

# *Un ejemplo de aprendizaje de modelización matemática basado en un problema de flotación*

## *An example of mathematical modeling learning based on a floating problem*

**J.L. González-Santander**  
UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALENCIA  
[juanluis.gonzalezsantander@gmail.com](mailto:juanluis.gonzalezsantander@gmail.com)

**Llúcia Monreal**  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
[lmonreal@mat.upv.es](mailto:lmonreal@mat.upv.es)

---

### Abstract

*Una máquina es capaz de hacer figuras tridimensionales que pueden flotar en diferentes tipos de líquidos, utilizando para cada figura siempre la misma cantidad de masa. Cuando la máquina ya había hecho esferas, los ingenieros se plantearon diseñar otras figuras que alcanzasen la misma profundidad debajo de la superficie. Probaron con cubos y se dieron cuenta de que, independientemente del líquido sobre el que flotarían las figuras, las esferas siempre alcanzaban una profundidad mayor que los cubos. ¿Podría resolverse su problema usando conos?*

*A machine can make three-dimensional figures that can float on different types of liquids, using for each figure always the same quantity of mass. The machine had already made spheres when the engineers intended to design other figures that reached the same depth below the surface. They tested with cubes and realized that regardless of the liquid on which figures floated, spheres always reached a greater depth than cubes. Could their problem be solved using cones?*

---

Palabras clave: Principio de Arquímedes, Aprendizaje Basado en Problemas.

Keywords: Archimedes' principle, Problem-Based Learning.

## 1. Introducción

En la Mecánica de Fluidos elemental, el principio de Arquímedes (Health, T.L. 1897) se usa para determinar la posición de equilibrio de un cuerpo flotante sobre un líquido. Sin embargo, en los libros de texto de Física, parece que los problemas de Estática de Fluidos son simples cuando la geometría del cuerpo flotante es también simple. El problema enunciado en el resumen parece pertenecer a esta categoría de problemas simples, pero más adelante veremos que este no es el caso. A pesar de que el enunciado del problema es bastante directo y fácil de entender, en realidad combina una gran diversidad de temas que no son evidentes a simple vista. Es más, el problema se desenvuelve en diferentes etapas, lo cual se adecua al Aprendizaje Basado en Problemas al nivel de grado universitario (Boud, D., Feletti, G. 1997). Algo que puede desconcertar a los estudiantes al principio es que el problema no ofrece ningún dato numérico. De este modo, los estudiantes se ven forzados a desarrollar el problema de manera simbólica de principio a fin, lo cual implica un buen ejercicio en la elección de una nomenclatura adecuada, dada la sorprendente gran cantidad de variables involucradas.

Este artículo se organiza de la siguiente manera. Dedicamos la sección 2 a demostrar la afirmación ofrecida en el enunciado del problema, en la cual las esferas siempre alcanzan una profundidad por debajo de la superficie mayor que los cubos. Veremos que este problema se resuelve con una idea ajá (Gardner, M. 1978). La sección 3 desarrolla la solución para el cono en términos de su semi-apertura  $\alpha$  como función de la densidad relativa  $\rho_r$  del material del cono con respecto al líquido sobre el cual flota. La solución final de  $\alpha(\rho_r)$  combina la Física involucrada en el problema con algunos desarrollos matemáticos para descartar las soluciones espurias. De manera sorprendente,  $\alpha(\rho_r)$  tiene dos, una o ninguna soluciones, dependiendo del valor de  $\rho_r$ . En la sección 4 se propone una práctica a realizar por los estudiantes para verificar el plantamiento teórico expuesto en las secciones anteriores. Por último, recogemos las conclusiones en la sección 5.

## 2. Las esferas alcanzan una profundidad mayor que los cubos

Para resolver este problema, debemos considerar que, según el enunciado, las figuras flotan y cada una de ellas contiene la misma masa de material.

Consideremos, en primer lugar, que las figuras flotan. Si  $\rho$  denota la densidad del líquido,  $\rho'$  la densidad del material de las figuras,  $\hat{V}$  el volumen de la figura dentro del líquido y  $V$  el volumen de la figura, entonces, según el principio de Arquímedes, la fuerza de empuje contrarresta el peso de la figura, y por tanto,

$$\hat{V} = \rho_r V, \quad (1)$$

donde  $\rho_r = \rho'/\rho$  denota la densidad relativa de la figura con respecto al líquido. En el caso de un cubo de lado  $a$ , denotemos por  $V_{\square}$  su volumen total y  $\hat{V}_{\square}$  su volumen sumergido, de tal manera que

$$V_{\square} = a^3, \quad (2)$$

$$\hat{V}_{\square} = a^2 \hat{h}_{\square}, \quad (3)$$

donde, según la fig. 1,  $\hat{h}_{\square}$  es la profundidad del cubo por debajo de la superficie del líquido. Aplicando (1) a (2) y (3), obtenemos

$$\hat{h}_{\square} = \rho_r a. \quad (4)$$

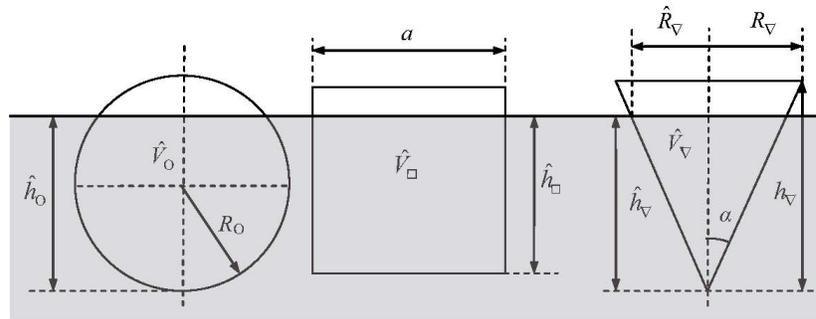


Figura 1: Nomenclatura para las figuras flotantes.

Podemos realizar el mismo cálculo para una esfera de radio  $R_O$  (véase la fig. 1), teniendo en cuenta la fórmula de un casquete esférico (Spiegel, M.R. 1968) de radio  $R_O$  y altura  $\hat{h}_O$ , de tal manera que

$$V_O = \frac{4}{3}\pi R_O^3,$$

$$\hat{V}_O = \frac{1}{3}\pi \hat{h}_O^2 (3R_O - \hat{h}_O).$$

En consecuencia, aplicando de nuevo (1) a (2) y (3), llegamos a

$$\hat{h}_O^3 - 3R_O \hat{h}_O^2 + 4\rho_r R_O^3 = 0. \tag{5}$$

Recordemos ahora que todas las figuras están hechas con la misma cantidad de masa, por tanto, sus volúmenes también serán iguales,  $V_{\square} = V_O$ , de tal manera que

$$a^3 = \frac{4}{3}\pi R_O^3 \rightarrow a = \beta R_O, \tag{6}$$

donde, por simplicidad, hemos definido la siguiente constante numérica,

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} \approx 1.612. \tag{7}$$

Dividiendo (5) por  $\hat{h}_{\square}^3$  y definiendo la cantidad adimensional

$$\xi = \frac{\hat{h}_O}{\hat{h}_{\square}}, \tag{8}$$

llegamos a

$$\xi^3 - 3\xi^2 \frac{R_O}{\hat{h}_{\square}} + 4\rho_r \left(\frac{R_O}{\hat{h}_{\square}}\right)^3 = 0. \tag{9}$$

Para simplificar (9), obsérvese que a partir de (4) y (6), tenemos que

$$\hat{h}_{\square} = \rho_r \beta R_O \rightarrow \frac{R_O}{\hat{h}_{\square}} = \frac{1}{\rho_r \beta},$$

por tanto

$$\xi^3 - \frac{3\xi^2}{\rho_r \beta} + \frac{4}{\rho_r^2 \beta^3} = 0. \tag{10}$$

Según el enunciado del problema, las soluciones de la ecuación cúbica (10) deben ser mayores que la unidad, es decir  $\xi > 1$ , a fin de obtener  $\hat{h}_O > \hat{h}_\square$ . En este punto, se nos plantean dos problemas:

1. La solución general de una ecuación cúbica es bastante incómoda.
2. Debemos probar que  $\xi > 1$  para cada posible valor de  $\rho_r$ .

Para superar ambas dificultades, reescribamos (7) como una ecuación cuadrática para  $\rho_r$ , teniendo en cuenta (6),

$$\xi \rho_r^2 - \frac{3}{\beta} \rho_r + \frac{3}{\pi \xi^2} = 0. \quad (11)$$

Observemos que la obtención de un valor real para  $\rho_r$  en (11), implica que el discriminante debe ser mayor que cero, por tanto

$$\frac{9}{\beta^2} - \frac{12}{\pi \xi} > 0 \quad \rightarrow \quad \xi > \frac{4\beta^2}{3\pi} \approx 1.214 > 1, \quad (12)$$

como queríamos demostrar.

### 3. La solución para el cono

#### 3.1. Solución básica

Por un lado, siguiendo la nomenclatura ofrecida en la fig. 1, el volumen de un cono y su parte correspondiente sumergida vienen dados por

$$V_\nabla = \frac{\pi}{3} R_\nabla^2 h_\nabla, \quad (13)$$

$$\hat{V}_\nabla = \frac{\pi}{3} \hat{R}_\nabla^2 \hat{h}_\nabla. \quad (14)$$

Obsérvese que los conos, a diferencia de las esferas, poseen dos grados de libertad en su forma, a saber  $R_\nabla$  y  $h_\nabla$ . Asimismo, la geometría del cono proporciona las siguientes ecuaciones:

$$\tan \alpha = \frac{R_\nabla}{h_\nabla} = \frac{\hat{R}_\nabla}{\hat{h}_\nabla}. \quad (15)$$

En consecuencia, según (13), (14) y el principio de Arquímedes (1), llegamos a

$$\left( \frac{\hat{R}_\nabla}{R_\nabla} \right)^3 = \rho_r. \quad (16)$$

Por otro lado, la igualdad de volumen de las esferas y conos  $V_O = V_\nabla$ , proporciona

$$\left( \frac{R_O}{R_\nabla} \right)^3 = \frac{1}{4 \tan \alpha}, \quad (17)$$

lo cual, teniendo en cuenta (16), puede reescribirse como

$$\left( \frac{R_O}{\hat{R}_\nabla} \right)^3 = \frac{1}{4 \rho_r \tan \alpha}. \quad (18)$$

Oberveamos también que, según (15) y (18), tenemos que

$$\left(\frac{R_O}{\hat{h}_\nabla}\right)^3 = \left(\frac{R_O/\hat{R}_\nabla}{\hat{h}_\nabla/\hat{R}_\nabla}\right)^3 = \frac{\tan^2 \alpha}{4\rho_r}. \quad (19)$$

Dado que deseamos que el cono alcance la misma profundidad que la esfera por debajo de la superficie del líquido, fijemos la siguiente cantidad adimensional a la unidad,

$$\eta = \frac{\hat{h}_O}{\hat{h}_\nabla} = 1.$$

Por tanto, dividiendo (5) por  $\hat{h}_\nabla$  y teniendo en cuenta (19), llegamos a

$$\eta^3 - 3 \left(\frac{\tan^2 \alpha}{4\rho_r}\right)^{1/3} \eta^2 + \tan^2 \alpha = 0.$$

Sabiendo que  $\eta = 1$  y despejando  $\rho_r$ , obtenemos

$$\rho_r(\alpha) = \frac{27 \tan^2 \alpha}{4(1 + \tan^2 \alpha)^3}. \quad (20)$$

Es fácil demostrar que para los ángulos permitidos de  $\alpha$  en un cono, es decir,  $0 < \alpha < \pi/2$ , tenemos que

$$0 < \rho_r(\alpha) < 1, \quad (21)$$

dado que

$$\rho_r'(\alpha) = \frac{27}{4} \cos^3 \alpha \sin \alpha (3 \cos 2\alpha - 1),$$

por lo que tenemos dos mínimos relativos en  $\alpha_{\min} = 0, \pi/2$  y un máximo relativo en  $\alpha_{\max} = \cos^{-1}(1/3)/2$ , para el cual  $\rho_r(\alpha_{\min}) = 0$  y  $\rho_r(\alpha_{\max}) = 1$ . Desde un punto de vista físico, como el cono flota, la densidad relativa  $\rho_r$  debe estar acotada según (21). De esta manera, dado  $\rho_r$ , en principio podemos diseñar el cono requerido, despejando  $\alpha$  en (20). Afortunadamente,  $\rho_r(\alpha)$  se puede invertir de la siguiente manera. En primer lugar, realicemos el cambio de variables  $z = \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$  y reescribamos (20) como

$$\frac{4\rho_r}{27} = \frac{z}{(1+z)^3} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^2 - \left(\frac{1}{1+z}\right)^3,$$

por lo que

$$u^3 - u^2 + \frac{4\rho_r}{27} = 0,$$

donde  $u = 1/(1+z) = \cos^2 \alpha$ . Recordemos ahora que una ecuación cúbica (Oldham, K.B., et al. 2010)

$$u^3 + a u^2 + b u + c = 0,$$

admite tres soluciones reales (solución trigonométrica),  $n = 0, \pm 1$ ,

$$u_n = -\frac{a}{3} + 2\sqrt{P} \cos\left(\frac{2\pi n + \cos^{-1}\left(Q/\sqrt[3]{P}\right)}{3}\right),$$

$$P = \frac{a^2 - 3b}{9}, \quad Q = \frac{ab}{6} - \frac{c}{2} - \frac{a^3}{27},$$

cuando  $P > 0$  y el discriminante  $D = P^3 - Q^2 > 0$ . En nuestro caso, tenemos que  $P = 1/9 > 0$  y  $Q = (1 - 2\rho_r)/27$ , por lo que, según (21),  $D = 4\rho_r(1 - \rho_r)/729 > 0$ , y

$$u_n = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cos \left( \frac{2\pi n + \cos^{-1}(2\rho_r - 1)}{3} \right). \quad (22)$$

Deshaciendo el cambio de variables, llegamos a

$$\alpha_n = \cos^{-1}(\sqrt{u_n}). \quad (23)$$

Desde un punto de vista matemático, para cada  $\rho_r$  tenemos tres posibles ángulos  $\alpha_n$  correspondientes a  $n = 0, \pm 1$ . Sin embargo, ¿son todos los  $\alpha_n$  físicamente permisibles? Para responder a esta cuestión, observemos que a partir de (21) se sigue que  $0 < \cos^{-1}(2\rho_r - 1) < \pi$ , por tanto, tomando  $n = 0$ , tenemos que  $1/2 < \cos(\frac{1}{3} \cos^{-1}(2\rho_r - 1)) < 1$ . En consecuencia,  $-1/3 < u_0 < 0$  y  $\alpha_0$  resulta ser un número complejo, reduciéndose (22) a

$$\alpha_{\pm}(\rho_r) = \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cos \left( \frac{\cos^{-1}(2\rho_r - 1) \pm 2\pi}{3} \right)} \right). \quad (24)$$

No obstante, ¿siguen siendo las soluciones de  $\alpha_{\pm}$  físicamente admisibles? No siempre. De momento, no hemos considerado la estabilidad del cono flotando sobre el líquido. Si la posición vertical representada en la fig. 1 para el cono no es estable, entonces la profundidad del cono por debajo del líquido no será realmente  $\hat{h}_{\nabla}$ , sino más pequeña.

### 3.2. Estabilidad del cono

La teoría de la estabilidad de los cuerpos flotantes (White, F.M. 2003) afirma que si el *centro de gravedad*  $G$  de un cuerpo está por debajo del *metacentro*  $M$  (es decir, la *altura metacéntrica*  $\overline{GM} > 0$ ), entonces el cuerpo flotante es estable, tal y como se muestra en la fig. 2. En el caso de figuras flotantes con simetría axial, el siguiente criterio asegura la estabilidad,

$$|\overline{GM}| > |\overline{GB}|, \quad (25)$$

donde  $B$  es el *centro de empuje*.

#### Centros de gravedad y de empuje

Según el sistema coordenado  $XYZ$  mostrado en la fig. 3, el centro de gravedad  $G$  se localiza sobre el eje  $Z$ , debido a la simetría de la figura. De esta manera, según (Tipler P.A., Mosca, G. 2004),

$$z_G = \frac{1}{M_{\nabla}} \int_{V_{\nabla}} z \, dm, \quad (26)$$

donde la masa del cono viene dada por

$$M_{\nabla} = \rho' V_{\nabla}. \quad (27)$$

Para calcular la integral de volumen que aparece en (26), podemos dividir el volumen del cono tal y como se muestra en la fig. 4, por lo que

$$dm = \rho' dV_{\nabla} = \rho' \pi \frac{R_{\nabla}^2}{h_{\nabla}^2} z^2 dz. \quad (28)$$

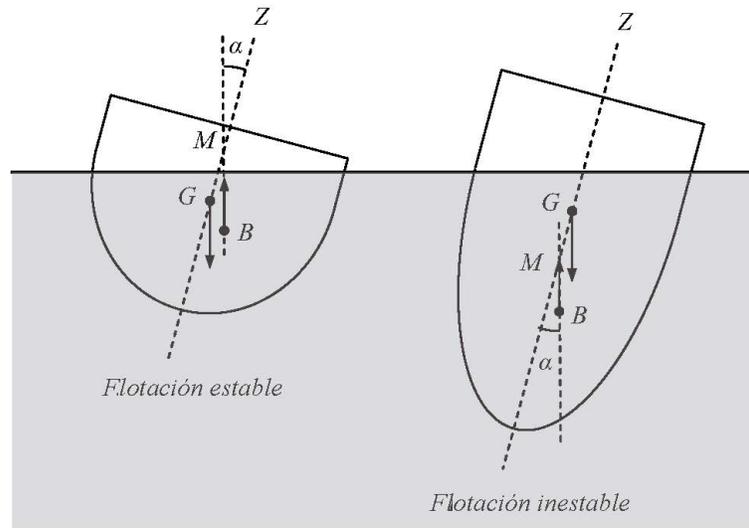


Figura 2: Altura metacéntrica  $\overline{GM}$  para una flotación estable e inestable.

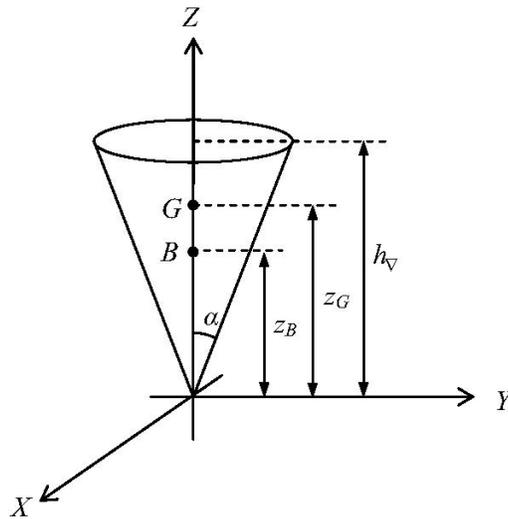


Figura 3: Centro de gravedad  $G$  y centro de empuje  $B$  en un cono flotante.

Substitúyase ahora (28) en (26), sabiendo que  $\rho' = const.$ , y téngase en cuenta (13) y (27), para obtener

$$z_G = \pi \frac{\rho' R_{\nabla}^2}{M_{\nabla} h_{\nabla}^2} \int_0^{h_{\nabla}} z^3 dz = \frac{3}{4} h_{\nabla}. \quad (29)$$

El centro de empuje estará localizado en el centro de gravedad del volumen del líquido desalojado por el cono,  $\hat{V}_{\nabla}$ . Dado que  $\hat{V}_{\nabla}$  tiene también forma cónica, pero con una altura  $\hat{h}_{\nabla}$ , análogamente a (29), el centro de empuje estará localizado en

$$z_B = \frac{3}{4} \hat{h}_{\nabla}. \quad (30)$$

Según (29) y (30), y sabiendo que el cono flota sobre el líquido, es decir  $h_{\nabla} > \hat{h}_{\nabla}$ , tenemos que

$$|\overline{GB}| = |z_G - z_B| = \frac{3}{4} (h_{\nabla} - \hat{h}_{\nabla}). \quad (31)$$

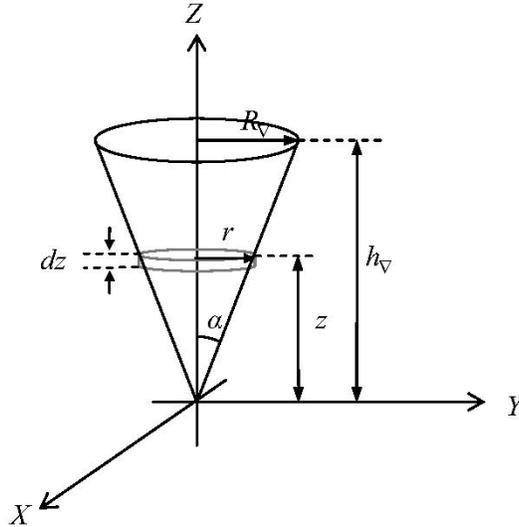


Figura 4: Parámetros de integración para el cálculo del centro de gravedad y de empuje.

### Altura metaéfrica

Cuando rotamos un cuerpo simétrico alrededor de su eje de simetría un ángulo pequeño al nivel de flotación (véase la línea  $MN$  en la fig. 5), entonces la altura metacéntrica viene dada por [?]

$$|\overline{GM}| = \frac{1}{\hat{V}_{\nabla}} \int_A x^2 dA. \quad (32)$$

donde  $A$  es el área al nivel de flotación. Para calcular la integral de superficie dada en (32), podemos realizar un cambio a coordenadas polares, de tal manera que

$$\int_A x^2 dA = \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{\hat{R}_{\nabla}} \varrho^3 d\varrho = \frac{\pi}{4} \hat{R}_{\nabla}^4. \quad (33)$$

Substituyendo (33) y (14) en (32), llegamos a

$$|\overline{GM}| = \frac{3}{4} \frac{\hat{R}_{\nabla}^2}{\hat{h}_{\nabla}}. \quad (34)$$

### Soluciones estables

Por tanto, insertando los resultados (31) y (34) en el criterio de estabilidad dado en (25), tenemos que

$$\frac{\hat{R}_{\nabla}^2}{h_{\nabla}} > h_{\nabla} - \hat{h}_{\nabla}. \quad (35)$$

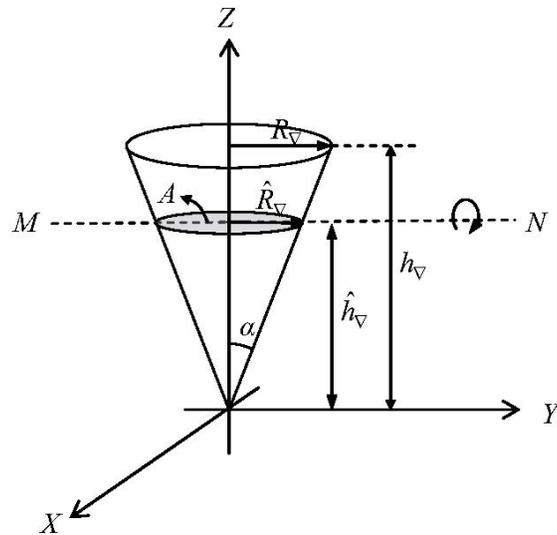


Figura 5: Estabilidad de un cono flotante rotado alrededor de la línea MN.

Definiendo ahora  $\chi$  como la siguiente cantidad adimensional,

$$\chi = \frac{\hat{h}_v}{h_v}, \tag{36}$$

y teniendo en cuenta (15), podemos reescribir (35) como

$$\tan^2 \alpha \chi^2 + \chi - 1 > 0. \tag{37}$$

De todas maneras, obsérvese que, a partir de (15) y (16), tenemos que

$$\chi^3 = \rho_r, \tag{38}$$

por tanto, substituyendo (38) en (37) y despejando  $\alpha$ , tenemos que

$$\alpha > \alpha_s(\rho_r) = \tan^{-1} \left( \sqrt{\rho_r^{-2/3} - \rho_r^{-1/3}} \right), \tag{39}$$

donde hemos definido la función delimitadora  $\alpha_s(\rho_r)$  para la estabilidad del cono.

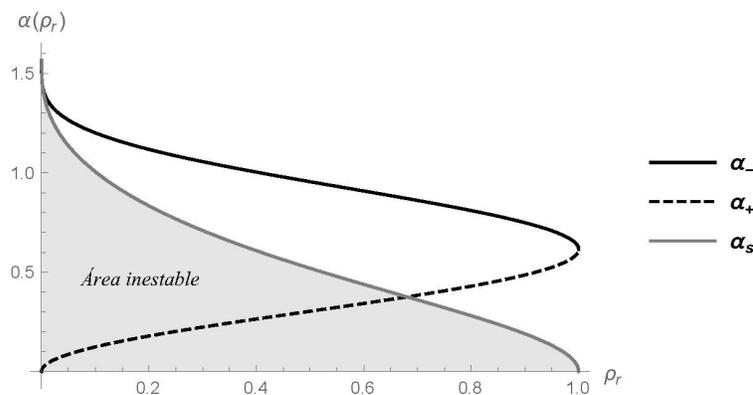
La fig. 6 presenta los gráficos de  $\alpha_{\pm}(\rho_r)$  y  $\alpha_s(\rho_r)$ . Obsérvese que, según (39), la solución es inestable por debajo de  $\alpha_s(\rho_r)$ . Podemos evaluar numéricamente los puntos de corte  $\rho_r^{\pm}$  entre  $\alpha_{\pm}(\rho_r)$  y  $\alpha_s(\rho_r)$  respectivamente, tomando como intervalo inicial (21) [?], obteniendo

$$\begin{aligned} \rho_r^- &\approx 1.745 \times 10^{-3}, \\ \rho_r^+ &\approx 6.806 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones estables para diseñar el cono flotante son

$$\alpha(\rho_r) = \begin{cases} \alpha_-(\rho_r), & \rho_r^- < \rho_r < \rho_r^+ \\ \alpha_{\pm}(\rho_r), & \rho_r^+ < \rho_r < 1 \end{cases} \tag{40}$$

Cabe destacar que la solución es única en la región  $\rho_r^- < \rho_r < \rho_r^+$ . Fuera de esta región, existe una pequeña región ( $0 < \rho_r < \rho_r^-$ ) en donde no existe ninguna solución, y sorprendentemente una región ( $\rho_r^+ < \rho_r < 1$ ) en donde encontramos dos soluciones.

Figura 6: Allowable angles  $\alpha$  for a stable floating cone.

#### 4. Práctica experimental

Como se ha comentado en la Introducción, se presenta a continuación una práctica para que sea llevada a cabo por los propios estudiantes en el laboratorio, con el fin de confeccionar figuras flotantes que permitan verificar las predicciones teóricas descritas anteriormente. Se recomienda el uso de cera como material para elaborar las figuras y agua como líquido, dado que ambas sustancias son baratas y de fácil manejo. El objetivo de la práctica es diseñar una esfera y un cono del mismo volumen que alcancen la misma profundidad por debajo del agua.

En primer lugar, proponemos a los estudiantes medir la densidad de la cera y el agua que vayan a usar, y a partir de estas medidas, obtener la densidad relativa. A continuación, proporcionamos un ejemplo,

$$\begin{aligned}\rho' &= 930 \text{ kg m}^{-3}, \\ \rho &= 988 \text{ kg m}^{-3},\end{aligned}$$

por lo que la densidad relativa es

$$\rho_r = \frac{\rho'}{\rho} = 0.932. \quad (41)$$

Es aconsejable medir la densidad de la cera una vez que haya sido derretida, porque su densidad puede cambiar significativamente.

En segundo lugar, para diseñar una esfera de un radio dado, por ejemplo

$$R_0 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m},$$

podemos proporcionar a los estudiantes moldes esféricos de diferentes tamaños. (Se pueden encontrar moldes de plástico de este tipo en algunos envoltorios de cierto tipo de juguetes comerciales). Es importante avisar a los estudiantes que probablemente tendrán que esperar un cierto tiempo para que la cera se enfríe dentro del molde, dependiendo del tamaño de la figura.

En tercer lugar, pediremos a los estudiantes que calculen la semi-apertura del cono, introduciendo (41) en (40),

$$\alpha(\rho_r) = \begin{cases} 0.725 \text{ rad} \\ 0.509 \text{ rad} \end{cases}$$

Obsérvese que la elección del agua y la cera como materiales de trabajo conduce a una solución doble en  $\alpha(\rho_r)$ , por lo que pediremos a los estudiantes que diseñen los dos conos y que verifiquen si ambos alcanzan la misma profundidad que la esfera. Para diseñar un cono con una semi-apertura dada, podemos usar que el desarrollo plano de un cono es un sector circular.

De esta manera, según la fig. 7, necesitamos saber la longitud de la generatriz del cono  $g_{\nabla}$  y el ángulo  $\gamma$ . Dado  $\ell_{\nabla} = g_{\nabla}\gamma = 2\pi R_{\nabla}$  y  $\sin \alpha = R_{\nabla}/g_{\nabla}$ , se sigue que

$$\gamma = 2\pi \sin \alpha = \begin{cases} 4.17 \text{ rad} \\ 3.06 \text{ rad} \end{cases}$$

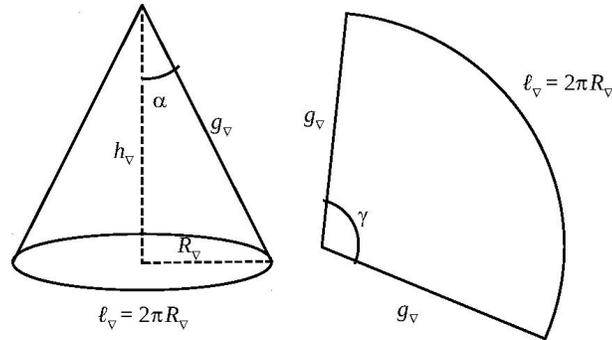


Figura 7: Desarrollo plano de un cono.

Asimismo, a partir de (17) tenemos que

$$R_{\nabla} = (4 \tan \alpha)^{1/3} R_O,$$

por tanto, teniendo en cuenta de nuevo que  $\sin \alpha = R_{\nabla}/g_{\nabla}$ , llegamos a

$$g_{\nabla} = 2R_O (\csc 2\alpha \csc \alpha)^{1/3} = \begin{cases} 4.60 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5.36 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

Dados  $g_{\nabla}$  y  $\gamma$ , es fácil realizar un molde de cartulina para rellenarlo con cera fundida.

Por último, hemos de poner las figuras realizadas en el agua de un recipiente de vidrio para ver qué pasa. Según nuestra experiencia personal en el laboratorio con los alumnos, podemos decir que no es fácil conseguir una precisión suficiente en el diseño del cono y la esfera como para apreciar a simple vista que se alcanza la misma profundidad por debajo del agua. De todas maneras, podemos decir que la realización de esta práctica, como resultado final del trabajo teórico realizado previamente, ha tenido mucho éxito en términos de Aprendizaje Basado en Problemas.

## 5. Conclusiones

Considerando figuras flotantes del mismo tipo de material y la misma masa, hemos demostrado que las esferas siempre alcanzan una mayor profundidad por debajo del agua que los cubos, independientemente de la densidad relativa del material con respecto al líquido sobre el cual flotan. La demostración se basa en una idea ajá, que consiste en reescribir la ecuación cúbica (10) como una ecuación cuadrática (11), y luego hacer uso del discriminante de esta última.

Hemos estudiado también la solución para la semi-apertura de un cono que alcanza la misma profundidad que una esfera por debajo de la superficie. Esta semi-apertura se ha expresado en función de la densidad relativa. Para llegar a esta solución, la deducción de la función inversa de (20) ha resultado esencial, a fin de descartar las soluciones complejas espurias, así como las soluciones inestables. Las ecuaciones (24) y (40) recogen las soluciones físicamente admisibles para los ángulos de semi-apertura de los conos. Sorprendentemente, existe una región para la que son posibles dos soluciones.

Finalmente, hemos propuesto una práctica para que sea realizada por estudiantes de grado universitario con la intención de que verifiquen las predicciones teóricas desarrolladas en este artículo. Proporcionamos una guía para la realización de esta práctica, la cual es económica y fácil de implementar en el laboratorio.

## Referencias

-  [Butcher, J.C. \(1987\).](#)  
*The numerical analysis of ordinary differential equations: RungeKutta and general linear methods.*  
John Wiley & Sons Inc.
-  [March-Leuba, J., Cacuci, D.G., Pérez, R.B. \(1986\).](#)  
*Nonlinear dynamics and stability of boiling water reactors: Part 1 – qualitative analysis.*  
Nuclear Science and Engineering, 93(2):111–123.
-  [Park, M.G., Cho, N.Z. \(1992\).](#)  
*Design of a nonlinear model-based controller with adaptive pi gains for robust control of a nuclear reactor.*  
Progress in Nuclear Energy, 27(1):37–49.
-  [Shampine, L.F., Reichelt, M.W. \(1997\).](#)  
*The matlab ode suite. SIAM Journal on Scientific Computing, 18:1–22.*  
Stacey, W. M. (2007). Nuclear Reactor Physics. John Wiley & Sons.
-  [Su, J., Cotta, R.M. \(2001\).](#)  
*Improved lumped parameter formulation for simplified lwr thermohydraulic analysis.*  
Annals of Nuclear Energy, 28(10):1019–1031.
-  [Vidal-Ferràndiz, A., Carlos, S., Verdú, G. \(2017\).](#)  
*Estudio del flujo neutrónico en un reactor cilíndrico.*  
Modelling in Science Education and Learning, 10(2):5–20.