



mr
manual de referencia

INGENIERÍA MECÁNICA Y MATERIALES

TEORÍA DE PLACAS Y LÁMINAS EN INGENIERÍA AEROSPAZIAL

José L. Pérez Aparicio

INGENIERÍA MECÁNICA
Y MATERIALES



Editorial
Universitat Politècnica
de València

Teoría de placas y láminas en Ingeniería Aeroespacial

José L. Pérez Aparicio



Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección Manual de Referencia

Los contenidos de esta publicación han sido evaluados mediante el sistema *doble ciego*, siguiendo el procedimiento que se recoge en http://bit.ly/Evaluacion_Obras

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Pérez Aparicio, J. L.; (2019). *Teoría de placas y láminas en Ingeniería Aeroespacial*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© José L. Pérez Aparicio

© 2019, Editorial Universitat Politècnica de València
Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0533_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-662-7

Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Índice general

Índice general	III
1 Introducción	1
I Análisis de placas	5
2 Placas rectangulares bajo flexión	7
2.1 Introducción	7
2.2 Ecuaciones de gobierno	8
2.2.1 Ecuaciones cinemáticas y constitutivas	8
2.2.2 Solicitaciones	9
2.2.3 Signos y equilibrio	11
2.2.4 Tensiones	13
2.3 Condiciones de contorno	13
2.3.1 Cortante equivalente y fuerzas de esquina	15
2.4 Flexión y torsión pura de placas	17
2.4.1 Flexión pura	17
2.4.2 Torsión pura	21
2.5 Solución de Navier 1820	22
2.5.1 Ejercicio carga transversal uniforme, 4 articulaciones	26
2.5.2 Ejercicio carga puntual y distribución, 4 articulaciones	31
2.5.3 Ejercicio línea de carga vertical, 4 articulaciones	33
2.5.4 Ejercicio momento puntual, 4 articulaciones	35
2.5.5 Ejercicio línea de momentos, 4 articulaciones	36

2.6 Método de Lévy 1900	37
2.6.1 Ejercicio carga transversal uniforme, 4 articulaciones	39
2.6.2 Ejercicio carga triangular, 4 articulaciones	41
2.6.3 Ejercicios momentos distribuidos en borde	42
2.7 Método de la energía.	44
2.7.1 Ejercicio carga transversal uniforme, 4 articulaciones	46
2.7.2 Ejercicio fuerza puntual 4 articulaciones	47
2.7.3 Ejercicio carga transversal uniforme, 4 empotramientos	48
2.8 Solución de Ritz 1890	51
2.8.1 Ejercicio carga transversal uniforme, varias C.C.	53
2.9 Solución de Galerkin 1915	55
2.9.1 Ejercicio carga transversal uniforme, 4 empotramientos	57
3 Pandeo de placas rectangulares	61
3.1 Energía de flexión por solicitaciones en el plano	61
3.1.1 Ejercicio fuerza puntual transversal y compresión en x , 4 articulaciones	63
3.2 Ecuación diferencial flexión con solicitaciones en plano	64
3.2.1 Ejercicio carga transversal y tracción en x, y , 4 articulaciones	66
3.3 Pandeo	68
3.3.1 Curvatura inicial	68
3.3.2 Ejercicio pandeo compresión en x , 4 articulaciones	70
3.3.3 Ejercicio pandeo compresión en x, y , 4 articulaciones	73
3.3.4 Ejercicio pandeo cortante, 4 articulaciones	75
3.3.5 Compresión x , condiciones contorno varias	82
4 Análisis de placas circulares	87
4.1 Ecuaciones de gobierno	87
4.2 Solución ecuación gobierno.	90
4.2.1 Ejercicio carga constante, empotramiento exterior	91
4.2.2 Ejercicio carga puntual centro, empotramiento exterior.	94
4.2.3 Ejercicio carga constante, articulada exterior	97
4.2.4 Ejercicio carga constante, empotrada $r = b$ y articulada $r = 0$	98
4.2.5 Ejercicio placa anular carga constante, empotrado $r = a$ y articulado $r = b$	99
4.2.6 Ejercicio placa anular bajo corona de momentos, libre $r = a$ y articulado $r = b$	101
4.2.7 Ejercicio carga discontinua, empotrado exterior	102

II	Análisis de láminas	107
5	Láminas membrana y flexión	109
5.1	Geometría de láminas de revolución	109
5.2	Cilindro axisimétrico	113
5.2.1	Solución de membrana cilindros	113
5.2.2	Ejercicio cilindro suspendido. Solución membrana	116
5.2.3	Ejercicio membrana depósito cilíndrico empotrado	117
5.2.4	Solución de flexión cilindros	118
5.2.5	Ejercicio flexión depósito cilíndrico empotrado	127
5.2.6	Ejercicio depósito cilíndrico articulado fijo	132
5.2.7	Ejercicio depósito cilíndrico y placa circular semirrígida	134
5.2.8	Soluciones de membrana y flexión para aro	137
5.3	Cono axisimétrico	138
5.3.1	Solución de membrana	139
5.3.2	Ejercicio radome bajo peso propio	142
5.3.3	Singularidades en cono	145
5.3.4	Ejercicio cono bajo peso propio, sujeción en vértice	146
5.3.5	Solución de flexión conos	147
5.4	Elipsoides axisimétricos	150
5.5	Solución de membrana elipsoides	150
5.5.1	Ejercicio membrana cúpula esférica bajo peso propio	157
5.5.2	Ejercicio membrana cúpula esférica carga aerodinámica	161
5.5.3	Singularidad en elipsoide	162
5.5.4	Ejercicio membrana cúpula semiesférica peso propio + circunferencia fuerzas en abertura superior	163
5.5.5	Casquete espesor variable	165
5.5.6	Tapa recipiente elipsoidal a presión	166
5.5.7	Ejercicio membrana recipiente presión cilindro-semiesfera	167
5.6	Solución de flexión esferas	169
5.6.1	Ejercicio flexión cúpula esférica peso propio	175
5.6.2	Ejercicio esfera fuerza circunferencial en ecuador	179
5.6.3	Ejercicio recipiente a presión cilindro-semiesfera	182
5.6.4	Ejercicio recipiente a presión cilindro-casquete	188
5.6.5	Diseño tecnológico	195
	Bibliografía	197

Índice de cuadros

2.1. Equivalencia de derivadas incógnita flecha (desplazamiento vertical en z).	14
2.2. Condiciones de contorno en bordes de placa rectangular: geométricas $w/w_{,n}$ o de fuerza $w_{,nn}/w_{,nnn}$. La dirección n puede ser x o y ; t es su perpendicular.	14

Índice de figuras

2.1. Placa rectangular: plano medio $z = 0$, caras superior e inferior definidas por planos $z = \pm h/2$, bordes definidos por planos x o y constante.	7
2.2. Vista lateral de placa bajo carga uniforme q : equivalencia de tensiones y momentos flectores en borde de coordenada n (x o y) mayor.	9
2.3. Signos de esfuerzos: fuerzas y momentos por unidad de profundidad para un elemento diferencial de placa en coordenadas cartesianas. Figura no a escala.	12
2.4. Equivalencia entre momentos torsores distribuidos y variables, y pares de fuerzas en longitudes diferenciales.	15
2.5. Distribución cortantes equivalentes y momentos torsores en bordes placa; 4 articulaciones bajo fuerza puntual. Fuerzas de esquina positivas, cortantes negativos.	17
2.6. Placa sin soportes y en flexión pura bajo momentos flectores prescritos uniformes en los cuatro bordes.	18
2.7. Para Fig. 2.6, caso de carga $M_x = M_y = M$ y distribución de flecha.	19
2.8. Para Fig. 2.6, caso de carga $-M_x = M_y = M$ y distribución de flecha.	20
2.9. Para Fig. 2.6, caso de carga $M_x = M$ y distribución de flecha.	20
2.10. Caso de carga $M_x = M$, $M_y = \nu M$ y distribución de flecha.	21
2.11. Caso de carga $M_{xy} = M$ y distribución de flecha.	21
2.12. Placa con 4 articulaciones bajo carga transversal arbitraria para solución de Navier.	22

2.13. Trasformada de Fourier para carga triangular con 128 términos no nulos.	24
2.14. Siete modos de las series dobles de Fourier, simétricos, parcialmente antisimétricos y totalmente antisimétricos.	25
2.15. Placa bajo carga transversal uniforme q_0 , 4 articulaciones.	26
2.16. Distribución de flecha y solicitaciones bajo carga uniformemente distribuida, placa con 4 articulaciones (Fig. 2.15).	27
2.17. Placa bajo carga puntual en coordenadas ξ_0, η_0 , 4 articulaciones.	31
2.18. Función de Green $\mathcal{K}(x, y; 3a/4, b/2)$ (distribución de flecha) bajo carga puntual (Fig. 2.17) y un alto número de términos.	32
2.19. Equivalencia de carga repartida en parte de placa a elemento diferencial paralelepípedo y de éste a una fuerza puntual. 4 articulaciones.	32
2.20. Placa bajo carga repartida lineal en x constante, 4 articulaciones.	33
2.21. Distribución de flecha bajo carga lineal constante en centro placa Fig. 2.20.	34
2.22. Placa rectangular con momento puntual en un plano $x-z$, 4 articulaciones. Detalle de par de fuerzas equivalente.	35
2.23. Distribución de flecha bajo el momento puntual en el centro (Fig. 2.22).	36
2.24. Placa con momentos repartidos a lo largo de x constante, 4 articulaciones. Detalle de par de distribuciones $q(y)$ iguales pero de signo contrario y equivalentes a $M(y)$	36
2.25. Placa y método Lévy: bordes $x = 0, a$ articulados e $y = \pm b/2$ cualquiera.	38
2.26. Placa bajo carga transversal uniforme, 4 articulaciones.	40
2.27. Flecha bajo carga uniformemente distribuida.	41
2.28. Placa bajo carga transversal triangular, 4 articulaciones.	41
2.29. Flecha con carga triangular, máxima en $x = a$	42
2.30. Geometría de placa con momentos distribuidos en bordes.	42
2.31. Flecha de placa con momentos distribuidos constantes en bordes y y simétricos.	43
2.32. Placa empotrada bajo carga transversal uniforme, 4 empotramientos.	48

2.33. Distribución flecha bajo carga transversal constante, 4 empotramientos Fig. 2.32.	50
2.34. Distribución de momentos flector, torsor y de cortante en dirección x para placa empotrada Fig. 2.32.	51
2.35. Placa (vista cenital) bajo carga transversal uniforme q_0 , articulaciones enfrentadas en bordes y , empotrada-libre en bordes x constante.	53
2.36. Distribución de momento flector, torsor y cortante en x (erróneas las dos últimas) para condiciones de contorno de Fig. 2.35 y función de prueba Ec. (2.103).	54
2.37. Flecha en línea media $w(x, 0) \times 10^{-4}$ adimensionalizada de placa empotrada bajo carga uniforme. Línea continua: solución trigonométrica, discontinua: polinómica.	59
3.1. Carga transversal y solicitaciones “en el plano” sobre este plano medio de una placa. Elemento diferencial $dx dy$ en gris.	61
3.2. Izquierda: acortamiento de placa con q_0 presente cuando N_x ya ha sido aplicada y se alcanza equilibrio. Derecha: diferencial de línea neutra.	62
3.3. Equilibrio de solicitaciones para un elemento diferencial en el plano $x - y$ de la placa.	64
3.4. Elemento diferencial de placa de la Fig. 3.2 en configuración deformada bajo flexión y bajo tracciones en sus extremos, dibujando sus proyecciones.	65
3.5. Placa (vista cenital) con 4 articulaciones bajo carga transversal constante q_0 y solicitaciones en el plano de dos tracciones.	67
3.6. Placa con curvatura inicial, carga transversal uniforme y solicitación tracción en dirección x , 4 articulaciones.	69
3.7. Factor de carga y semiondas de pandeo (mínima solicitación adimensionalizada o carga del primer modo) para diferentes ratios de lados a/b	72
3.8. Tres primeros modos de pandeo para compresión biaxial uniforme y placa con 4 articulaciones.	74
3.9. Placa con 4 articulaciones bajo solicitación cortante.	75

3.10. Carga crítica de pandeo adimensional vs ratio de lados en placa articulada bajo cortante. Elementos finitos, círculos, Ritz con varios términos y aproximación.	79
3.11. Cuatro modos de pandeo (en realidad dos) para placa Fig. 3.9. Primera columna $N_{xy} > 0$, segunda $N_{xy} < 0$	81
3.12. Placa con varias condiciones de contorno bajo sollicitación compresión.	82
3.13. Tres posibles modos de pandeo para placa Fig. 3.12.	84
3.14. Esquema de panel aeronáutico: piel aerodinámica con largerillos remachados de sección Z.	84
4.1. Transformación entre coordenadas rectangulares y polares para placa circular de radio exterior a	88
4.2. Sollicitaciones sobre elemento diferencial de placa circular en coordenadas polares. Derivadas con respecto a θ son nulas por axisimetría.	89
4.3. Proyecciones de sollicitaciones circunferenciales sobre caras rectas de elemento diferencial. Derecha: equilibrio de fuerzas circunferenciales.	90
4.4. Placa circular compacta y empotrada en su borde exterior bajo carga vertical uniforme distribuida.	91
4.5. Deflexión de placa circular empotrada bajo carga uniforme distribuida.	93
4.6. Tensiones circunferenciales σ_θ y radiales σ_r para placa circular Fig. 4.4. En círculos, tensión equivalente de Von Mises.	94
4.7. Placa circular empotrada bajo carga puntual.	94
4.8. Equilibrio de fuerzas de una porción circular interna a la placa $r \leq a$ con carga puntual en centro.	95
4.9. Deflexión de placa circular empotrada bajo carga puntual en centro.	96
4.10. Placa circular articulada bajo carga uniforme distribuida.	97
4.11. Deflexión placa circular articulada bajo carga uniformemente distribuida.	98
4.12. Placa circular empotrada y con soporte central bajo carga uniforme distribuida (izquierda). Superposición equivalente de casos conocidos (derecha).	98

4.13. Placa circular anular, libre en radio externo y articulada en interno bajo corona de momentos.	100
4.14. Placa circular anular, empotrada en radio externo y articulada en interno bajo carga uniforme.	101
4.15. Placa circular empotrada en el exterior con carga uniforme discontinua (figura superior). Superposición de dos estados (centro e inferior), con signos de cortante y flector positivos según la Fig. 4.2.	103
4.16. Flecha de placa Fig. 4.15: centro $r/a=0$ y empotramiento $r/a=1$. Discontinuidad de carga señalada por línea vertical.	105
4.17. Flector de placa Fig. 4.15: centro $r/a=0$ y empotramiento $r/a=1$. Discontinuidad de carga señalada por línea vertical.	106
5.1. Superficie de revolución definida por rotación de meridiano con respecto a eje vertical de axisimetría. 1ª sección principal (SP) definida por meridiano, 2ª SP por intersección con máxima curvatura a lámina del plano que contiene \mathbf{n}	110
5.2. Curvatura gaussiana: intersección entre lámina y cualquier plano Π perpendicular que contenga a \mathbf{n} . Existen ∞ planos pero solo uno con máxima curvatura de la línea de intersección y otro con mínima.	110
5.3. Superficie cilíndrica: geometría del cilindro y elemento diferencial bajo presiones y sus equivalentes sollicitaciones de membrana. . . .	113
5.4. Proyección acimutal de fuerzas (sollicitación por distancia) en un arco diferencial de longitud $ad\theta$	114
5.5. Deformación circunferencial y axisimétrica de cilindro en vista acimutal.	115
5.6. Cilindro empotrado en sección superior bajo: peso propio $p_x = \gamma t$ (izqda.), circunferencia de fuerzas F en círculo inferior (drcha.). Deformada línea discontinua.	116
5.7. Depósito cilíndrico empotrado en su base bajo carga hidrostática. Deformadas A para solución de membrana y B, C de flexión. . . .	117
5.8. Elemento diferencial de cilindro bajo sollicitaciones de flexión, incluyendo una nueva N_θ complementaria a la de membrana (N_x es la misma).	119
5.9. Deformada de flexión para el elemento diferencial del meridiano, en el plano $r - x$ (izquierda) y en el $r - \theta$ (derecha, igual que para solución membrana Fig. 5.5).	120

5.10. Deformada por flexión de elemento diferencial longitudinal (Fig. 5.9) de cilindro: viga en fundación elástica (lateral) formada por sector del cilindro y línea neutra LN su meridiano.	121
5.11. Problema Tipo I: corona cortantes positivos en $x = 0$ para cilindro largo.	124
5.12. Problema Tipo II: corona momentos positivos en $x = 0$ para cilindro largo.	126
5.13. Depósito con base empotrada (arriba) y soluciones a superponer de membrana, flexión por X_1 y flexión por X_2 (abajo). Origen de x en base.	128
5.14. Desplazamientos radiales w de tres soluciones a lo largo altura adimensionalizada del depósito Fig. 5.13. En círculos, desplazamiento total.	130
5.15. Momentos flectores M_x calculados de las dos soluciones de flexión a lo largo altura adimensionalizada del depósito Fig. 5.13. En círculos, momento total.	131
5.16. Tensiones normales totales a lo largo altura adimensionalizada depósito Fig. 5.13. En círculos, tensión equivalente de Von Mises. . .	132
5.17. Depósito articulado–fijo en su base (superior): soluciones de membrana y flexión para cilindro con sus signos (inferior). Placa circular inferior infinitamente rígida.	133
5.18. Depósito con base placa circular parcialmente flexible: soluciones de membrana (superior izqda.) y flexión (superior drcha.) para cilindro con sus signos. Idem para placa (inferior). Placa completamente apoyada en terreno.	134
5.19. Tensiones equivalentes de Von Mises totales para varios espesores de placa t_p en [m] a lo largo altura adimensionalizada depósito Fig. 5.18.136	
5.20. Aro axisimétrico bajo presión radial (izquierda) y corona de fuerzas (derecha), ambas equivalentes gracias a $b \ll a$	137
5.21. Aro axisimétrico bajo corona de momentos y giro α inducido. . . .	138
5.22. Superficie cónica: geometría del cono (izquierda) y elemento diferencial (derecha); equilibrio de membrana con notación $p_r \equiv p_{r_2}$. .	139
5.23. Proyección fuerzas sobre arco diferencial de longitud $ad\theta$ y sobre meridiano.	140

5.24. Criterio positivo de signos para solución de membrana de cono: izquierda desplazamiento Δ en dirección r ; derecha giro positivo por Δ creciendo con s	141
5.25. Radome sometido a presión exterior repartida (también peso propio).142	
5.26. Base de radome en compresión con aro deslizante en dirección radial.143	
5.27. Compatibilización de radome con aro. En cono, la deformada por flexión es similar tanto para X_1 como para X_2	144
5.28. Caso particular de singularidad: corte genérico en s . N_s dibujada positiva, independientemente del signo final.	145
5.29. Carga circular (no presión) vertical de radio a_p y carga puntual negativa en vértice.	146
5.30. Cono de longitud $s = L$ y radio de base $L \cos \alpha$ bajo peso propio y sujeto en el centro por columna.	146
5.31. Equivalencia de solución de flexión entre cilindro y semiesfera (izquierda) con tangentes comunes. Conos y casquetes con tangentes comunes por lo que $\phi_1 = \alpha$, $a_e = a_c / \sin \phi_1$	148
5.32. Solicitación N_θ para solución membrana, flexión X_1 y flexión X_2 a lo largo de un cono con aro según Fig. 5.25.	149
5.33. Superficie elipsoidal: geometría y elemento diferencial; solicitaciones de membrana.	151
5.34. Proyección de fuerzas en dos arcos diferenciales, sobre paralelo (superior doble figura) y meridiano (inferior).	152
5.35. Desplazamientos de membrana para elipsoide truncado en ambos bordes; coordenadas y desplazamientos.	153
5.36. Elongación de un elemento diferencial del meridiano debido a su alargamiento (izquierda) y a aumento de longitud de curva (derecha).154	
5.37. Giro de membrana del elipsoide: contribución por giro del meridiano (izquierda) y por cambio de tangente producido por desplazamiento v (derecha).	156
5.38. Cúpula semiesférica completa $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 90^\circ$ bajo peso propio. Distribución de N_ϕ (centro) y N_θ (derecha) $\times pa$	157
5.39. Casquete esférico con aro, cotas en [m]. Deformadas para peso propio (membrana) en línea discontinua y acción-reacción en la unión. 159	

5.40. Cúpula semiesférica completa $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 90^\circ$ bajo carga aerodinámica (o carga de nieve). Distribución de N_ϕ (izquierda) y N_θ (derecha) $\times qa/2$	161
5.41. Equilibrio de elipsoide cortado en ϕ con fuerza singular en vértice superior.	162
5.42. Cúpula esférica con ventana superior protegida por aro, bajo carga circunferencial P y peso propio p	163
5.43. Efecto de fuerza circunferencial P exterior sobre membrana de esfera. 164	
5.44. Cúpula esférica con espesor de incremento lineal desde ϕ_0 hasta ϕ_1 : incremento de peso con respecto al espesor constante.	165
5.45. Elipsoide de recipiente a presión interna uniforme de forma elipsoidal. 166	
5.46. Recipiente cilíndrico-esférico bajo presión interna. Desplazamientos por membrana en línea discontinua y cota δ_{10} diferencia entre solución de esfera y de cilindro.	167
5.47. Recipiente a presión: equilibrios estáticos de partes del cilindro. . .	168
5.48. Arriba: elemento diferencial de superficie esférica y sollicitaciones de flexión. Abajo: sentido de sollicitaciones para lámina, en el plano $r_2 - \phi$ y borde inferior.	169
5.49. Definición coordenadas curvilíneas en elipsoide con abertura inferior y superior.	172
5.50. Problema de flexión Tipo I: porción de esfera sometida a circunferencia de cortantes horizontales H_0 (impuestos) en borde inferior ϕ_1 , con sentido de r y proyectadas a un cortante Q_ϕ positivo. . . .	173
5.51. Problema de flexión Tipo II: esfera sometida a circunferencia de momentos positivos M_0 en borde inferior ϕ_1	174
5.52. Sollicitaciones circunferenciales de flexión para compatibilización en la intersección: signos asignados arbitrariamente y deformada prevista cerca de esta intersección.	176
5.53. Sollicitación N_θ para solución membrana, flexión X_1 y flexión X_2 a lo largo de un casquete con aro según Fig. 5.39.	178
5.54. Esfera bajo fuerzas circunferenciales de compresión en ecuador. Deformada A por fuerzas $X_1 = F/2$, B simétrica en $\phi = \pi/2$ compatible por X_2	180

5.55. Relación aprox. desplazamientos del paralelo y del meridiano para esfera.	181
5.56. Desplazamiento perpendicular a depósito esférico Fig. 5.54 con dos soluciones de flexión, a partir de 77° hasta plano de simetría. Total indicado por círculos.	182
5.57. Solicitaciones flexión para compatibilización esfera y cilindro. Signos asignados, movimientos cerca de la intersección previstos; coordenada s a lo largo de $1/2$ semiesfera $+\phi$ y parte de cilindro $+x$. . .	183
5.58. Desplazamiento del paralelo (semiesfera $s \leq 0,785$) y perpendicular (cilindro $s \geq 0,785$ [m]). Línea discontinua vertical indica posición de la unión y distribución constante es la solución de membrana. .	184
5.59. Solicitación circunferencial para porciones de semiesfera y cilindro separados por línea vertical discontinua; la distribución constante es la solución de membrana.	186
5.60. Distribuciones de cortante (superior) y momento (inferior) a lo largo de porciones de semiesfera y cilindro separados por línea vertical discontinua.	187
5.61. Esfuerzo de membrana adicional a los de Fig. 5.57 por sollicitación meridional. Modelos equivalentes: deformada por componente horizontal de sollicitación $N_{\phi_1} \cos \phi_1$ sobre cilindro (izquierda) o sobre casquete (derecha)	188
5.62. Solicitaciones flexión para compatibilización casquete y cilindro, incluyendo la fuerza Tipo I del primero sobre el segundo.	191
5.63. Desplazamiento del paralelo (en semiesfera $s \leq 0,523$) y perpendicular (en cilindro $s \geq 0,523$ [m]). La línea discontinua vertical indica la posición de la unión y las rectas constantes la solución de membrana. Detalle de la zona máxima a la derecha.	192
5.64. Solicitaciones circunferenciales para porciones de semiesfera y cilindro separados por línea vertical discontinua; arriba meridional y abajo circunferencial. Las distribuciones constantes son las soluciones de membrana.	193
5.65. Solicitaciones para porciones de semiesfera y cilindro separados por línea vertical discontinua; arriba cortantes, abajo flectores. Las distribuciones constantes son las soluciones de membrana.	194
5.66. Tapa de depósito a presión hecha de casquete y $1/4$ de toro.	195

Capítulo 1

Introducción

Las estructuras de aeronaves, satélites, vehículos de lanzamiento así como infraestructuras comprenden una amplia variedad de elementos:

1. Celosías con miembros a tensión o a compresión
2. Vigas curvas (aros o costillas) y vigas longitudinales (largerillos, largeros etc.)
3. Placas rectangulares y circulares con aros y refuerzos, todo lo cual forma paneles
4. Láminas cilíndricas, cónicas y elipsoidales de pared delgada con aros y refuerzos en los bordes
5. Recipientes a presión y depósitos de combustible

Todos y cada uno de estos elementos requieren un análisis detallado para garantizar que sean resistentes, ligeros y asegurar la aeronavegabilidad de la estructura.

Este manual es una continuación del anterior *Teoría de vigas en ingeniería aeroespacial*. Así como para estas vigas se deben aplicar procedimientos especiales debido a sus muy delgadas secciones, también se deben analizar las placas y láminas de esta forma. Pero para estas dos últimas, el pequeño espesor precisamente favorece que la solución en vez de complicarse se simplifique.

De hecho, debido a los requerimientos de minimización de peso en las estructuras aeroespaciales (y de forma incremental en todos los sectores relacionados con el transporte e incluso en otros como construcción) los espesores de las placas y las láminas son muy reducidos; consecuentemente la posibilidad de pandeo bajo cargas de compresión es muy alta. Este pandeo se estudia en el Capítulo 3, dedicado a

placas rectangulares; para el resto de estructuras (placas circulares y láminas) los procedimientos son demasiado complicados para el alcance de este manual.

Para evitar la importante dificultad de resolver problemas en elasticidad tridimensional, se estudian las placas y las láminas con ecuaciones bidimensionales, es decir, con dos coordenadas o incluso con una en placas circulares. De forma similar a la de la hipótesis de pared delgada en vigas, la tercera coordenada que es la del espesor se elimina fácilmente por integración en esa dirección. Para facilitar el cálculo y sobre todo dado que los procesos de fabricación a menudo lo requieren, el espesor se toma habitualmente como constante, por lo menos a tramos.

Como en muchos problemas de ingeniería y ciencia se asume que las funciones de estudio (desplazamientos, sollicitaciones, tensiones etc.) son en general continuas y derivables y para la obtención de las ecuaciones que definen las soluciones, se partirá de las de equilibrio, cinemáticas y constitutivas particularizadas para cada una de las situaciones. Cuando las funciones no son continuas, se deben aplicar procedimientos especiales.

Dos son las partes principales en las que se divide este manual: placas y láminas. Las primeras son estructuras delgadas bidimensionales y planas de las que se encuentran cientos en cualquier aeronave o vehículo espacial. Las segundas son parecidas pero su geometría incluye una o dos curvaturas.

Para el análisis de placas rectangulares, el método de Navier puede ser usado siempre que los cuatro bordes de la placa estén articulados. La solución de Lévy puede ser utilizada para placas de dos bordes articulados opuestos y los otros dos pueden ser combinaciones de diferentes condiciones de contorno (C.C.) tales como libre, articulado, o empotrado. Por último el método energético puede ser usado para determinar las soluciones aproximadas de cualquier C.C. a partir de funciones de prueba que cumplan todas o parte de estas C.C. Este método es especialmente interesante no solo para los objetivos de este manual sino para otros muchos en ingeniería y ciencia, ya que es la base de los modernos métodos numéricos como el de los Elementos Finitos.

Las placas circulares, aunque no tan ubicuas como las rectangulares, se encuentran en multitud de ámbitos de la ingeniería. Su uso más común es para tapas de recipientes a presión, discos de turbina (incluyendo motores a reacción), tapas de alcantarillado, además de otros muchos y de ahí la importancia de entender su comportamiento a flexión. Para el caso particular de estructuras aeroespaciales, aparte de ventanas de aeronaves y satélites, son partes fundamentales de misiles, lanzaderas, mamparas etc debido a su geometría axisimétrica.

Como se ha comentado, el espesor reducido y las altas cargas implican que a menudo tanto placas como láminas trabajen en régimen plástico y que pandeen cuando se someten a esfuerzos de compresión, incluso no muy elevados. El primer efecto no se estudia aquí por su dificultad conceptual, que a menudo requiere de

métodos numéricos avanzados. Pero el segundo es fundamental ya que al estar estas placas y láminas reforzadas en todos o casi todos sus bordes, son capaces de aguantar sin rotura catastrófica varias veces la carga de inicio de pandeo. El proceso de cálculo de este “postpandeo” no es objeto del presente manual sino más bien de la disciplina de Diseño Estructural de Aviones, en la que se aplican buena parte de los conceptos aprendidos aquí pero también fórmulas y datos empíricos y experimentales.

Las láminas son superficies estructurales con curvatura que soportan fuerzas y cargas externas en general axisimétricas (los casos estudiados en el último capítulo) y de tipo presión en su sentido amplio. Gracias a su geometría, los esfuerzos internos en buena parte se distribuyen en el reducido espesor, lo que genera esfuerzos de membrana mucho más favorables (para la integridad de la estructura) que los de flexión propios de vigas y placas.

Como para placas circulares, el estudio de láminas precisa de la superposición de dos tipos de soluciones: la anterior de membrana y la de flexión, que aparece en cambios de curvatura, de espesor etc. Aunque la dificultad de estudiar estas estructuras se incrementa con respecto a la de placas (como la de placas lo hace con respecto a la de vigas), la aerodinámica y los requerimientos de funcionamiento hacen que los vehículos aeroespaciales sean habitualmente diseñados con estas geometrías curvadas.

Parte I

Análisis de placas

Capítulo 2

Placas rectangulares bajo flexión

2.1 Introducción

En este capítulo se van a tratar las soluciones analíticas y semi-analíticas para calcular las deflexiones y tensiones de placas rectangulares desarrollando los métodos de Navier, de Lévy y varios energéticos.

Una placa rectangular es una estructura plana y continua cuyos lados tienen una longitud mucho mayor que la de su espesor (también llamado canto) $a, b \gg h$, ver la Fig. 2.1. Si las cargas externas son verticales o también llamadas “transversales” (como $q_z(x, y) := q(x, y)$, a veces también p), la estructura se denomina propiamente “placa” y trabaja a flexión; si son en el plano $x - y$, “laja” y trabaja a tracción o compresión con la posibilidad de pandeo en la última.

La particular geometría de una placa rectangular ofrece alguna ventaja: como se verá, es importante que el origen de coordenadas esté situado en el plano de simetría vertical (llamado “plano medio”).

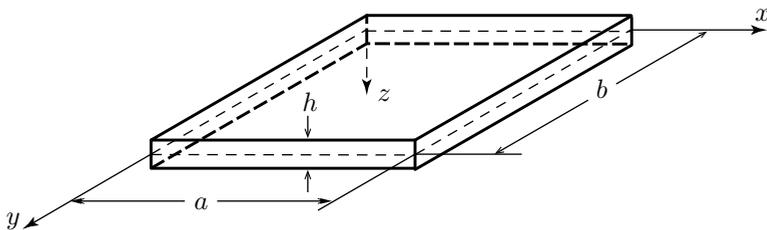


Figura 2.1: Placa rectangular: plano medio $z = 0$, caras superior e inferior definidas por planos $z = \pm h/2$, bordes definidos por planos x o y constante.

Para seguir leyendo haga click aquí