



**mr**  
manual de referencia

INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES

# TEORÍA DE VIGAS EN INGENIERÍA AEROESPACIAL

José L. Pérez Aparicio | Mario Lázaro

INGENIERÍA MECÁNICA  
Y MATERIALES



**Editorial**  
Universitat Politècnica  
de València

---

# Teoría de vigas en Ingeniería Aeroespacial

---

José L. Pérez Aparicio  
Mario Lázaro

*Colección Manual de Referencia*

Los contenidos de esta publicación han sido evaluados mediante el sistema *doble ciego*, siguiendo el procedimiento que se recoge en [http://bit.ly/Evaluacion\\_Obras](http://bit.ly/Evaluacion_Obras)

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Pérez Aparicio, J. L.; Lázaro, M (2019). *Teoría de vigas en Ingeniería Aeroespacial*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© José L. Pérez Aparicio  
Mario Lázaro

© 2019, Editorial Universitat Politècnica de València  
Venta: [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 0385\_03\_01\_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-818-8

Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

Impreso en España

# Índice

<b>Capítulo 1. Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2. Solicitaciones en vigas .....</b>	<b>3</b>
2.1 Flexión simple .....	3
2.1.1 Ejercicio viga hiperestática biempotrada.....	6
2.2 Energía de vigas .....	7
2.3 Teoremas energéticos de Castigliano.....	8
2.3.1 Ejercicio flecha viga voladizo $GH=0$ .....	10
2.3.2 Ejercicio reacciones viga empotrada-articulada $GH=1$ .....	13
2.3.3 Ejercicio flecha viga empotrada-articulada $GH=1$ .....	15
2.4 Plasticidad en flexión .....	18
2.4.1 Sección rectangular elasto-plástica .....	18
2.4.2 Factores .....	21
2.4.3 Esfuerzos residuales .....	21
2.4.4 Ejercicio elasto-plástico sección simétrica.....	22
2.4.5 Línea neutra .....	25
2.4.6 Ejercicio elasto-plástico sección no simétrica .....	26
2.4.7 Rótulas plásticas.....	29
2.4.8 Ejercicio viga empotrada-articulada con rótulas plásticas .....	30
2.5 Flexión compuesta.....	34
2.5.1 Ejercicio sección doble T .....	37
2.5.2 Ejercicio flexión sección Z.....	41

2.6 Cortante en flexión compuesta.....	45
2.6.1 Ejercicio área reducida cortante sección rectangular.....	49
2.6.2 Modelo de flexión de Timoshenko .....	50
2.7 Torsión .....	52
<b>Capítulo 3. Flujo de cortante en secciones de pared delgada .....</b>	<b>55</b>
3.1 Pared delgada: momentos de área.....	55
3.2 Flujo de cortante por torsión.....	57
3.2.1 Secciones abiertas .....	57
3.2.2 Secciones cerradas .....	58
3.2.3 Ejercicio cajón torsión simplificado .....	61
3.2.4 Secciones multicelulares.....	62
3.2.5 Ejercicio sección dos celdas.....	63
3.2.6 Cajones de torsión .....	65
3.3 Flujo de cortante .....	66
3.3.1 Ejercicio sección anular .....	68
3.3.2 Ejercicio sección Z .....	70
3.3.3 Ejercicios secciones rectangulares .....	74
3.3.4 Ejercicio sección ángulo .....	78
3.4 Centro de esfuerzos cortantes.....	81
3.4.1 <i>Cec</i> de sección abierta .....	82
3.4.2 Ejercicio <i>cec</i> sección U.....	83
3.4.3 Ejercicio <i>cec</i> sección U con alas inclinadas.....	87
3.4.4 Ejercicio sección anular abierta .....	90
3.4.5 <i>Cec</i> de sección cerrada.....	91
3.4.6 Ejercicio sección anular cerrada .....	94
3.4.7 Ejercicio sección punta de flecha .....	95
3.4.8 Ejercicio sección de dos celdas rectangulares.....	98

---

3.5 Pared delgada reforzada.....	105
3.5.1 Momento flujo constante.....	110
3.5.2 Ejercicio sección aerodinámica áreas concentradas.....	112
3.5.3 Ejercicio sección multicelular área concentrada.....	117
3.5.4 Ejercicio viga sección triangular áreas concentradas.....	124
<b>Capítulo 4. Movimientos en pared delgada.....</b>	<b>133</b>
4.1 Movimientos.....	134
4.2 Alabeo.....	136
4.2.1 Ejercicio alabeo viga voladizo bajo flexión y cortante.....	140
4.2.2 Alabeo por torsor en sección abierta.....	143
4.2.3 Ejercicio alabeo por torsor en sección doble T.....	145
4.2.4 Ejercicio alabeo por torsor en sección U.....	146
4.2.5 Alabeo por torsor en sección cerrada.....	149
4.2.6 Ejercicio torsión sin alabeo.....	151
4.2.7 Ejercicio alabeo sección rectangular cerrada.....	152
<b>Capítulo 5. Torsión mixta.....</b>	<b>157</b>
5.1 Equilibrio.....	158
5.2 Torsión mixta secciones abiertas.....	159
5.3 Torsión mixta secciones cerradas.....	161
5.4 Clasificación de la torsión mixta.....	162
5.5 Solución ecuación diferencial.....	164
5.6 Diagrama de torsión.....	164
5.7 Bimomento de sección abierta.....	168
5.8 Energías internas de deformación.....	172
5.9 Resumen de solicitaciones.....	175

5.10 Ejercicios.....	175
5.10.1 Viga voladizo: secciones rectangulares abierta y cerrada .....	175
5.10.2 Viga bihorquillada: sección doble T torsión alabeada pura.....	185
5.10.3 Viga bihorquillada: sección triangular abierta.....	192
<b>Bibliografía.....</b>	<b>201</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Las estructuras aeroespaciales, como otras cualquiera, deben ser diseñadas, analizadas y verificadas con conocimientos que incluyen la teoría estructural, de los materiales y la aplicación de esta información para operaciones de diseño fundamentales, proporcionar estimaciones de peso y otra información necesaria para las decisiones de ingeniería. Por ello los componentes estructurales aeroespaciales deben:

- resistir las cargas mecánicas y ambientales para soportar el rendimiento y la misión del vehículo aeroespacial del que forman parte.
- ser confiables durante todas las fases de la misión.
- tener mantenimiento y reparación fáciles.

Pero los vehículos aeroespaciales son sistemas complicados: la aeronave Boeing 767 tiene 3,1 millones de componentes interconectados con 85 millas de cableado suministradas al constructor por 1300 proveedores.

Además, estos componentes deben ser tan livianos como sea posible y fáciles de construir, ensamblar y mantener: el diseño estructural aeroespacial debe producir un peso mínimo y aeronavegable, ser parte de un sistema rentable y, sobre todo, seguro bajo una variedad de condiciones operativas, a menudo muy duras.

De hecho el avión fue la primera tecnología importante con el peso como una preocupación primordial, aunque hoy en día prácticamente todas las tecnologías deben incluir ese requerimiento, no solo por razones técnicas sino de consumo, mediomambientales etc. En cada etapa del diseño aeroespacial, se tiene que asumir la responsabilidad de predecir con exactitud cuánto pesará el avión. En parte por esta problemática, el material construcción de aviones más común es el aluminio (isótropo, elástico, pero no lineal), que no es un material exótico ya que cada año se



utiliza mucho más aluminio en latas de refrescos que en aviones y naves espaciales; sin embargo, nunca se usa titanio, berilio o magnesio en una lata de cerveza. Los materiales compuestos también han sido usados masivamente en los últimos 20 años pero debido al alto coste su aplicación se está reduciendo. La complejidad constitutiva de estos “composites” anisótropos hace que en los siguientes capítulos no se contemplen, basándose todos los desarrollos en piezas aluminio o materiales similares.

En este libro se aborda la parte más sencilla de la teoría estructural: la teoría de vigas; pero por los requerimientos mencionados esta teoría debe ser más precisa y sofisticada que la que se suele aprender en un curso de Resistencia de Materiales de Ingeniería general. En particular, las vigas tendrán secciones de pared delgada y a veces muy delgada.

El libro está dividido en cuatro capítulos:

- Flexión, cortante y torsión de vigas
- Flujo de cortante en pared delgada
- Movimientos generales en pared delgada
- Torsión mixta

El primero repasa conceptos de teoría general de vigas, como la ley de Navier o el teorema de Castigliano. En la resolución de vigas (incluso de longitud apreciable) a menudo aspectos como la influencia del cortante o del torsor en deformaciones y tensiones no pueden ser despreciados. Como las estructuras aeroespaciales deben soportar cargas muy superiores a las que producen fluencia en el material, el importante efecto de la plasticidad y las rótulas plásticas en vigas se estudian con detalle. Debido a las características de las secciones de vigas aeronáuticas (por ejemplo los perfiles NACA o los largerillos en Z) la flexión y el cortante debe ser asimétricos, considerando su producto de inercia.

El segundo se centra en secciones de pared delgada, con especial énfasis en el flujo de cortante debido a sollicitaciones cortante y torsión e incluyendo secciones multicelda. Un aspecto relevante en estas estructuras es la concentración de áreas en las esquinas, que simplifica en parte los (más bien complicados) cálculos.

Otro aspecto fundamental en el diseño de estructuras aeroespaciales es la coacción al alabeo, o movimiento en la dirección axil. En el tercer capítulo se desarrolla una cinemática que comprende todos los movimientos y que es más general que las hipótesis de Bernoulli–Euler o Timoshenko de vigas. Se especializa la formulación para movimientos producidos por la torsión, tanto en secciones cerradas como abiertas. Las funciones de alabeo obligan al cálculo de momentos de área nuevos.

Por último en el cuarto se estudian las tensiones y movimientos producidos por la flexión, el cortante y la torsión mixta en varios ejercicios completos.

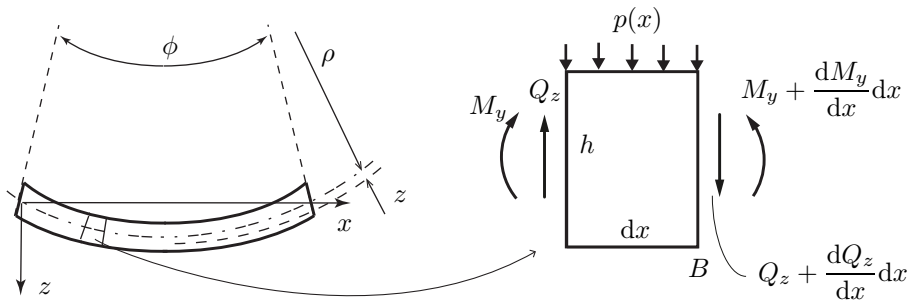
# Capítulo 2

## Solicitaciones en vigas

### 2.1 Flexión simple

El “movimiento” más representativo de flexión de vigas es la curvatura  $\kappa$  producida al aplicar momentos flectores, Fig. 2.1 izquierda. Esta curvatura (en dos planos) se define como la inversa del radio de curvatura,  $|\kappa| = 1/\rho$  ver la Ec. (2.2) para el  $x - z$ ; las dos funciones dependen solo de  $x$ , igual que los movimientos/giros.

Siguiendo la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, todas las funciones sollicitación (axil  $N$ , flector  $M$ , cortante  $Q$ , torsor  $T$ ) dependen solo de  $x$ , y entonces también las tensiones  $\sigma, \tau$  y deformaciones  $\epsilon, \gamma$ . Pero los dos últimos pares también lo son de alguna coordenada  $y, z$  de la sección, lo cual los hace complicados de estudiar.



**Figura 2.1:** Flexión simple de viga y equilibrio diferencial de sollicitaciones.

En la flexión, la línea en la que la única tensión normal  $\sigma_x$  es nula y en donde cambia de signo se llama línea neutra ( $LN$ ) y pasa por el centro de gravedad ( $cdg$ ) de la sección  $y - z$ .

Siendo este un problema unidimensional (1D), la ecuación constitutiva para deformaciones longitudinales  $\epsilon_x$  es la ley de Hooke con  $E$  el módulo de Young,  $\nu$  el coeficiente de Poisson y  $G$  y el módulo cortante (también llamado de cizalladura):

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.1)$$

Considérese en la Fig. 2.1 izquierda la  $LN$  de longitud de arco  $L = \rho\phi$  y otra línea paralela a la  $LN$  en el lado positivo de  $z$  (notado por  $z+$ ) de arco  $L' = (\rho + z)\phi$ : el incremento en  $L'$  dividido por  $L$  define la deformación  $\epsilon_x$  y la única ecuación cinemática de vigas. Para una sección  $y - z$  cualquiera definida por  $x$  constante:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{(\rho + z)\phi - \rho\phi}{\rho\phi} = \frac{z}{\rho} := -\kappa z \Rightarrow \epsilon_x = \frac{z}{h}\epsilon_{mx} \Rightarrow \sigma_x = \frac{z}{h}\sigma_{mx} \quad (2.2)$$

donde  $h$  es el “canto” (altura) de la viga y la base  $dx$  la longitud del elemento diferencial, ver Fig. 2.1 derecha (no a escala). En la equivalencia de  $\epsilon_x$  con  $\kappa$  se ha debido incluir un signo negativo ya que en este plano el centro de curvatura está en el lado de  $z$  negativo (notado por  $z-$ ).

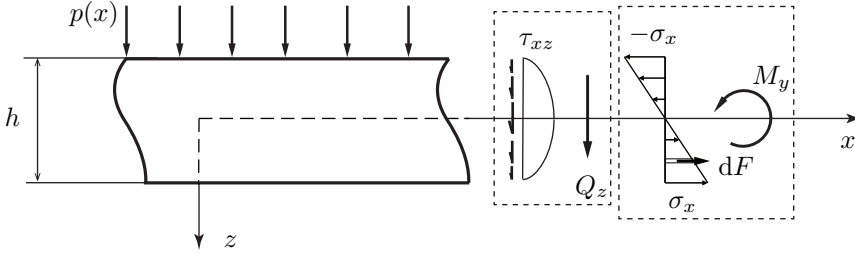
Los signos positivos de los parámetros se han elegido para que la flexión produzca tracciones en  $z+$  y compresiones en  $z-$ , de forma que el signo es controlado por  $z$ . Las distribuciones de  $\epsilon_x$ ,  $\sigma_x$  son lineales con cero en la  $LN$ , positiva en  $z+$  (alargamientos) y negativa en  $z-$  (acortamientos): para cualquier  $z$ , se puede expresar  $|\epsilon_x|$  en función de la máxima  $|\epsilon_{mx}|$  en  $z = \pm h$ . A través de la ecuación constitutiva la misma relación lineal se observa para las tensiones  $\sigma_x$  en la Fig. 2.2.

Las fuerzas horizontales equivalentes de la distribución de  $\sigma_x$  se autoequilibran pero no así su momento, que es precisamente el flector  $M_y$ , tendiendo a producir un giro antihorario. Multiplicando cada diferencial de fuerza  $dF = \sigma_x dA$  por su brazo  $z$  (Fig. 2.2), integrando sobre el área de la sección y substituyendo dos veces la última Ec. (2.2) se obtiene la ley de Navier:

$$M_y = \int_A z \underbrace{\sigma_x}_{\frac{\sigma_{mx}}{h}z} dA = \frac{\sigma_{mx}}{h} \int_A z^2 dA = \frac{\sigma_{mx}}{h} I_y \Rightarrow \sigma_{mx} = \frac{M_y h}{I_y} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z} \quad (2.3)$$

Según la Fig. 2.2, existe otra relación llamada de Collignon para esfuerzos cortantes y tensiones cortantes, que se estudiará con detalle en la Sección 2.6.

La incógnita básica del problema (de ella se deducen todas las demás) es el desplazamiento  $w(x)$  en dirección  $z$  producido por las fuerzas externas; este desplazamiento a menudo se llama “flecha” por razones históricas relacionadas con resolución de vigas por métodos gráficos. Su primera derivada  $w_{,x}$  es la pendiente de la función deformada y la segunda  $w_{,xx}$  es  $\kappa$ .



**Figura 2.2:** Vista lateral de viga bajo carga uniforme  $p$ : equivalencia de tensión cortantes y normales con sollicitación cortante y momento flector en borde de coordenada  $x$  constante.

Combinando la primera Ec. (2.1) con las Ecs. (2.2), (2.3) y desarrollando se obtiene la relación momento-curvatura:

$$M_y = \frac{EI_y}{\rho} = -\kappa EI_y := -EI_y w_{,xx} \equiv -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.4)$$

donde  $EI_y$  es la rigidez a flexión de vigas en el plano  $x - z$  y donde se demuestra que el flector es proporcional a la segunda derivada de la flecha  $w_{,xx}$ .

La Ec. (2.4) permite calcular  $w$  si se tiene la función  $M_y(x)$  del diagrama de momentos flectores, un proceso de equilibrio global de la viga. Para obtener una ecuación con una sola incógnita, de la Fig. 2.1 derecha se puede aplicar el equilibrio diferencial de fuerzas verticales (proceso de equilibrio local) y el de momentos con respecto a la esquina  $B$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_z = 0 \Rightarrow p \, dx - Q_z + Q_z + \frac{dQ}{dx} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dQ_z}{dx} = -p} \\ \zeta \sum M_y|_B = 0 \Rightarrow p \, dx \frac{dx}{2} - Q_z dx - M_y + M_y + \frac{dM_y}{dx} dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM_y}{dx} = Q_z} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Ambas ecuaciones deberían estar factorizadas por  $dy$  ya que las sollicitaciones se definen por unidad de profundidad, aunque este término se simplifica al dividir el 0. En la segunda ecuación se ha despreciado el término con  $dx^2 \ll dx$ .

La primera Ec. (2.5) indica que la variación del cortante equilibra a las cargas externas distribuidas  $p(x)$  y la segunda que la variación del flector equilibra al cortante. De estas dos expresiones más la Ec. (2.4) se puede deducir que el cortante es proporcional a  $w_{,xxx}$ , lo que se usará en la siguiente Sección 2.2:

$$Q_z = -EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \equiv -EI_y w_{,xxx} \quad (2.6)$$

Eliminando ahora  $Q_z$  de las Ecs. (2.5) y substituyendo la Ec. (2.4):

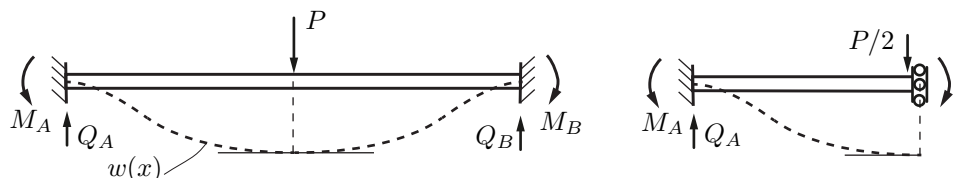
$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -p \Rightarrow \boxed{EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} - p(x) = 0} \quad (2.7)$$

La Ec. (2.7) es una ecuación diferencial ordinaria lineal y con coeficientes constantes que para vigas sencillas se puede integrar directamente usando solo las condiciones de contorno (C.C.) en los extremos de la viga.

### 2.1.1 Ejercicio viga hiperestática biempotrada

Se busca la función de la flecha de una viga de longitud  $L$  dibujada en la Fig. 2.3 mediante integración directa de la Ec. (2.7). Se puede analizar la mitad de esta viga aprovechando la simetría según la figura derecha: se dispone una corredera en el centro que permite desplazamiento vertical, y aparece un flector reacción (nueva incógnita) correspondiente al máximo de la viga completa. La parte de fuerza externa que corresponde a la semiviga es la mitad.

En este caso la dificultad de cálculo es similar para la viga completa y para la semiviga, por lo que para ilustrar el método se resolverá la primera.



**Figura 2.3:** Viga biempotrada con carga puntual en el medio y sus reacciones. Derecha: mitad simétrica equivalente.

La viga es hiperestática de grado 2 ( $GH = 2$ ) ya que tiene 4 reacciones, pero debido a la simetría  $GH = 1$  ya que  $Q_A = Q_B = P/2$ ;  $M_A = M_B$  es desconocido y en el método general se calcula de alguna ecuación adicional a las dos de la estática. Ya que la carga repartida es  $p = 0$  en la primera mitad de la viga la ecuación diferencial es  $EI_y w_{,xxxx} = 0$ ; integrando cuatro veces:

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad EI_y w_{,xxx} = C_1 \\ ii) \quad EI_y w_{,xx} = C_1 x + C_2 \\ iii) \quad EI_y w_{,x} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ iv) \quad EI_y w = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Particularizando estas C.C. en el empotramiento  $A$  izquierdo y recuperando las Ecs. (2.4), (2.6):

$$\left\{ \begin{array}{llll} i) & Q_A = Q_z(0) = \frac{P}{2} & = -EI_y w_{,xxx} & \Rightarrow C_1 = -\frac{P}{2} \\ ii) & M_A = -M_y(0) & = -EI_y w_{,xx} & \Rightarrow C_2 = M_A \\ iii) & w_{,x}(0) & = 0 & \Rightarrow C_3 = 0 \\ iii) & w_{,x}\left(\frac{L}{2}\right) & = 0 & \Rightarrow M_A = \frac{PL}{8} \\ iv) & w(0) & = 0 & \Rightarrow C_4 = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Nótese que en la primera C.C. el cortante es positivo según el diagrama de esfuerzos cortantes, y en la segunda el momento es negativo en el diagrama de flectores. También, que por simetría se ha aplicado la C.C. *iii*) dos veces lo que permite hallar además de la función flecha el flector reacción. Substituyendo las constantes en la última Ec. (2.8) y para  $0 \leq x \leq L/2$ :

$$w(x) = \frac{P x^2}{48EI_y} (3L - 4x) \quad (2.10)$$

Con esta función se calcula fácilmente la flecha en cualquier sección de la viga y derivando con respecto a  $x$  los giros. Con derivadas superiores se pueden calcular las funciones flectores y cortantes (Ecs. (2.4), (2.6)) también en cualquier sección incluyendo los apoyos, y dibujar los diagramas de cortantes y momentos sin necesidad de aplicar equilibrio y ecuaciones adicionales. Las soluciones en la segunda mitad de la viga es simplemente la simétrica o antisimétrica de la Ec. (2.10).

## 2.2 Energía de vigas

La integración directa del ejercicio anterior a menudo es difícil de desarrollar cuando  $GH > 1$  y sobre todo cuando la viga no tiene simetrías. El complemento de las dos ecuaciones de la estática se puede conseguir de un teorema energético como los de Castigliano que se aplican sin demostrar en la sección siguiente.

Se definen las energías debidas a solicitaciones axil, flector y cortante. Para todo cuerpo elástico de volumen  $\Omega$ , la energía interna completa es:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \, d\Omega \quad (2.11)$$

en donde el factor  $1/2$  procede de la hipótesis de aplicación lenta de carga.

La tensión normal  $\sigma_x$  puede proceder de la sollicitación axil  $N_x$  y de los momentos  $M_y$ ,  $M_z$  para flexión compuesta en dos planos. La energía es cuadrática y siempre positiva, por lo que el signo de estos flectores (ver Sección 2.5) no influye en los resultados. Dada la geometría 1D de las vigas y el hecho que las sollicitaciones son constantes en su sección, la integral anterior se puede descomponer en área  $A$  y longitud, incluso para secciones no constantes en  $x$ . Para material lineal elástico que sigue la primera Ec. (2.1):

$$\begin{aligned}
 U_a &= \frac{1}{2} \int_A \int_0^L \frac{\sigma_x^2}{E} dx dA = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N_x^2}{EA^2} A dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N_x^2}{EA} dx \\
 U_{bz} &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y^2} dx \int_A z^2 dA = \boxed{\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx} \\
 U_{by} &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z^2} dx \int_A y^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

en donde  $EA$  es la rigidez a axil; la ley de Navier y la ecuación cinemática en el plano  $x - y$  de la última expresión se deducirán en la Sección 2.5. Nótese que el integrando final de la segunda ecuación es el producto  $-M_y \kappa$  según la Ec. (2.4), es decir, la energía también es proporcional al flector multiplicado por el giro que produce. En las secciones siguientes se usará indistintamente la notación  $U_b$  en cada uno de los planos.

La contribución de  $\tau_{xz}$  a la energía (también la de  $\tau_{xy}$ ) no es tan directa de calcular: hace falta una relación entre esta tensión y  $Q_z$ , lo que se desarrollará en la Sección 2.6. De momento se anticipa que se llegará a una expresión con la misma forma que las anteriores, pero con rigidez a cortante  $GA_z$ , en donde aparece un área reducida de cortante a calcular para cada sección (Sección 3.3). Si se asume un promedio  $\tau_{xz} := Q_z/A_z$  la forma de esta energía es similar a la de la sollicitación axil:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \int_0^L \frac{\tau_{xz}^2}{G} dx dA := \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Q_z^2}{GA_z} dx \tag{2.13}$$

### 2.3 Teoremas energéticos de Castigliano

Dos son los resultados principales que estos teoremas proporcionan: los movimientos en un punto particular de cualquier viga y las reacciones en vigas hiperestáticas, todo ello conociendo las funciones de los momentos flectores.

Para las reacciones, se eligen tantas redundantes (agrupadas en el símbolo  $\mathcal{R}$ ) como el número GH y se eliminan los soportes que producen estas reacciones. Se

describe primero una viga isostática bajo sus cargas externas –estado llamado [0]– y la misma viga bajo las reacciones tratadas como fuerzas externas desconocidas –estado [1]–; ya que los soportes relacionados a estas reacciones han sido liberados, las  $\mathcal{R}$  también producen energía pero solo en [1].

El segundo teorema establece que la variación de la energía interna con respecto a cualquier fuerza externa es igual al desplazamiento que produce esa fuerza. Como para la viga real (superposición de [0] y [1]) en el apoyo redundante el movimiento es nulo, se obtiene la ecuación extra buscada en la última Ec. (2.14).

Los diagramas de momentos y cortantes del estado [0] pueden ser directamente calculados, y los del [1], se construyen substituyendo  $\mathcal{R}$  por una fuerza o momento unidad del mismo signo y multiplicando los diagramas resultantes por el módulo de  $\mathcal{R}$ . Entonces, para un flector en el plano  $x - z$  (en el otro plano se operaría igual y de forma desacoplada) las funciones de  $x$  completas son:

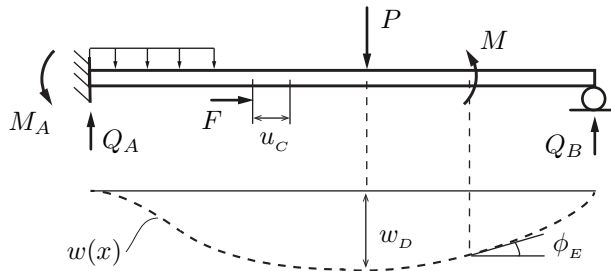
$$M_y = M_y^{[0]} + \mathcal{R} M_y^{[1]}; \quad Q_z = Q_z^{[0]} + \mathcal{R} Q_z^{[1]}; \quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial \mathcal{R}} = 0} \quad (2.14)$$

Con estas funciones se calculan las energías de las Ecs. (2.12), (2.13) y con la derivada de la última ecuación anterior se puede despejar  $\mathcal{R}$ , ver el Ejercicio 2.3.2. Normalmente habrá que dividir las integrales en varios tramos debido a discontinuidades inherentes a apoyos, fuerzas o momentos puntuales.

Una vez obtenida(s) la(s) reacción(es) se puede volver a las dos primeras Ecs. (2.14) y dibujar los diagramas finales de flectores y cortantes, que sirven de estado inicial para el cálculo de desplazamientos, ver el Ejercicio 2.3.3. Otra vez del segundo teorema:

$$u_c = \frac{\partial U_a}{\partial F}; \quad w_D = \frac{\partial U_b}{\partial P}; \quad \phi_E = \frac{\partial U_b}{\partial M} \quad (2.15)$$

donde los movimientos y el giro pueden observarse en la conceptual Fig. 2.4 para una viga GH = 1.



**Figura 2.4:** Viga hiperestática grado 1 bajo varias cargas conceptuales.

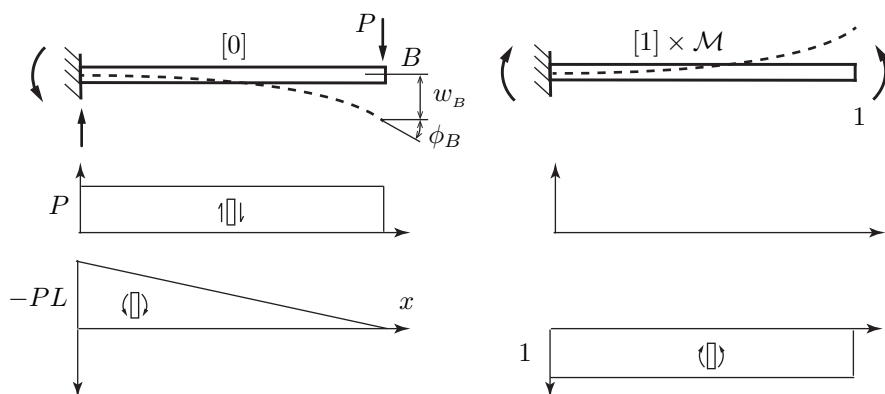


### 2.3.1 Ejercicio flecha viga voladizo $\text{GH} = 0$

Se pretende calcular la flecha  $w$  y giro  $\phi_y$  en el plano  $x - z$  y en el extremo libre  $B$  de la viga isostática en voladizo de longitud  $L$  y área  $A$  de la Fig. 2.5.

#### Cálculo flecha

Para  $w_B$  el cálculo es bastante simple ya que el movimiento es en la misma dirección y sentido que la fuerza externa  $P$ ; además el estado [0] es el único necesario y directamente el de la viga original.



**Figura 2.5:** Viga en voladizo isostática bajo carga puntual en extremo. Izquierda caso real, derecha caso ficticio para cálculo giro.

Con el cambio de variable  $\xi = x/L$ , las funciones relacionadas con los diagramas de la figura izquierda son:

$$M_y(\xi) = -P(L - x) = -PL(1 - \xi); \quad Q_z(\xi) = P \quad (2.16)$$

Las energías de flexión y de cortante de las Ecs. (2.12), (2.13) y la flecha son:

$$U(P) = U_b + U_c = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2 L^2 (1 - \xi)^2}{EI_y} (d\xi L) + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2}{GA_z} (d\xi L)$$

$$w_B = w_b + w_c = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI_y} + \frac{PL}{GA_z} = \frac{PL^3}{3EI_y} \left( 1 + \frac{3EI_y}{L^2 GA_z} \right) := w_b (1 + \alpha) \quad (2.17)$$

Las dos contribuciones de la flecha se dibujan conceptualmente en la Fig. 2.6 para un elemento diferencial  $dx$ . La integral entre  $0, L$  de los diferenciales  $dw_b, dw_c$  es la expresión de la segunda Ec. (2.17).

**Para seguir leyendo haga click aquí**