



Sensibilidad paramétrica de un automóvil con polinomios de caos

Eduardo Haro^{a,*}, Mario Acevedo^b, Ramiro Velázquez^c

^aUniversidad Panamericana, Calzada Circunvalación Poniente 49, 45010 Zapopan Jalisco, MEXICO

^bUniversidad Panamericana, Augusto Rodin 498, 03920 México D.F., MEXICO

^cUniversidad Panamericana, Fracc. Rústicos Calpulli, 20290 Aguascalientes, MEXICO

Resumen

Es de gran interés analizar la sensibilidad de los parámetros de modelos matemáticos que describen sistemas físicos, y merece una atención particular estudiar esta sensibilidad en modelos con incertidumbre en el valor de sus parámetros. La llamada sensibilidad global considera todo el intervalo de incertidumbre de los parámetros al considerarlos variables aleatorias. Este trabajo presenta el análisis de sensibilidad global en frecuencia del modelo matemático paramétrico de la dinámica lateral de un modelo de automóvil, con un enfoque basado en la expansión de la respuesta del modelo con polinomios de caos. Esta técnica permite representar fácilmente el sistema como un modelo estocástico, donde los parámetros pasan a ser variables aleatorias que varían de acuerdo a su incertidumbre. El modelo estocástico debe ser una aproximación muy cercana del modelo original. *Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.*

Palabras Clave: sensibilidad, sistemas dinámicos inciertos, polinomios de caos, dinámica de vehículo

1. Introducción

Es un caso frecuente que las ecuaciones de los modelos contengan parámetros desconocidos que deben ser estimados a partir de señales reales. Entre estos parámetros, hay algunos que tienen una influencia muy pequeña o insignificante sobre la respuesta del sistema y, por lo tanto, no necesitan ser estimados con gran precisión. Así pues, es necesario hacer la distinción entre los parámetros significativos y no significativos mediante un análisis de sensibilidad paramétrica. Este es el caso de los modelos complejos, como un modelo de automóvil, que por lo general tienen parámetros con valores inciertos y en los que se requiere estimar los valores de los más significativos.

Una condición suficiente pero no necesaria para asegurar que se podrán estimar los parámetros de un modelo matemático es una buena sensibilidad paramétrica (Walter y Pronzato, 1997). Esta sensibilidad puede ser local o global, que tienen características diferentes. Los análisis de sensibilidad local ayudan a determinar el impacto de pequeñas variaciones de un parámetro alrededor de un valor nominal, utilizando derivadas parciales (Turyani y Rabitz, 2000), cuando los valores de los demás parámetros permanecen fijos. Este enfoque no sería adecuado cuando son inciertos los valores de los parámetros del

modelo, porque la sensibilidad de un parámetro varía cuando se modifican los valores de los parámetros que se fijan. Por otro lado, los análisis de sensibilidad global también permiten determinar este impacto, pero considerando la variación simultánea de todos los parámetros en su entero rango de incertidumbre. Algunos de estos enfoques globales se basan en el análisis de la varianza de la salida del modelo, conocidos como ANOVA (ANalysis Of VAriance) (Homma y Saltelli, 1996; Saltelli et al., 1999; Sobol, 1993).

Generalmente se utiliza como función de sensibilidad la primera derivada parcial, la cual es una forma numérica local, porque la función se evalúa en un punto de operación específico. La evaluación de esta función necesita el conocimiento previo de los valores de los parámetros, del que muchas veces no se dispone. Así que utilizar un enfoque de sensibilidad local no es recomendable porque la modificación del punto de operación producirá un cambio notable en la sensibilidad de los parámetros. En el caso del modelo del vehículo, el punto de operación está dado por el fabricante del mismo y tiene grandes márgenes de incertidumbre debido a que los valores de los parámetros cambian con el tiempo debido al desgaste, las condiciones externas, etc. Para este tipo de casos sería de gran interés considerar todo el rango de incertidumbre paramétrica. Esta es la ventaja del análisis de sensibilidad global, ya que la variación de cada parámetro se evalúa al mismo tiempo que todos los demás cambian.

La sensibilidad global se basa en un enfoque estocástico

*Autor en correspondencia

Correos electrónicos: eharo@up.edu.mx (Eduardo Haro),
macevedo@up.edu.mx (Mario Acevedo), rvelazquez@ags.up.mx (Ramiro Velázquez)

donde, para cuantificar la contribución de la variación de los parámetros en la varianza de la salida, se calculan los índices de sensibilidad. La función del modelo se puede descomponer en una suma de funciones de dimensión creciente (Sobol, 1993). Esta descomposición, que se conoce como HDMR (High Dimensional Model Representation), efectúa la separación de los efectos de los diferentes parámetros de entrada, los cuales se transmiten a la descomposición de la varianza.

Algunos modelos complejos pueden tener gran número de parámetros de manera que el cálculo analítico de los índices de sensibilidad se vuelve difícil. Con frecuencia se calculan por el método Monte Carlo, pero este camino puede ser prohibitivo para los modelos complejos. Para sortear esta dificultad, el modelo se reemplaza por una aproximación analítica llamada metamodelo (Cukier et al., 1978; Jacques et al., 2006; Mara y Tarantola, 2008; McKay et al., 1999; Sobol, 1993), por ejemplo por polinomios. Los índices de sensibilidad se obtienen directamente de los coeficientes de esta expansión polinomial. La descomposición en polinomios de caos (PC) es uno de estos metamodelos, la cual se basa en un marco probabilista de polinomios ortogonales (Ghanem y Red-Horse, 1999; Ghanem y Spanos, 1991).

En este artículo se aborda el análisis de sensibilidad global del modelo matemático de la dinámica lateral de un vehículo automóvil con la perspectiva de poder después estimar sus parámetros. Se utiliza la expansión por PC de la salida del modelo para calcular las funciones de sensibilidad. La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2 se presenta el modelo del vehículo utilizado. El análisis de sensibilidad global para sistemas dinámicos se muestran en la sección 3 y la expansión en PC de la salida en la sección 4. Finalmente, las funciones de sensibilidad global obtenidas se presentan en la sección 5.

2. Modelo del vehículo

El modelo del vehículo podría ser considerado complejo por la gran cantidad de parámetros necesarios para su descripción, por los parámetros acoplados y la variación en el tiempo de algunos de entre ellos (la masa, la adherencia, etc.). Esta complejidad también se produce por las no linealidades con respecto a las entradas y a los parámetros, y debido a fenómenos mal conocidos.

Cuando el modelo del vehículo se utiliza para aplicaciones de control o de simulación, los valores de los parámetros involucrados deben ser conocidos con mucha precisión. Es en este contexto que es interesante la estimación de los parámetros físicos del vehículo, y por tanto también el estudio de la sensibilidad de estos parámetros.

El desarrollo del modelo utilizado en este artículo puede verse con detalle en (Haro, 2008). Se consideraron las siguientes hipótesis en el modelado del vehículo: la aceleración transversal no rebasa 0,4g para evitar todo fenómeno de saturación en los neumáticos; no se consideran los efectos aerodinámicos; los ángulos de deriva son pequeños; la velocidad longitudinal del automóvil se mantiene constante, por lo que no se considera el efecto de cabeceo; el vehículo es simétrico respecto a su eje

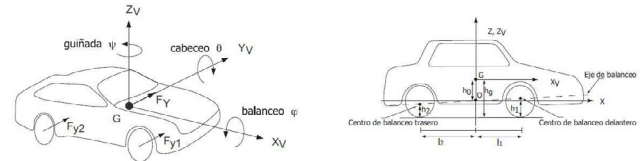


Figura 1: Ejes referenciales del vehículo y parámetros geométricos (tabla 2).

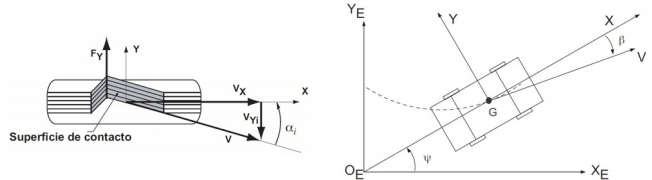


Figura 2: Ángulo de deriva del neumático (α) y ángulo de deriva del vehículo (β).

longitudinal, pudiendo concentrar las masas en el eje geométrico.

La figura 1 muestra los diferentes ejes referenciales del vehículo, y la figura 2 los ángulos de deriva del neumático y del vehículo. La tabla 1 presenta las variables del modelo y la tabla 2 los diferentes parámetros y sus valores asociados, dados por el fabricante. Hacemos notar que no se proporcionaron los valores de incertidumbre de los parámetros l_1 , l_2 y h_0 , por lo que estas cantidades no se incluyen en la tabla 2.

Tabla 1: Variables del modelo

Símbolo	Descripción
$\dot{\psi}$	Velocidad de guiñada
β	Ángulo de deriva en el centro de gravedad
α_1, α_2	Ángulos de deriva de las ruedas delantera y trasera
$\varphi, \dot{\varphi}$	Ángulo y velocidad de balanceo
a_Y	Aceleración transversal
V_X	Velocidad longitudinal
V_Y	Velocidad transversal en el centro de gravedad

El “ángulo de deriva del neumático”, α , que se muestra en la figura 2, se genera por el contacto del neumático con el suelo. Se define por el ángulo entre el eje longitudinal del neumático y la dirección del movimiento:

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{V_{Yi}}{V_X}\right) \quad (1)$$

donde $i = 1, 2$ corresponde respectivamente a los ejes delantero y trasero, V_{Yi} es la velocidad transversal respecto al plano de la llanta y V_X es la velocidad longitudinal del vehículo. De forma similar, β , el ángulo de deriva del vehículo, se define como el ángulo entre el eje longitudinal del vehículo y el vector de velocidad en su centro del gravedad:

$$\beta = \arctan\left(\frac{V_Y}{V_X}\right) \quad (2)$$

donde V_Y es la velocidad transversal del vehículo en su centro de gravedad.

Tabla 2: Parámetros dados por el fabricante

Sím.	Descripción	Valor	Desv. est. %	Unid.
M	Masa total del vehículo	1 400	0.1	Kg
m_s	Masa suspendida	1 262	0.1	Kg
M_{XZ}	Producto de inercia balanceo - guiñada	50	50	$Kg.m^2$
l_1	Batalla delantera	1.148		m
l_2	Batalla trasera	1.387		m
h_0	Distancia del eje de balanceo al centro de gravedad	0.43		m
h_1	Altura del centro de balanceo delantero	0.0903	20	m
h_2	Altura del centro de balanceo trasero	0	–	m
h_g	Distancia del suelo al centro de gravedad	0.535	10	m
ε_1	Coefficiente de ángulo inducido delantero	-0.0269	–	–
ε_2	Coefficiente de ángulo inducido trasero	0.02	30	–
M_{ZZ}	Momento de inercia de guiñada	1 571	20	$Kg.m^2$
M_{XX}	Momento de inercia de balanceo de la masa suspendida	252	50	$Kg.m^2$
D_1	Rigidez de deriva delantera	84 085	30	N/rad
D_2	Rigidez de deriva trasera	87 342	30	N/rad
Aro	Amortiguamiento de balanceo	2 750	30	$Nm/rad/s$
Kro	Rigidez total de balanceo	150 000	15	N/rad
b_1	Distancia de relajación neumático delantero	0.5	50	m
b_2	Distancia de relajación neumático trasero	0.5	50	m

El modelo utilizado es un modelo matemático derivado de las ecuaciones de movimiento de la dinámica transversal de un vehículo (Haro, 2008), presentado en la ecuación (3). Este modelo toma en cuenta las dinámicas de velocidad de guiñada, ángulo de balanceo, velocidad transversal en el centro de gravedad y velocidad transversal en los ejes de las ruedas:

$$G\dot{x}(t) = Hx(t) + Nu(t) \quad \text{con} \quad u(t) = \delta_H \quad (3)$$

donde δ_H es el ángulo aplicado a las ruedas de dirección del vehículo. Las matrices G , H y N están dadas por (ver tabla 2 para el significado de los parámetros):

$$G = \begin{bmatrix} M_{ZZ} & 0 & 0 & 0 & -M_{XZ} & 0 \\ 0 & MV_X & 0 & 0 & -m_s h_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ -M_{XZ} & -m_s h_0 V_X & 0 & 0 & M_{XX} + m_s h_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -D_1 l_1 & D_2 l_2 & -m_s h_0 V_X & 0 \\ -MV_X & 0 & -D_1 & -D_2 & 0 & 0 \\ l_1 & V_X & -V_X & 0 & h_1 & -\varepsilon_1 V_X \\ -l_2 & V_X & 0 & -V_X & h_2 & -\varepsilon_2 V_X \\ m_s h_0 V_X & 0 & 0 & 0 & -Aro & -Kro \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{V_X}{i_s} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

donde $i_s = 21,24$ es el factor de conversión entre el giro del volante y el giro de la ruedas. El vector de estados del sistema está definido por (ver tabla 1 para el significado de las variables):

$$x(t) = \begin{bmatrix} \psi & \beta & \alpha_1 & \alpha_2 & \dot{\psi} & \dot{\beta} \end{bmatrix}^T$$

Son de interés tres salidas del modelo: la velocidad de guiñada, el ángulo de balanceo y la aceleración transversal. Las dos primeras se obtienen de los estados del sistema (el primero y el sexto) y la aceleración transversal a_Y se calcula con la expresión:

$$a_Y = -\frac{D_1}{M} \alpha_1 - \frac{D_2}{M} \alpha_2$$

donde las D_i son la rigidez de deriva delantera y trasera, M es la masa total del vehículo y las α_i son los ángulos de deriva de las ruedas delantera y trasera.

En (Haro, 2008) se realizó una prueba de identificabilidad numérica para determinar qué parámetros podían ser localmente identificables (Walter y Pronzato, 1997). Se aplicó como entrada una señal PRBS (PseudoRandom Binary Sequence) para excitar los parámetros. De acuerdo con esta prueba, se determinó que los parámetros D_1 , D_2 , Aro , Kro , M_{ZZ} , M_{XX} , b_1 y b_2 (ver tabla 2) pueden ser estimados juntos. No es posible estimar simultáneamente con los otros parámetros el producto de inercia guiñada-balanceo M_{XZ} , el cual es de influencia menor. Los parámetros ε_1 , ε_2 , h_1 y h_2 se pueden considerar no sensibles. Además, h_1 y h_2 no son identificables con el protocolo experimental propuesto. En resumen, el vector de parámetros que se podría estimar es:

$$p = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & Aro & Kro & M_{ZZ} & M_{XX} & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

y se quiere analizar su sensibilidad para poder realizar después una buena estimación. El resto de los parámetros de la tabla 2 se consideran conocidos y se fijan al valor nominal dado por el fabricante.

En el presente trabajo los parámetros no se estiman: sólo se realiza el análisis de sensibilidad de los parámetros de interés. Se utilizan los valores y los rangos de incertidumbre dados por

el fabricante (tabla 2). En el artículo (Haro, 2008) sí se lleva a cabo la estimación de los parámetros (4) y la validación de los resultados obtenidos.

3. Análisis de sensibilidad global

En la presente sección y en la siguiente se expone de manera sucinta la teoría del cálculo de los índices de sensibilidad y cómo se obtienen estos índices a partir de los polinomios de caos. Para profundizar más se puede referir a (Haro et al., 2012), donde se explica ampliamente.

Un modelo dinámico paramétrico, $y = f(t, \mathbf{p})$ donde y es la respuesta del modelo y \mathbf{p} es un vector de parámetros constantes, se puede transformar en una función estocástica al hacer variar de forma aleatoria los valores de \mathbf{p} . Ahora los parámetros se pueden considerar variables de entrada, pues se busca cuantificar la variación de la respuesta del modelo ante los cambios de los parámetros. La salida y se puede descomponer en sumandos de dimensión creciente (Sobol, 1993):

$$y = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(p_i) + \sum_{i<j} f_{ij}(p_i, p_j) + \dots + f_{1\dots n}(p_1, \dots, p_n) \quad (5)$$

donde se asume que la salida del modelo $y \in \mathbb{R}$ pertenece al espacio L^2 . Como se trata de un modelo dinámico, la descomposición anterior habrá que hacerla para los diferentes instante de la evolución del sistema. La ecuación (5) conduce a la expresión de la descomposición de la varianza de Sobol V_y :

$$V_y = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \dots + V_{1\dots n} \quad (6)$$

donde V_y es la varianza total de $f(\mathbf{p})$, V_i es la varianza marginal correspondiente al parámetro p_i , y $V_{1\dots n}$ es la varianza conjunta correspondiente a la interacción de los parámetros $p_{1\dots n}$.

La función de sensibilidad S_i para el parámetro p_i , llamada sensibilidad de primer orden, es la razón de la varianza marginal V_i y la varianza total V_y :

$$S_i = \frac{V_i}{V_y} \quad (7)$$

que mide la cantidad de varianza de la salida debida solamente al parámetro p_i . Las funciones de sensibilidad de orden mayor, nombradas $S_{i_1\dots i_s}$, se definen por la razón de la varianza conjunta de los parámetros correspondientes y la varianza total:

$$S_{i_1\dots i_s} = \frac{V_{i_1\dots i_s}}{V_y} \quad (8)$$

que miden la cantidad de varianza debida a la interacción colectiva de los parámetros p_{i_1}, \dots, p_{i_s} .

En la práctica, se utilizan la sensibilidad de primer orden y la función de sensibilidad total, S_{Ti} . Esta última representa la contribución aislada de p_i más las contribuciones de la interacción de p_i con los demás parámetros:

$$S_{Ti} = S_i + \sum_{j \neq i} S_{ij} + \dots + S_{ijk\dots n} \quad (9)$$

4. Expansión en PC de la salida del modelo

Cualquier variable aleatoria de segundo orden con varianza finita se puede representar por una expansión espectral fundamentada en una base de polinomios de Hermite, donde la base es ortogonal con respecto a la medida gaussiana (Wiener, 1938). En (Witteveen y Bijl, 2006; Xiu y Karniadakis, 2002b) este planteamiento se extiende a otro tipo de distribuciones. En el presente trabajo se utilizará una distribución uniforme con una base de polinomios de Legendre (ver sección 5).

En cualquier caso, la variable aleatoria $X(t, \omega)$ se puede expandir como:

$$X(t, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \Phi_j(\xi(\omega)) \quad (10)$$

donde x_j son coeficientes deterministas desconocidos, $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ son n variables aleatorias independientes y Φ_j son polinomios multivariantes.

Como la salida del modelo y se ha convertido en una variable aleatoria, y asumiendo que es de cuadrado integrable y de parámetros independientes, ésta se puede descomponer en PC:

$$y \approx \sum_{j=0}^M \alpha_j \Phi_j(\mathbf{p}) \quad (11)$$

que es una aproximación de la respuesta del modelo. Ahora α_j son los coeficientes desconocidos, que habrá que determinar, y los parámetros \mathbf{p} son las variables aleatorias independientes.

4.1. Determinación de los coeficientes de los PC

Una vez que se tiene la estructura (11) de la expansión en PC, el siguiente paso es encontrar los valores de los coeficientes α_j . Hay dos tipos de métodos para hacerlo: los intrusivos y los no intrusivos. Los métodos intrusivos deben resolver un sistema de ecuaciones acopladas, lo cual requiere algoritmos robustos y eficientes, además de que necesitan modificar el código determinista existente (Field, 2002; Xiu y Karniadakis, 2002b,a). Debido a este problema se han propuesto métodos no intrusivos, donde una de las técnicas utilizadas es la de proyección (Crestaux et al., 2009; Sudret, 2008). Estos métodos son muy útiles al tratar de cuantificar la incertidumbre en modelos deterministas complejos que no se pueden modificar fácilmente.

En este trabajo se emplea el método de proyección, y el método numérico utilizado para realizar los cálculos es el de cuadratura, ambos disponibles en diferentes herramientas informáticas para polinomios de caos (por ejemplo NISP para Scilab). En la sección 5 se explican más detalles.

4.2. Funciones de sensibilidad

Para calcular la función de sensibilidad (7) se necesita reordenar la expresión (11) para separar las diferentes contribuciones de cada parámetro, como en la descomposición (5). Para realizar esto, $\mathcal{I}_{k_1, \dots, k_s}$ debe definir el conjunto de los multi-índices j que corresponde a los polinomios que dependen solamente de las variables p_{i_1}, \dots, p_{i_s} . Utilizando esta notación, la expresión (11) se puede reformular como:

$$\begin{aligned}
 y \approx & \alpha_0 \Phi_0(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \alpha_j \Phi_j(p_i) \\
 & + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} \sum_{j \in \mathcal{I}_{i_1, i_2}} \alpha_j \Phi_j(p_{i_1}, p_{i_2}) + \dots \\
 & + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n} \sum_{j \in \mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}} \alpha_j \Phi_j(p_{i_1}, \dots, p_{i_s}) + \dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

A partir de la expresión (12), las funciones de sensibilidad de primer orden \hat{S}_i se pueden obtener utilizando el método de proyección, el cual aprovecha la propiedad de ortogonalidad de los PC, que son polinomios ortogonales, al calcular la expansión del modelo con el producto interno:

$$\hat{S}_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \hat{\alpha}_j^2 \langle \Phi_j(p_i), \Phi_j(p_i) \rangle}{\sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_j^2 \langle \Phi_j(\mathbf{p}), \Phi_j(\mathbf{p}) \rangle} \tag{13}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno.

Hacemos notar que (13) es una estimación de (7), ya que la expansión en PC es una aproximación del modelo original. Las funciones estimadas de sensibilidad $\hat{S}_{i_1, \dots, i_s}$, de orden más alto, se pueden obtener de manera similar:

$$\hat{S}_{i_1, \dots, i_s} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}} \hat{\alpha}_j^2 \langle \Phi_j(p_{i_1}, \dots, p_{i_s}), \Phi_j(p_{i_1}, \dots, p_{i_s}) \rangle}{\sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_j^2 \langle \Phi_j(\mathbf{p}), \Phi_j(\mathbf{p}) \rangle} \tag{14}$$

Finalmente, las funciones estimadas de sensibilidad total \hat{S}_{T_i} están dadas por:

$$\hat{S}_{T_i} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \hat{\alpha}_j^2 \langle \Phi_j(p_i), \Phi_j(p_i) \rangle}{\sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_j^2 \langle \Phi_j(\mathbf{p}), \Phi_j(\mathbf{p}) \rangle} \tag{15}$$

con \mathcal{I}_i el conjunto de multi-índices j correspondientes a los polinomios Φ_j que dependen de los parámetros p_i y posiblemente de otros parámetros.

La gran ventaja de utilizar el enfoque basado en los PC para calcular las funciones de sensibilidad es que, una vez que se ha obtenido la expansión en PC, este cálculo es directo. Por tanto este método será eficiente si la expansión en PC es acertada y poco costosa. Mientras más suave sea el comportamiento del modelo original, más fácil será aproximarla con la expansión con PC. Algunos ejemplos sencillos se presentan en (Creteaux et al., 2009; Haro et al., 2012; Sudret, 2008).

5. Análisis de las funciones de sensibilidad

Ahora se utiliza la expansión en PC para calcular los índices de sensibilidad global del modelo del automóvil (3), para

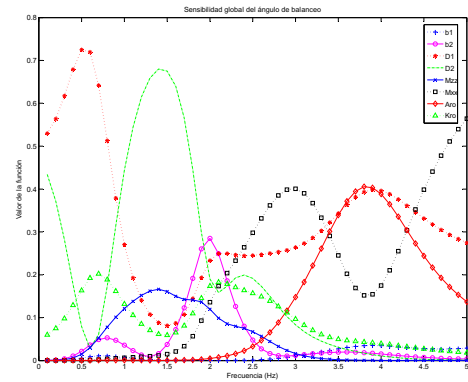


Figura 3: Funciones de sensibilidad global de la dinámica de balanceo del modelo de vehículo (3), generadas por expansión en polinomios de caos, en el rango de variación dado en la tabla 2.

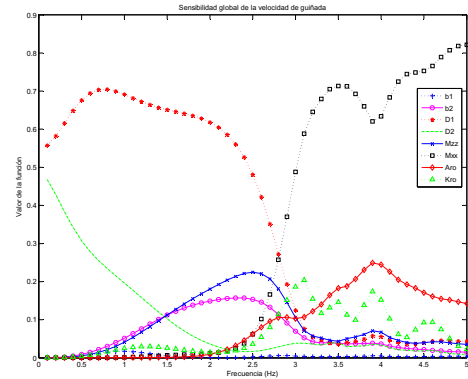


Figura 4: Funciones de sensibilidad global de la dinámica de velocidad de guiñada del modelo de vehículo (3), generadas por expansión en polinomios de caos, en el rango de variación dado en la tabla 2.

las frecuencias de 0 a 5 Hz. Los parámetros de interés (4) se consideran variables aleatorias con distribución uniforme, ya que no se dispone de información para suponer una distribución gaussiana o alguna otra. Los intervalos de variación de los parámetros se definieron conforme a los rangos de incertidumbre dados por el fabricante (tabla 2).

Por medio de la herramienta NISP para Scilab se generó el modelo estocástico de (3). Fue suficiente una expansión de tercer orden (ver ecuación (11), con $M = 3$) para tener un error aceptable (0.17 % en su punto más alto) entre la salida del modelo (3) y la salida de la aproximación con PC. Los valores de la sensibilidad global se obtuvieron con el método de proyección por cuadratura para diferentes valores de frecuencia de entrada. Estas gráficas se muestran en las figuras 3, 4 y 5 para las salidas: ángulo de balanceo, velocidad de guiñada y aceleración transversal respectivamente.

Según estas gráficas, los parámetros más sensibles son el coeficiente de rigidez de deriva frontal D_1 (0 - 1 Hz y 2.5 -

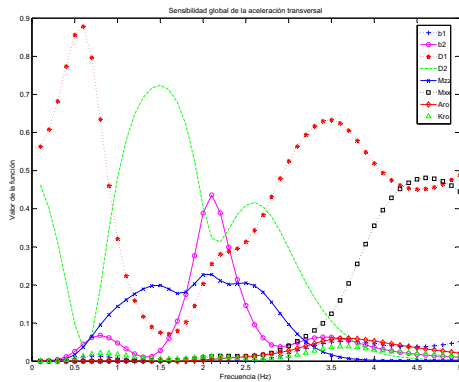


Figura 5: Funciones de sensibilidad global de la dinámica de aceleración transversal del modelo de vehículo (3), generadas por expansión en polinomios de caos, en el rango de variación dado en la tabla 2.

5 Hz), el coeficiente de rigidez de deriva posterior D_2 (1 - 2 Hz), y el momento de inercia del balanceo del vehículo M_{XX} principalmente para frecuencias por debajo de los 4 Hz. Por otro lado, los parámetros menos sensibles son: el coeficiente de relajación frontal b_1 en toda la gama de frecuencia, la rigidez total de balanceo K_{ro} y el coeficiente de relajación posterior b_2 que sólo presenta un pequeño pico alrededor de los 2 Hz.

Para enfatizar la conveniencia de utilizar el análisis de sensibilidad global cuando los valores de los parámetros son inciertos, en las figuras 6, 7 y 8 se muestran las gráficas de la sensibilidad local, para las mismas salidas (ángulo de balanceo, velocidad de guiñada y aceleración transversal respectivamente) del mismo modelo (3), las cuales se inspiran de (Haro, 2008). Estas gráficas fueron generadas tomando como valores nominales los especificados en la tabla 2. Se puede apreciar que la sensibilidad de los parámetros es diferente según se utilice un análisis de sensibilidad local o global. De acuerdo con la sensibilidad local se puede suponer que los parámetros K_{ro} , M_{XX} y D_2 serán bien estimados debido a su alta sensibilidad. Los coeficientes de relajación frontal y posterior b_1 y b_2 , que son los menos sensibles, serán los más difíciles de estimar.

Se pueden apreciar diferencias entre las sensibilidades global y local con respecto a la frecuencia, especialmente notorio en la salida de la velocidad de guiñada. Esta diferencia se puede explicar como sigue. Los enfoques locales ayudan a determinar el impacto de pequeñas variaciones de un parámetro alrededor de un valor nominal, cuando todos los otros parámetros se fijan a sus valores nominales. La modificación de estos valores nominales, que son inciertos para el modelo de vehículo, puede producir un cambio de la sensibilidad local de los parámetros. Así, cuando los parámetros son inciertos, no es aconsejable utilizar un enfoque local para medir la sensibilidad porque el punto de operación es desconocido. Por otro lado, los enfoques globales también permiten la determinación del mismo impacto, pero considerando la variación simultánea de todos los parámetros en toda su gama de incertidumbre.

Como el análisis de sensibilidad es un paso previo a la es-

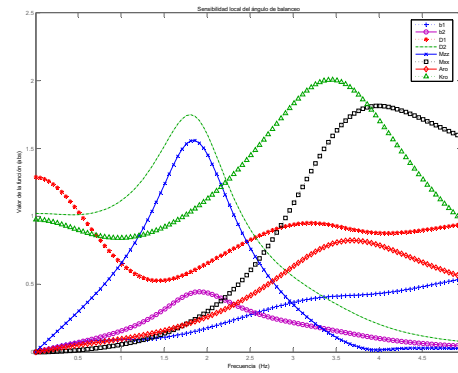


Figura 6: Funciones de sensibilidad local de la dinámica de balanceo del modelo de vehículo (3), generadas con derivadas parciales, en el punto de operación dado por los valores nominales de la tabla 2.

timación de parámetros, el resultado de la estimación será diferente en función del análisis de sensibilidad que se haya hecho. El análisis de sensibilidad ayudará a determinar el peso que se le dará a los parámetros en el algoritmo de estimación. Por ejemplo, de acuerdo con el análisis de sensibilidad global realizado, el parámetro b_1 se podría fijar a su valor nominal y sólo 7 parámetros tendrían que ser estimados, mejorando la velocidad del algoritmo. Y se le daría más peso a los parámetros D_1 , D_2 y M_{XX} , y muy poco peso a K_{ro} y b_2 , suponiendo que las pruebas de pista tienen los contenidos de frecuencia adecuados.

En un trabajo futuro estos resultados serán verificados realizando la estimación de los parámetros de acuerdo con el análisis de sensibilidad local y de sensibilidad global.

6. Conclusión

Este trabajo presenta un análisis de sensibilidad global del modelo de la dinámica lateral de un vehículo automóvil, con un enfoque basado en la expansión de la salida del modelo en polinomios de caos (PC). Se muestra que es posible obtener las funciones de sensibilidad de un sistema dinámico complejo. Se calculan los índices de sensibilidad para diferentes valores de frecuencia de la entrada.

La respuesta del modelo se puede sustituir por su expansión en PC. La ventaja de utilizar la expansión en PC es que su evaluación es más simple comparada con la simulación directa, ya que las funciones de sensibilidad se pueden evaluar como expresiones analíticas de los coeficientes de los PC. Como la salida del modelo cambia con el tiempo, existe un valor para los índices de sensibilidad en cada instante de tiempo y de esta manera se construyen las funciones de sensibilidad.

Las funciones de sensibilidad global se comparan con las funciones de sensibilidad local del mismo modelo obtenidas con derivadas parciales. Como se esperaba, la sensibilidad global calculada es diferente a la sensibilidad local, de modo que las decisiones basadas en el análisis de sensibilidad (por ejemplo, para la estimación de los parámetros) serán diferentes de-

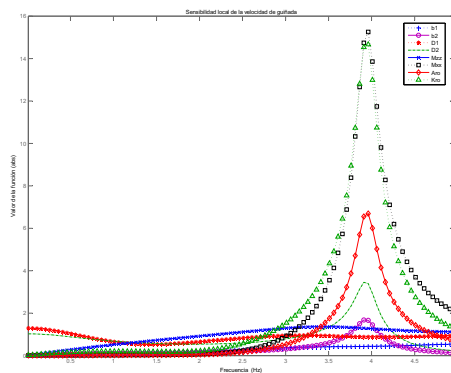


Figura 7: Funciones de sensibilidad local de la dinámica de velocidad de guiñada del modelo de vehículo (3), generadas con derivadas parciales, en el punto de operación dado por los valores nominales de la tabla 2.

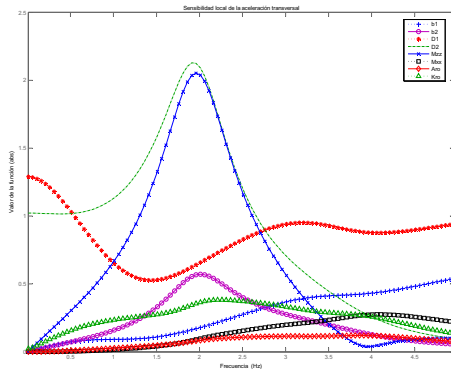


Figura 8: Funciones de sensibilidad local de la dinámica de aceleración transversal del modelo de vehículo (3), generadas con derivadas parciales, en el punto de operación dado por los valores nominales de la tabla 2.

pendiendo del análisis de sensibilidad que se haya hecho. Cuando los valores de los parámetros son inciertos es aconsejable utilizar un análisis global, ya que tiene en cuenta toda la gama de variación de los parámetros.

English Summary

Vehicle parameter sensitivity with polynomial chaos

Abstract

It is interesting to analyze the parameter sensitivity of mathematical models that describe physical systems, and it deserves particular attention the sensitivity study of models with uncertainty in the parameter values. Global sensitivity takes into account the entire range of parameter uncertainty because it

considers the parameters as random variables. This paper presents the global sensitivity analysis in frequency of a parametric mathematical model of lateral dynamics of a vehicle model, with an approach based on the polynomial chaos expansion of the model response. This technique allows to easily represent the system as a stochastic model, where the parameters become random variables that vary according to their uncertainty. The stochastic model should be a very close approximation of the original model.

Keywords:

sensitivity uncertain dynamic systems polynomial chaos vehicle dynamics

Referencias

- Crestaux, T., Maitre, O. L., Martinez, J., 2009. Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety* 94, 1161–1172.
- Cukier, R. I., Levine, R. I., Shuler, K. E., 1978. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. *Journal of Computational Physics* 26, 1–42.
- Field, R., 2002. Numerical methods to estimate the coefficients of the polynomial chaos expansion. En: 15th ASCE Engineering Mechanics Conference.
- Ghanem, R., Red-Horse, J., 1999. Propagation of probabilistic uncertainty in complex physical systems using a stochastic finite element approach. *Physica D* 133, 137–144.
- Ghanem, R., Spanos, P., 1991. *Stochastic finite elements - A spectral approach*. Springer Verlag.
- Haro, E., 2008. Estimación de los parámetros físicos de un automóvil. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI* 5 (4), 28 – 35.
- Haro, E., Anstett-Collin, F., Basset, M., 2012. Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos. *Reliability Engineering & System Safety* 104 (0), 15 – 26.
- Homma, T., Saltelli, A., 1996. Importance measures in global sensitivity analysis of model output. *Reliability Engineering & System Safety* 52 (1), 1–17.
- Jacques, J., Lavergne, C., Devictor, N., 2006. Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs. *Reliability Engineering & System Safety* 91, 1126–1134.
- Mara, T. A., Tarantola, S., 2008. Application of global sensitivity analysis of model output to building thermal simulations. *Journal of Building Simulation* 1, 290–302.
- McKay, M. D., Morrison, J. D., Upton, S. C., 1999. Evaluating prediction uncertainty in simulation models. *Computer Physics Communications* 117 (1–2), 44–51.
- Saltelli, A., Tarantola, S., Chan, K., 1999. A quantitative model independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics* 41, 39–56.
- Sobol, I. M., 1993. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computing Experiments* 1, 407–414.
- Sudret, B., 2008. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansion. *Reliability Engineering & System Safety* 93, 964–979.
- Turyani, T., Rabitz, H., 2000. *Local methods in sensitivity analysis*. A. Saltelli, K. Chan, E. M. Scott, John Wiley and Sons, Chichester.
- Walter, E., Pronzato, L., 1997. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer.
- Wiener, N., 1938. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics* 60 (4), 897–936.
- Witteveen, J., Bijl, H., 2006. Modeling arbitrary uncertainties using Gram-Schmidt polynomial chaos. En: 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.
- Xiu, D., Karniadakis, G., 2002a. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics* 187 (1), 137–167.
- Xiu, D., Karniadakis, G., 2002b. The Wiener-Askey polynomials chaos for stochastic differential equations. *Journal of Scientific Computing* 26.