

## Control descentralizado basado en eventos para el consenso de múltiples robots tipo péndulo invertido en el esquema líder-seguidor

O. D. Ramírez-Cárdenas<sup>a</sup>, J.F. Guerrero-Castellanos<sup>b,\*</sup>, J. Linares-Flores<sup>a</sup>, S. Durand<sup>c</sup>, W.F. Guerrero-Sánchez<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

<sup>b</sup>Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México.

<sup>c</sup>ICube, INSA Strasbourg, Univ. Strasbourg, CNRS (UMR 7357), Strasbourg, France.

<sup>d</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México.

### Resumen

El trabajo presenta el diseño de una estrategia de control distribuido con comunicación activada por eventos, que resuelve el problema de consenso líder-seguidor, de un conjunto de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). La linealización de las ecuaciones de movimiento de los RMPI, alrededor del punto de equilibrio, permiten explotar las propiedades de planitud diferencial, dando lugar a una reparametrización del sistema mediante la salida plana. Asumiendo que los vehículos se comunican mediante una red, cuya topología es representada por un grafo no dirigido y fuertemente conectado, se diseña una ley de control distribuido y una función de evento que indica el instante en el que el  $i$ -ésimo vehículo debe transmitir información (su estado) a sus vecinos. El resultado es un intercambio asíncrono de información entre vehículos y donde el tiempo entre eventos no es equidistante. El análisis de estabilidad se lleva a cabo en el sentido de Lyapunov y en el sentido entrada-estado ISS (Input-to-State Stability). Los resultados en simulación numérica muestran el buen desempeño del consenso de la red de vehículos en dos escenarios representativos: regulación y seguimiento de trayectoria.

**Palabras Clave:** Control basado en eventos, Agentes, Control de consenso, Sistemas de transporte y vehículos, Robots móviles y vehículos autónomos inteligentes, Teoría de control automático.

### Decentralized event-based leader-following consensus for a group of two-wheeled self-balancing robots

#### Abstract

This paper deals with the development of a decentralized event-based control strategy applied to the leader-following consensus problem of a group of two-wheeled self-balancing robots so called mobile inverted pendulum (MIP). The MIP's nonlinear mathematical model which includes the dynamics of the actuators is presented. Then, the model around an operating point is considered which allows to exploit the differential flatness property of the system, permitting a complete parametrization in terms of the flat output. Assuming that the vehicle network exchange information through a directed and strongly connected graph, a decentralized control law is designed, and an event-based algorithm is developed. Then each MIP decides, based on the difference of its current state and its latest broadcast state, when it has to send a new value to its neighbors. The stability of the complete system is carried out in the Lyapunov sense together with the ISS (Input-to-State Stability) approach. Numerical results show the advantages *wrt* information exchange between MIPs, as well as a good performance in the angular stabilization under two scenarios: regulation and tracking problem.

**Keywords:** Event-based control, Agents, Leader-following consensus, Transport systems and vehicles, Mobile robots and autonomous vehicles, Control Theory.

\* Autor para correspondencia: [fermi.guerrero@correo.buap.mx](mailto:fermi.guerrero@correo.buap.mx),

**To cite this article:** O.D. Ramírez-Cárdenas, J.F. Guerrero-Castellanos, J. Linares-Flores, S. Durand, W.F. Guerrero-Sánchez. 2019. Decentralized event-based leader-following consensus for a group of two-wheeled self-balancing robots. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 16, 435-446. <https://doi.org/10.4995/riai.2019.11113>

Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4,0 International (CC BY-NC-ND 4,0)

## 1. Introducción

### 1.1. Estado del arte y la técnica

El péndulo invertido sobre base móvil es uno de los sistemas más conocidos y estudiados por la comunidad de robótica y control automático ya que además de ser un sistema no lineal, es un sistema subactuado y con restricciones holónomas Li et al. (2003); Salerno and Angeles (2003). Desde los diferentes enfoques para la obtención de un modelo matemático, pasando por la identificación de parámetros, hasta la aplicación de diferentes técnicas de control y observación, el péndulo invertido sobre base móvil han dado lugar al desarrollo de nuevos e innovadores vehículos conocidos como robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI) los cuales constituyen un desafío para la teoría e ingeniería de control Chung et al. (2004); Pathak et al. (2005); Brisilla and Sankaranarayanan (2015) y una inspiración para científicos y tecnólogos Grasser et al. (2002); Frías (2013); Schinstock et al. (2016). La movilidad urbana es un tópico de interés actual y en ese sentido los RMPI están jugando un papel muy importante, Segway (2018).

La década pasada la comunidad de control enfocó su atención en el control de un conjunto o red de vehículos que permitan desarrollar tareas de manera grupal y colaborativa, permitiendo de esta manera cumplir funciones que sería imposible llevar a cabo de manera individual, Olfati-Saber and Murray (2004a); Ren and Beard (2008); Bullo et al. (2009). Cuando se considera el control de forma grupal de tales vehículos, cada uno de estos vehículos es considerado un agente y el control de los mismos se suscribe en el marco de trabajo más general del control de sistemas multi-agentes (SMA), Lewis et al. (2013) o redes de sistemas robóticos, Ahmed et al. (2016a). Un problema de control cooperativo de mucho interés es el consenso. De manera general, consenso significa llegar a un acuerdo respecto a una cantidad o un punto de interés y depende del estado de cada uno de los agentes implicados. Un algoritmo o protocolo de consenso es una interacción que especifica la manera en que la información debe ser intercambiada entre un agente y sus vecinos, los cuales a su vez están contenidos en la red e interconectados mediante una cierta topología de comunicación. Las estrategias de control cooperativo distribuido o descentralizado para el consenso de SMA han generado especial atención ya que proveen una solución atractiva al control de sistemas de gran escala, tanto en términos de complejidad en la formulación del problema, como en términos de la carga computacional requerida, Ahmed et al. (2016b).

Con la finalidad de mejorar el desempeño de los sistemas embebidos utilizados en las redes multiagentes, es necesario desarrollar nuevas estrategias de control que permitan un aprovechamiento racional y coordinado de los recursos disponibles de la red. Bajo este enfoque, recientemente, ha incrementado la popularidad de las estrategias de control basadas en eventos aplicadas a los sistemas formados en red, especialmente debido a su característica aperiódica que permite que la señal de control sea actualizada de forma asíncrona, Tabuada (2007); Durand and Marchand (2009). Un excelente panorama al control basado en eventos se da en, Sánchez et al. (2009). La idea central se basa en la actualización del control únicamente cuando existe un evento, en lugar de realizarse de forma periódica. El evento ocurre si se satisface una condición predefinida, llamada función de evento y la cual está directamente relacionada

con la salida del sistema, con los estados o con la evolución de una función de Lyapunov de Control asociada al sistema (Velasco et al., 2009; Marchand et al., 2013; Xie et al., 2016). Es así como en el contexto del control distribuido, el esquema de control basado en eventos representa una alternativa para reducir el ancho de banda de la comunicación, el uso de recursos computacionales y de hardware en la red multi-agente. Numerosos trabajos han estudiado y desarrollado algoritmos de control con el enfoque basado en eventos, orientados hacia el consenso, formación o sincronización de sistemas dinámicos lineales y no lineales. En Dimarogonas et al. (2012) se aborda el problema de consenso para un sistema multi-agente y donde el agente es representado por un integrador simple. La topología de comunicación es representada por un grafo no dirigido. Dicho trabajo se extiende en Seyboth et al. (2013), al caso de control de consenso promedio mediante una comunicación entre agentes disparada por eventos y donde los agentes se representan como el integrador y el doble integrador. En Yang et al. (2014); Garcia et al. (2015); Zhou et al. (2017) se presenta el problema de consenso para SMA con dinámica lineal y usando topología de comunicación mediante grafos dirigidos. El problema de formación de SMA en red a través de un mecanismo de comunicación basado en eventos que permite reducir la transmisión de datos entre los agentes mediante funciones de evento dinámicas se estudia en Ge and Han (2017). Como se puede notar, el común denominador de estas estrategias de control se basa en optimizar el funcionamiento de los SMA mediante el uso eficiente de los canales de comunicación. La principal diferencia entre ellos es el diseño de la condición o función de evento.

A pesar del gran avance obtenido en los últimos años respecto al control basado por eventos aplicado a los SMA, son pocos los trabajos reportados en donde este enfoque sea aplicado a una red de robots aéreos o terrestres con dinámicas de naturaleza no lineal y altamente inestable, Guinaldo et al. (2013); Guerrero Castellanos et al. (2017); Tsai et al. (2017). Esto último es el principal interés de este trabajo.

### 1.2. Contribución

El presente trabajo se enfoca en el diseño de una estrategia de control de auto-balanceo y un control distribuido con comunicación activada por eventos, para el consenso de un conjunto de robots móviles tipo péndulo invertido (RMPI). El objetivo es estabilizar la postura de cada RMPI y realizar el consenso de la posición en el sistema de referencia del móvil, tal que todos los agentes converjan a la dinámica impuesta por un líder. Para ello se consideran las ecuaciones de movimiento de los RMPI, las cuales incluyen la dinámica de los actuadores, esto con la finalidad de que la ley de control resultante esté en función del voltaje que debe ser aplicado a cada motor. La linealización de dichas ecuaciones alrededor del punto de equilibrio, permiten explotar las propiedades de planitud diferencial (Sira-Ramírez and Agrawal (2004)) de los RMPI. Así entonces, y a diferencia de los trabajos generalmente reportados donde controladores tipo PID o LQR son aplicados, la planitud diferencial nos permite reparametrizar al sistema mediante su salida plana, de tal forma que el sistema RMPI es transformado en una cadena de integradores de orden cuatro. Esto representa nuestra primer contribu-

ción y es presentada en el apartado 3.1 y 3.2. Así entonces, un algoritmo de consenso donde la comunicación entre agentes es dictada por una función de evento es desarrollada en la Sección 4. La estrategia propuesta generaliza el trabajo de Seyboth et al. (2013) al caso general de sistemas con dinámica lineal, con comunicación entre agentes mediante una topología expresada por grafos dirigidos y resuelve el problema de consenso con líder de manera natural para el grupo de RMPI. Esto representa nuestra segunda y más importante contribución. Simulaciones numéricas se desarrollan y se analizan en la Sección 5. El objetivo es mostrar la efectividad de la estrategia de control propuesta en el caso de regulación y seguimiento de trayectoria con respecto al líder. La evolución en el número de eventos ocurridos por cada RMPI y su comparación con respecto a una comunicación periódica, muestra que la estrategia propuesta representa grandes ventajas en términos de intercambio de información entre RMPI lo cual motiva su implementación en sistemas de redes con comunicación inalámbrica donde las restricciones energéticas y de ancho de banda son un gran desafío. Finalmente, las conclusiones y perspectivas se establecen en la Sección 6.

## 2. Preliminares

### 2.1. Teoría de grafos

La interacción de un sistema multiagente puede ser representada mediante grafos. La teoría de grafos es un recurso que permite definir la topología de comunicación entre los agentes y desde el punto de vista de control, permite establecer propiedades de estabilidad. Considere el grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$  el cual consiste en un conjunto de vértices (o nodos)  $\mathcal{V} = 1, \dots, N$  y enlaces  $\mathcal{E}$ . Si hay un enlace  $(i, j)$  entre los nodos  $i$  y  $j$ , entonces  $i$  y  $j$  se llaman adyacentes, es decir,  $\mathcal{E} = (i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : i, j \text{ adyacente}$ .  $\mathcal{G}$  es llamado no dirigido o bidireccional si  $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$ , en caso contrario el término asignado es grafo no dirigido. La matriz de adyacencia  $A$  esta definida por  $a_{ij} = 1$  si  $i$  y  $j$  son adyacentes, y  $a_{ij} = 0$  en caso contrario. Un camino desde  $i$  hasta  $j$  es una secuencia de diferentes nodos, iniciando desde  $i$  y terminando con  $j$ , de modo que cada par de nodos consecutivos es adyacente. Si hay un camino de  $i$  a  $j$ , entonces  $i$  y  $j$  son llamados conectados. Si todos los pares de nodos en  $\mathcal{G}$  son conectados y  $\mathcal{G}$  es no dirigido, entonces se habla de un grafo fuertemente conectado. Para grafos bidireccionales, el término *fuertemente* se omite. La distancia  $d(i, j)$  entre dos nodos es el número de enlaces de la ruta más corta desde  $i$  hasta  $j$ . El diámetro  $d$  de  $\mathcal{G}$  es la máxima distancia  $d(i, j)$  sobre todos los pares de nodos. La matriz de grados  $D$  de  $\mathcal{G}$  es la matriz diagonal con elementos  $d_i$  igual a la cardinalidad del conjunto vecino del nodo  $i$ ,  $N_i = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}\}$ . La matriz Laplaciana  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{G}$  es definida como  $\mathcal{L} = D - A$ . Para grafos conectados,  $\mathcal{L}$  tiene exactamente un sólo valor propio igual a cero y dichos valores propios pueden ser listados en orden decreciente,  $0 = \lambda_1(\mathcal{G}) < \lambda_2(\mathcal{G}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathcal{G})$ .  $\bar{\mathcal{G}}$  representa el grafo que contiene al grafo  $\mathcal{G}$  y al líder (Olfati-Saber and Murray (2004b)).

### 2.2. Comunicación entre agentes basada en eventos

Un grafo teniendo como nodos sistemas dinámicos es denotado por  $(\mathcal{G}, x)$ , siendo  $\mathcal{G}$  el grafo que contiene  $N$  nodos y

$x = (x_1^T \cdots x_N^T)^T$  un vector de estado global, donde los estados de cada nodo evolucionan de acuerdo a la dinámica

$$\dot{x}_i = f(x_i, u_i) \quad (1)$$

donde  $x_i \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  y  $u_i \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ . La transmisión de información entre agentes basada en eventos relaciona dos funciones principales (Sánchez-Santana et al. (2018)):

- Una función de evento:  $e_i : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  que indica si es necesario que el agente  $i$  transmita ( $e_i > 0$ ) o no ( $e_i \leq 0$ ) su estado al agente  $j$ , con  $j \in N_i$ . La función de evento toma como entrada el valor actual del estado del agente  $i$ ,  $x_i$  y una memoria  $m_i$  de  $x_i$  la última vez que  $e_i$  fue positivo.
- Control distribuido estático  $u_i(x_i, m_i, m_j)$ . El término estático significa aquí que los estados son medidos y no son estimados por algún otro sistema dinámico, por ejemplo un observador. Que el control dependa de las memorias de los estados  $x_i$  y  $x_j$  con  $j \in N_i$ , significa que el control del agente  $i$  depende del estado transmitido por el propio agente la última vez que ocurrió un evento y el estado proveniente del agente  $j$ , así como del estado actual del agente  $i$ , i.e.  $x_i$ . El término distribuido se debe a que el control del agente  $i$  solo depende del conjunto  $N_i$  el cual es un subconjunto del conjunto total de nodos, i.e.  $N_i \subset \mathcal{V}$ .

**Definición 2.1. Consenso líder-seguidor:** El consenso líder seguidor de un sistema se lleva a cabo si, para cada uno de los agentes  $i \in \{1, \dots, N\}$ , existe un control distribuido estático  $u_i$  de  $\{x_j : j \in N_i\}$  tal que el sistema en lazo cerrado satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

para cualquier condición inicial  $x_i(0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Donde  $x_0 \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  representa el vector de estado del líder (Ren and Beard (2008)).

**Definición 2.2. Consenso práctico líder-seguidor:** El consenso líder seguidor de un sistema se lleva a cabo si, para cada uno de los agentes  $i \in \{1, \dots, N\}$ , existe un control distribuido estático  $u_i$  de  $\{x_j : j \in N_i\}$  tal que el sistema en lazo cerrado satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = \Delta, \quad i = 1, \dots, N$$

para cualquier condición inicial  $x_i(0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Donde  $x_0 \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  representa el vector de estado del líder.

## 3. Modelo del sistema y planitud diferencial

### 3.1. Modelo y descripción del sistema

Considere el robot móvil tipo péndulo invertido (RMPI) mediante el diagrama esquemático mostrado en la Figura 1. Dicho sistema se compone de dos motores de corriente continua (CC) acoplados a neumáticos de capacidad "todo terreno", esto para que dicho vehículo pueda navegar en terreno irregular. El chasis aloja las baterías, el sistema sensorial, la electrónica de potencia para el control de los motores y el sistema informático.

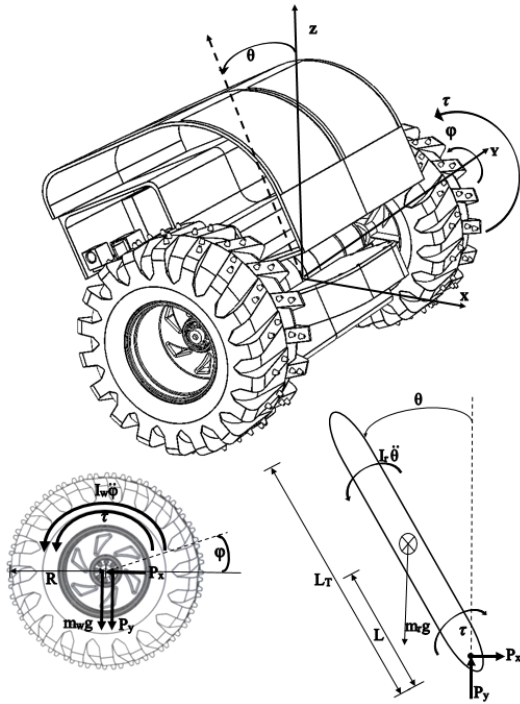


Figura 1: Sistema de referencia y variables del sistema

El modelo del sistema RMPI considera la dinámica del péndulo en conjunto con la dinámica de los motores de CD, esta inspirado en los trabajos de (Yamamoto (2009)) y (Aström and Murray, 2010, pág 36). De esta manera el par generado en el eje de rotación de las ruedas izquierda (I) y derecha (D) se debe a los motores DC con los que está equipado el vehículo. Las ecuaciones que relacionan el par y el voltaje aplicado a los motores están dadas por

$$\tau_l = K_s V_l - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) \quad \text{con } l = \{I, D\} \quad (2)$$

donde  $K_s = \frac{K_m}{R_m}$  y  $T_s = \frac{K_m K_e}{R_m}$ , siendo  $K_m$  la constante de par del motor,  $K_e$  la constante de fuerza contra-electromotriz y  $R_m$  la resistencia de armadura del motor. En primera instancia se interesa en modelar la dinámica de la postura del vehículo. Para ello considere el diagrama de cuerpo libre mostrado en Figura 1, donde  $\tau = 2\tau_w = \tau_D + \tau_I$  con  $\tau_w = \tau_D = \tau_I$ . Seleccionando como coordenadas generalizadas  $q := (\bar{x} \ \phi \ \theta)^T$  y utilizando el formalismo de Euler-Lagrange con la restricción de no deslizamiento de las llantas i.e.  $\bar{x} = -R\dot{\phi}$ , es posible mostrar que la dinámica del vehículo está dada por las siguientes ecuaciones

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (m_w + m_r)R^2 + I_w & m_r RL \cos \theta \\ m_r RL \cos \theta & I_r + m_r L^2 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_r RL \dot{\theta}^2 \sin \theta - \beta \dot{\phi} - T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) + K_s V \\ m_r RgL \sin \theta - \gamma \dot{\theta} + T_s(\dot{\phi} - \dot{\theta}) - K_s V \end{pmatrix}}_{\Upsilon} \quad (3)$$

donde  $m_w$  es la masa de la rueda,  $m_r$  la masa del vástago,  $I_w$  es la inercia de la rueda,  $I_r$  la inercia del vástago,  $\tau$  el par o torque generado por los motores,  $R$  el radio de la rueda,  $L$  la longitud entre el eje de las ruedas y el centro de masas del vástago,  $g$  la gravedad ( $9,81m/s^2$ ) y  $\beta$  y  $\gamma$  los coeficientes de fricción de la

rueda y la superficie y la fricción del vástago, respectivamente.

Puesto que la matriz  $\Lambda$  es definida positiva, el sistema (3) puede escribirse en la forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \Lambda^{-1} \Upsilon \quad (4)$$

Seleccionando las siguientes variables de estado  $x_1 = \phi, x_2 = \dot{\phi}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$  y definiendo el siguiente vector de estado  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$  y entrada de control  $u = \tau$ , el sistema (4) se puede escribir como un clásico sistema no lineal autónomo

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^4, \ u \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Considerando que el vehículo operará cerca de la posición angular de equilibrio  $x_3 = \theta \approx 0$  y con velocidad angular cercana a cero, i.e.  $x_4 = \dot{\theta} \approx 0$ , el sistema puede escribirse en la forma de un sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

$$x \in \mathbb{R}^4, \ u \in \mathbb{R}, \ A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \ B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{M} &= (m_w + m_r)R^2 + I_w & \bar{I} &= I_r + m_r L^2 \\ a_1 &= \frac{-(\beta + (I + m_r RL)T_s)}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} & a_2 &= \frac{-(m_r L)^2 Rg}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} \\ a_3 &= \frac{(\gamma m_r LR + (I + m_r RL)T_s)}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} & a_4 &= \frac{\beta m_r RL + (\bar{M} + m_r RL)T_s}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} \\ a_5 &= \frac{\gamma \bar{M} + (\bar{M} + m_r RL)T_s}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} & a_6 &= \frac{\gamma m_r Lg}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} \\ b_1 &= \frac{(\bar{I} + m_r RL)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} & b_2 &= \frac{-(\bar{M} + m_r RL)K_s}{\bar{M}\bar{I} - (m_r RL)^2} \end{aligned}$$

### 3.2. Planitud diferencial del sistema RMPI

Considere el sistema lineal mostrado en (6). Sea el par  $(A, B)$  controlable, i.e., la matriz de controlabilidad de Kalman

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix}$$

es de rango completo. La salida plana  $y \in \mathbb{R}$  esta dada por las variables obtenidas de la multiplicación del último renglón de la inversa de la matriz de controlabilidad  $\mathcal{K}$  por el vector de estado (ver Sira-Ramírez and Agrawal (2004)):

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{K}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

de ahí que

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4$$

con  $k_1, k_2, k_3, k_4$  dados en el Apéndice A.

Sea  $y = z_1, \dot{y} = z_2, \ddot{y} = z_3, \dddot{y} = z_4$  y considerando  $u = \frac{1}{C^* A^3 B} (\ddot{u} - A^4 x)$ , el sistema queda parametrizado a partir de la salida plana mediante la siguiente cadena de integradores (ver Apéndice A)

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{9}$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \tag{10}$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \tag{11}$$

$$\dot{z}_4 = \bar{u} \tag{12}$$

de tal manera que el sistema general queda representado como

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}\bar{u} \tag{13}$$

$$z \in \mathbb{R}^4, \bar{u} \in \mathbb{R}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \bar{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

con

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### 4. Control distribuido de un conjunto de RMPI

En esta sección se presenta el algoritmo de control para el consenso con líder de múltiples RMPI, con el cual se controla tanto la postura del péndulo como el desplazamiento respecto al sistema de referencia móvil de cada RMPI. El nodo líder genera las señales de referencias deseadas, representado mediante un sistema autónomo y no es afectado por ningún RMPI de la red. También se presenta la función de evento que determina el instante en el que el *i*-ésimo RMPI debe transmitir su estado al *j*-ésimo RMPI con  $j \in N_i$  y la prueba de convergencia a una última cota.

##### 4.1. Control y comunicación basada en eventos

Considere un conjunto de RMPI con una topología de comunicación representada mediante un grafo no dirigido y fuertemente conectado y teniendo un nodo como líder. La dinámica de cada agente esta parametrizada mediante la salida plana  $y_i = z_i$ . La dinámica del líder se considera como un sistema exógeno con de la forma

$$\dot{z}_0 = \bar{A}z_0 \tag{14}$$

y los RMPI seguidores tienen una dinámica de la forma

$$\dot{z}_i = \bar{A}z_i + \bar{B}\bar{u}_i \tag{15}$$

donde  $\bar{u}_i$  representa el protocolo de consenso entre los agentes y que será presentado en el siguiente Teorema.

**Teorema 4.1.** *Considere un nodo líder y un grupo de  $N$ -vehículos RMPI representados por (14) y (15), respectivamente, los cuales interactúan bajo el grafo fuertemente conectado y no dirigido  $\mathcal{G}$ . Si existe comunicación entre el RMPI  $i$  y el líder, entonces existe un peso  $g_i > 0$  y el grafo aumentado que contiene al líder se denota  $\bar{\mathcal{G}}$ . Entonces la función de control distribuido está definida por*

$$\bar{u}_i = K \left[ \sum_{j=1}^N (m_j - m_i) + g_i(z_0 - m_i) \right] \tag{16}$$

y  $K = \rho \bar{B}^T P$ . Siendo  $P$  la solución de la ecuación de Riccati

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} - 2\rho P \bar{B} \bar{B}^T P = -Q$$

Además la función de evento esta dada por:

$$e_i(z_i, m_i) = e_{i_1} \cap e_{i_2} \cap e_{i_3} \cap e_{i_4} \tag{17}$$

donde  $e_{i_s} = |\bar{e}_{i_s}| - \delta$  con  $\bar{e}_{i_s} = m_{i_s} - z_{i_s}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}_+$  el umbral de activación de la función de evento,  $i \in \mathcal{V}$  y  $s = \{1, 2, 3, 4\}$ . Entonces el vector  $z_i$  tiende a una vecindad del estado  $z_0$ , esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t)\| = \frac{2\sqrt{N}\delta \|\bar{B}\| \alpha}{\lambda_1^{\bar{A}}}$$

donde  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$  y  $\varepsilon_i = z_i - z_0$ . Con  $\lambda_1^{\bar{A}} = \lambda_{\min}(\bar{A})$  siendo  $\bar{A} = I_N \otimes \bar{A} - \bar{B}$ ,  $\alpha = \|R\| \|R^T\|$ , con  $R$  una matriz que diagonaliza a la matriz  $\bar{A}$  y  $\bar{B} = -H \otimes \bar{B}K$ , donde  $H = \mathcal{L} + G$ , con  $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$ .

Lo anterior indica que la función de evento (17) depende de los estados actuales  $z_i$  y de las memorias  $m_i$  generadas la última vez que existió comunicación. Cuando la función de evento (17) se cumple, el estado del agente  $i$  ( $z_i$ ) es transmitido a los agentes con los que tiene comunicación y guardado como una memoria  $m_i$  y el control  $u_i$  (definido en (12)) es calculado con los datos actualizados. En caso contrario, los estados  $z_i$  no se transmiten, las memorias no se actualizan y el control es calculado con las memorias guardadas la última vez que ocurrió el evento.

*Demostración.* Sea el control de consenso de múltiples RMPI determinado por las memorias  $m_i$  del estado  $z_i$  la última vez que ocurrió un evento

$$\bar{u}_i = K \left[ \sum_{j=1}^N (m_j - m_i) + g_i(z_0 - m_i) \right]$$

y si se define el error de la memoria con respecto al estado  $\bar{e}_i = m_i - z_i$  o bien  $m_i = \bar{e}_i + z_i$  y el error del estado con respecto a la referencia  $z_0$  como  $\varepsilon_i = z_i - z_0$ , el control puede escribirse en términos de  $\varepsilon_i$

$$\bar{u}_i = K \left[ \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + g_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - g_i \bar{e}_i \right]$$

recuerde que el objetivo es  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\|z_i - z_0\|}_{\varepsilon_i} = 0$  o al menos a una vecindad del origen, entonces la dinámica del error es:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \dot{z}_i - \dot{z}_0 = \bar{A}z_i + \bar{B}\bar{u}_i - \bar{A}z_0 = \bar{A}(z_i - z_0) + \bar{B}\bar{u}_i \\ \dot{\bar{e}}_i &= \bar{A}\varepsilon_i + \bar{B}\bar{u}_i \end{aligned}$$

así que la dinámica del error en lazo cerrado se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \bar{A}\varepsilon_i + \bar{B} \left( K \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + K g_i \varepsilon_i \right. \\ &\quad \left. + K \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - K g_i \bar{e}_i \right) \\ &= \bar{A}\varepsilon_i + \bar{B}K \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_i) + \bar{B}K g_i \varepsilon_i \\ &\quad + \bar{B}K \sum_{j=1}^N (\bar{e}_j - \bar{e}_i) - \bar{B}K g_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

haciendo  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$ ,  $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$ ,  $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_N)$  podemos escribir el sistema multi-agente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= (I_N \otimes \bar{A})\varepsilon - (I_N \otimes \bar{B})(\mathcal{L} \otimes I_N)(I_N \otimes K)\varepsilon \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B})(G \otimes I_N)(I_N \otimes K)\varepsilon \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B})(\mathcal{L} \otimes I_N)(I_N \otimes K)\bar{e} \\ &\quad - (I_N \otimes \bar{B})(G \otimes I_N)(I_N \otimes K)\bar{e} \\ \dot{\bar{e}} &= \left[ I_N \otimes \bar{A} - (\mathcal{L} + G) \otimes \bar{B}K \right] \varepsilon + \left[ -(\mathcal{L} + G) \otimes \bar{B}K \right] \bar{e} \\ \dot{\varepsilon} &= \underbrace{\left[ (I_N \otimes \bar{A}) - H \otimes \bar{B}K \right]}_{\bar{A}} \varepsilon + \underbrace{\left[ -H \otimes \bar{B}K \right]}_{\bar{B}} \bar{e} \quad (18) \end{aligned}$$

**Observación 1:** La matriz  $H = \mathcal{L} + G$  corresponde al grafo  $\bar{\mathcal{G}}$  y tiene las siguientes propiedades (ver Lewis et al. (2013)):

- $H$  contiene valores propios positivos
- $H$  es definida positiva

**Observación 2:** En este trabajo se asume que el grafo  $\bar{\mathcal{G}}$  es fuertemente conectado, es decir, existe un camino entre cada par de vértices.

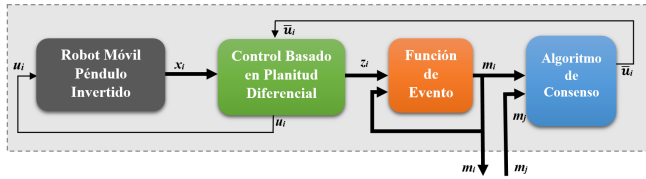


Figura 2: Diagrama general de cada agente

Asumamos primero que  $\bar{e} = 0$  y probemos primeramente que el sistema  $\dot{\varepsilon} = \bar{A}\varepsilon$  es asintóticamente estable. Para esto proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T (I_N \otimes P)\varepsilon$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= \varepsilon^T \left[ (I_N \otimes \bar{A}^T) - (H \otimes K^T \bar{B}^T) (I_N \otimes P) \right] \varepsilon \\ &\quad + \varepsilon^T \left[ (I_N \otimes P) (I_N \otimes \bar{A} - H \otimes \bar{B}K) \right] \varepsilon \\ &= \varepsilon^T \left[ I_N \otimes (P\bar{A} + \bar{A}^T P) - H \otimes (2P\bar{B}\bar{B}^T P) \right] \varepsilon \end{aligned}$$

puesto que  $H$  es simétrica, existe una matriz  $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tal que  $THT^T = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  son los valores propios de  $H$  los cuales por la observación 1 son positivos.

Sea  $\tilde{\varepsilon} = (T \otimes I_N)\varepsilon$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\varepsilon}^T \left[ (I_N \otimes (P\bar{A} + \bar{A}^T P)) - \Lambda \otimes (2P\bar{B}\bar{B}^T P) \right] \tilde{\varepsilon} \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T \left[ P\bar{A} + \bar{A}^T P - \lambda_i (2P\bar{B}\bar{B}^T P) \right] \tilde{\varepsilon}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T \left[ \underbrace{P\bar{A} + \bar{A}^T P - \rho (2P\bar{B}\bar{B}^T P)}_{-Q} \right] \tilde{\varepsilon}_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T Q \tilde{\varepsilon}_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T \underbrace{(I_N \otimes T^T) Q (T \otimes I_N)}_{\bar{Q}} \tilde{\varepsilon}_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^N \tilde{\varepsilon}_i^T \bar{Q} \tilde{\varepsilon}_i < 0 \quad \forall \quad \varepsilon_i \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{A}$  es Hurwitz y  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  cuando  $\bar{e} = 0$  y  $t \rightarrow \infty$ .

Ahora consideremos el caso general donde  $\bar{e} \neq 0$  y vamos a asumir que el valor propio más pequeño de  $\bar{A}$  es  $\rho = \lambda_1^{\bar{A}}$ , entonces

$$\dot{\varepsilon} = \bar{A}\varepsilon + \bar{B}\bar{e}$$

la solución de esta ecuación es

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= e^{\bar{A}t} \varepsilon(0) + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B}\bar{e}(\tau) d\tau \\ \|\varepsilon(t)\| &\leq \|e^{\bar{A}t} \varepsilon(0)\| + \int_0^t \|e^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B}\bar{e}(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

asumiendo  $\lambda_1^{\bar{A}} = \lambda_{\min}(\bar{A})$ , y  $R\bar{A}R^T = \Phi = \text{diag}(\lambda_1^{\bar{A}}, \dots, \lambda_N^{\bar{A}})$  entonces

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \alpha e^{-\lambda_1^{\bar{A}}t} \|\varepsilon(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\bar{A}}(t-\tau)} \|\bar{B}\bar{e}(\tau)\| d\tau$$

donde

$$\alpha = \|R\| \|R^T\|$$

note que  $\|\bar{B}\bar{e}\| \leq \|\bar{B}\| \|\bar{e}\|$ , puesto que la condición de evento fuerza a

$$\|\bar{e}\| = \sqrt{4\delta^2 + 4\delta^2 + \dots + 4\delta^2} = 2\delta \sqrt{N}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\bar{A}}t} \|\varepsilon(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\lambda_1^{\bar{A}}(t-\tau)} 2\delta \sqrt{N} \|\bar{B}\| d\tau \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\bar{A}}t} \|\varepsilon(0)\| + 2\alpha e^{-\lambda_1^{\bar{A}}t} \|\bar{B}\| \delta \sqrt{N} \int_0^t e^{\lambda_1^{\bar{A}}\tau} d\tau \\ &\leq \alpha e^{-\lambda_1^{\bar{A}}t} \|\varepsilon(0)\| \\ &\quad + 2\alpha e^{-\lambda_1^{\bar{A}}t} \|\bar{B}\| \delta \sqrt{N} \left( \frac{e^{\lambda_1^{\bar{A}}t}}{\lambda_1^{\bar{A}}} - \frac{1}{\lambda_1^{\bar{A}}} \right) \end{aligned}$$

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \frac{2\alpha\delta\sqrt{N}\|\bar{B}\|}{\lambda_1^{\bar{A}}} \quad (19)$$

Entonces el estado de los RMPI,  $z_i(t)$ , tienden a una vecindad de  $z_0$  y se mantienen al menos a una distancia  $\|\varepsilon(t)\|$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$



## 4.2. Implementación de la estrategia de control

La estrategia de control fue implementada siguiendo el diagrama a bloques de la Figura 2. Dicho diagrama muestra el esquema general del control propuesto para cada agente  $i$ . El primer bloque (gris) representa el modelo dinámico del robot móvil  $i$ , con la entrada de control  $u_i$  y el estado del sistema representado por  $x_i = (x_{1i} \ x_{2i} \ x_{3i} \ x_{4i})^T$ . A partir de planitud diferencial el sistema es parametrizado mediante la salida plana y expresado en términos de  $z_i = (z_{1i} \ z_{2i} \ z_{3i} \ z_{4i})^T$  lo cual es representado mediante el segundo bloque (verde). Este bloque recibe la señal de control  $\bar{u}_i$  determinado por el algoritmo de consenso y envía la señal correspondiente de control  $u_i$  al robot para regular la postura y desplazamiento. Esta relación está dada por

$$u_i = \frac{1}{C_i A_i^3 B_i} (\bar{u}_i - C_i A_i^4 x_i) \quad (20)$$

El tercer bloque (naranja) es la función de evento que determina cuando el estado  $z_i$  debe actualizarse a  $m_i$  y éste se retroalimenta y se envía también al algoritmo de consenso (bloque azul). Este ultimo bloque contiene el control de consenso del robot  $i$  ( $\bar{u}_i$ ) calculado, determinado por los agentes  $j$  con los que existe comunicación.

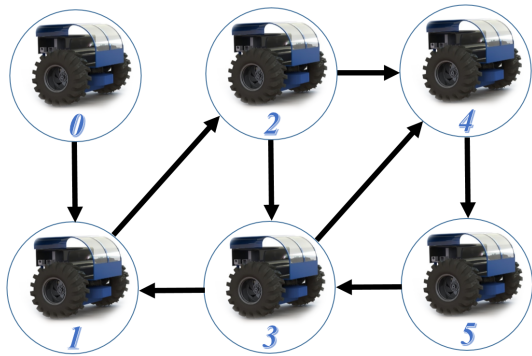


Figura 3: Grafo dirigido

## 5. Resultados

Con el fin de validar la técnica de control propuesta, una simulación numérica se llevo a cabo. Para ello, se consideran 5 robots móviles cuyos parámetros son mostrados en la Tabla 1. El objetivo es verificar que los robots móviles se muevan a la referencia deseada determinada por el líder y denotado  $RMPI_0$ . Se realizaron dos pruebas al conjunto de 5 RMPI, la primera prueba consiste en controlar el desplazamiento de cada agente a una posición deseada y la segunda prueba consiste en el seguimiento de trayectoria en el desplazamiento. Note que en ambas pruebas se debe controlar a la vez la postura erguida de cada uno de los RMPI. La intercomunicación entre los agentes del sistema multi-robot se muestra en la Figura 3, la cual consiste en un grafo dirigido y fuertemente conectado, donde solo el  $RMPI_1$  puede obtener información del nodo líder. Se asume que no existe un retardo en la comunicación entre los agentes y las condiciones iniciales se establecen como:  $x_{0_{init}} = (0,5 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ ,  $x_{1_{init}} = (-0,5 \ 0 \ 0,52 \ 0)^T$ ,  $x_{2_{init}} = (0,5 \ 0 \ -0,4 \ 0)^T$ ,  $x_{3_{init}} = (-0,3 \ 0 \ 0,2 \ 0)^T$ ,  $x_{4_{init}} = (-0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$ ,  $x_{5_{init}} = (-0,3 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$  y  $K = \{1,5 \ 1,5 \ 1,5 \ 1,5 \ 1,5\}$ . Note que el nodo cero (líder) es

considerado como un exosistema y es el encargado de generar la trayectoria que deberán seguir los otros nodos.

Tabla 1: Parámetros del vehículo

Parámetro	Descripción	Valor
$m_r$	Masa del móvil	3.05 Kg
$m_w$	Masa de las ruedas (x2)	0.04 Kg
$I_w$	M. de inercia ruedas (x2)	0.0009356 $Kgm^2$
$I_r$	M. de inercia móvil	0.021 $Kgm^2$
$K_e$	Constante de F.C.E	0.3093
$K_m$	Constante de motor	0.3093
$R_m$	Resistencia de armadura	5.15 $\Omega$
$g$	Gravedad	9.8 $\frac{m}{s^2}$
$R$	Radio de la rueda	0.06 m
$d$	Dis. entre ruedas	0.2 m
$L$	Dis. ruedas y CM móvil	0.15 m

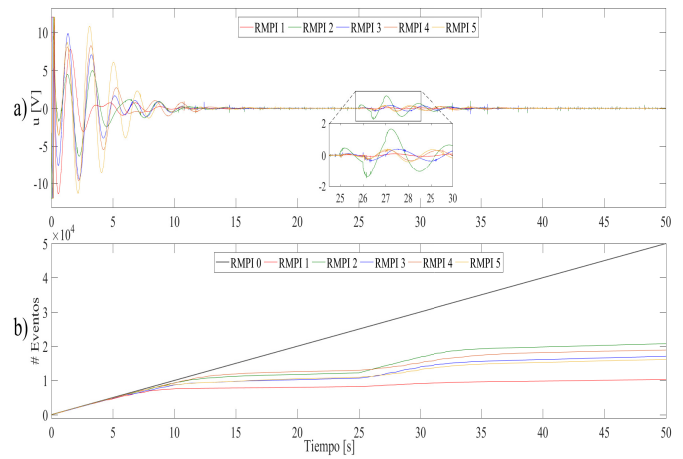


Figura 5: a) Evolución de las señales de control de los cinco agentes, b) Evolución del número de eventos disparados

### 5.1. Consenso ante un líder con posición constante

La Figura 4 muestra la evolución de los cuatro estados de cada uno de los agentes. Se observa que el estado  $x_{1i}$ , correspondiente a la posición lineal de cada uno de los robots, alcanza la posición de referencia deseada. Del mismo modo, el estado  $x_{3i}$ , correspondiente posición angular de cada uno de los péndulos, llega de forma colaborativa a la referencia deseada, es decir, a una postura erguida. También se observa que en el instante  $t = 25s$  un disturbio es aplicado al  $RMPI_2$  lo cual afecta tanto la postura (posición angular) como la posición lineal en los otros RMPIs. La Figura 5(a) muestra la señal de control calculada por el algoritmo propuesto para cada uno de los robots. Se puede observar que el control aplicado para cada robot depende del estado del agente en cuestión y de los estados de cada uno de los agentes con los que existe comunicación. La Figura 5(b), muestra la evolución en el número de eventos de cada uno de los móviles, es decir, las ocasiones en la que la función de evento determinó que debería existir comunicación entre los agentes. Note que hay un incremento en el número de eventos en  $t = 25s$ , eso se debe a que es necesaria una comunicación mayor cuando existe una perturbación. Se puede observar que existe una gran reducción en las veces que es requerido hacer una transmisión de información entre

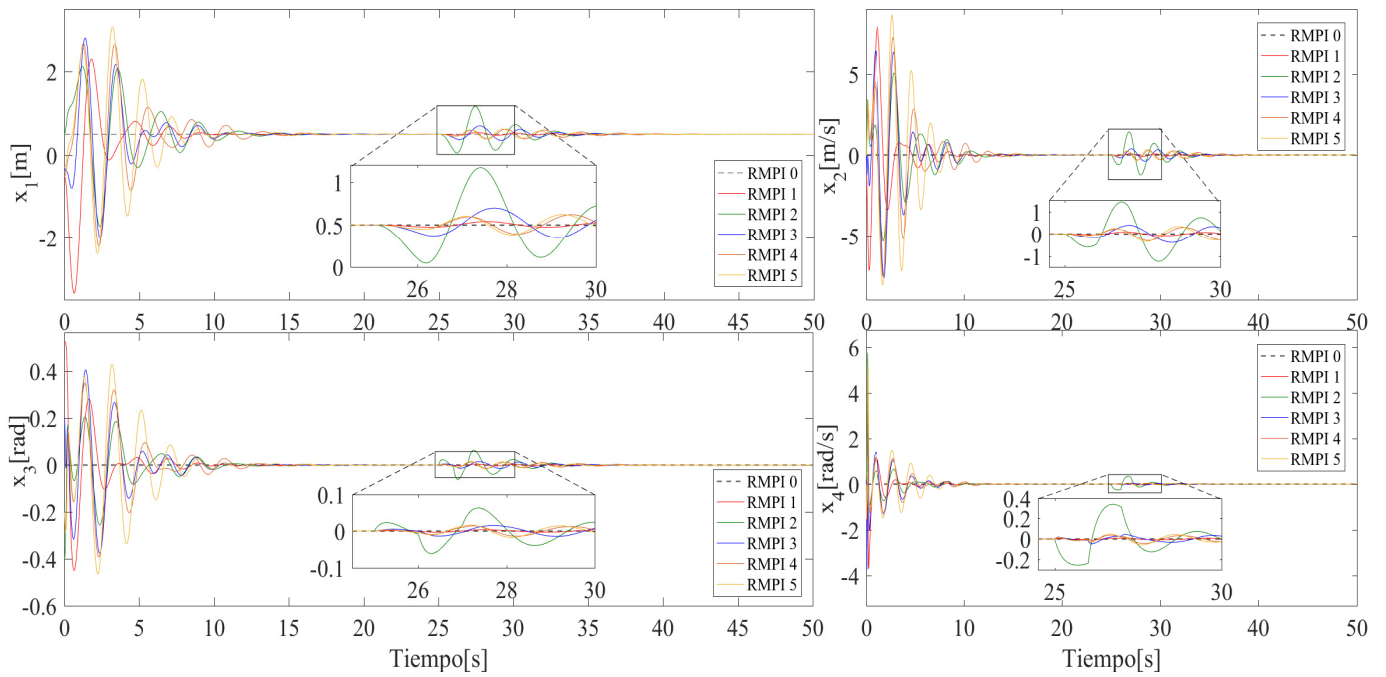


Figura 4: Respuesta de los estados de los 5 agentes

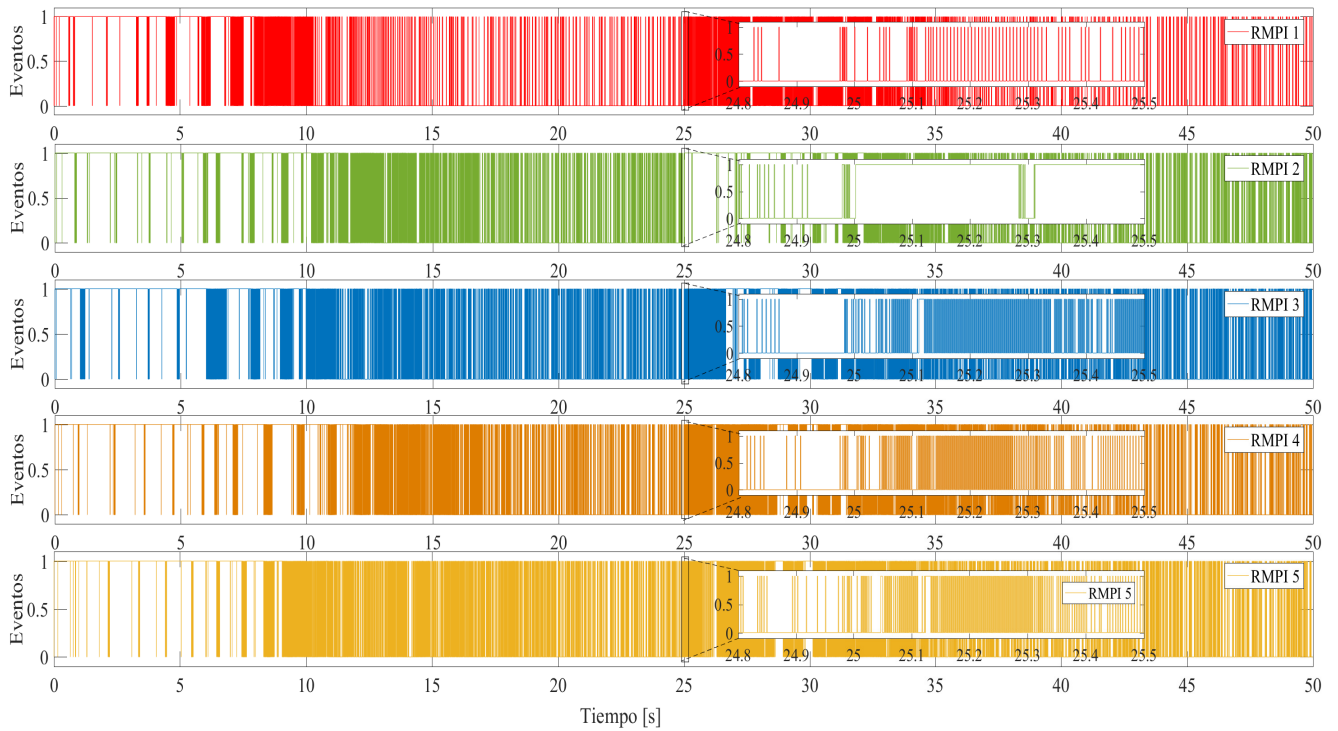


Figura 6: Eventos realizados por los 5 agentes



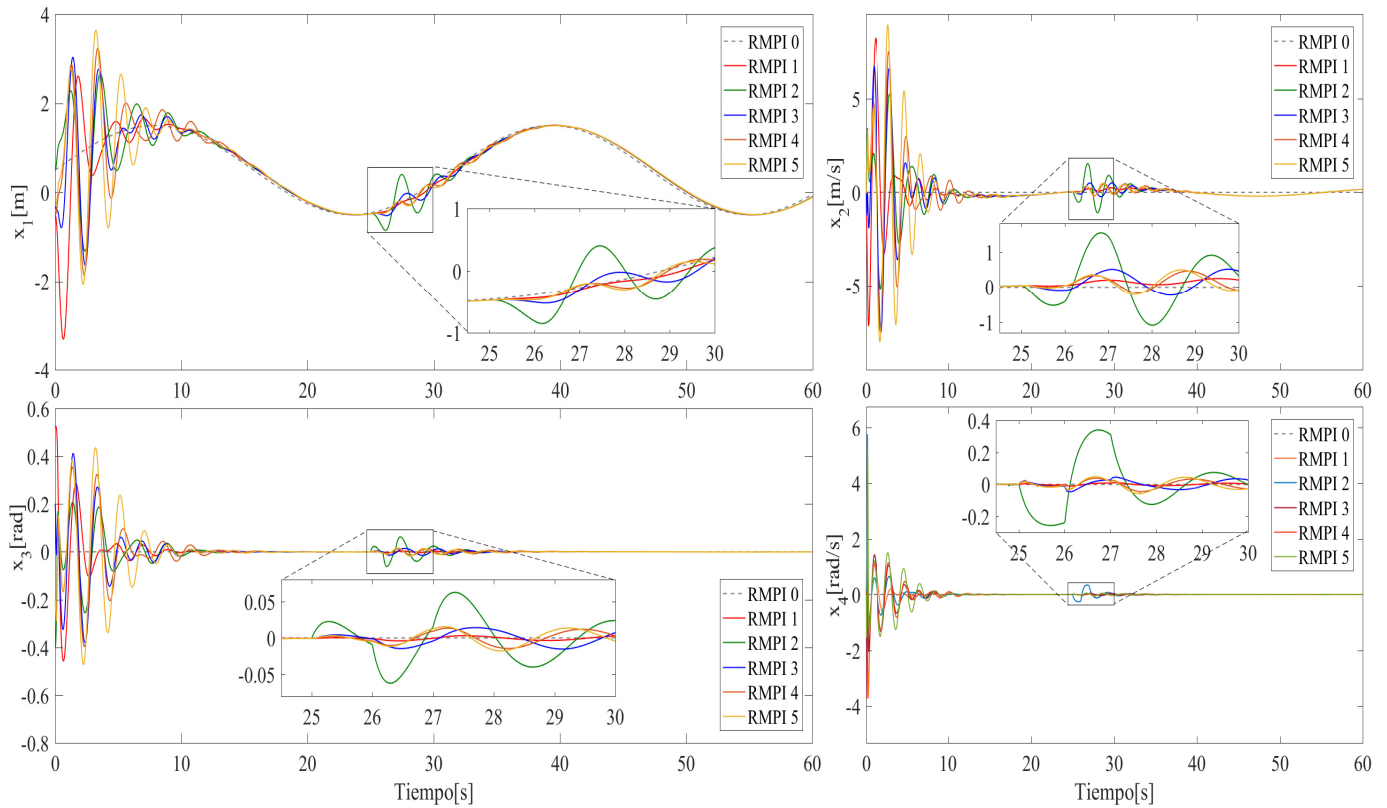


Figura 7: Respuesta de los estados de los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.

agentes, en comparación con un esquema de transmisión continua en el tiempo. La Figura 6 muestra los eventos realizados por cada uno de los agentes. Se puede observar que existen momentos en los que cada agente no envía información a sus vecinos correspondientes, lo que permite un ahorro computacional y energético. En el apartado 5.3 se muestra que a pesar de la gran reducción en el número de transmisión entre agentes, el desempeño se ve poco afectado con respecto al desempeño que pudiera obtenerse con una transmisión continua. Para dar más claridad a los resultados obtenidos, se puede consultar una visualización 3D de la prueba en la siguiente dirección: <https://www.youtube.com/watch?v=axCZdrG4MVw>.

### 5.2. Consenso ante un líder con posición lineal variante en el tiempo

Este escenario consiste en el seguimiento del líder mientras éste se desplaza en una trayectoria variante en el tiempo. La Figura 7 muestra los cuatro estados de cada uno de los agentes. Como se mencionó con anterioridad,  $x_{1i}$  y  $x_{2i}$  corresponde a la respuesta de posición y velocidad lineal, en el sistema de referencia del móvil. De igual manera se muestra los estados  $x_{3i}$  y  $x_{4i}$ , correspondiente a la posición y velocidad angular. La figura refleja que los estados alcanzan la referencia en posición lineal, determinada por el líder, mientras se controla la posición angular. En el instante  $t = 25s$  el robot  $RMPI_2$  es sometido a un disturbio, el cual afecta tanto la postura como el desplazamiento en los otros RMPIs. De igual manera que la prueba anterior se puede observar en la Figura 8(a) la señal de control calculada por el algoritmo propuesto para cada uno de los robots. En

la parte inferior, Figura 8(b), se encuentran el número de eventos disparados en cada uno de los móviles. Se puede observar que en esta prueba se generan un mayor número de eventos que en la prueba anterior, esto se debe a que la posición de referencia dada por el agente líder, esta en constante cambio y los agentes necesitan transmitir un mayor número de información, lo cual es razonable. A pesar de ello, sigue existiendo un ahorro computacional y de energía. Se invita al lector a visualizar en 3D el escenario anteriormente descrito en la siguiente liga: <https://www.youtube.com/watch?v=ZEs05oHH6yw>.

### 5.3. Consenso en tiempo continuo Vs Consenso basado en eventos

En los apartados anteriores se describió el resultado obtenido con la técnica de control propuesta ante dos escenarios representativos. Estos resultados mostraron que el consenso del conjunto de vehículos se logra mientras existe una importante disminución del tráfico de información en la red de comunicaciones. Sin embargo, una pregunta lógica es ¿Qué pasa con el desempeño de la técnica propuesta respecto a una transmisión continua de información entre agentes?. Para responder esta pregunta se considera la ley de control propuesta, dada por (16) y una ley de control para el consenso con transmisión de información continua dada por:

$$\bar{u}_i = K \left[ \sum_{j=1}^N (z_j - z_i) + g_i(z_0 - z_i) \right] \quad (21)$$

El escenario considerado es el mismo presentado en el apartado 5.2. Para ello se realizaron 5 pruebas para el seguimiento

Tabla 2: Condiciones iniciales  $x_i(0) = (x_{1i}(0) \ x_{2i}(0) \ x_{3i}(0) \ x_{3i}(0))^T$  utilizadas en las 5 pruebas.

	$RMPI_1$	$RMPI_2$	$RMPI_3$	$RMPI_4$	$RMPI_5$
Prueba 1	$(-0,5 \ 0 \ 0,52 \ 0)^T$	$(0,5 \ 0 \ -0,4 \ 0)^T$	$(-0,3 \ 0 \ 0,2 \ 0)^T$	$(-0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$	$(-0,3 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$
Prueba 2	$(-0,3 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$	$(-0,2 \ 0 \ 0,25 \ 0)^T$	$(-1 \ 0 \ 0,1 \ 0)^T$	$(-0,3 \ 0 \ -0,1 \ 0)^T$	$(0,25 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$
Prueba 3	$(0 \ 0 \ -0,4 \ 0)^T$	$(0,5 \ 0 \ -0,3 \ 0)^T$	$(1 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$	$(-0,7 \ 0 \ 0,3 \ 0)^T$	$(-0,6 \ 0 \ 0,15 \ 0)^T$
Prueba 4	$(0,2 \ 0 \ 0,3 \ 0)^T$	$(-0,7 \ 0 \ -0,25 \ 0)^T$	$(-0,3 \ 0 \ -0,3 \ 0)^T$	$(0,5 \ 0 \ 0,25 \ 0)^T$	$(0,8 \ 0 \ -0,1 \ 0)^T$
Prueba 5	$(1 \ 0 \ 0,15 \ 0)^T$	$(0,7 \ 0 \ 0,2 \ 0)^T$	$(0 \ 0 \ 0,4 \ 0)^T$	$(-0,3 \ 0 \ 0 \ 0)^T$	$(-0,4 \ 0 \ -0,2 \ 0)^T$

de trayectoria con diferentes condiciones iniciales, las cuales se muestran en la Tabla 2. El objetivo es obtener una comparativa estadística. Se uso el criterio de la Integral del Error Cuadrático (ISE, por sus siglas en ingles) de los estados  $x_1$  (desplazamiento) con respecto a la señal emitida por el líder en cada prueba y se obtuvo un promedio. Se realizo el mismo procedimiento con el estado  $x_3$  (ángulo del péndulo). La Tabla 3 muestra los criterios ISE promedio de las 5 pruebas realizadas y la Figura 10 muestra la evolución del ISE promedio para los estados  $x_1$  y  $x_3$  de cada robot a través del tiempo.

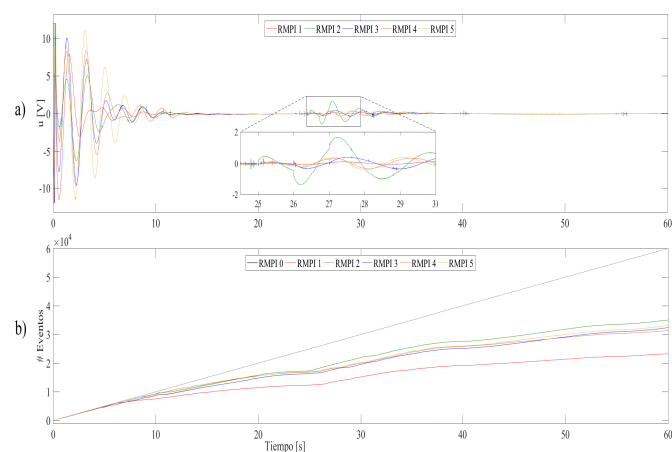


Figura 8: Respuesta de los controles de los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria.

Tabla 3: Promedio de los criterios ISE de las 5 pruebas, para una estrategia de Control en tiempo continuo (CTC) y Control Basado en Eventos (CBE)

	ISE Promedio $x_1$		ISE Promedio $x_3$	
	CTC	CBE	CTC	CBE
$RMPI_1$	3.0798	3.1002	0.0539	0.0549
$RMPI_2$	3.0137	3.0973	0.0418	0.0435
$RMPI_3$	2.7828	3.2782	0.0710	0.0808
$RMPI_4$	3.7854	3.9480	0.0672	0.0708
$RMPI_5$	4.2822	4.5283	0.1037	0.1104

Esta información indica que los errores obtenidos usando un control de consenso disparado por eventos (la transmisión de información entre agentes es asíncrona) son muy cercanos a los errores resultantes en un control de consenso en tiempo continuo (la transmisión de información entre agentes es continua). Lo anterior muestra que la técnica de control propuesta en este trabajo, consigue reducir el tráfico de datos y el gasto computacional y en consecuencia podría reducir el consumo de energía, todo ello sin sacrificar el desempeño del sistema.

## 6. Conclusiones

En este trabajo, un algoritmo de control colaborativo aplicado al problema de interacción entre varios robots tipo péndulo invertido es propuesto. Se verificó mediante resultados de simulación el desempeño del controlador. Se muestra que con un control distribuido es posible reducir el tráfico de información en una red de comunicación, sin degradar el desempeño del sistema en lazo cerrado. Como trabajo futuro se abordará la experimentación en tiempo real en un escenario controlado. Así mismo, se considerará una navegación en el plano mediante la adición del ángulo de dirección.

## Referencias

Ahmed, N., Cortes, J., Martinez, S., 2016a. Distributed control and estimation of robotic vehicle networks: Overview of the special issue. *IEEE Control Systems* 36 (2), 36–40.

Ahmed, N., Cortes, J., Martinez, S., 2016b. Distributed control and estimation of robotic vehicle networks: Overview of the special issue-part II. *IEEE Control Systems* 36 (4), 18–21.

Aström, K. J., Murray, R. M., 2010. *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton university press.

Brisilla, R., Sankaranarayanan, V., 2015. Nonlinear control of mobile inverted pendulum. *Robotics and Autonomous Systems* 70, 145 – 155.

Bullo, F., Cortés, J., Martinez, S., 2009. *Distributed Control of Robotic Networks: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms*. Princeton University Press.

Chung, T. L., Bui, T. H., Nguyen, T. T., Kim, S. B., Jul 2004. Sliding mode control of two-wheeled welding mobile robot for tracking smooth curved welding path. *KSME International Journal* 18 (7), 1094–1106.

Dimarogonas, D. V., Frazzoli, E., Johansson, K. H., 2012. Distributed event-triggered control for multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 57 (5), 1291–1297.

Durand, S., Marchand, N., Aug 2009. Further results on event-based pid controller. In: *Control Conference (ECC), 2009 European*. pp. 1979–1984.

Frías, O. O. G., 2013. Estabilización del péndulo invertido sobre dos ruedas mediante el método de lyapunov. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 10 (1), 30 – 36.

García, E., Cao, Y., Wang, X., Casbeer, D. W., July 2015. Decentralized event-triggered consensus of linear multi-agent systems under directed graphs. In: *2015 American Control Conference (ACC)*. pp. 5764–5769.

Ge, X., Han, Q. L., 2017. Distributed formation control of networked multi-agent systems using a dynamic event-triggered communication mechanism. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 64 (1), 1–11.

Grasser, F., D’Arrigo, A., Colombi, S., Rufer, A. C., Feb 2002. Joe: a mobile, inverted pendulum. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 49 (1), 107–114.

Guerrero Castellanos, J. F., Vega-Alonzo, A., Marchand, N., Durand, S., Linares-Flores, J., Mino-Aguilar, G., 2017. Real-time event-based formation control of a group of vtol-uavs. In: *Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Event-Based Control, Communication and Signal Processing (EBCCSP)*. Hal-01527633.

Guinaldo, M., Fábregas, E., Farias, G., Dormido-Canto, S., Chaos, D., Sánchez, J., Dormido, S., 2013. A mobile robots experimental environment with event-based wireless communication. *Sensors* 13 (7), 9396–9413.

Hebertt Sira-Ramírez, Alberto Luviano-Juárez, M. R.-N. E.-W. Z.-B., 2017. *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems*. Butterworth-Heinemann.

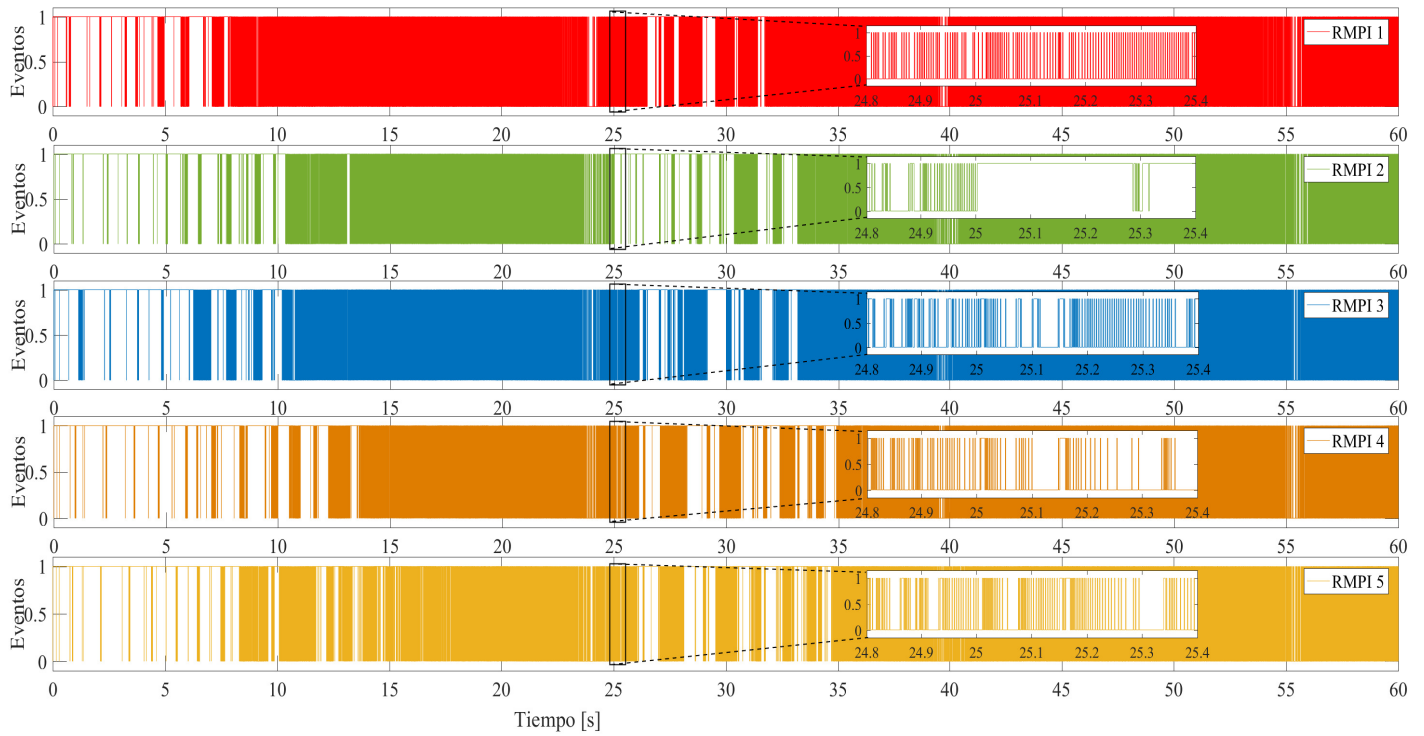


Figura 9: Eventos realizados por los 5 agentes para el seguimiento de trayectoria

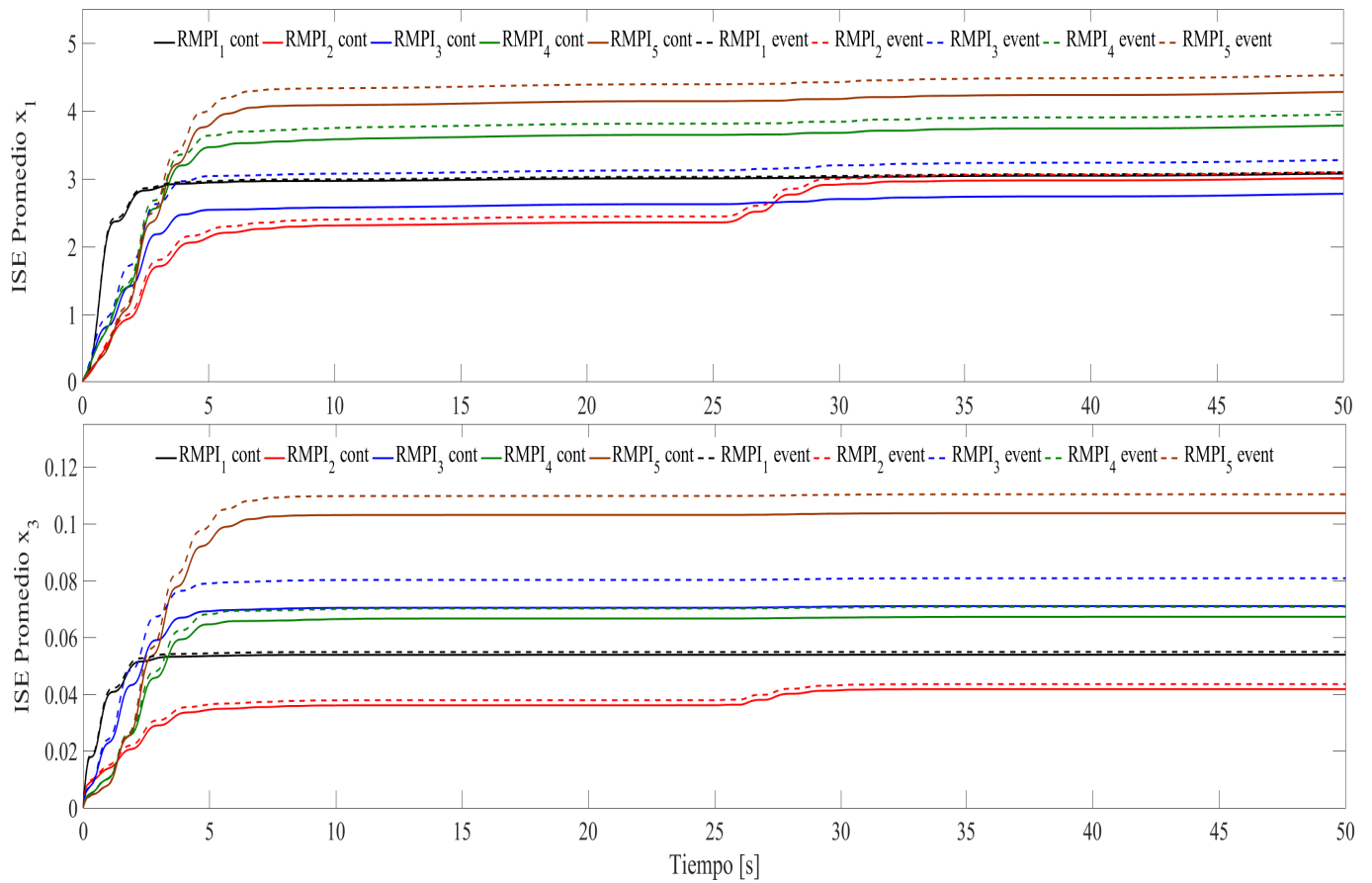


Figura 10: Integral del error cuadrático de las 5 pruebas

Lewis, F. L., Zhang, H., Hengster-Movric, K., Das, A., 2013. Cooperative control of multi-agent systems: optimal and adaptive design approaches. Springer Science & Business Media.

Li, Z., Yang, C., Fan, L., 2003. Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems. Springer-Verlag London.

Marchand, N., Durand, S., Guerrero-Castellanos, J. F., 2013. A general formula for event-based stabilization of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 58 (5), 1332–1337.

Müllhaupt, P., 2009. Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires. PPUR Presses polytechniques.

Olfati-Saber, R., Murray, R. M., 2004a. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 49 (9), 1520–1533.

Olfati-Saber, R., Murray, R. M., Sep. 2004b. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (9), 1520–1533. DOI: 10.1109/TAC.2004.834113

Pathak, K., Franch, J., Agrawal, S. K., June 2005. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. *IEEE Transactions on Robotics* 21 (3), 505–513.

Ren, W., Beard, R. W., 2008. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control. Springer.

Salerno, A., Angeles, J., Sept 2003. On the nonlinear controllability of a quasi-holonomic mobile robot. In: 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.03CH37422). Vol. 3. pp. 3379–3384 vol.3.

Sánchez, J., Guarnes, M., Dormido, S., 2009. On the application of different event-based sampling strategies to the control of a simple industrial process. *Sensors* 9, 6795–6818.

Sánchez-Santana, J., Guerrero-Castellanos, J., Villarreal-Cervantes, M., Ramírez-Martinez, S., 2018. Control distribuido y disparado por eventos para la formación de robots móviles tipo (3, 0)\*. In: Congreso Nacional de Control Automático.

Schinstock, D., McGahee, K., Smith, S., July 2016. Engaging students in control systems using a balancing robot in a mechatronics course. In: 2016 American Control Conference (ACC). pp. 6658–6663.

Segway, 2018. Segway human transporter. URL: <http://www.segway.com>

Seyboth, G. S., Dimarogonas, D. V., Johansson, K. H., 2013. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus. *Automatica* 49 (1), 245–252.

Sira-Ramírez, H., Agrawal, S. K., 2004. Differentially Flat Systems. Marcel Dekker, Inc.

Tabuada, P., 2007. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (9), 1680–1685.

Tsai, C. C., Li, Y. X., Tai, F. C., Sept 2017. Backstepping sliding-mode leader-follower consensus formation control of uncertain networked heterogeneous nonholonomic wheeled mobile multirobots. In: 2017 56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE). pp. 1407–1412. DOI: 10.23919/SICE.2017.8105661

Velasco, M., Martí, P., Bini, E., 2009. On Lyapunov sampling for event-driven controllers. In: Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on. IEEE, pp. 6238–6243.

Xie, D., Xu, S., Zhang, B., Li, Y., Chu, Y., 2016. Consensus for multi-agent systems with distributed adaptive control and an event-triggered communication strategy. *IET Control Theory Applications* 10 (13), 1547–1555.

Yamamoto, Y., 2009. Nxtway-gs model-based design.

Yang, D., Ren, W., Liu, X., Dec 2014. Decentralized consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs based on event-triggered/self-triggered strategy. In: 53rd IEEE Conference on Decision and Control. pp.

1983–1988.

Zhou, F., Huang, Z., Yang, Y., Wang, J., Li, L., Peng, J., 2017. Decentralized event-triggered cooperative control for multi-agent systems with uncertain dynamics using local estimators. *Neurocomputing* 237, 388 – 396.

### Apéndice A. Planitud Direfencial

Considere un RMPI representado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (A.1)$$

donde la matriz de medida  $C$  es calculada de tal forma que  $y$  represente la salida plana del sistema (Hebertt Sira-Ramírez (2017); Müllhaupt (2009)). De esta forma, el sistema puede ser parametrizado en función de  $y$ , mediante un cambio adecuado de variable. La manera en que las derivadas sucesivas de dicha salida plana fueron determinadas para el robot tipo péndulo invertido es la siguiente. Note que las entradas de control no influyen directamente a las salidas, es decir,  $y = Cx$ . Sin embargo, el sistema (6) indica que la entrada podría influir en las derivadas temporales de esta salida  $y$  (ver Müllhaupt (2009)). En efecto,  $\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu$ , de modo que si  $CB \neq 0$ , la entrada  $u$  influye directamente  $\dot{y}$ . En caso contrario se calcula las derivadas sucesivas hasta que la entrada de control influya. Considerando entonces  $C = (0 \ 0 \ 0 \ 1)\mathcal{K}^{-1}$ , resulta que  $CB = 0$ ,  $CAB = 0$ ,  $CA^2B = 0$  por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= C\dot{x} = CAx + CBu = CAx \\ \ddot{y} &= C\ddot{x} = CA\dot{x} = CA^2x + CABu = CA^2x \\ \dddot{y} &= C\dddot{x} = CA^2\dot{x} = CA^3x + CA^2Bu = CA^3x \\ \dots &= C\ddots = CA^3\dot{x} = CA^4x + CA^3Bu \end{aligned}$$

ya que  $CA^3B \neq 0$ , la entrada de control influye en la derivada temporal y el proceso finaliza. Además considerando la entrada de control de la forma

$$u = \frac{1}{C * A^3 B} (\ddot{y} - A^4 x) \quad (A.2)$$

resulta

$$\ddot{y} = \ddot{u} \quad (A.3)$$

Esto muestra que la salida  $y$  seleccionada es efectivamente la salida plana del RMPI y todo el sistema puede ser parametrizado en función de la variable  $y$ . Donde  $C$  resulta de (8) como:

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathcal{K}^{-1} = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{a_2 b_2 - b_1 a_5} \\ k_2 &= \frac{a_1 b_2^3 - a_1 b_1 b_2^2 + b_1 b_2^2 a_4 + b_1^2 b_2 a_4}{2a_1 b_1^3 b_2 a_4 a_5 - 2a_2 b_1 b_2^3 a_5 + a_2^2 b_2^3 - a_1^2 a_2 b_2^4 - b_1^4 a_2^2 a_5 + a_1^2 a_2 b_1 b_2^3 + a_2 b_1^2 b_2 a_4^2 + a_1^2 b_1 b_2^3 a_5 - b_1^3 b_2 a_4^2 a_5 - 2a_1 a_2 b_1^2 b_2^2 a_4 + b_1^2 b_2^2 a_5^2 + a_2 b_1^2 b_2^2 a_4^2 - a_1^2 b_1^2 b_2^2 a_5} \\ k_3 &= \frac{b_1^2 b_2 a_5 - a_2 b_1 b_2^2 + 2a_1 b_1 b_2^2 a_4 + a_1^2 b_2^3 + b_1^3 a_4^2 - a_1^2 b_1 b_2^2 + b_1^2 b_2 a_4^2}{2a_1 b_1^3 b_2 a_4 a_5 - 2a_2 b_1 b_2^3 a_5 + a_2^2 b_2^3 - a_1^2 a_2 b_2^4 - b_1^4 a_2^2 a_5 + a_1^2 a_2 b_1 b_2^3 + a_2 b_1^2 b_2 a_4^2 + a_1^2 b_1 b_2^3 a_5 - b_1^3 b_2 a_4^2 a_5 - 2a_1 a_2 b_1^2 b_2^2 a_4 + b_1^2 b_2^2 a_5^2 + a_2 b_1^2 b_2^2 a_4^2 - a_1^2 b_1^2 b_2^2 a_5} \\ k_4 &= \frac{a_1 b_1^2 b_2 - a_1 b_1 b_2^2 - b_1^3 a_4 - b_1^2 b_2 a_4}{2a_1 b_1^3 b_2 a_4 a_5 - 2a_2 b_1 b_2^3 a_5 + a_2^2 b_2^3 - a_1^2 a_2 b_2^4 - b_1^4 a_2^2 a_5 + a_1^2 a_2 b_1 b_2^3 + a_2 b_1^2 b_2 a_4^2 + a_1^2 b_1 b_2^3 a_5 - b_1^3 b_2 a_4^2 a_5 - 2a_1 a_2 b_1^2 b_2^2 a_4 + b_1^2 b_2^2 a_5^2 + a_2 b_1^2 b_2^2 a_4^2 - a_1^2 b_1^2 b_2^2 a_5} \end{aligned}$$