

MEDICION Y MODELACION DE EVENTOS DE TRANSPORTE EN CAUCES TURBULENTOS MEDIANTE TECNOLOGIA IMHE

Alfredo Constaín Aragón¹, Rodrigo Lemos Ruiz² y Óscar Agredo Satizabal³

Resumen:

El estudio de los eventos de la contaminación hídrica, para su predicción, su caracterización y control es una actividad creciente en razón a que la industrialización en las ciudades y el riego intensivo en el campo impactan y condicionan la pureza y uso del recurso. Desde esta perspectiva gran cantidad de esfuerzo y tiempo se han gastado en el análisis, comprensión y medición de los fenómenos básicos de transporte en cauces, sin que hasta la fecha se tenga una teoría aceptada unánimemente. Las razones para esta situación insatisfactoria es que las aproximaciones propuestas adolecen de gran complejidad matemática unas, y de grave dosis de idealización otras, de tal forma que no es factible disponer de metodologías que ofrezcan a la vez simplicidad y precisión (French, 1986; Mc Quivey y Keefer, 1974; Jolankai, 1992).

Se describe en este artículo algunos lineamientos de una investigación sobre el tema de los mecanismos de transporte molecular en cauces turbulentos realizada por el Grupo de hidrometría de Cali (Colombia). En particular se enfoca la utilización de una idea sencilla pero particularmente fructífera en cuanto al *Coefficiente de Dispersión Turbulenta*, el cual lleva a la definición de una corrección de la ecuación de Fick que permite una representación bastante realista de las riadas de trazadores en un cauce turbulento.

Estos conceptos son aplicados a una metodología de medición en cauces reales, denominada IMHE (*instrumentación de multimedición hidrométrica electrónica*) (Constaín, et al, 2000a) la cual se describe con algún detalle, así mismo se mencionan algunas conclusiones sobre la aplicación práctica de esta tecnología en cauces de montaña.

Palabras clave: Hidráulica, Hidrometría, método de trazadores, instrumentación electrónica.

INTRODUCCIÓN

Los actuales modelos físico-matemáticos que se aplican a la descripción y cálculo de los fenómenos de transporte en los cauces naturales presentan variados grados de dificultad de aplicación, razón por la cual nuevos modelos que superen estos inconvenientes son deseables y pueden tener una aplicación directa al mejor entendimiento y control de los impactos negativos sobre el recurso acuático. En este sentido los autores presentan en este Artículo un modelo alternativo que basado en consideraciones muy básicas ofrece una aplicación directa, fácil y precisa en el pronóstico de riadas de solutos vertidas súbitamente. Se analizan resultados de la aplicación del método en un pequeño canal revestido en Colombia.

EL MODELO DE DISPERSIÓN ACTUAL Y SUS LIMITACIONES

El desarrollo del concepto de dispersión en los cauces naturales ha sido explicado a partir de la ecuación de Fick, especialmente por Taylor (French, 1986) quien postuló en 1954 una forma de la ecuación en la que era necesario tener en cuenta un *Coefficiente de Dispersión*, E , constante.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

Al buscar una solución para esta ecuación, se encuentra que dichas funciones son curvas del tipo

1 Investigador Universidad Autónoma de Occidente, Jefe I+D Amazonas Tech. Cali, Colombia. Alfredo.amazonas@parquesoft.com

2 Jefe Departamento de Hidráulica. Universidad del Cauca. Popayán, Colombia. ralemos@ucauca.edu.co

3 Jefe Programa de Ingeniería electrónica. Universidad Autónoma de Occidente. Cali, Colombia. ofagredo@cuao.edu.co

Artículo recibido el 4 de octubre de 2001, recibido en forma revisada el 4 de marzo de 2002 y aceptado para su publicación el 19 de diciembre de 2002. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

gaussiano, Ecuación (2), y que los resultados experimentales usualmente difieren en magnitud y forma, ya que son curvas asimétricas, no gaussianas, especialmente en etapas tempranas y medias de la evolución de las riadas en los cauces (Jobson, 1996).

$$C(x, t) = \frac{M}{A \sqrt{4\pi E t}} e^{-\frac{(x-U_x t)^2}{4Et}} \quad (2)$$

Además de lo anterior, la aplicación práctica de estas ecuaciones para la medición de eventos de contaminación en cauces presentan problemas por cuanto es necesario suministrar un valor de E para resolverlas, y este parámetro normalmente se enfoca como un concepto estadístico dada la gran similitud de las curvas de respuesta con la función Gaussiana de la estadística. (Wiggert, 1998) Para su interpretación adecuada se requiere entonces tomar *dos mediciones* que permitan analizar el comportamiento de la curva en el tiempo. Esta aproximación muy utilizada en las técnicas fluviales tiene dos graves inconvenientes: Uno, es que no se tienen distribuciones simétricas que permitan aplicar fácilmente el concepto estadístico, y dos, que para tomar dos muestras se debe verter una gran cantidad de trazador (French, 1986; Fisher, 1968; Fisher, 1967).

Para mejorar estas condiciones inconvenientes, se presenta a continuación un nuevo principio para enfocar la dispersión en cauces naturales.

UNA APROXIMACION ALTERNATIVA AL FENOMENO DE TRANSPORTE:

Tres son los factores que permiten un tratamiento más simple de la turbulencia: 1.- Considerar *todos* los movimientos turbulentos como descritos por *una única ley*. 2.- Utilizar la ecuación diferencial como medio de separar los dos tipos básicos de movimiento que resultan y 3.- Establecer una relación *causa-efecto* lineal entre el movimiento advectivo y el movimiento difusivo-dispersivo. La primera idea permite facilitar la interpretación de la ecuación diferencial básica, mientras que la segunda y la tercera permiten llegar a una solución apropiada para esta ecuación. En seguida se detallan estos análisis:

1.-El movimiento aleatorio se describe por una única ley

Quizá una de las razones por las cuales no ha sido posible obtener una definición eficiente del

Coefficiente de Dispersión es que se han planteado una multitud de definiciones diferentes para los movimientos erráticos en los cauces turbulentos. Estas definiciones lejos de permitir un tratamiento matemático adecuado han inducido confusión y una supervaloración de artificios mentales que no ayudan a la comprensión profunda del fenómeno.

Es conveniente describir todos los movimientos aleatorios en el transporte molecular en los flujos turbulentos como una sola cosa. Se parte de un concepto básico de "movimiento aleatorio puro", considerando que tal movimiento debe comprender las siguientes características propias de un proceso al azar:

a.- El movimiento de cada partícula debe ser independiente del de cualquier otra, no teniéndose ningún sesgo o "memoria" cinética entre parejas de partículas cualesquiera.

b.- Los movimientos de las partículas deben ser de naturaleza ergódica (Saveliev, 1984), es decir que el promedio temporal calculado sobre una partícula converja sobre el promedio volumétrico de todas las partículas (ensambles). Este principio permite sacar conclusiones sobre promedios de macro estados teniendo en cuenta valores modales en los micro estados más probables. La equiprobabilidad de sucesos elementales permite un cálculo de estos momentos estadísticos mediante las fórmulas probabilísticas tradicionales (Sajarov et al, 1985).

En seguida se analiza como la *difusión turbulenta* y la *dispersión* caen dentro de esta clasificación general de movimiento errático.

La turbulencia como fuente de movimiento aleatorio:

Tradicionalmente se define la turbulencia como la condición en la que se rompe el equilibrio laminar por un aumento de la velocidad del fluido, generándose movimientos erráticos circulares principalmente, en todas direcciones. Se ha identificado un mecanismo de traspaso de energía desde remolinos grandes hacia más pequeños, terminando en el llamado "nivel de Kolmogorov" en el que los remolinos mínimos son disipados en calor por acción de la viscosidad del agua. En los cauces naturales, la turbulencia se acentúa cuando existe cierta distribución de obstáculos dispersivos en su lecho, denominándose este fenómeno como "rugosidad"

El movimiento turbulento entonces, independiente de que sea soportado por torbellinos o por obstáculos rugosos, corresponde bien a desplazamientos erráticos de volúmenes elementales de fluido, independientes y equiprobables, o sea descritos bien por una ley general del movimiento errático.

La dispersión como fuente de movimiento aleatorio:

Se define generalmente “Dispersión” como el efecto de desperdigamiento de una masa de trazador en el seno de un líquido cortante fluyendo con gradientes de velocidad. Aunque el patrón de distribución de velocidades puede ser uniforme, fluctuaciones en estas distribuciones generan movimientos aleatorios de las partículas de trazador transportado y extendido por el fluido. Si se consideran estos movimientos erráticos como sin correlación entre ellos (independientes) y ergódicos (equiprobables) entonces pueden ser representados por una distribución gaussiana de variable aleatoria y ser modelados como un fenómeno de promedio cuadrático, o sea “difusivo”. (Guaresimov *et al*, 1980; Fisher, 1969)

Característica general de los movimientos aleatorios:

Una vez que se han descrito los diferentes tipos de movimientos aleatorios en un cauce turbulento, es interesante plantear una característica básica común que pueda describir con cierta aproximación el efecto neto de cada uno de ellos, y en conjunto. Una tal característica es el poder de separación errática de dos partículas en una misma posición inicial y que por efecto del movimiento aleatorio en cuestión se separan Δ en un tiempo τ .

2.-La ecuación diferencial de Taylor como un medio de separación de los dos tipos de movimiento en el transporte molecular:

Una vez que se acepte que el movimiento aleatorio es uno solo, no hay problema en interpretar adecuadamente el significado de la ecuación diferencial (1): El término $U_x (\partial C / \partial x)$ comprende todos los movimientos que tienen exactamente una velocidad media U_x , mientras que el término $E (\partial^2 C / \partial x^2)$ comprende todos los movimientos aleatorios en el transporte, o sea tanto dispersión como difusión turbulenta. (Holley, 1969) Este efecto separador de la ecuación es válida para todo instante y en cualquier valor de la coordenada, y no es necesario imponer condiciones adicionales.

3.-Establecimiento de una relación causa-efecto entre el movimiento advectivo y el difusivo-dispersivo:

Esta dependencia se establece a nivel de las velocidades. Se postula una relación lineal entre la velocidad advectiva media y la velocidad de difusión-dispersión (Constaín *et al*, 2000b y 2002):

$$\phi = \frac{V_{Dif}}{U_x} \tag{3}$$

En esta ecuación, ϕ es un *Coefficiente de Asimetría*, V_{dif} es la velocidad de difusión y se calcula por medio de la relación *de Einstein –Smoluchowsk* (Smorodinsky, 1983) propuesta en 1905, la cual es válida para movimiento completamente al azar, U_x es la *velocidad media advectiva del cauce* y E es el *Coefficiente de dispersión longitudinal*, si se considera una sola coordenada:

$$\Delta^2 = 2 E \tau \tag{4}$$

La velocidad de difusión V_{dif} puede definirse como la siguiente razón :

$$V_{Dif} = \frac{\Delta}{\tau} \tag{5}$$

Aquí Δ y τ son la longitud y el tiempo característicos del proceso de dilución, correspondientes a la difusión del 68% de la masa del trazador desde el punto inicial de vertimiento (O’M Bockris y Reddy 1978). Por lo tanto:

$$U_x = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{2 E}{\tau}} \tag{6}$$

Esta ecuación, que define la velocidad media del cauce, es en realidad una expresión general, válida incluso para condiciones de *flujo variado*, ya que las condiciones impuestas sobre la ecuación *no tienen que ver con el régimen de flujo*. Esta ecuación, que es más general que la de Chezy, puede ser aplicada tanto a ríos como a canales.

Si se despeja el Coeficiente de dispersión longitudinal E , si se reemplaza en la solución de Fick-Taylor, y si se supone que $\tau = \beta t$, se tiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} \phi^2 U_x^2 \beta t \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{7}$$

Esta ecuación modificada tiene en cuenta la relación entre velocidades de diferente tipo de movimientos en el fenómeno de transporte, y por lo

tanto involucra los fenómenos que conducen a formas no gaussianas:

$$C(x, t) = \frac{M}{Q t \phi \sqrt{2\pi \beta}} e^{\frac{-(x-U_x t)^2}{2\phi^2 \beta U_x^2 t^2}} \quad (8)$$

La anterior solución que utilizará más adelante concuerda enteramente con los datos experimentales, debiéndose tener condiciones de *mezcla completa* (o sea difusión completa en toda la sección transversal) para cumplir con las condiciones de validez del caudal, que exige que la mezcla se haya hecho ya en toda la sección cruzada del cauce

El valor numérico de $\beta = 0.217$ que es una constante para todos los casos puede obtenerse de una representación aproximada por triángulos de una riada arbitraria, determinando τ en función de t .

El coeficiente de asimetría ϕ puede definirse como en la siguiente ecuación, teniendo en cuenta los tiempos de subida y bajada de los flancos de la riada, como en la Figura No.1.

$$\phi = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} \quad (9)$$

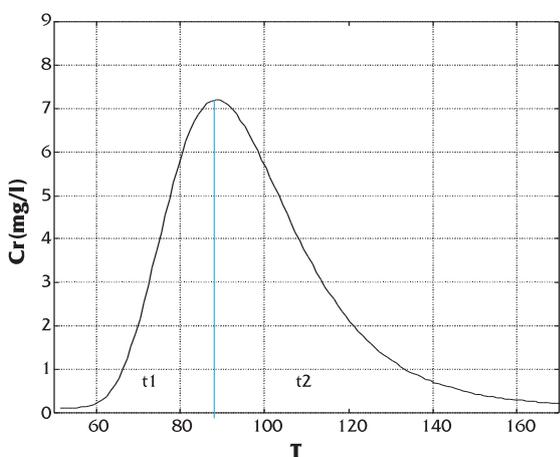


Figura 1. Tiempos de subida y bajada de la riada.

El caudal se calcula a partir de la ecuación (8) para el punto máximo, y haciendo $t_2+t_1=t$:

METÓDICA DE MEDICIÓN

1.-Enfoque general

El desarrollo teórico previo permite diseñar una metódica de medición alterna, la cual se detalla en seguida:

$$Q = \frac{M}{C_{\max} \phi (t_2 + t_1) \sqrt{2\pi\beta}} \quad (10)$$

a.- De acuerdo con la teoría desarrollada, es suficiente hacer medidas sobre riadas tomadas en un solo sitio, no en dos puntos como se ha considerado obligatoriamente en los métodos tradicionales de evaluación de la dispersión en cauces naturales. Esto por cuanto la curva no fickiana tiene en sí toda la información necesaria para describir el fenómeno.

b.- La evaluación del Coeficiente de Dispersión Turbulenta, para condición de mezcla total se puede realizar muy fácilmente, con gran precisión utilizando un instrumento digital que se ha construido especialmente para el efecto. Este equipo tiene programadas las diferentes ecuaciones en su microcontrolador, mostrando en pantalla los diferentes resultados, pudiéndose bajar la información a un PC. Figura No.2



Figura 2. Instrumento digital para realizar las verificaciones.

2.-Metodología numérica y experimental

El sensor del instrumento recoge la señal de conductividad de la riada cuando esta pasa por el punto de medición, es acondicionada por los circuitos analógicos, especialmente un filtro de quinto orden pasa bajo para restringir el paso de altas frecuencias asociadas a las fluctuaciones naturales, es codificada digitalmente y procesada por los programas del equipo. Al terminar el paso de la riada, el operario ingresa por menú los datos de entrada: distancia del vertimiento, X , y masa, M . Al darle un comando de cálculo se muestra en pantalla siguientes datos: t_p , t_2 , $C(x,t)$ máxima, ϕ , U_x y Q . Los datos puntuales de conductividad tomados cada 1.9 segundos aparecen en pantalla y son tomados por el experimentador, o se guardan en memoria en la última versión del instrumento.

El instrumento tiene una relativa alta resolución (centésimas de miligramo) para la medida de conductividad y es calibrado contra patrones de más alta calidad disponibles en entidades ambientales de la región. Su precisión global se deteriora por los errores accidentales provenientes de las

fluctuaciones de conductividad de los cauces, llegando a ser alta en algunas corrientes, del orden del 15-25% de error relativo. Sin embargo el programa tiene algunas rutinas especiales que permiten mejorar esta situación en los casos complicados.

3.- Presentación y análisis de resultados experimentales de un trabajo de campo

Se hicieron 8 pruebas sobre una canaleta de asbesto-cemento, tomando dos sitios y dos cantidades de sal. Es un canal de relativa alta velocidad. Se puede partir de un valor de Manning aproximado a $n = 0.011$ con una pendiente aproximada de 1.0 %. La profundidad media es de 0.073 m y el ancho medio es de 0.38 m. Figura No. 3



Figura 3. Canaleta de prueba.

Primer experimento

$M = 30 \text{ g}$ $X = 100 \text{ m}$.

Los resultados se muestran en la Tabla No.1

Para facilitar el ejercicio de comparación las riadas experimentales (trazo continuo) se grafican superpuestas al modelo teórico desarrollado con los datos tomados por el instrumento (trazo discontinuo), a partir de la ecuación (8). Las curvas reales se distinguen por las fluctuaciones de conductividad, por una discretización más evidente y por una terminación más temprana. Figura No.4

Segundo experimento

$M = 18.2 \text{ g}$ $X = 75 \text{ m}$.

Los resultados se muestran en la Tabla No.2

Con estos datos, y utilizando la ecuación (8) se traza el modelo teórico que se superpone a las curvas reales, trazadas a partir de los datos de conductividad en función del tiempo. Las curvas experimentales están sujetas a fluctuaciones como se verifica en las gráficas siguientes. Figura No.5

Los resultados de estos dos experimentos, tomados a dos distancias y con diferente masa muestran una convergencia del valor del Coeficiente de Dispersión Turbulenta, con un error menor al 2%. Para el caudal el error es mayor, siendo menor al 15%. Una probable razón de esta diferencia es el filtro que modifica en fase la información de las señales más rápidas (en este caso la del segundo experimento) deteriorando fundamentalmente su "altura" que condiciona principalmente al caudal. En ambos casos las figuras teóricas se acoplan bastante bien con las riadas experimentales, indicando un modelamiento ajustado.

Tabla 1 Datos experimentales tomados por el instrumento en 1^{er}. experimento.

Riada No.	t_1 s	t_2 s	ϕ	U_x M/s	Cr Mg/l	E M ² /s	Q M ³ /s
1	29.0	60.9	0.35	1.11	13.1	1.47	0.061
2	28.0	56.8	0.34	1.18	11.7	1.48	0.076
3	30.0	61.1	0.34	1.10	14.1	1.38	0.059
4	30.0	60.3	0.34	1.11	14.3	1.40	0.059
Promedio	29.3	59.8	0.34	1.13	13.3	1.43	0.064

Tabla 2. Datos experimentales tomados por el instrumento en 2^o. experimento.

Riada No.	t_1 s	t_2 s	ϕ	U_x M/s	Cr Mg/l	E M ² /s	Q M ³ /s
1	17.3	36.0	0.351	1.40	10.86	1.40	0.075
2	17.3	36.0	0.351	1.40	11.05	1.40	0.075
3	17.3	36.0	0.351	1.40	11.46	1.40	0.072
4	16.4	35.6	0.369	1.44	11.16	1.59	0.075
Promedio	17.1	35.9	0.356	1.41	11.13	1.45	0.075

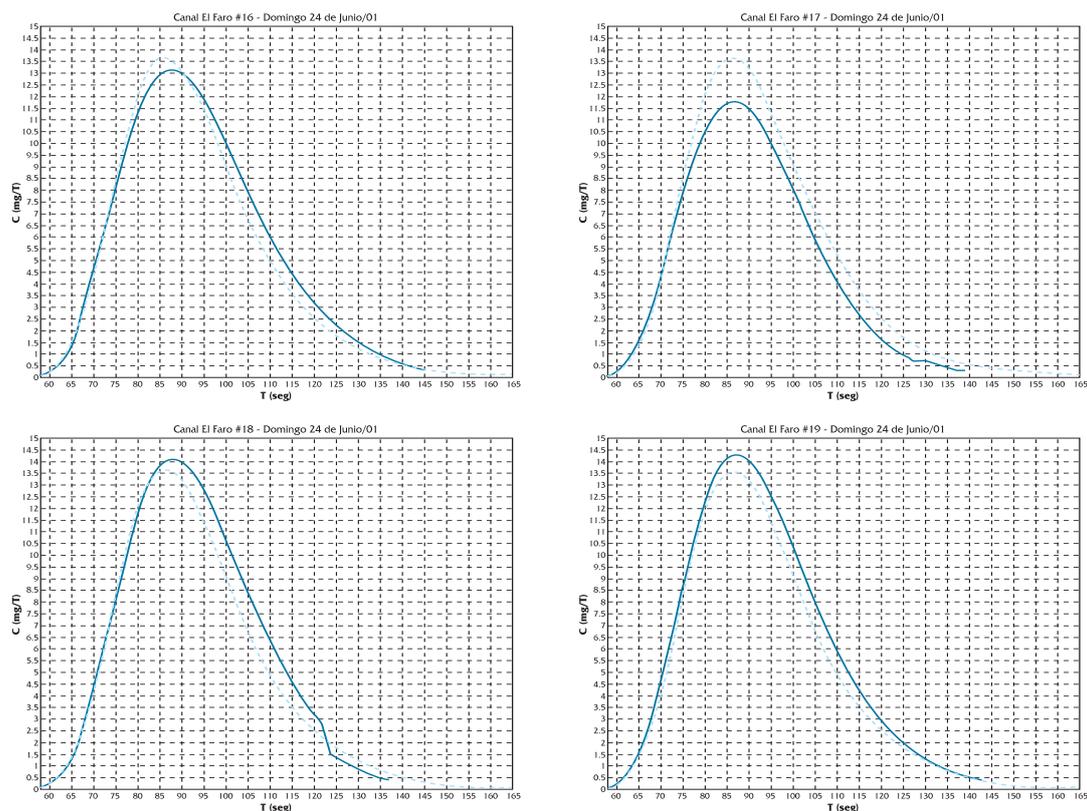


Figura 4. Comparación entre curvas reales y teóricas para el 1er experimento.

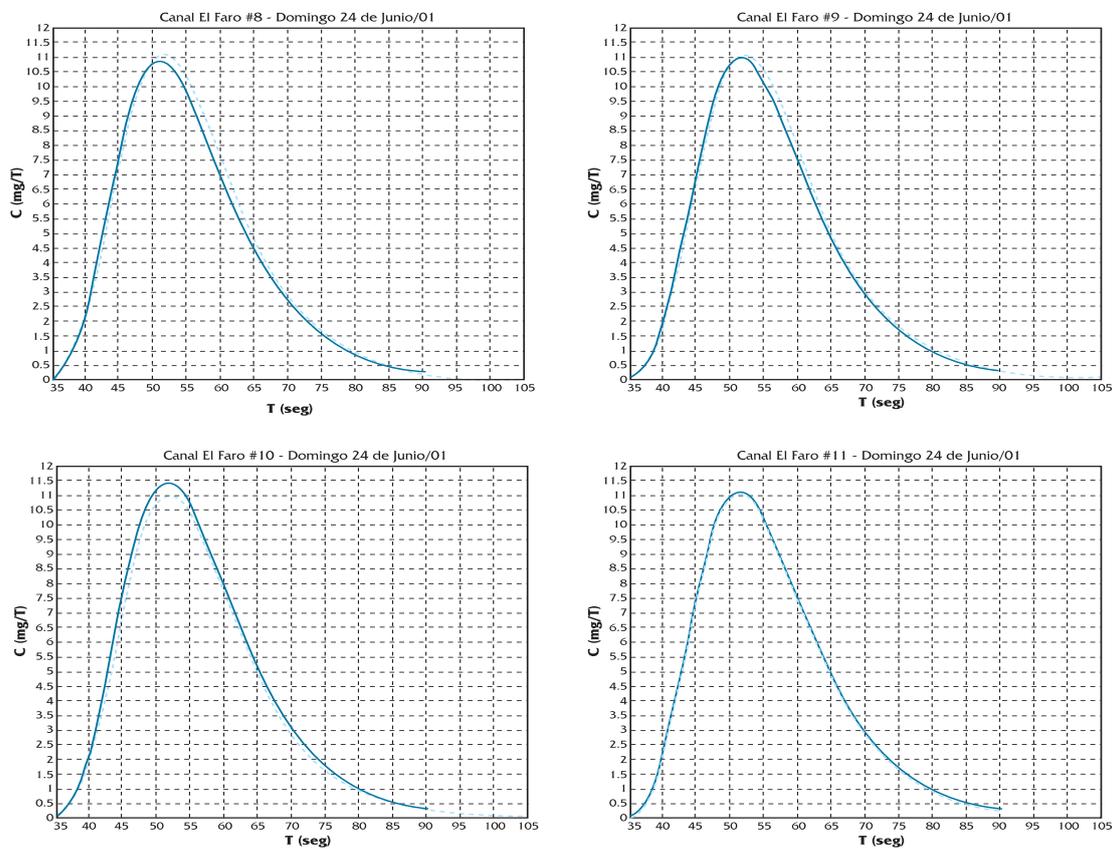


Figura No.5 Comparación entre curvas reales y teóricas para el 2º. Experimento

Se observa un adecuado comportamiento para ϕ , el cual disminuye con la distancia

CONCLUSIONES

1.- El modelo teórico presentado para dar una visión integrada de los movimientos erráticos turbulentos, la separación del movimiento aleatorio y el advectivo en la ecuación diferencial básica, y la postulación de una relación lineal entre velocidad advectiva y velocidad de difusión- dispersión, permiten llegar a unas expresiones que son convergentes con las curvas experimentales en los cauces naturales. La tecnología subsiguiente permite hacer mediciones rápidas y precisas desde la orilla, a partir de datos de conductividad. El instrumento digital construido para la verificación experimental del modelo realiza los cálculos a partir de ecuaciones almacenadas en su micro-controlador y muestra en pantalla los resultados, previo manejo de un menú.

2.- La metódica para evaluación de fenómenos de dispersión se facilita grandemente, teniendo en cuenta que el instrumento extrae toda la información de una única riada, con una adecuada precisión. Estas características son debidas a que el método no es estadístico y parte precisamente de que las riadas no son gaussianas. La aplicación de dicha metódica a 2 experimentos con masas y distancias distintas realizados en una canaleta de asbesto-cemento muestran un ajuste apropiado de las curvas experimentales con las curvas teóricas construidas con los datos obtenidos del experimento, en ambos casos. La medición del coeficiente de dispersión en los dos puntos es convergente con un error relativo menor al 2%. Para el caudal la convergencia es menor, con un error menor al 15%, probablemente ocasionado por la distorsión en fase que ocasiona la acción de un filtro pasa-bajo en el circuito electrónico de entrada.

3.- Los autores trabajan en un equipo basado en software, de tal forma que la acción del filtro pueda ser neutralizado, ofreciendo una información válida para todo tipo de cauces.

LISTA DE SIMBOLOS

A	Área seccional cruzada del canal en m^2
$C = C(x)$	Concentración diferencial en el punto de medición en mg/l
E	Coefficiente general de difusión-dispersión en m^2/s

Q	Caudal promedio en el tramo en m^3/s
M	Masa del trazador en g
t	tiempo en s .
t_1	tiempo incremental del flanco subiente de la riada en s .
t_2	tiempo incremental del flanco bajante de la riada en s .
t	$t_1 + t_2$
U_x	Velocidad media en el tramo de medición en m/s .
V_{diff}	Velocidad de difusión en m/s .
x	Eje longitudinal en m .
β	Constante de proporcionalidad entre t y τ
Δ	Longitud característica de difusión en m .
ϕ	Coefficiente de asimetría de la riada
τ	Tiempo característico de difusión en s .

RECONOCIMIENTOS

Se está en deuda con las siguientes instituciones colombianas que han apoyado la presente investigación: Empresa Amazonas Tech de Fundación Parque de Software de Cali, Universidad Autónoma de Occidente (C.U.A.O.), Corporación Ambiental del Valle del Cauca (C.V.C.) y Universidad del Cauca

REFERENCIAS

- Constaín A., Lemos R., y Agredo F. 2002. Applications of a non uniform flow velocity equation in streams. Proc. of River Flow 2002 International Conference, A.A. Balkema Publishers, Lisse, Netherlands. Pp 135-142.
- Constaín, A., Mena J.C. y Agredo O .F, 2000a, Fundamentación Física para el diseño de un instrumento para medición de coeficientes de difusión turbulenta. Anales IX Congreso Latinoamericano de Control, Cali, y Congreso Internacional METROLOGIA 2000, Guadalajara, México. Cd-rom.
- Constaín, A., Lemos R. y Carvajal A. 2000b, Medición de factores de resistencia y el de difusión turbulenta en cauces fluviales. Anales del XIX Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Córdoba, Argentina. Tomo I, Pp 740-752, y Revista Ingeniería hoy, Universidad del Cauca, 2001, Popayán, Colombia, Pp 2 -7.
- Fisher H.B. 1969. The effects of bends on dispersion in streams. Water resources research, Vol 2. No.5 April 1969. Pp 496-505.
- Fisher H.B. 1968 Dispersion predictions in natural streams Journal of the sanitary engineering division, Proceedings of ASCE. October 1968. SA 5, Pp 928-943.

- Fisher H.B., 1967. The mechanics of dispersion in natural streams. Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of ASCE, HY 6, Pp 187-215.
- French R. 1986, Open Channel Hydraulics . Mc Graw-Hill, N.Y. Chapter 10
- Guaresimov, Ya., Dreving V., Eriomin E., Kiseliiov A., Lebedev V., Panchenkov G., y Shiliguin A. 1980. Curso de Química Física. Editorial MIR, Moscú, Rusia.. Pp 589-597.
- Holley E. 1969. Unified view of diffusion and dispersion Journal of the Hydraulic division, Proceedings of the ASCE. HY 2. March. Pp 621-631.
- Jobson H. 1996 Prediction of traveltime and longitudinal dispersion in rivers and streams. USGS Water-resource investigations Report 96-4013. Accessible en internet.
- Jolankai G. 1992. Hydrological, chemical and biological process of contaminant transformation and transport in river and lake systems. UNESCO, Paris, International Hydrological Programme, IHP-IV Project H-3.2
- Mc Quivey R., y Keefer T. 1974. Simple meted for predicting dispersions in streams. The Journal of environmental engineering division, August 1994, EE4 Pp 997-1011.
- O'M Bockris J. Y Reddy A. 1978. Electroquímica moderna. Editorial Reverté, Barcelona, España,
- Saveliev I.V. 1984, Curso de Física General. Editorial MIR, Moscú, Rusia, Capitulo 10.
- Sajarov V., Sevastianov B., y Chistiakov V. 1985. Teoría de las Probabilidades, Editorial MIR, Moscú, Rusia. Capítulo 12.
- Smorodinsky Ya. 1983. La temperatura. Editorial MIR, Moscú, Rusia, Pp: 152-154.
- Wiggert P. 1998. Mecánica de fluidos Pearson PH, México, Capítulo 14.