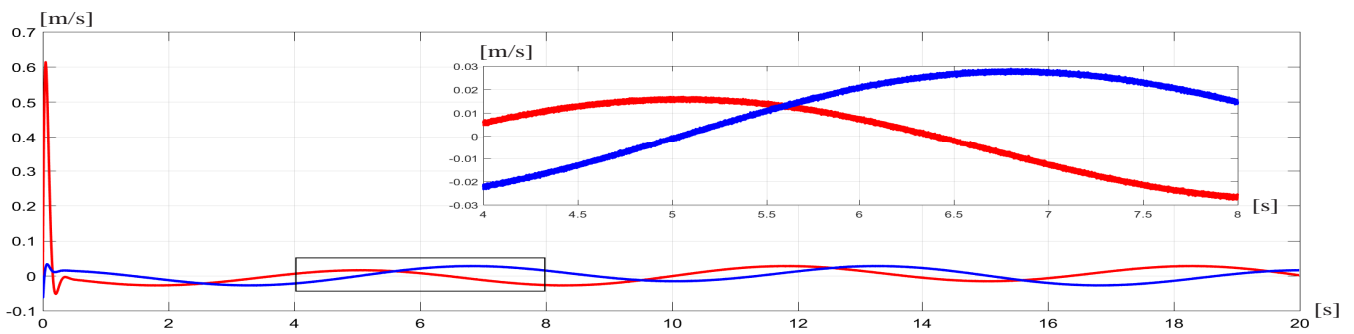
Figura 15: Gráficas de la Derivada Sucia.



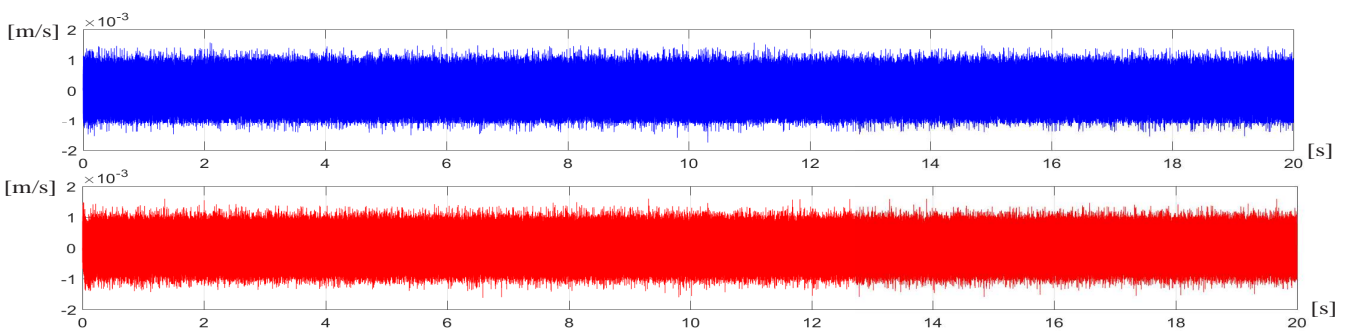
(a) Seguimiento de posición: posición real  $x$  (---), posición deseada  $x_d$  (—), posición real  $y$  (---), y posición deseada  $y_d$  (—)



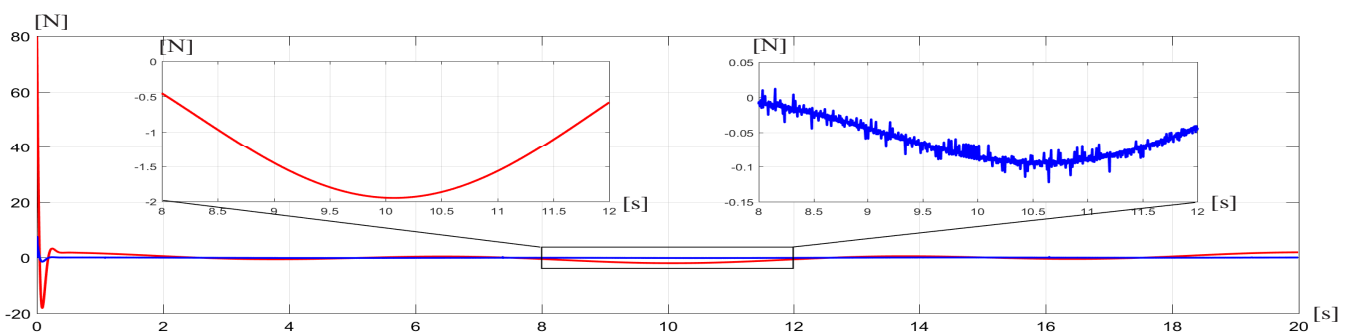
(b) Error de seguimiento de posición: error de posición  $\tilde{x} = x - x_d$  (—) y error de posición  $\tilde{y} = y - y_d$  (—)



(c) Estimación de Velocidad (observador): velocidad estimada  $\hat{x}$  (—) y velocidad estimada  $\hat{y}$  (—)



(d) Error de estimación (error de observación): error de observación  $e_x = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$  (—) y error de observación  $e_y = \dot{y} - \hat{\dot{y}}$  (—)



(e) Par aplicado en el hombro (—) y par aplicado en el codo (—)

Figura 16: Gráficas del Diferenciador de Levant.

## 4. Conclusion

En este trabajo se presenta un estudio comparativo de observadores y diferenciadores que se usan para obtener la velocidad, la cual será alimentada a una estructura de control, cuya finalidad es seguir una trayectoria deseada.

Para determinar el mejor desempeño se usa la evaluación de la norma  $\mathcal{L}_2$  del error, cuyo resultado permite determinar cuantitativamente el desempeño de la variable de interés. En este trabajo se demostró experimentalmente que el diferenciador de Levant tiene el mejor desempeño en comparación con las otras estructuras usadas para estimar la velocidad.

Los experimentos se realizaron con el conocimiento parcial del modelo, ya que el único término conocido es el par gravitacional. La incertidumbre del modelo se compensa con la obtención de la velocidad y el uso de la posición obtenida por el control-observador.

En conclusión, la prueba realizada ha demostrado que los observadores de alta ganancia (observador de Nicosia y el observador de Berghuis-Nijmeijer) producen resultados aceptables, pero los diferenciadores (Derivada sucia y Diferenciador de Levant) generan los mejores resultados desde el punto de vista del error de seguimiento. Y de los diferenciadores el mejor desempeño lo obtuvo el Diferenciador de Levant.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a PRODEP (PROMEP) con el número de Folio BUAP-811 y los proyectos PAPIIT 116314 y 114617 por el apoyo recibido, a CONACYT por la Cátedra CONACYT-CICESE 2017 y al Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

## Referencias

- Alcocer, A. and Robertsson, A. and Valera, A. and Johansson, R., 2003. Force Estimation and Control in Robot Manipulators. Proceedings of 7th Symposium on Robot Control (SYROCO'03) 55-60. Wroclaw, Poland  
DOI: [.org/10.1016/S1474-6670\(17\)33369-4](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)33369-4)
- Atassi, A. N. and Khalil, H. K., 2000. Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs. *Systems and Control Letters*, 39(15), 183-191.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00085-7)
- Berghuis, H. and Nijmeijer, H., 1994. Robust control of robots via linear estimated state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(10), 2159-2162.  
DOI: [10.1109/9.328807](https://doi.org/10.1109/9.328807)
- Calafiore, G. and Indri, M. and Bona, B., 1997. Robot dynamic calibration: Optimal excitation trajectories and experimental parameter estimation. *Journal of Robotic Systems* 18(2), 55-68.  
DOI: [.org/10.1002/1097-4563\(200102\)18:2<55::AID-R0B1005>3.0.CO;2-0](https://doi.org/10.1002/1097-4563(200102)18:2<55::AID-R0B1005>3.0.CO;2-0)
- Cruz-Zavala, E. and Moreno, J. A. and Fridman, L. M., 2010. Diferenciador Robusto Exacto y Uniforme. Proceedings of AMCA 2010, 1-6.
- Dabroom, A. M. and Khalil, H. K., 1994. Numerical differentiation using high gain observers. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 4790-4795.  
DOI: [10.1109/CDC.1997.649776](https://doi.org/10.1109/CDC.1997.649776)
- Diop, S. and Grizzle, J. and Moraal, P. and Stefanopoulou, A., 1994. Interpolation and numerical differentiation for observer design. Proceedings of the American Control Conference, 1329-1333.  
DOI: [10.1109/ACC.1994.752275](https://doi.org/10.1109/ACC.1994.752275)
- Hacksel, P. J. and Salcudean, S. E., 1994. Estimation of Environment Forces and Rigid-Body Velocities using Observers. Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 931-936. San Diego, CA, USA  
DOI: [10.1109/ROBOT.1994.351233](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1994.351233)
- Kelly, R. and Ortega, R. and Ailon, A. and Loria, A., 1994. Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(6), 1222-1224.  
DOI: [10.1109/9.293181](https://doi.org/10.1109/9.293181)
- Kelly, R. and Santibáñez, V., 2003. Control de Movimiento de Robots Manipuladores. Prentice-Hall
- Khalil, H. K., 1996. Nonlinear Systems. Prentice-Hall
- Khatib, O., 1987. A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation. *IEEE Journal of Robotics and Automation* 3(1), 43-53.  
DOI: [10.1109/JRA.1987.1087068](https://doi.org/10.1109/JRA.1987.1087068)
- Kumar, B. and Dutta-Roy, S. C., 1988. Design of digital differentiators for low frequencies. Proceedings of the IEEE, 76(3), 287-289.  
DOI: [10.1109/5.4408](https://doi.org/10.1109/5.4408)
- Levant, A., 1998. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247-1263.  
DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179308923053>
- Levant, A., 1998. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379-384.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00209-4](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00209-4)
- Levant, A., 2003. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9), 924-941.  
DOI: <https://doi.org/10.1080/0020717031000099029>
- Loria, A., 2016. Observers are Unnecessary for Output-Feedback Control of Lagrangian Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4), 905-920.  
DOI: [10.1109/TAC.2015.2446831](https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2446831)
- Martínez-Rosas, J. C. and Arteaga-Pérez, M. A. and Castillo-Sánchez, A., 2006. Decentralized Control of Cooperative Robots without Velocity-Force Measurements. *Automatica* 42, 329-336.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.10.007>
- Martínez-Rosas, J. C. and Arteaga-Pérez, M. A., 2008. Force and Velocity Observers for the Control of Cooperative Robots. *Robotica* 26, 85-92.  
DOI: [.org/10.1017/S026357470700361X](https://doi.org/10.1017/S026357470700361X)
- Moreno, J. and Kelly, R., 2002. On motor velocity control by using only position measurements: two case studies. *International Journal of Electrical Engineering Education* 39(2), 118-127.  
DOI: <https://doi.org/10.7227/IJEEE.39.2.4>
- Nicosia, S. and Tornambe, A. and Valigi, P., 1990. Experimental results in state estimation of industrial robots. Proceedings of 29th IEEE Conference on Decision and Control, 360-365.  
DOI: [10.1109/cdc.1990.203613](https://doi.org/10.1109/cdc.1990.203613)
- Parsa, K. and Aghili, F., 2006. Adaptive Observer for the Calibration of the Force-Moment Sensor of a Space Robot. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1667-1673. Orlando, Florida  
DOI: [10.1109/ROBOT.2006.1641946](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2006.1641946)
- Rabiner, L. R. and Steiglitz, K., 1970. The design of wide-band recursive and nonrecursive digital differentiators. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 18(2), 204-209.  
DOI: [10.1109/TAU.1970.1162090](https://doi.org/10.1109/TAU.1970.1162090)
- Radkha, K. and Kulic, D. and Croft, E., 2007. Dynamic parameter identification for the CRS A460 robot. Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 1-6. San Diego, CA, USA  
DOI: [10.1109/IR0S.2007.4399314](https://doi.org/10.1109/IR0S.2007.4399314)
- Sira-Ramírez, H., 2005. Control de sistemas no lineales linealización aproximada, extendida, exacta. Pearson Prentice-Hall
- Stotsky, A. and Hedrick, J. K. and Yip, P. P., 1994. The use of sliding modes to simplify the backstepping control method. Proceedings of the American Control Conference, 1703-1708.  
DOI: [10.1109/ACC.1997.610875](https://doi.org/10.1109/ACC.1997.610875)
- Stotsky, A. and Kolmanovsky, I., 2001. Simple Unknown Input Estimation Techniques for Automotive Applications. Proceedings of the American Control Conference, 3312-3317. Arlington, VA, USA  
DOI: [10.1109/ACC.2001.946139](https://doi.org/10.1109/ACC.2001.946139)
- Swevers, J. and Ganseman, C. and Tukel, D. B. and de-Schutter, J. and Van-Brussel, H., 1997. Optimal robot excitation and identification. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 13(5), 730-740.  
DOI: [10.1109/70.631234](https://doi.org/10.1109/70.631234)