

# FRICCIÓN Y TENSIÓN TANGENCIAL POR FONDO CON OLA Y CORRIENTE

José S. Antunes do Carmo<sup>1</sup>, A. Temperville<sup>2</sup> y Fernando J. Seabra-Santos<sup>1</sup>

Artículo publicado por IAHR en el *Journal of Hydraulic Research*. Volumen 41, Número: 1.  
Traducido por Prof. Dña. M<sup>o</sup> José Polo. Universidad de Córdoba

## Resumen:

Se calcula la tensión tangencial debido a ola y corriente mediante un modelo numérico con cierre turbulento K-L, donde K es la energía cinética turbulenta y L es la escala longitudinal de turbulencia. Se obtiene el coeficiente de fricción parametrizado para el caso de flujo turbulento rugoso, siguiendo a Soulsby *et al.* (1994) y se amplía al caso de flujo turbulento liso. La comparación de estos resultados con otros existentes en la literatura, especialmente los proporcionados por Tanaka y Thu (1994) muestra un buen ajuste. Se propone una nueva parametrización de la serie temporal de la tensión tangencial que incluye el coeficiente de fricción local obteniéndose mejores resultados que aplicando la parametrización propuesta por Soulsby *et al.* (1994).

**Palabras clave:** Tensión tangencial, turbulencia, ola-corriente, fricción por fondo.

## INTRODUCCIÓN

La evolución de la morfología del litoral está relacionada de forma directa tanto con la gestión del mismo ligada a la actividad del hombre (*e.g.* puertos, diques y rompeolas) como con la erosión causada por fenómenos naturales (*e.g.* a corto plazo, episodios lluviosos, o variaciones del nivel mar a largo plazo). La anticipación de estos cambios morfológicos depende siempre de una correcta predicción de la intensidad de transporte de la arena debida a la acción de las olas y las corrientes, lo cual requiere una estimación precisa del rozamiento con el fondo. La predicción de los esfuerzos ejercidos sobre el lecho se ha limitado a contemplar ondas monocromáticas en una única dirección, ignorando su irregularidad, no-linealidad, asimetría, múltiples direcciones y rotura. En los últimos años, diversos autores han contribuido a ampliar el conocimiento de los efectos del oleaje sobre la intensidad del transporte de la arena, usando modelos teóricos.

En 1981, Tanaka y Shuto derivaron una solución teórica de forma implícita bajo la hipótesis de viscosidad turbulenta permanente para el rozamiento producido en el lecho por una onda senoidal en interacción con una corriente con régimen turbulento. Más tarde, los mismos autores propusieron una solución explícita que consideraba si el régimen turbulento era rugoso o liso. Esta solución se resume en el apartado II.

Durante el programa europeo Morfodinámica del litoral MAST I/G6M, la comparación de diversos modelos numéricos que incorporaban una viscosidad turbulenta instantánea llevó a una parametrización de los valores máximo y medio de los esfuerzos tangenciales,  $\tau_{\max}$  y  $\tau_m$  respectivamente, en el caso de interacción entre una ola senoidal y una corriente oblicua en régimen turbulento rugoso. Estos resultados fueron publicados en Soulsby *et al.* (1994).

<sup>1</sup> IMAR-Institute of Marine Research, Department of Civil Engineering, University of Coimbra, Portugal

<sup>2</sup> Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels/IMG, (Laboratoire de l'UJF, de l'INPG et du CNRS), BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

Este trabajo utiliza el modelo numérico de Huynh Thanh y Temperville (1991) (denominado HT91 en Soulsby *et al.* (1994)) mediante el cual se llevó a cabo la citada comparación. Resumiéndolo, el sistema de ecuaciones se establece con las siguientes hipótesis: (1) el espesor de la capa límite es mucho menor que la longitud de onda de la ola; (2) la amplitud de la velocidad de la ola  $U_w$  es mucho menor que la celeridad de la ola. Con estas condiciones, se pueden escribir las ecuaciones de la cantidad de movimiento para las componentes horizontales de la velocidad ( $u, v$ ) y las ecuaciones K y L para el cierre turbulento.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U_w}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial V_w}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = v_t \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{v_t}{L^2} K + 1.2 \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial K}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.175 \frac{v_t}{K} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] L + 0.075 \sqrt{2K}$$

$$+ 1.2 \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial L}{\partial z} \right) - \frac{0.375 \sqrt{2}}{\sqrt{K}} \left[ \frac{\partial (\sqrt{KL})}{\partial z} \right]^2$$

Donde ( $U_w, V_w$ ) son las componentes horizontales de la velocidad de la ola,  $P_c$  la presión debida a la corriente, y donde la viscosidad turbulenta se obtiene suponiendo equilibrio local de la turbulencia, lo cual permite expresar  $v_t$  como:

$$v_t = \frac{\sqrt{2K}}{4} L$$

Tran Thu (1995) aplicó este modelo en el estudio del flujo turbulento liso, introduciendo ciertas modificaciones en las condiciones de contorno. En el apartado II se recogen algunos de sus resultados. El punto III.1 compara otros resultados obtenidos con este mismo modelo para una ola senoidal y diferentes casos de régimen turbulento, con los resultados de Tanaka y con datos experimentales. En el punto III.2 se comparan los resultados de este modelo con los obtenidos por Tanaka para una ola regular junto con una corriente tanto en régimen turbulento liso como rugoso.

Asimismo, para el caso de flujo turbulento rugoso, se recogen en las figuras los resultados obtenidos a partir de la parametrización propuesta por Soulsby (1994) usando los coeficientes de Fredsøe.

Soulsby y Ockenden (1994) mostraron que el esfuerzo tangencial instantáneo producido por una ola irregular podía calcularse definiendo una ola monocromática equivalente, con una amplitud de la velocidad orbital  $U_w = \sqrt{2} U_{rms}$ , periodo  $T_p$ , en la que la dirección de propagación es la dirección media de las olas irregulares. En el apartado IV, usaremos el modelo para mostrar que el efecto de “*la evolución temporal de la turbulencia*” puede ejercer una gran influencia en el caso de olas asimétricas. Teniendo en cuenta dicho efecto, y siguiendo la aproximación de Soulsby y Ockenden (1994), proponemos una formulación nueva para calcular la evolución temporal de los esfuerzos tangenciales.

## DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS

### Modelo de Tanaka.

El modelo propuesto por Tanaka y Shuto (1981; 1984) se basa en la hipótesis de que la viscosidad turbulenta permanece constante en el tiempo. En el caso de interacción entre una corriente y una onda senoidal cuyas direcciones forman entre sí un ángulo  $\phi$ , Tanaka y Shuto derivaron una solución teórica para el coeficiente de rozamiento  $f_{cw}$ , definida como:

$$\frac{\tau_{max}}{\rho} = U_{cw}^*{}^2 = \frac{f_{cw}}{2} \hat{U}_w^2$$

Donde  $\tau_{max}$  representa el valor máximo del esfuerzo tangencial en la interacción ola-corriente,  $U_{cw}^*$  es la máxima velocidad de corte bajo las olas y la corriente, y  $\hat{U}_w$  la amplitud de la velocidad orbital de la ola en el límite superior de la capa límite en el lecho.

La solución teórica propuesta para el coeficiente de rozamiento en el caso de régimen turbulento, tanto rugoso como liso, se obtiene mediante iteración. Más recientemente, Tanaka y Thu (1994) derivaron una solución explícita para los diferentes regímenes del flujo, turbulento rugoso, turbulento liso y laminar, así como para las condiciones transitorias de la interacción ola senoidal-corriente. El coeficiente de rozamiento  $f_{cw}$  viene dado por:

$$f_{cw} = \tilde{f}_c + 2 \sqrt{\beta \tilde{f}_c f_w} \cos(\phi) + \beta f_w \quad \tilde{f}_c = f_c \left( \frac{U_c}{\hat{U}_w} \right)^2 \quad (1)$$

donde el término  $\beta$  depende del tipo de régimen turbulento (rugoso o liso); se define más adelante.

Los coeficientes de rozamiento para la corriente y la ola,  $f_c$  y  $f_w$ , respectivamente, quedan definidos por:

$$\frac{\tau_c}{\rho} = \frac{f_c}{2} U_c^2 \quad \frac{\hat{\tau}_w}{\rho} = \frac{f_w}{2} \hat{U}_w^2 \quad (2)$$

donde  $\tau_c$  representa el esfuerzo tangencial en el lecho ocasionado por la corriente,  $\hat{\tau}_w$  el máximo valor absoluto del esfuerzo tangencial ocasionado por la ola, y  $f_c$  y  $f_w$  se calculan mediante:

a) en el caso de régimen turbulento rugoso

$$f_c = f_{c(s)} \quad f_w = f_{w(s)}$$

$$f_{c(r)} = 2 \left( \frac{k}{\ln(\frac{h}{z_0}) - 1} \right)^2 \quad f_{w(r)} = \exp \left[ -7.53 + 8.07 \left( \frac{A}{z_0} \right)^{-0.1} \right] \quad (3)$$

$$\beta = \frac{1}{1 + 0.769 \alpha^{0.83}} \left[ 1 + 0.863 \alpha \exp(-1.43 \alpha) \left( \frac{2\phi}{\pi} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{1}{\ln(\frac{h}{z_0}) - 1} \left( \frac{U_c}{\hat{U}_w} \right)$$

$k$  es la constante de von Kármán ( $k = 0.4$ ),  $z_0$  la longitud de aspereza ( $z_0 = K_N / 30$ ),  $\phi$  el ángulo formado por las direcciones de la ola y la corriente en radianes,  $h$  la altura de la columna de agua, y  $A$  la amplitud del movimiento de la partícula en el límite superior de la capa límite del lecho.

b) en el caso de régimen turbulento liso

$$f_c = f_{c(r)} \quad f_w = f_{w(r)}$$

$$f_{c(s)} = \exp[-7.60 + 5.98 R_c^{-0.0977}] \quad (5)$$

$$f_{w(s)} = \exp[-7.94 + 7.35 R_w^{-0.0748}]$$

$$\beta = \frac{1 + 0.871 R_c^{-0.0362} f_{c(s)}^{0.177} \left( \frac{2\phi}{\pi} \right)^{2.5}}{1 + 5.04 R_c^{-0.0303} f_{c(s)}^{0.379}} \quad (6)$$

$$R_c = \frac{U_c h}{\nu}$$

$$R_w = \frac{\hat{U}_w A}{\nu}$$

**Modelo de Soulsby**

a) Régimen turbulento rugoso. Modelo de Thuyh Thanh (1990).

Durante el programa europeo Morfodinámica del Litoral MAST I/G6M, varios modelos sofisticados se usaron para calcular el esfuerzo tangencial cuando interaccionan una ola senoidal y una corriente, en el caso de régimen turbulento rugoso. Aquellos modelos numéricos contemplaban la variación temporal de la viscosidad turbulenta. Tras comparar los resultados, Soulsby *et al.* (1994) propusieron la siguiente parametrización:

$$Y_1 = 1 + a X_1^m (1 - X_1)^n \quad y_1 = X_1 \left( 1 + b X_1^p (1 - X_1)^q \right) \quad (7)$$

$$Y_1 = \frac{\tau_{max}}{\tau_c + \hat{\tau}_w} \quad y_1 = \frac{\tau_m}{\tau_c + \hat{\tau}_w} \quad X_1 = \frac{\tau_c}{\tau_c + \hat{\tau}_w} \quad (8)$$

donde los coeficientes  $a, m, n, b, p$  y  $q$  vienen dados por una expresión de la forma:

$$a = a_1 + a_2 |\cos \phi|^l + (a_3 + a_4 |\cos \phi|^l) \log_{10}(f_{w(r)} / f_{c(r)}) \quad (9)$$

$$b = b_1 + b_2 |\cos \phi|^j + (b_3 + b_4 |\cos \phi|^j) \log_{10}(f_{w(r)} / f_{c(r)})$$

La primera ecuación corresponde a los coeficientes  $a, m$  y  $n$ , mientras que  $b, p$  y  $q$  siguen la segunda.

La tabla 1 recoge los valores de los coeficientes  $a_i, m_i, n_i, l, b_i, p_i, q_i$  y  $J$  ajustados para este modelo (HT91 en Soulsby *et al.* (1994)) y para el modelo de Fredsøe (F84).

Tabla 1. Coeficientes del ajuste  $a_i, m_i, n_i, l, b_i, p_i, q_i$  y  $J$  para los modelos de Fredsøe (1984) =F84; Huyn-Thanh y Temperville (1991)=HT91, y Tran Thu (1995)=TT95

|      | $a_1$  | $a_2$ | $a_3$  | $a_4$  | $m_1$  | $m_2$  | $m_3$ | $m_4$  | $n_1$ | $n_2$  | $n_3$ | $n_4$  | $l$   |
|------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
| HT91 | -0.070 | 1.870 | -0.340 | -0.120 | 0.720  | -0.330 | 0.080 | 0.340  | 0.780 | -0.230 | 0.120 | -0.120 | 0.820 |
| F84  | -0.060 | 1.700 | -0.290 | 0.290  | 0.670  | -0.290 | 0.090 | 0.420  | 0.750 | -0.270 | 0.110 | -0.020 | 0.800 |
| TT95 | 0.711  | 0.542 | -0.167 | 0.784  | 0.238  | -0.034 | 2.711 | -1.091 | 0.368 | -0.011 | 0.266 | 0.268  | 0.800 |
|      | $b_1$  | $b_2$ | $b_3$  | $b_4$  | $p_1$  | $p_2$  | $p_3$ | $p_4$  | $q_1$ | $q_2$  | $q_3$ | $q_4$  | $J$   |
| HT91 | 0.270  | 0.510 | -0.100 | -0.240 | -0.750 | 0.130  | 0.120 | 0.020  | 0.890 | 0.400  | 0.500 | -0.280 | 2.700 |
| F84  | 0.290  | 0.550 | -0.100 | -0.140 | -0.770 | 0.100  | 0.270 | 0.140  | 0.910 | 0.250  | 0.500 | 0.450  | 3.000 |
| TT95 | 0.311  | 0.347 | -0.205 | 0.061  | -0.570 | -0.070 | 0.036 | 0.522  | 0.809 | 0.491  | 0.475 | 1.326  | 3.800 |

Con este modelo, Huynh Thanh (1990) propuso la ecuación (10) para el valor del coeficiente de rozamiento ocasionado por la ola  $f_{w(r)}$  en el caso de régimen turbulento rugoso:

$$f_{w(r)} = c_1 \exp \left[ c_2 \left( \frac{A}{K_N} \right)^{n_1} \right] \quad (10)$$

con los valores de los coeficientes empíricos  $c_1$ ,  $c_2$  y  $n_1$ , determinados por Huynh Thanh y recogidos en la tabla 2 (caso  $HT_{fwr}$ ).

Usando el mismo modelo de capa límite (HT91), considerando el mejor ajuste con un gran número de resultados del modelo, en el intervalo  $6.4 \cdot 10^{-1} \leq A/K_N \leq 3.4 \cdot 10^3$ , proponemos para los coeficientes empíricos de la ecuación (10) los valores denominados  $CT_{fwr}$  en la tabla 2.

Tabla 2. Coeficientes del ajuste  $c_1$ ,  $c_2$  y  $n_1$  para el modelo de Huynh Thanh (1990)= $HT_{fwr}$  y el modelo propuesto =  $CT_{fwr}$

| Coeficientes<br>Fórmula | $a_1$   | $a_2$   | $n_1$    |
|-------------------------|---------|---------|----------|
| <b>HT<sub>fwr</sub></b> | 0.00278 | 4.65000 | -0.22000 |
|                         | 0.00140 | 4.58400 | -0.13400 |

En el caso de la corriente, Huynh Thanh encontró que el valor del coeficiente de rozamiento  $f_{c(r)}$  coincide con el obtenido de forma teórica mediante la ecuación (3).

b) Régimen turbulento liso. Modelo de Tran Thu (1995).

Durante el programa europeo Morfodinámica del Litoral MAST I/G6M, Tran Thu (1995) uso el modelo usado en este trabajo para estudiar el caso de régimen turbulento liso. En el caso de una corriente, encontró que el valor del coeficiente de rozamiento  $f_{c(s)}$  coincide con el proporcionado por la siguiente fórmula teórica:

$$\frac{1}{\sqrt{f_{c(s)}}} = 1.768 \ln(R_c \sqrt{f_{c(s)}}) + 1.554 \quad (11)$$

la cual puede ser aproximada por la ecuación explícita propuesta por Tanaka y Thu (1994):

$$f_{c(s)} = \exp \left[ -7.60 + 5.98 R_c^{-0.0977} \right] \quad (12)$$

Para una ola, Tran Thu parametrizó el coeficiente de rozamiento  $f_{w(s)}$  de la forma:

$$\frac{1.16}{4\sqrt{f_{w(s)}}} + \log_{10} \left( \frac{1}{4\sqrt{f_{w(s)}}} \right) = \log_{10}(R_w) - 1.16 \quad (13)$$

ecuación que puede ser aproximada mediante:

$$f_{w(s)} = 0.39 R_w^{(-0.44 + 0.02 \log_{10} R_w)} \quad (14)$$

En (8)  $\tau_{max}$  y  $\tau_m$  son el esfuerzo tangencial no lineal máximo y medio, respectivamente, y  $\tau_c + \hat{\tau}_w$  puede interpretarse como el máximo esfuerzo de superposición sin efectos no-lineales en el caso de interacción corriente-ola unidireccional. Como consecuencia de efectos no lineales, podemos adoptar  $Y > 1$  e  $y > x$  en el intervalo  $0 < x < 1$ , y las ecuaciones contenidas en (7) reflejan correctamente estas características para la interacción corriente-ola unidireccional. Sin embargo, en un caso general de interacción corriente-ola oblicua, el cumplimiento de estas condiciones requiere la consideración vectorial de  $\tau_c + \hat{\tau}_w$ , so  $|\tau_c + \hat{\tau}_w|$ , usando una suma vectorial en lugar  $\tau_c + \hat{\tau}_w$  de la anterior para que las expresiones (7) y (9) sigan siendo válidas. De esta forma, tal y como sugirió Tran Thu, proponemos una representación de  $Y_2$  e  $y_2$  en función de  $X_2$  de la forma:

$$Y_2 = \frac{\tau_{max}}{|\tau_c + \hat{\tau}_w|} \quad y_2 = \frac{\tau_m}{|\tau_c + \hat{\tau}_w|} \quad X_2 = \frac{\tau_c}{|\tau_c + \hat{\tau}_w|} \quad (15)$$

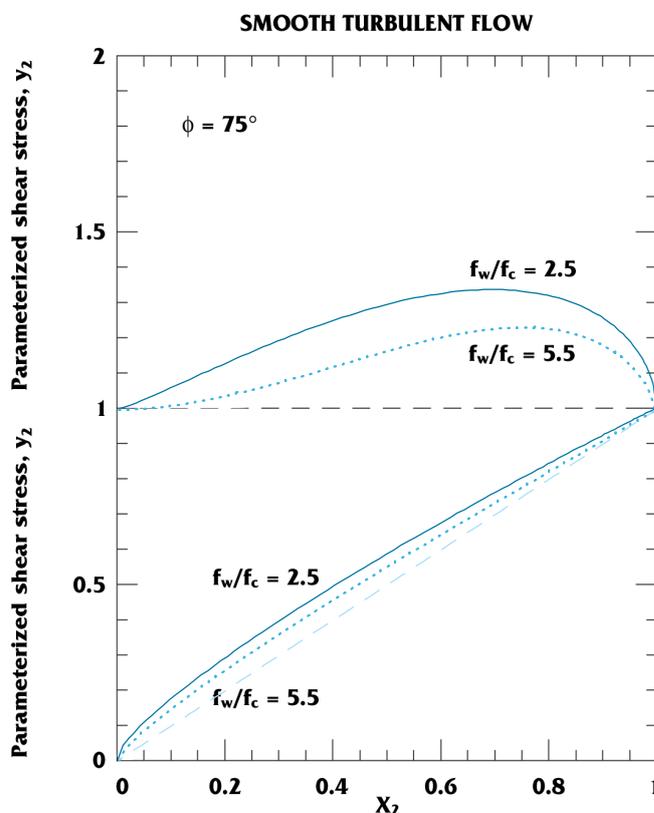


Figura 1. Curvas parametrizadas  $Y(X_2)$  e  $y(X_2)$ , según la propuesta de Tran Thu (1995): ecuación (16).

Contrariamente a los resultados obtenidos por la formulación de Soulsby, donde la curva representando  $Y_1$  en función de  $X_1$  podía cortar el eje de abscisas entre los valores 0 y 1, en la figura 1 se aprecia que este hecho no se produce, lo cual permite proponer una parametrización de la forma:

$$Y_2 = 1 + a X_2^m (1 - X_2)^n \quad y_2 = X_2 (1 + b X_2^p (1 - X_2)^q) \quad (16)$$

donde los coeficientes del ajuste para obtener los valores de  $a, m, n, I$  y  $b, p, q, J$  del modelo de Tran Thu aparecen en la tabla 1 (TT95).

Por lo tanto, es fácil establecer la relación entre  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$ :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \sqrt{1 - 2X_1(1 - X_1)(1 - \cos \phi)} \quad (17)$$

## COMPARACIÓN ENTRE DIFERENTES MODELOS.

### Onda senoidal

#### a) Régimen turbulento rugoso.

Para calcular el coeficiente de rozamiento de la ola,  $f_{w(r)}$ , proponemos la ecuación (10) con los valores recogidos en la tabla 2 bajo la denominación  $CT_{fwr}$  para los respectivos parámetros; Tanaka y Thu (1994) sugirieron el uso de la ecuación (3), Swart (1974), la ecuación (18) y Soulsby *et al.* (1994) la ecuación (19):

$$f_{w(r)} = 0.00251 \exp \left[ 5.21 \left( \frac{A}{K_N} \right)^{-0.19} \right] \quad (18)$$

$$f_{w(r)} = 1.39 \left( \frac{A}{z_0} \right)^{-0.52} \quad (19)$$

La figura 2 muestra la comparación de los diferentes resultados obtenidos en cada caso. Asimismo se incluyen las medidas experimentales realizadas por Sleath (1987), Kamphuis (1975), Jensen *et al.* (1989), Sumer *et al.* (1987) y Jonson y Carlsen (1976). Según Sleath (1991), el esfuerzo cortante en el lecho,  $\hat{\tau}_{wp}$ , puede expresarse como la suma de dos componentes,  $\hat{\tau}_w$  y  $\hat{\tau}_p$ , el esfuerzo cortante en el fluido y el debido al gradiente medio de presiones actuando sobre la rugosidad del lecho respectivamente. El primero está incluido en el modelo, pero el segundo no. Basándose en los ensayos de Sleath, se puede observar cómo el coeficiente de rozamiento

global,  $f_{wp}$ , puede dividirse asimismo en dos componentes,  $f_w$  y  $f_p$ , uno obtenido por el modelo K-L y otro que recoge la contribución del gradiente de presiones. Asumiendo que  $K_N = 2.5 D_{50}$  Sleath (1991) propuso la ecuación:

$$f_p = 0.48 \left( \frac{A}{K_N} \right)^{-1}$$

El gradiente de presiones no era tenido en cuenta en los ensayos efectuados por Sleath, Sumer, Jensen o Jonson. Por ello, los resultados de sus datos experimentales son comparados con el modelo que proponemos con la ecuación (10) y los valores denominados  $CT_{fwr}$  en la tabla 2. Exceptuando alguno de los ensayos de Sleath, en concreto aquellos con valores de  $A/K_N$  alrededor de 3.5 o incluidos en el intervalo 580-900, el resto de los casos presenta una alta concordancia. Las discrepancias encontradas se explican como consecuencia de que algunos de los ensayos de Sleath se realizaron en régimen de transición de liso a laminar. El gradiente de presiones se incluía en los experimentos llevados a cabo por Kamphuis, por lo que sus resultados pueden compararse con los obtenidos a partir de la expresión:

$$f_{wp} = f_w + f_p = 0.0014 \exp \left[ 4.584 \left( \frac{A}{K_N} \right)^{-0.134} \right] + 0.48 \left( \frac{A}{K_N} \right)^{-1} \quad (20)$$

que son, asimismo, incluidos en la figura 2. Los resultados del modelo que proponemos concuerdan mejor con los obtenidos a partir de las medidas de Kamphuis que con los presentados por Tanaka. Puede verse cómo la curva propuesta por Swart muestra una gran similitud con los valores experimentales de  $f$  obtenidos por Kamphuis. Finalmente, se establece que para valores de  $A/K_N$  superiores a 100, el término  $f_p$  puede despreciarse, corroborando los resultados la validez de la ecuación (10) con los valores denominados  $CT_{fwr}$  en la tabla 2.

#### b) Régimen turbulento liso.

Para calcular el coeficiente de rozamiento de la ola,  $f_{w(s)}$ , Tran Thu y Temperville (1994) propusieron la ecuación (14), Tanaka y Thu (1984) la (5) y Fredsøe la ecuación (21):

$$f_{w(s)} = 0.035 R_w^{-0.16} \quad (21)$$

Las tres ecuaciones son comparadas en la figura 3, junto con los resultados para el caso de transición entre régimen turbulento liso y laminar usando la ecuación (23) con  $f_2 = 1$ . Asimismo se incluyen los resultados experimentales de Arnskov *et al.* (1993), con valores del número de Reynolds

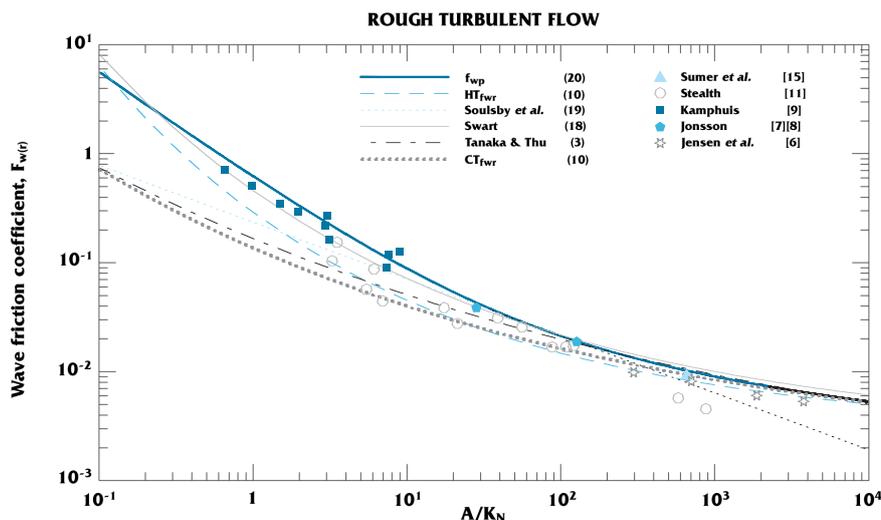


Figura 2. Parametrización del coeficiente de rozamiento de una ola,  $f_w$ , en régimen turbulento rugoso.

comprendidos en el intervalo  $10^3 - 2 \cdot 10^4$ , los cuales concuerdan con los resultados teóricos correspondientes al régimen laminar. Los datos experimentales de Sumer *et al.* (1987) y Jensen *et al.* (1989) se encuentran próximos a la curva correspondiente a la transición entre el régimen turbulento liso y el régimen laminar. Los ensayos tanto de Jensen como de Sleath con valores del número de Reynolds de  $1.6 \cdot 10^5$ ,  $2.9 \cdot 10^5$ ,  $1.13 \cdot 10^5$  y  $2.52 \cdot 10^5$ , respectivamente, corresponden a régimen de transición.

c) *Caso general.*

Es harto conocido que en el caso laminar el coeficiente de rozamiento viene dado por:

$$f_{w(l)} = \frac{2}{\sqrt{R_w}} \tag{22}$$

Usando esta expresión y la de los coeficientes de rozamiento para el régimen turbulento rugoso dados por (3) y en el caso de régimen turbulento liso, la ecuación (5), Tanaka propuso una formulación general que incluía todo tipo de régimen, incluidos los casos de transición.

$$f_{wg} = f_2(f_1 f_{w(l)} + (1 - f_1)f_{w(s)}) + (1 - f_2)f_{w(r)} \tag{23}$$

$$f_1 = \exp \left[ -0.0513 \left( \frac{R_w}{R_0} \right)^{4.65} \right]$$

$$f_2 = 1.0 \quad \text{if} \quad R_w < R_1$$

$$f_2 = \exp \left[ -0.0101 \left( \frac{R_w}{R_1} \right)^{2.06} \right] \quad \text{if} \quad R_1 \leq R_w \leq R_2$$

$$f_2 = 0 \quad \text{if} \quad R_w > R_2$$

$$R_0 = 2.5 \cdot 10^5 \quad R_1 = 0.501 \left( \frac{A}{z_0} \right)^{1.15} \quad R_2 = 7.0 \left( \frac{A}{z_0} \right)^{1.15}$$

Usando la misma ecuación (22) y la (20) y la (14) para régimen turbulento rugoso y liso, respectivamente, el coeficiente de rozamiento general  $f_{wg}$ , puede representarse para cada régimen utilizando los mismos coeficientes  $f_1$  y  $f_2$  propuestos por Tanaka. Estos resultados aparecen en la figura 4, junto con los obtenidos por Kamphuis (1975) de forma experimental, mostrando una mejor concordancia con estos que los presentados por Tanaka y Thu (1994), especialmente para valores bajos de la amplitud relativa orbital en el lecho,  $A/z_0$ .

**Interacción ola-corriente.**

Los resultados de Tanaka para el coeficiente de rozamiento en el caso de interacción ola-corriente pueden compararse con los del modelo propuesto en este trabajo. Para ello, deben expresarse de la forma propuesta por Soulsby:

$$Y_1 = 1 + a X_1^m (1 - X_1)^n$$

$$Y_1 = \frac{\tau_{max}}{\tau_c + \hat{\tau}_w} \quad X_1 = \frac{\tau_c}{\tau_c + \hat{\tau}_w}$$

Las ecuaciones (2) y (8) permiten escribir:

$$\frac{\tau_c}{\hat{\tau}_w} = \frac{f_c}{f_w} \left( \frac{U_c}{\hat{U}_w} \right)^2 = \frac{X_1}{1 - X_1} \tag{24}$$

$$\left( \frac{U_c}{\hat{U}_w} \right) = \sqrt{1 - X_1} \sqrt{\frac{f_w}{f_c}} \tag{25}$$

Asimismo, la ecuación (1) puede describirse de la forma:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \tau_c + 2 \sqrt{\beta \tau_c \hat{\tau}_w} \cos \phi + \beta \hat{\tau}_w \\ Y_1 &= X_1 + 2 \sqrt{\beta X_1 (1 - X_1)} \cos \phi + \beta (1 - X_1) \end{aligned} \quad (26)$$

a) Régimen turbulento rugoso.

Utilizando la ecuación (25), podemos reescribir la ecuación (4):

$$\alpha = \frac{1}{\ln\left(\frac{h}{z_0}\right) - 1} \sqrt{\frac{X_1}{1 - X_1}} \sqrt{\frac{f_w}{f_c}} \quad (27)$$

Así, utilizando los coeficientes  $\beta$  y  $\alpha$  (ecuación (4)) la ecuación (26) depende del ángulo  $\phi$  y de las relaciones  $f_w/f_c$  y  $h/z_0$ , mientras que en la propuesta de Soulsby sólo aparece  $f$  y  $f_w/f_c$ . En la práctica, el parámetro  $h/z_0$  presenta valores del orden  $10^4$  a  $10^5$ . La figura 5 representa la curva de  $Y_1$  según el modelo propuesto en este trabajo (HT91) y según el modelo de Tanaka, para  $h/z_0 = 10^4$  y  $10^5$ , y para valores del ángulo  $\phi = 0, 30$  y  $60^\circ$ , manteniendo un valor de  $f_w/f_c = 5$ . La figura incluye los resultados obtenidos con los coeficientes de Fredsøe (F84).

b) Régimen turbulento liso.

Considerando las ecuaciones (1), (5) y (6) y usando el coeficiente  $\beta$ , la ecuación (26) depende del ángulo  $\phi$ , de la relación  $f_w/f_c$  y del número de

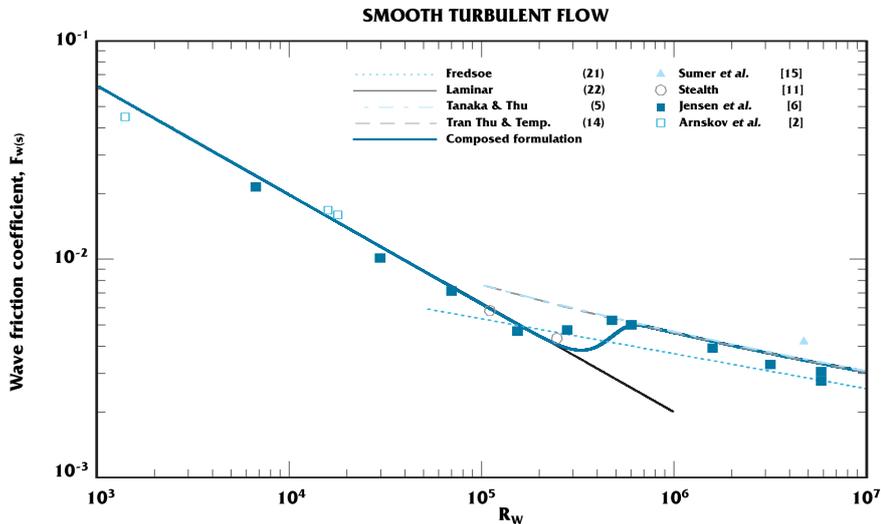


Figura 3. Parametrización del coeficiente de rozamiento de una ola,  $f_w$ , en régimen turbulento liso.

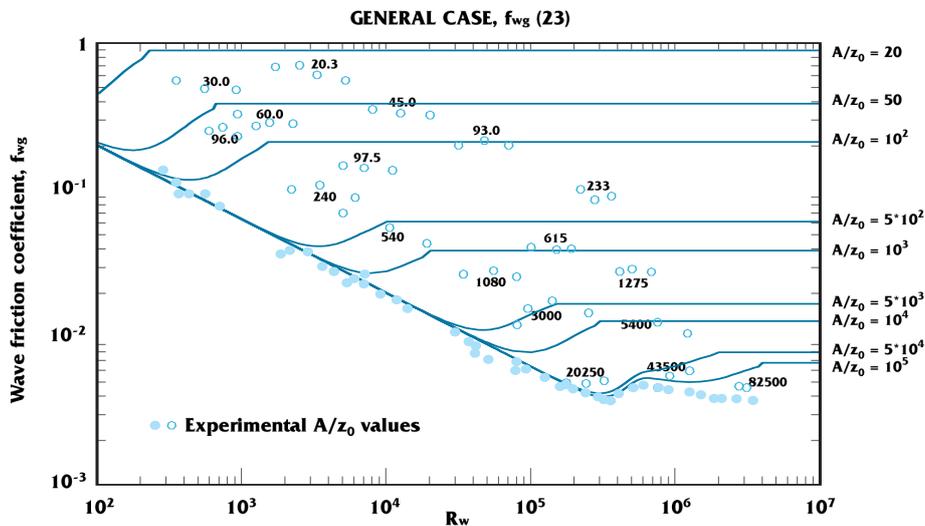


Figura 4. Coeficiente de rozamiento de una ola,  $f_w$ , obtenido a partir del modelo (20), en el caso de régimen turbulento rugoso, y a partir del modelo (14) en el caso de régimen turbulento liso. Datos de Kamphuis (1975) reproducidos de Tanaka y Thu (1994).

Reynolds de la corriente,  $R_{c_s}$ , mientras que en la propuesta de Tran Thu (ecuación (15)) únicamente intervienen  $f$  y  $f_w/f_c$ .  $R_c$  presenta valores del orden  $10^4$  a  $10^6$ . La figura 6 representa la curva de  $Y$  según el modelo propuesto en este trabajo (TT95) y según el modelo de Tanaka, para  $R_c = 10^4, 10^5$  y  $10^6$ , y para valores del ángulo  $\phi = 0, 30$  y  $60^\circ$ , manteniendo un valor de  $f_w/f_c = 5$ .

La tabla 3 resume las ecuaciones paramétricas propuestas para el rozamiento en el lecho, en ambos casos liso y rugoso del régimen turbulento, para una corriente, una ola y la interacción de ambas.

**Esfuerzo cortante variable en el tiempo.**

Para calcular esfuerzos cortantes variables en el tiempo  $\tau(t)$  en el caso de una ola irregular con velocidad instantánea  $U(t)$ , Soulsby *et al.* (1994) proponen calcular el valor del coeficiente de rozamiento  $f_w$  correspondiente a la ola senoidal equivalente, con una velocidad orbital cuya amplitud es  $\sqrt{2} U_{rms}$  y cuyo periodo es  $T_p$ . Se deduce, pues, que dicho coeficiente de rozamiento se expresa como:

$$f_w = 1.39 \left( \frac{A}{z_0} \right)^{-0.52} \quad A = \frac{\sqrt{2} U_{rms}}{2 \pi}$$

donde  $U_{rms}$  es la raíz del valor medio de los cuadrados de las velocidades orbitales.

Para una ola senoidal, esta formulación paramétrica representa correctamente el esfuerzo cortante en el lecho que se obtiene con el modelo K-L usado en este trabajo, pero no tiene en cuenta el desfase existente entre  $\tau(t)$  y  $U(t)$ . En el caso de una ola asimétrica, o una ola irregular, aparecen diferencias más relevantes entre dicha expresión y los resultados calculados con este modelo K-L. Como ejemplo, consideremos las medidas del valor instantáneo de la velocidad recogidas la figura 7, para tres casos: a) una ola senoidal, con velocidad orbital de amplitud 0.225m/s y periodo 3.6 s; b) una ola cnoidal, con velocidad total de amplitud 1.107 m/s y periodo 9 s, y c) una ola irregular producida por la propagación no lineal de una ola senoidal, usando un modelo numérico tipo Boussinesq (Antunes do Carmo *et al.*, 1993), con un periodo de 3 s en un canal

de 0.3 m de profundidad. El esfuerzo cortante instantáneo en el lecho  $\tau(t)$  se calcula usando la ecuación (10) con los coeficientes  $C_{fwr}$  (resultado 1).

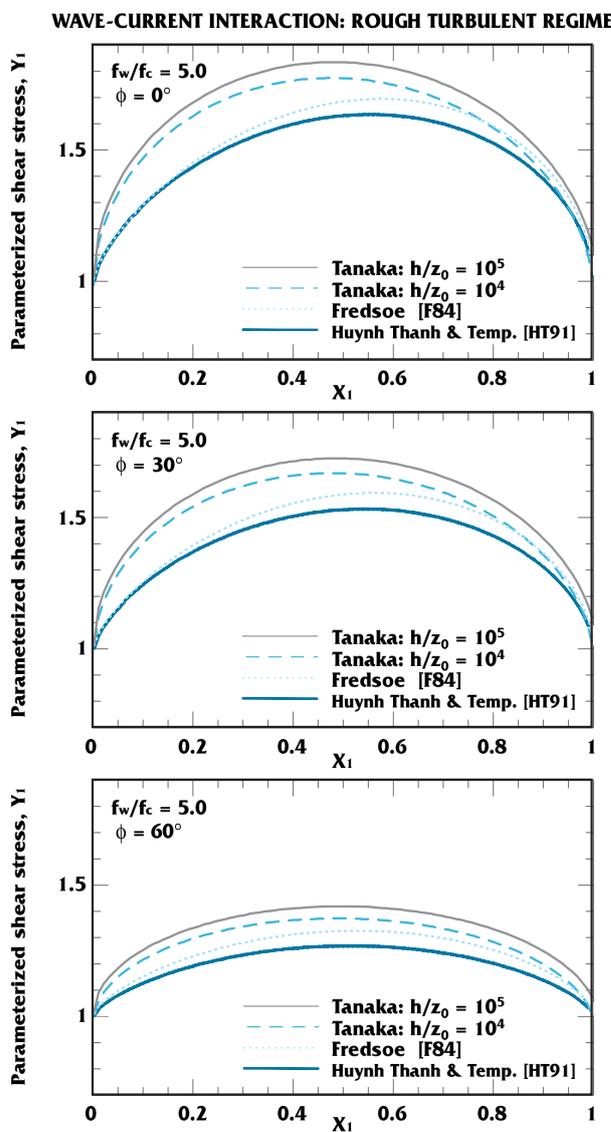


Figura 5. Esfuerzo tangencial máximo normalizado para un lecho rugoso en el caso de interacción ola-corriente, obtenido a partir de los modelos de Fredsøe (1984); Huyn-Thanh y Temperville (1991), y Tanaka y Thu (1994)

Tabla 3. Expresiones parametrizadas para el rozamiento en el lecho en régimen turbulento liso y rugoso, para los casos de una corriente, una ola y la interacción entre ambas.

|                           | Rough turbulent flow  | Smooth turbulent flow                              |
|---------------------------|---|--|
| Corriente                 | $f_c(r)$ (3)  | $f_{c(s)}$ (12)                                    |
| Ola                       | $f_{w(r)}$ (10) with $C_{fwr}$ coefficients, or $f_{wp}$ (20) | $f_{w(s)}$ (14)                                    |
| Interacción Ola-Corriente | Curva paramétrica $Y_1$ (7) con coeficientes HT91             | Curva paramétrica $Y_2$ (16) con coeficientes TT95 |

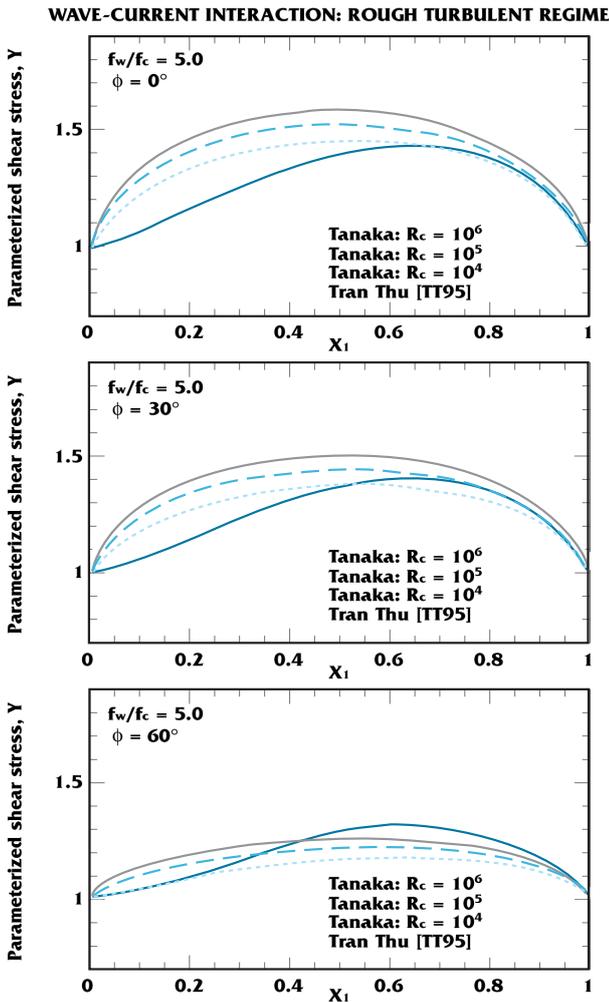


Figura 6. Esfuerzo tangencial máximo normalizado para un lecho liso en el caso de interacción ola-corriente, obtenido a partir de los modelos de Tanaka y Thu (1994) y Tran Thu (1995)

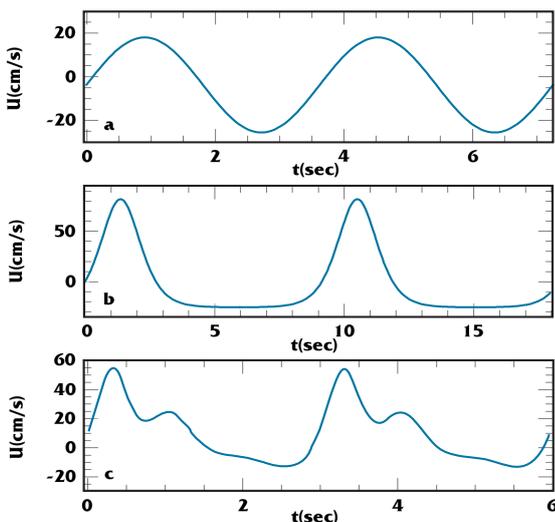


Figura 7. Medidas de velocidad instantánea: a-Ola senoidal (velocidad orbital con amplitud = 0.225m/s, periodo=3.6 s); b-Ola cnoidal (velocidad total con amplitud = 1.107 m/s, periodo =9 s); c- Ola irregular (resultado de la propagación no lineal de una ola senoidal con periodo = 3 s en un canal de 0.3 m de profundidad)

Los resultados proporcionados por el modelo K-L (resultado 2) se comparan con estos y con aquellos obtenidos para un coeficiente de rozamiento constante sin desfase (resultado 3).

Los valores del coeficiente de rozamiento para una ola senoidal se muestran en la figura 8, pudiendo apreciarse la gran concordancia entre los resultados 1 y 2

La figura 9a muestra los valores de  $\tau(t)$  para una onda senoidal. El resultado 1 concuerda con el modelo K-L, apreciándose un error de fase entre éste y el resultado 3.

En el caso de una ola cnoidal, el valor de  $\tau(t)$  obtenido con el modelo numerico de capa límite se corresponde con la línea continua en la figura 9b. En este caso, como puede observarse, el resultado 1 se encuentra más próximo al resultado 2 que al 3, tanto para los valores en fase como los negativos. No obstante, no se reproduce la asimetría y se observa discrepancia entre los valores máximos.

En relación a estos resultados, pueden hacerse varias observaciones:

i) La curva representativa de  $\tau(t)$  no presenta la simetría de las velocidades  $U(t)$ . Los valores negativos de  $\tau(t)$  son más destacados tras el máximo principal que aquellos que lo anteceden. Puede asumirse que la “memoria de turbulencia” creada para este máximo influye en los valores posteriores.

ii) Siendo  $U_1$  y  $U_2$  los valores máximo y mínimo de la velocidad, respectivamente, de la ecuación (2) se deduce que:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = 0.08 \tag{28}$$

La figura 9b muestra que la relación  $\tau_2/\tau_1$  es 0.24, superior al valor proporcionado por la ecuación (28). Por lo tanto, al igual que para una ola senoidal, el coeficiente de rozamiento no se mantiene constante cuando la velocidad cambia, sino que adopta valores crecientes a medida que la velocidad aumenta. Proponemos el cálculo de un coeficiente de rozamiento variable en el tiempo sustituyendo el valor máximo de velocidad por el valor instantáneo  $U(t+\theta)$ , lo cual considera el desfase existente. El coeficiente  $f(t)$  se calculará, por tanto, con la ecuación (10) con los coeficientes  $CT_{fwr}$  (tabla 2), donde A viene dado por:

$$A = \frac{\sqrt{2} U_{rms} T_p U(t+\theta)}{2\pi U_{max}} \tag{29}$$

y  $\tau(t)$  queda definido como:

$$\tau(t) = \frac{f(t)}{2} U(t+\theta) |U(t+\theta)| \quad (29a)$$

$\theta$  representa el desfase entre  $U(t)$  y  $\tau(t)$  en la parte superior de la capa límite.

Los valores del esfuerzo cortante para el caso de velocidad más complejo (una ola irregular obtenida mediante la propagación no lineal de una ola senoidal) se presentan en la figura 9c. Al comparar los resultados 1 y 3 con el resultado 2 se comprueba que el primero se encuentra aún más próximo a los resultados del modelo K-L que el resultado 3. De nuevo se observa una ligera discrepancia para los valores máximos.

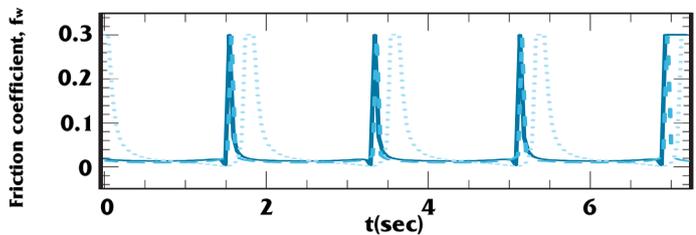


Figura 8. Comparación del coeficiente de rozamiento parametrizado y el obtenido con el modelo K-L para una ola senoidal. Modelo propuesto (resultado 1:-----; resultado 3: ..... ) y modelo K-L (resultado 2: \_\_\_\_\_)

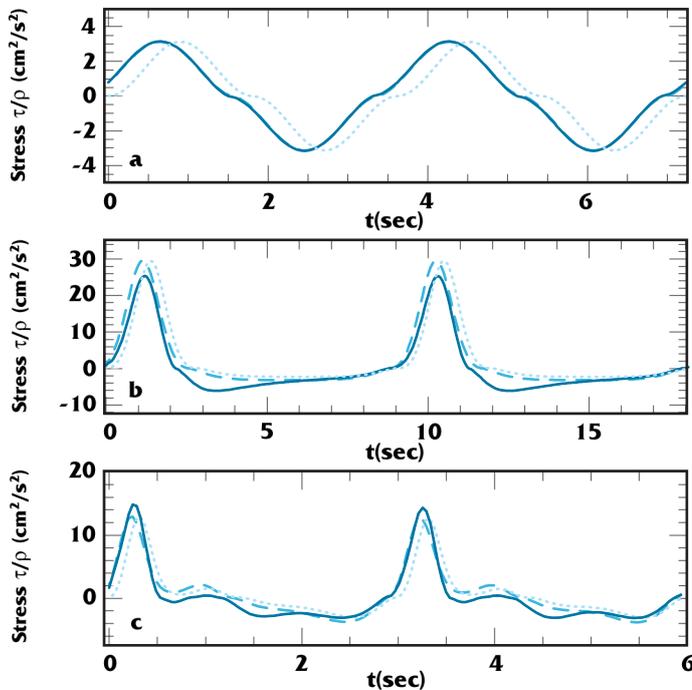


Figura 9. Comparación del esfuerzo cortante parametrizado y el obtenido con el modelo K-L: a) Ola senoidal; b) Ola cnoidal; c) Ola irregular. Modelo propuesto (resultado 1:-----; resultado 3: ..... ) y modelo K-L (resultado 2: \_\_\_\_\_)

A pesar de los efectos de la “memoria de turbulencia”, la formulación propuesta se ajusta significativamente a los resultados del modelo de capa límite para los tres casos analizados. Sin embargo, la comparación ha sido llevada a cabo bajo la hipótesis de que los resultados proporcionados por el modelo K-L representan de forma correcta las condiciones reales. A esto hay que añadir las discrepancias encontradas, sobre todo para los valores máximos. Por todo ello, tanto resultados numéricos adicionales como nuevos datos experimentales deben ser considerados en futuros trabajos.

### CONCLUSIONES

Se ha realizado una revisión y un análisis de la literatura existente sobre la formulación del rozamiento en el lecho. El uso de un modelo numérico 1DV turbulento del tipo K-L proporciona resultados que permiten parametrizar el coeficiente de rozamiento debido a una onda senoidal para régimen turbulento tanto rugoso como liso. Incluyendo el gradiente de presiones a lo largo del lecho rugoso propuesto por Sleath (1991), esta formulación paramétrica y los datos experimentales concuerdan entre sí.

El mismo modelo numérico de capa límite se ha usado para estudiar el régimen turbulento liso, permitiendo la parametrización del rozamiento en la interacción ola-corriente, como propusieron Soulsby et al. (1994) para el régimen turbulento rugoso.

Por último, se ha propuesto una parametrización variable en el tiempo del esfuerzo tangencial en el lecho en el caso de olas irregulares, incluyendo el desfase existente entre la velocidad media del flujo y el esfuerzo tangencial. No obstante, el efecto de la memoria histórica, sugerido por nosotros, no se ha tenido en cuenta en esta parametrización, debiendo incluirse en futuros intentos.

## AGRADECIMIENTOS.

Este trabajo se ha llevado a cabo en el ámbito del Proyecto “Modelación de Régimen Turbulento en Zonas Costeras-Aplicaciones a la Dinámica de Sedimentos y Dispersión de Contaminantes”, financiado por la Fundação para a Ciencia e a Tecnologia (FCT), bajo el contrato de investigación PBIC/C/MAR/2247/95. Asimismo, se reconoce la contribución de los proyectos “SEDMOC-Modelación del Transporte de Sedimentos en Entornos Marinos Costeros” y “Parametrización del Coeficiente de Fricción en Régimen Variable: Aplicaciones al Golpe de Ariete y Transporte de Sedimentos”, financiados por la UE con el contrato nº MAS3-CT97-0115 y por la FCT con el contrato nº PRAXIS/3.1/CEG/2503/95, respectivamente. Los autores agradecen a los revisores sus valiosos comentarios y sugerencias.

## REFERENCIAS

- Antunes do Carmo J.S., F.J. Seabra-Santos and E. Barthlemy, 1993. Surface waves propagation in shallow-water: a finite element model. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, Vol. 16, No. 6, 447-459.
- Arnskov M.M., J. Fredsøe and B.M. Sumer, 1993. Bedshear stress measurements over a smooth bed in three-dimensional wave-current motion. *Coastal Engineering*, 20, 277-316.
- Fredsøe J., 1984. Turbulent boundary layer in wave-current-motion. *J. Hydraul. Eng.*, 110 (8), 1103-1120.
- Huynh Thanh S., 1990. Modélisation de la couche limite turbulente oscillatoire générée par l'interaction houle courant en zone côtière. Thèse à l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Huynh Thanh S. and A. Temperville, 1991. A numerical model of the rough turbulent boundary layer in combined wave and current interaction. In: R.L. Soulsby and R. Betess (Editors), *Sand Transport in Rivers, Estuaries and the Sea*. Balkema, Rotterdam, pp. 93-100.
- Jensen B.L., B.M. Sumer and J. Fredsøe, 1989. Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 206, 265-297.
- Jonsson I.G., 1966. Wave boundary layers and friction factors. *Proc. 10th Int. Conf. Coastal Eng.*, Tokyo, 127-148.
- Jonsson I.G. and N.A. Carlsen, 1976. Experimental and theoretical investigations in an oscillatory turbulent boundary layer. *Journal of Hydraulics Research*, 14(1), 45-60.
- Kamphuis J.W., 1975. Friction factor under oscillatory waves. *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.*, 101 (WW2), 135-144.
- Ockendenand M.C., R.L.Soulsby, 1994. Sediment transport by currents plus irregular waves. Report SR 376, HR Wallingfort, HR Wallingfort Ltd. Howbery Park, Wallingfort, Oxfordshire, OX10 8BA, UK.
- Sleath J.F.A., 1987. Turbulent oscillatory flow over rough beds. *Journal of Fluid Mechanics*, 182, 369-409.
- Sleath J.F.A., 1991. Velocities and shear stresses in wavecurrent flows. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 96, No. C8, 15, 237-15, 244.
- Soulsbyand R.L., M.C.Ockenden, 1994. Sediment transport by currents plus irregular waves. Report SR 237, HR Wallingfort.
- Soulsby R.L., L. Hamm, G. Klopman, D. Myrhaug, Simons R.R and G.P. Thomas, 1994. Wave-current interaction within and outside the bottom boundary layer. *Coastal Eng.*, 21, 41-69.
- Sumer B.M., B.L. Jensen and L. Fredsøe, 1987. Turbulence in oscillatory boundary layers. In *Advances in Turbulence*. Springer, Heidelberg, 556-567.
- Swart D.H., 1974. Offshore sediment transport and equilibrium beach profiles. *Delft Hydraulics Lab.*, Publ. 131.
- Tanaka H. and N. Shuto, 1981. Friction coefficient for a wave-current coexistent system. *Coastal Eng. Japan*, 24, 105-128.
- Tanaka H. and N. Shuto, 1984. Friction laws and flow regimes underwave and current motion. *Journal of Hydraulic Research*, 22(4), 245-261.
- Tanaka H. and A. Thu, 1994. Full-range equation of friction coefficient and phase difference in a wave-current boundary layer. *Coastal Eng.*, 22, 237-254.
- Tran Thu T. and A. Temperville, 1994. Numerical model of sediment transport in the wave-current interaction. *Proc. of the Advanced Seminar on Modelling of Coastal and Estuarine Processes*. Coimbra, Portugal, 271-282.
- Tran Thu T., 1995. Modélisation numérique de l'interaction houle-courant-sédiment. Thèse à l'Université Joseph Fourier-Grenoble I.

**LISTA DE SÍMBOLOS**

|                      |  |                   |   |
|----------------------|--|-------------------|---|
| $a, a_i (i=1,2,3,4)$ | Coeficientes de ajuste   | $x$               | Coordenada horizontal   |
| $A$                  | Amplitud de la trayectoria   | $X_1$             | $= \tau_c / (\tau_c + \hat{\tau}_w)$                              |
| $b, b_i (i=1,2,3,4)$ | Coeficientes de ajuste   | $X_2$             | $= \tau_c /  \bar{\tau}_c + \bar{\tau}_w $                        |
| $c_p, c_2$           | Coeficientes de ajuste   | $y$               | Coordenada vertical   |
| $D_{50}$             | Diámetro medio   | $y_1$             | $= \tau_m / (\tau_c + \hat{\tau}_w)$                              |
| $f_c$                | Coeficiente de fricción con corriente                                      | $y_2$             | $= \tau_m /  \bar{\tau}_c + \bar{\tau}_w $                        |
| $f_{c(r)}$           | Coeficiente de fricción con corriente flujo rugoso                         | $\bar{Y}$         | Tensión tangencial máxima normalizada                             |
| $f_{c(s)}$           | Coeficiente de fricción con corriente flujo liso                           | $Y_1$             | $= \tau_{max} / (\tau_c + \hat{\tau}_w)$                          |
| $f_{cw}$             | Coeficiente de fricción con ola-corriente                                  | $Y_2$             | $= \tau_{max} /  \bar{\tau}_c + \bar{\tau}_w $                    |
| $f_p$                | Contribución del gradiente de presión al coeficiente de fricción           | $z_0$             | Altura de rugosidad en el fondo                                   |
| $f(t)$               | Coeficiente de fricción instantáneo  | $\alpha, \beta$   | Funciones   |
| $f_w$                | Coeficiente de fricción debido al oleaje                                   | $\phi$            | Ángulo entre la ola y la corriente                                |
| $f_{wg}$             | Coeficiente de fricción global debido al oleaje                            | $\rho$            | Densidad del fluido   |
| $f_{w(l)}$           | Coeficiente de fricción laminar con oleaje                                 | $\theta$          | Desfase entre la velocidad y la tensión tangencial instantáneas   |
| $f_{wp}$             | Coeficiente de fricción debido al oleaje y al gradiente de presión         | $\nu$             | Viscosidad cinemática del fluido                                  |
| $f_{w(r)}$           | Coeficiente de fricción debido al oleaje, flujo rugoso                     | $\nu_t$           | Viscosidad turbulenta   |
| $f_{w(s)}$           | Coeficiente de fricción debido al oleaje, flujo liso                       | $\tau_c$          | Tensión tangencial en el fondo debida a la corriente              |
| $f_p, f_2$           | Funciones peso   | $\tau_m$          | Tensión promediada en la fase debida a la ola y la corriente      |
| $h$                  | Profundidad  | $\tau_{max}$      | Tensión tangencial máxima debida a la ola y la corriente          |
| $I$                  | Constante de ajuste  | $\tau(t)$         | Tensión tangencial instantánea                                    |
| $J$                  | Constante de ajuste  | $\tau_w$          | Amplitud de la tensión tangencial en el fondo debida al oleaje    |
| $k$                  | Constante de von Karman  | $\hat{\tau}_w$    | Tensión tangencial debida al oleaje                               |
| $K$                  | Energía cinética turbulenta  | $\hat{\tau}_{wp}$ | Tensión tangencial global debida al oleaje y gradiente de presión |
| $K_N$                | Rugosidad de Nikuradse   | $\hat{\tau}_p$    | Tensión tangencial debida al gradiente de presión                 |
| $L$                  | Escala longitudinal de la turbulencia                                      | $\tau_1$          | Tensión tangencial máxima   |
| $m, m_i (i=1,2,3,4)$ | Coeficientes de ajuste   | $\tau_2$          | Tensión tangencial mínima   |
| $n, n_i (i=1,2,3,4)$ | Coeficientes de ajuste   |                   |   |
| $n_1$                | Coeficientes de ajuste   |                   |   |
| $p, p_i (i=1,2,3,4)$ | Coeficientes de ajuste   |                   |   |
| $P_c$                | Presión debida a la corriente  |                   |   |
| $q, q_i (i=1,2,3,4)$ | Coeficientes de ajuste   |                   |   |
| $R_c$                | Número de Reynolds de la corriente   |                   |   |
| $R_w$                | Número de Reynolds del oleaje  |                   |   |
| $R_0$                | Constante $2 \cdot 10^5$   |                   |   |
| $R_p, R_2$           | Límites inferior y superior  |                   |   |
| $T_p$                | Periodo de pico del oleaje   |                   |   |
| $u$                  | Velocidad horizontal en la capa límite                                     |                   |   |
| $u_c$                | Velocidad promediada en la columna de agua de la corriente                 |                   |   |
| $U_{cw}$             | Tensión tangencial máxima debida a la ola y la corriente                   |                   |   |
| $U_{max}$            | Velocidad máxima del vector velocidad                                      |                   |   |
| $U_{rms}$            | Velocidad media cuadrática de la velocidad orbital                         |                   |   |
| $U(t)$               | Vector velocidad instantánea   |                   |   |
| $U_w$                | Velocidad horizontal debido a la ola en la dirección del flujo             |                   |   |
| $\bar{U}_w$          | Amplitud de la velocidad debida al oleaje en el exterior de la capa límite |                   |   |
| $U_1$                | Valor máximo de la velocidad   |                   |   |
| $U_2$                | Valor mínimo de la velocidad   |                   |   |
| $v$                  | Velocidad vertical en la capa límite                                       |                   |   |
| $V_w$                | Componente horizontal de la velocidad normal al flujo                      |                   |   |