

## Modelado de Amortiguadores guiado por sus Diagramas Característicos

Jorge de-J. Lozoya-Santos<sup>a,1,\*</sup>, Diana Hernández-Alcantara<sup>a</sup>, Ruben Morales-Menendez<sup>a</sup>, Ricardo A. Ramírez-Mendoza<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Tecnológico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Av. E. Garza Sada, 2501, Monterrey, NL 64,849 México.

### Resumen

Una metodología para modelar amortiguadores guiada por sus diagramas característicos es presentada y validada. Los diagramas característicos del amortiguador son construidos a partir de datos experimentales generados por pruebas estándar: fuerza versus desplazamiento y velocidad versus aceleración. Estos son explorados en las frecuencias de interés. Los diagramas son clasificados en siete patrones, los cuales sirven de guía para construir el modelo matemático el cual puede identificarse con algoritmos convencionales. La metodología es validada con cuatro amortiguadores comerciales de diferentes tecnologías, obteniendo resultados con errores de estimación menores al 5%. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.

**Palabras Clave:** amortiguador semi-activo, amortiguador pasivo, modelado, metodología, simulación

### 1. Introducción

Un modelo matemático dinámico para un amortiguador automotriz debe simular fielmente su comportamiento, destacando las no linealidades (fricción, histéresis, inercia) en un rango de frecuencia menor a 30 Hz (en el dominio automotriz). Lo más importante en un amortiguador de uso automotriz son las características en los diagramas de *Fuerza-Velocidad (FV)* y *Fuerza-Desplazamiento (FD)*.

Existen muchos métodos de modelado. Un método ideal debe ser genérico y que permita ajustar un modelo a partir del análisis gráfico de los diagramas característicos, pues estos contienen la información para el diseño de la suspensión.

Un amortiguador *Pasivo (P)* tiene capacidad de amortiguamiento definida por su diseño mecánico, varía por la amplitud del desplazamiento y la frecuencia de oscilación. Sus diagramas característicos *FV* y *FD* son constantes; puede estar diseñado para confort o agarre de superficie (o un balance de ambas).

Los amortiguadores *Semi-Activos (SA)* definen su capacidad por su diseño mecánico y por una señal externa que hace que varíe una propiedad mecánica del mismo. Cuando no existe esta señal externa, su estado es *P*. Sus diagramas característicos *FV* y *FD* son variables. Tres tecnologías comerciales son las más conocidas: *Pasiva (P)*, *Magneto-Reológica (MR)* y *Electro-Hidráulica (EH)*; en la Tabla 1 se comparan estas.

Se han desarrollado modelos con parámetros sin significado físico, tales como: (i) pasivos, Duym (1997), (ii) *MR*, Choi et al. (2001), Savaresi et al. (2005a), y (iii) *EH*, Codeca et al. (2008). Los modelos con parámetros con significado físico como los fenomenológicos, se clasifican también como: (i) pasivo, Duym (2000), Carrera-Akutain et al. (2006), (ii) *MR*, Wang y Kamath (2006), Choi et al. (2001) y (iii) *EH*, Heo et al. (2003). Ejemplos de los modelos cuyos parámetros están ligados a los diagramas característicos son: (i) pasivo, Basso (1998), Calvo et al. (2009) y (ii) *MR*, Guo et al. (2006), Ma et al. (2007). Estos últimos son los de principal interés, ya que los parámetros pueden predecir la eficiencia del amortiguador en alguna maniobra del vehículo. En la tabla .11 describimos la nomenclatura.

Tabla 1: Comparación de diferentes tecnologías de amortiguamiento.

Característica	Pasiva	MR	EH
Histéresis	Baja	Baja	Baja
Principio	Flujo constante	Viscosidad variable	Área de flujo variable
Manipulación	NA	Corriente Eléctrica	
Rango Manipulación	NA	0 – 2,5 A @ 12 V	0 – 5 A
Potencia	NA	30 W	> 60 W
Vel. Respuesta	NA	15 – 40 ms	10 – 60 ms
Otras aplicaciones	Seguridad	Clutches, Frenos Prótesis	Control de flujo
Ventaja	Costo Mtto.	Sistema de actuación	Respuesta proporcional
Desventaja	Desempeño	Costo	Mtto.
Madurez Tecnológica	Alta		
Tiempo de Vida	80,000 Km	32,000 Km	40,000 Km
Costo relativo [%]	100	~5,000	~7,000

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: A00944078@itesm.mx (Jorge de-J. Lozoya-Santos), A00469139@itesm.mx (Diana Hernández-Alcantara), rmm@itesm.mx (Ruben Morales-Menendez), ricardo.ramirez@itesm.mx (Ricardo A. Ramírez-Mendoza)

Dado que el diagrama *FV* se asemeja a una función sigmoi-

Tabla 2: Comparación de modelos

Autor/Año	Sims et al. (2004)	Ma et al. (2007)	Boggs (2009)
Objetivo	Prototipado y simulación	Simulación	Simulación
Experimentos	Std / Variable	Std	Std
Parámetros	$k_p, c_p, m_d$ $c_{pre}, c_{pos}$	Dependientes de modelo	$k_p, c_p, F_s, \tau$
Ancho banda	0–15 Hz	0–5 Hz	0–15 Hz
No-linealidad	Fricción, Histéresis	Cedencia semi-activa	histéresis
Tecnología	ER, MR	MR	Pasivo
Modelo	Algebraico con tanh	Dependiente de manipulación	Dinámico no lineal
Ventaja	Paramétrico	-	Cómputo
Desventaja	Muchos Experimentos y complejo	Sin significado en diagramas característicos	

dal, existen tres modelos que han usado funciones trigonométricas (tangente hiperbólica y arco-tangente) con éxito en el modelado de la histéresis. Kwok et al. (2006) propuso usar la función para incluir la histéresis en base al signo del desplazamiento:

$$F_{Kwok} = \tanh\left(\underbrace{r_{pre}\dot{z}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{h_{pre}\text{signo}(z)}_{\text{histéresis}}\right) \quad (1)$$

Guo et al. (2006) presentó una función pero no depende solo del signo, sino también de la magnitud:

$$F_{Guo} = \tanh\left(\underbrace{r_{pre}\dot{z}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{h_{pre}z}_{\text{histéresis}}\right) \quad (2)$$

Çesmecı y Engin (2010) presentan la fuerza con histéresis utilizando una función sigmoïdal y el signo de la aceleración:

$$F_{Çes} = \tan^{-1}\left(\underbrace{r_{pre}\dot{z}}_{\text{amortiguamiento}} + \underbrace{h_{pre}\text{signo}(\ddot{z})}_{\text{histéresis}}\right) \quad (3)$$

Los resultados son buenos en términos de los diagramas *FV* para frecuencias, amplitudes y manipulaciones constantes pero limitados en precisión en la parte dinámica.

Sims et al. (2004) propone un método con resultados de alta precisión, pero el modelo no es genérico y requiere de pruebas muy específicas. Ma et al. (2007) propone modificar modelos de amortiguadores *P* multiplicando la fuerza por una fuerza dependiente de la corriente. Boggs (2009) desarrolla un modelo no lineal, donde la histéresis es incluida utilizando un retraso de la fuerza con un filtro de primer orden, no se incluye la fricción generada por la rigidez del diseño mecánico. Todos presentan funciones que son costosas computacionalmente. La Tabla 2 compara las propuestas discutidas.

Proponemos un método de diseño genérico basado en diagramas característicos para obtener un modelo de fácil identificación y simulación. En la sección 2 presentamos los fundamentos del método. En la sección 3 describimos el método. A través de un caso ejemplificamos la propuesta en la sección 4. Finalmente, en la sección 5 concluimos la investigación.

## 2. Fundamentos

La fuerza total de un amortiguador semi-activo puede expresarse en dos términos, Dixon (2008):

$$F_{D|M} = F_P + F_{SA|M} \quad (4)$$

donde  $F_{D|M}$  es la fuerza total dada una manipulación  $M$ ;  $F_P$  es el término debido a los fenómenos mecánicos, y  $F_{SA|M}$  es el término por la manipulación  $M$ . Si el amortiguador es pasivo,  $F_D = F_P$ . Los diagramas característicos cuando la manipulación es cero,  $F_{D|M=0}$ , muestran el desempeño cinemático. Cuando se analiza la fuerza  $F_{SA|M \neq 0} = F_{D|M \neq 0} - F_P$ , los diagramas característicos son llamados *SA* y muestran la variación controlable del amortiguamiento debido a una variable exógena, idealmente independiente de la cinemática.

La variable exógena influye en los diagramas característicos *SA* de acuerdo a la tecnología. Si es *MR* y *ER*, la variable modifica el fluido y por lo tanto la dinámica de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en los diagramas *FD* y *FV*. Si es *EH*, el diagrama *FV* variará en forma proporcional a la variable exógena, y la dinámica del diagrama *FD* es independiente.

Los diagramas característicos *FD*, *FV* y *Fuerza-Aceleración (FA)*, Fig. 1, pueden describirse a través de ocho líneas  $\{a, \dots, h\}$  y por ocho puntos  $\{A, \dots, H\}$ , después de cada línea  $x$  sigue el punto  $X$ . Estos puntos representan fenómenos debidos a la cinemática y/o variable exógena y son comunes en los tres diagramas, los llamaremos puntos característicos. El sentido de las curvas en los diagramas *FD* y *FV* es en el sentido de las manecillas del reloj, en el diagrama *FA* es en sentido contrario.

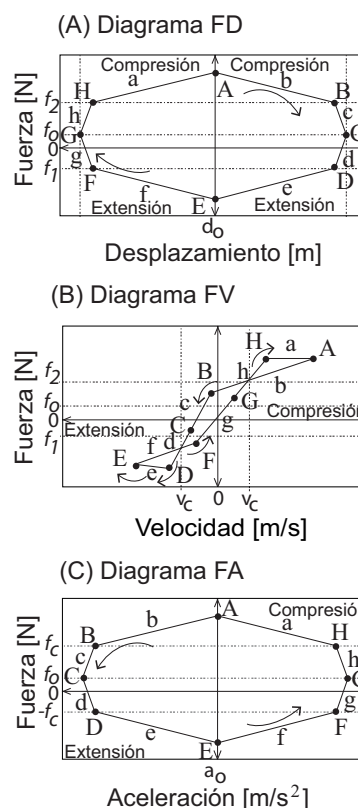


Figura 1: Diagramas característicos.

Existen tres tipos de puntos en los diagramas característicos. *Punto de cedencia*: la pendiente de la siguiente línea es menor. En los diagramas *FV*,  $P$  se relaciona con la activación de válvulas de mayor orificio en una velocidad límite, y en los

*FV, SA* con el cambio del comportamiento del fluido (viscoso a visco-plástico). *Punto de retorno*: la velocidad cambia de sentido, la pendiente de la siguiente línea cambia de signo. Sucede en cualquier diagrama *FV*. *Punto de restauración*: la pendiente de la siguiente línea es mayor y del mismo signo. En el diagrama *FV, P* sucede cuando el sistema de válvulas desactiva las válvulas de mayor orificio incrementando el amortiguamiento. En el diagrama *FV, SA* las cadenas formadas por el fenómeno magnético en el fluido *MR/ER* se restauran, aumentando la viscosidad del fluido abruptamente.

Los puntos de *cedencia* y *restauración* están relacionados con los dos principales coeficientes de amortiguamiento: coeficiente alto y bajo, Rakheja y Sankar (1985); Warner (1996); Hong et al. (2002); Savaresi y Spelta (2007). Se puede considerar una relación mayor a 5:1 para el coeficiente alto/bajo en extensión y compresión para un amortiguador simétrico, y una relación mayor 2:1 en compresión para un amortiguador asimétrico. Cualquier variación de estos en el diagrama *FV*, es reflejado en los diagramas *FD* y *FA*. Basados en el diagrama *FV*, la Tabla 3 presenta los cuadrantes donde están los puntos característicos.

Tabla 3: Puntos característicos en diagrama *FV*.

Operación	Compresión	Extensión	<i>P</i>	<i>SA</i>
Rectas	<i>a, b, c, h</i>	<i>d, e, f, g</i>	$\omega$	$\omega, M$
Cedencia	H	D	$\omega, \alpha$	$M, \omega, \alpha$
Restauración	F	B	$\omega, \alpha$	$M, \omega, \alpha$
Retorno	A	E	$\omega, \alpha$	$M$

El análisis de los diagramas característicos se hará en tres rangos de frecuencia relevantes al dominio automotriz: frecuencia baja ( $\omega B$ ) [0.5-3] Hz, frecuencia media ( $\omega M$ ) [3-7] Hz y frecuencia alta ( $\omega A$ ) [7-15] Hz, Warner (1996). Las pendientes de las líneas y las coordenadas de los puntos característicos cambian de acuerdo a: 1) la frecuencia de oscilación,  $\omega$ ; 2) de la amplitud de oscilación ( $\alpha$ ) del desplazamiento del pistón en los diagramas pasivos (*P*) y 3) a la variable exógena *M*.

En diagramas *P, FD*, Fig. 1A, se presenta una rigidez baja, representado por la pendiente  $k_b$  en todas las líneas para  $\omega B$ . La pendiente en la rigidez aumenta,  $k_a$  en las líneas *c, d, g, h* y en las líneas *a, b, e, f* tiende a cero para frecuencias en los rangos [ $\omega M - \omega A$ ]. Las pendientes siempre llevan el signo de la velocidad *signo*( $\dot{z}$ ), Tabla 4 (se muestran las variables que más afectan las pendientes). En el diagrama *SA, FD*, las líneas presentan una pendiente  $k_{SA}$  similar en todo el rango de velocidades en  $\omega B$ . Esta pendiente se mantiene en las líneas *c, d, g, h*, y tiende a cero en las líneas *a, b, e, f* para  $\omega M$  y  $\omega A$ . Las pendientes siempre son positivas, Tabla 4.

En diagramas *P, FV*, Fig. 1B, se presenta una amortiguamiento alto, representado por la pendiente  $c_a$  en todas las líneas para  $\omega B$ . La pendiente del amortiguamiento permanece igual,  $c_a$  en las líneas *c, d, g, h* y en las líneas *a, b, e, f* tiende a un amortiguamiento menor, pendiente  $c_b$  para frecuencias en los rangos [ $\omega M - \omega A$ ]. En el rango  $\omega A$   $c_b \rightarrow 0$ , Tabla 5. Las pendientes siempre son positivas e influenciadas por  $\omega$ . En el diagrama *SA FV*, las líneas presentan un alto amortiguamiento  $c_{SA}$  similar en todo el rango de velocidades en  $\omega B$ . Esta pendiente

Tabla 4: Diagrama *FD* en líneas para casos *P* y *SA*.

Rectas	<i>P</i>			<i>SA</i>		
	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$
a	$k_b$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$k_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
b	$k_b$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$k_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
c	$k_b$	$k_a$	$k_a$	$k_{SA}$	$k_{SA}$	$k_{SA}$
d	$k_b$	$k_a$	$k_a$	$k_{SA}$	$k_{SA}$	$k_{SA}$
e	$k_b$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$k_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
f	$k_b$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$k_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
g	$k_b$	$k_a$	$k_a$	$k_{SA}$	$k_{SA}$	$k_{SA}$
h	$k_b$	$k_a$	$k_a$	$k_{SA}$	$k_{SA}$	$k_{SA}$
Var	$\omega$			$\omega, M$	$M$	

Tabla 5: Diagrama *FV* en líneas para casos *P* y *SA*.

Rectas	<i>P</i>			<i>SA</i>		
	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$
a	$c_a$	$c_b$	$\rightarrow 0$	$c_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
b	$c_a$	$c_b$	$\rightarrow 0$	$c_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
c	$c_a$	$c_a$	$c_a$	$c_{SA}$	$c_{SA}$	$c_{SA}$
d	$c_a$	$c_a$	$c_a$	$c_{SA}$	$c_{SA}$	$c_{SA}$
e	$c_a$	$c_b$	$\rightarrow 0$	$c_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
f	$c_a$	$c_b$	$\rightarrow 0$	$c_{SA}$	$\rightarrow 0$	$\sim 0$
g	$c_a$	$c_a$	$c_a$	$c_{SA}$	$c_{SA}$	$c_{SA}$
h	$c_a$	$c_a$	$c_a$	$c_{SA}$	$c_{SA}$	$c_{SA}$
Var	$\omega$			$\omega, M$	$M$	

se mantiene en las líneas *c, d, g, h*, y tiende a cero en las líneas *a, b, e, f* para  $\omega M$  y  $\omega A$ . Las pendientes siempre son positivas y son influenciadas principalmente por  $\omega$  y *M* a baja frecuencia, y solo por *M* en  $\omega M$  y  $\omega A$ , Tabla 5.

En diagramas *P, FA*, Fig. 1C, se presenta una pendiente casi nula, en las líneas *a, b, e, f*, e infinita para *c, d, g, h* en  $\omega B$ . La aceleración no influye en la fuerza. La pendiente  $m_d$  aparece en todas las líneas [ $\omega M - \omega A$ ]. La frecuencia influye mucho en la fuerza por su efecto cuadrático en la aceleración. Las pendientes siempre son positivas, Tabla 6. En el diagrama *SA*, las pendientes en  $\omega B$  y  $\omega M$  son las mismas que para el caso *P* a  $\omega B$ . La aceleración tiene un efecto nulo en la fuerza *SA*. A altas frecuencias,  $\omega A$ , se puede dar el caso que se presente una pendiente positiva,  $m_{SA}$  para las líneas de cedencia, *a, b, e, f*. La influencia de la aceleración no es significativa en la fuerza *SA*, Tabla 6. Un modelo es presentado para cada rango de frecuencia, para  $\omega B$  es:

$$F_{D|M} = \underbrace{k_b \text{signo}(\dot{z})z + c_a \dot{z} + m_d \ddot{z}}_{F_P} + \underbrace{M [k_{SA}z + c_{SA} \dot{z}]}_{F_{SA|M}} \quad (5)$$

Para frecuencias  $\omega M$  y  $\omega A$ , los componentes de fuerza  $F_P$  y  $F_{SA|M}$  del modelo propuesto ecn. (4) son:

$$F_P = \begin{cases} k_a \text{signo}(\dot{z})z + c_a \dot{z} + m_d \ddot{z} & \dot{z} < v_1 \\ F_p(v_1) + c_b \dot{z} + m_d \ddot{z} & \dot{z} > v_1 \end{cases} \quad (6)$$

$$F_{SA|M} = \begin{cases} M [k_{SA}z + c_{SA} \dot{z}] & \dot{z} < v_2 \\ M [g_{SA} \text{signo}(\dot{z})] + m_{SA} \ddot{z} & \dot{z} > v_2 \end{cases} \quad (7)$$

Las 3 ecuaciones son parecidas a la presentada por Joarder (2003);

Tabla 6: Diagrama FA en líneas casos P y SA.

Rectas	P			SA		
	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$
a	$\rightarrow 0$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$m_{SA}$
b	$\rightarrow 0$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$m_{SA}$
c	$\rightarrow \infty$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
d	$\rightarrow \infty$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
e	$\rightarrow 0$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$m_{SA}$
f	$\rightarrow 0$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$m_{SA}$
g	$\rightarrow \infty$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
h	$\rightarrow \infty$	$m_D$	$m_D$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
Var	$\omega$					

sin embargo, los puntos característicos son dinámicos y función de la frecuencia  $\omega$ , amplitud  $\alpha$  y manipulación  $M$ , Tabla 3.

Para proponer un modelo dinámico genérico, clasificamos los diagramas característicos *FD*, *FV* y *FA* de acuerdo al rango de frecuencias y a la combinación de puntos característicos. La clasificación propuesta consta de 7 patrones : (a) *Tipo 0* para  $\omega B$ , (b) Tipos (1, 2, 3, 4) para  $\omega M$ , y (c) Tipos (5, 6) para  $\omega A$ .

*Tipo-0.* En los diagramas *P*, los puntos *A*, *B* y *H* son iguales en compresión, y los puntos *D*, *E* y *F* entre si. Si fuera asimétrico, las pendientes de las líneas *d* y *g* serían iguales y diferentes a las de *c* y *h* que también serían iguales entre ellas, Fig. 2. Si el amortiguador es simétrico,  $E=-A$ ,  $D=-H$  y  $F=-B$ . El diagrama *FD* muestra una compresibilidad constante,  $k_b$ , presentando ovalos perfectos, Fig. 2A. El diagrama *FV* es una línea con amortiguamiento alto  $c_a$ , Fig. 2B. Las pendientes *D*, *C*, *G* y *H* son iguales. Las líneas *A*, *B*, *E*, *F* tienen una longitud cero. Es muy raro que presenten histéresis en el diagrama *FV*. La influencia de la aceleración no es significativa, tal como se puede apreciar en la Fig. 3A. La frecuencia y amplitud de desplazamiento incrementa la magnitud de los puntos característicos. En los diagramas *SA*, la frecuencia y amplitud de desplazamiento así como la variable exogena incrementa los puntos característicos. Esta última es la más significativa en las ordenadas de los puntos.

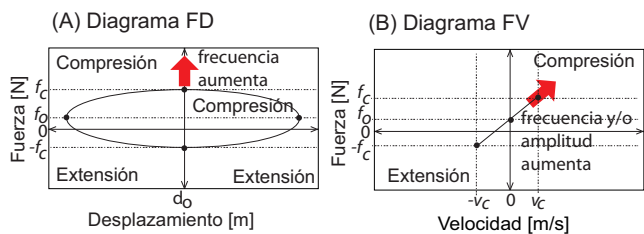


Figura 2: Diagramas característicos a  $\omega B$ , *Tipo-0*.

*Tipo-1.* En el caso *P*, es el tipo ideal en un amortiguador automotriz, Fig. 4. Existen los puntos de cedencia, restauración y retorno. Las pendientes de valor alto de las líneas *c* y *h*, así como *d* y *g* son iguales, así como las pendientes de las líneas *a* y *b* en compresión, *y f* y *e* en extensión son iguales. Los puntos de cedencia *H* y *D* y de restauración *B* y *F* son iguales entre si en los dos cuadrantes de compresión, así como los dos correspondientes al cuadrante de extensión. No hay histéresis. La

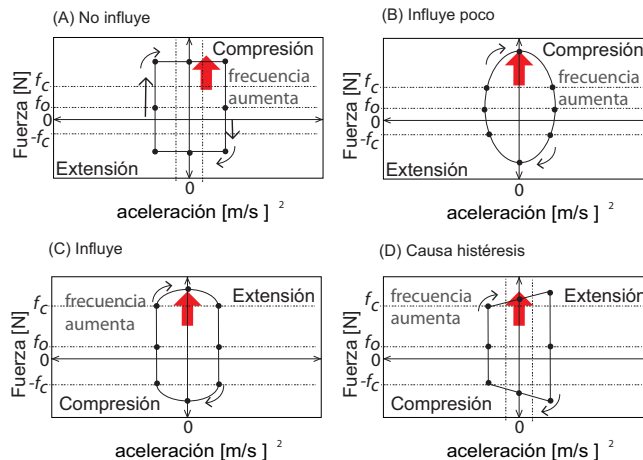


Figura 3: Tipos de diagramas característicos FA.

influencia de la aceleración es despreciable, Fig. 3(A,B). No existe este tipo en sistemas SA.

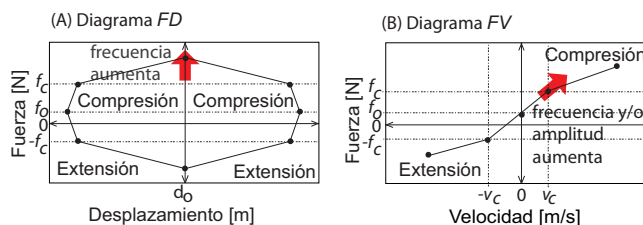


Figura 4: Diagramas característicos a  $\omega M$ , *Tipo-1*.

*Tipo-2.* Son los diagramas típicos en un amortiguador automotriz, Fig. 5. La diferencia con el *Tipo-1*, es que el punto de cedencia *H* tiene abscisa y ordenada mayores que el punto de restauración *B*. Esto genera la histéresis a alta velocidad debido a la viscosidad del fluido. La influencia de la aceleración puede no ser significativa, Fig. 3B. En diagramas *SA* son comunes estos tipos de diagramas, aunque regularmente se idealizan a altas velocidades representandolos como un *Tipo-1*. Las características del fluido *MR/ER* definen la dinámica de los puntos de cedencia y de restauración.

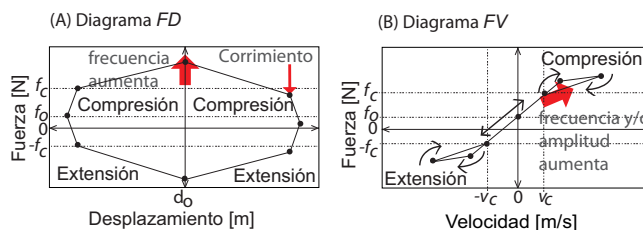


Figura 5: Diagramas característicos a  $\omega M$ , *Tipo-2*.

*Tipo-3.* También es automotriz, Fig. 6. La abscisa y ordenada del punto *B* son menores a las del punto *H* resultando en que la línea *b* es mas larga que la línea *a*. La abscisa de *B* es mucho menor que la de *H*, es decir, el punto *B* está mas cercano a cero en el eje horizontal de la velocidad, y mas lejano a cero en el eje horizontal del desplazamiento. Esto genera la histéresis a baja velocidad debido al fenómeno de compresibilidad del fluido. El

punto  $F=-H$  y el punto  $F=-B$  cuando existe simetría. La influencia de la aceleración no es significativa, Fig. 3A. En diagramas SA son comunes estos fenómenos, pero a altas frecuencia ya que la viscosidad del fluido MR/ER no tiene una respuesta tan rápida como la frecuencia de oscilación, provocando que los puntos de cedencia y restauración sean diferentes, generando la histéresis.

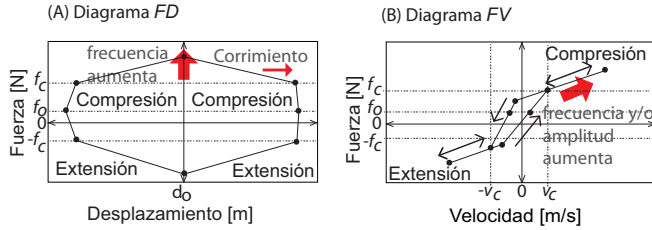


Figura 6: Diagramas característicos a  $\omega M$ , Tipo-3.

**Tipo-4.** No son comunes en diagramas P. Por otro lado, es la respuesta esperada de la fuerza  $F_{SA|M=cte}$  en un amortiguador, Fig. 7. La fuerza es independiente en casi toda el intervalo de la velocidad, excepto en la vecindad de  $\dot{z} = 0$ . Si esta vecindad tendiera a cero, la fuerza SA sería ideal. Dada la independencia de la velocidad a medias y altas magnitudes, las pendientes de  $a, b, f$  y  $e$  son cero. Los puntos de cedencia son  $H$  y  $D=-H$  y de restauración  $B$  y  $F=-B$  en casos simétricos. Los puntos de retorno  $A$  y  $E=-A$  son iguales, y su ordenada es igual en magnitud a los puntos de cedencia  $H$  y  $F=-H$ . La ordenada de los puntos de cedencia es proporcional a la magnitud de la variable exógena. Las pendientes de las líneas  $c, d, g$  y  $h$  pueden ser sensibles a la velocidad y a la variable exógena, aumentando conforme aumentan ambas variables. El orden de cambio de la abscisa es mucho menor, del orden de 5 a 1. No hay histéresis en el diagrama FV. La influencia de la aceleración es poco significativa, Fig. 3(A o B).

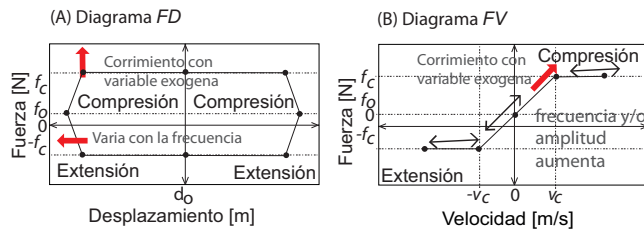


Figura 7: Diagramas característicos a  $\omega M$ , Tipo-4.

**Tipo-5.** En diagramas P puede presentarse cuando opera en condiciones límite, Fig. 8. Es una mezcla de los Tipo 2 y 3, existe la histéresis debido a los fenómenos de compresibilidad y viscosidad del fluido. La influencia de la aceleración puede ser significativa, Fig. 3C. En diagramas SA no son comunes, a menos que el amortiguador sea ER/MR o la respuesta de las válvulas proporcionales presenten histéresis.

**Tipo-6.** Este tipo es muy raro en un amortiguador de uso automotriz, Fig. 9. Las ordenadas (fuerza) de los puntos de restauración  $B$  y  $F$  aumentan y las ordenadas de los puntos de cedencia  $D$  y  $H$  disminuyen. Debido a la alta frecuencia (velocidad), los puntos de cedencia y restauración suceden mas rápido, es

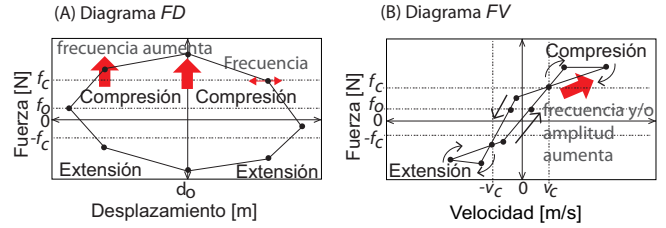


Figura 8: Diagramas característicos a  $\omega A$ , Tipo-5.

decir, se invierten los Tipos 2 y 3 porque los elementos mecánicos se forzan y no recuperan su condición de funcionamiento de diseño. La influencia de la aceleración es muy significativa, Fig. 3D. En diagramas SA no son comunes.

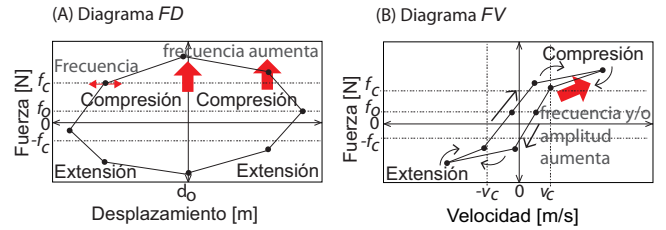


Figura 9: Diagramas característicos a  $\omega A$ , Tipo-6.

### 3. Modelado

El primer paso de la metodología es clasificar el patrón que corresponde al diagrama característico del amortiguador generado experimentalmente, a partir de esta clasificación se propondrá la ecuación del modelo. Para que el sistema sea computacionalmente eficiente se propone usar la función *squash*, Yonaba et al. (2010),  $f(\theta) = \theta / (1 + |\theta|)$  donde  $\theta$  es el argumento de la función y define la forma sigmoidal.

El modelo genérico propuesto del amortiguador, incluye dos términos: un término  $P$  que modela el comportamiento cuando no se aplica una variable exógena, y un término SA que modela la fuerza cuando se aplica la variable exógena, ecn. (8a). Como el amortiguador SA puede tener un comportamiento asimétrico en el diagrama FV, los coeficientes del modelo son diferentes para velocidades positivas y negativas:

$$F_D = F_{P+,-} + F_{SA+,-} \tag{8a}$$

$$F_P = f_0 + c_p \dot{z} + k_p z + m_D \ddot{z} + f_s + f_{h,z} + f_{h,\dot{z}} \tag{8b}$$

$$F_{SA} = M g_{SA} [f_{pre-c,\dot{z},M} + f_{pre-c,z}] \tag{8c}$$

donde:

$$f_s = f_{c,s} \left( \frac{r_s \dot{z} + h_s z}{1 + |r_s \dot{z} + h_s z|} \right)$$

$$f_{h,z} = f_{h_1} \left( \frac{r_z \dot{z} + h_z \text{sign}(z)}{1 + |r_z \dot{z} + h_z \text{sign}(z)|} \right)$$

$$f_{h,\dot{z}} = f_{h_2} \left( \frac{r_{\dot{z}} \dot{z} + h_{\dot{z}} \text{sign}(\dot{z})}{1 + |r_{\dot{z}} \dot{z} + h_{\dot{z}} \text{sign}(\dot{z})|} \right)$$

$$f_{pre-c,\dot{z},M} = \left( \frac{r_{\dot{z},M} \dot{z} M}{1 + |r_{\dot{z},M} \dot{z} M|} \right)$$

$$f_{pre-c,z} = \left( \frac{r_{z,M} z}{1 + |r_{z,M} z|} \right)$$

La ecuación (8b) es el término  $P$ ,  $F_p$  de la fuerza del amortiguador  $SA$ . El coeficiente  $f_0$  es una fuerza de compensación inicial,  $c_p$  es coeficiente de amortiguamiento viscoso el cual describe la fuerza dependiente de la velocidad y esta relacionado con  $c_b$ . El coeficiente de rigidez interno,  $k_p$ , representa la fuerza dependiente del desplazamiento y esta relacionado con  $k_b$ , la masa virtual  $m_D$  describe la fuerza dependiente de la aceleración,  $f_s = F_{Guo}$  y es la fuerza de amortiguamiento que representa el comportamiento sigmoidal, y los términos  $f_{h,z} = F_{Kwok}$  y  $f_{h,\dot{z}} = F_{ces}$  modelan el efecto de la histéresis a  $\omega B$  y  $\omega A$ .

La ecuación (8c) es el término  $SA$ ,  $F_{SA}$ , donde  $g_{SA}$  es la ganancia de fuerza por cada unidad de  $M$ , el término  $f_{pre-c,\dot{z},M}$  simula la fuerza  $SA$  a bajas velocidades donde el amortiguamiento depende de la velocidad y de la manipulación, y  $f_{pre-c,M}$  simula el efecto de la rigidez en la fuerza  $SA$ .

En las tablas 7 y 8 proponemos reglas de modelado, el \* indica que puede usarse un modelo simple donde la precisión a la  $\omega A$  no es importante. Cada una de estas tablas muestran la función  $P$  y  $SA$  para modelar el amortiguador. Los términos necesarios son seleccionados de las ecuaciones base (8b) y (8c).

Tabla 7: Reglas de modelado para los diagramas  $P$ .

Modelo	Tipo de diagrama			Función
	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$	
Simple	0 o 1	1	1	$f_s$
	0 o 1	1	*	
Simple inercial	0 o 1	1	2	$f_s + f_{h,\dot{z}}$
	0 o 1	2	2	
	0 o 1	2	6	
	0 o 1	1	6	
Simple rígido	0 o 1	1	3	$f_s + f_{h,z}$
	0 o 1	3	3	
Completo	0 o 1	2	5	$f_s + f_{h,z} + f_{h,\dot{z}}$
	0 o 1	3	5	

Tabla 8: Reglas de modelado para los diagramas  $SA$ .

Modelo	Tipo de diagrama			Función	
	$\omega B$	$\omega M$	$\omega A$	Opción 1	Opción 2
Simple	0 o 4	4	4	$f_{pre-c,\dot{z},M}$	-
Completo	0 o 4	4, 6 o 5	6 o 5	$f_{pre-c,\dot{z},M}$	$f_{pre-c,\dot{z},M} + f_{pre-c,z}$

Si el amortiguador es simétrico, proponemos:

$$F_D = \underbrace{f_0 + c_p \dot{z} + k_p z + m_D \ddot{z} + \text{función}_{PAS}}_{\text{fuerza pasiva}} + \quad (9)$$

$$\underbrace{Mg_{SA} [\text{función}_{SA}]}_{\text{fuerza semi-activa}}$$

Si el amortiguador es asimétrico, proponemos:

$$F_D = f_0 + \begin{cases} \underbrace{c_{p+} \dot{z} + k_{p+} z + m_{D+} \ddot{z} + \text{función}_{PAS+}}_{\text{fuerza pasiva}} + \underbrace{Mg_{SA+} [\text{función}_{SA+}]}_{\text{fuerza semi-activa}} & \dot{z} > 0 \\ \underbrace{c_{p-} \dot{z} + k_{p-} z + m_{D-} \ddot{z} + \text{función}_{PAS-}}_{\text{fuerza pasiva}} + \underbrace{Mg_{SA-} [\text{función}_{SA-}]}_{\text{fuerza semi-activa}} & \dot{z} \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

donde los signos en los subíndices, indican si son velocidades positivas (+) o negativas (-).

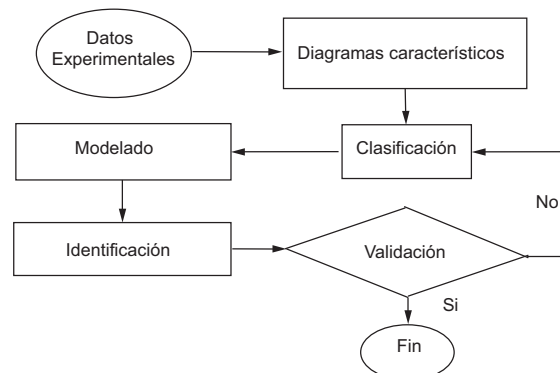


Figura 10: Metodología.

La metodología que proponemos se resume en la Fig. 10. A partir de los datos experimentales se construyen los diagramas característicos. Se clasifican los diagramas de acuerdo a los patrones identificados: {Tipo-0,..., Tipo-6}. Se propone una estructura genérica basada en las Tablas 7 y 8.

La identificación del modelo utiliza el algoritmo *Trust Region Reflective Optimization*, Coleman y Li (1996). Este algoritmo es utilizado en el método de optimización mínimos cuadrados no lineales con la función objetivo suma de los errores cuadrados y espacio solución acotado de parámetros a identificar. Las no-linealidades principales que relacionan los datos de entrada con los datos de salida son la saturación y la histéresis. Cuando los cálculos obtenidos de los datos para la identificación resulten en derivadas indefinidas (datos con demasiado ruido o discontinuidades impredecibles), es recomendado usar métodos de búsqueda directa (*Direct Search Methods*), Wright (1995). Estos métodos pueden ser útiles cuando datos experimentales de diferentes pruebas son utilizados como una sola secuencia de datos en serie para la identificación, puesto que serán formadas discontinuidades al final de cada conjunto de datos de pruebas diferentes al ser unidos consecutivamente.

Para validar los resultados proponemos el índice *ESR*, (*Error-to-Signal Ratio*) que es el cociente de la varianza del error de estimación y la varianza de la fuerza experimental, Savaresi et al. (2005b). Utilizamos datos diferentes a los datos de identificación. Un  $ESR \sim 0$  indica que el modelo es perfecto; mientras que un  $ESR \sim 1$ , indica un modelo trivial que estima un valor promedio. Si el resultado no es satisfactorio sugerimos re-clasificar con los patrones {Tipo-0,..., Tipo-6}.

#### 4. Caso de Estudio

Validamos la metodología con 4 amortiguadores comerciales de diferentes tecnologías. El amortiguador-1 *pasivo* tiene un rango de desplazamiento de 3 cm. El amortiguador-2 *MR continuo* con un rango de corriente eléctrica  $I \in [0 - 2,5]$  A y rango de desplazamiento de 3 cm. El amortiguador-3 *MR On/Off* con valores de activación  $I \in [0, 2,2]$  A y rango de desplazamiento

de 5 cm. El amortiguador-4 *EH continuo* tiene un rango de corriente eléctrica  $I \in [0 - 1,8]$  A, y rango de desplazamiento de 3 cm.

Consideramos una prueba estándar para el *Diseño de Experimentos*. El desplazamiento fue una senoidal con frecuencia y amplitud constantes, la manipulación fue constante. Los experimentos se realizaron para varios pares de amplitud y frecuencia. Las amplitudes corresponden con la frecuencia de acuerdo al espectro de operación de un amortiguador en una suspensión automotriz, Boggs (2009), cada frecuencia duró 5 periodos, Savaresi et al. (2003). Al terminar el 5º periodo, se incrementó la frecuencia y se repitió la secuencia. Se hicieron al menos 3 replicas. Por cuestión de espacio, solo se detallará el procedimiento para el amortiguador-2 *MR continuo*.

El amortiguador-2 *MR continuo* es simétrico en la magnitud de la fuerza, Figs. 11(D,H,I). Se observa un diagrama *Tipo-4*, en compresión y extensión, aunque la rigidez dinámica afecta más en compresión, ver fuerza negativa. Consideramos simetría para obtener un modelo más simple. Los diagramas *P* para extensión y compresión se clasifican *Tipo-1*, para  $\omega B$ , Figs. 11(A,B,C), *Tipo-3*, para  $\omega M$ , Figs. 11(E-Q), y *Tipo-6*, para  $\omega A$ , Figs. 11(I-K). Aplicando la regla de modelado, Tabla 7, el modelo propuesto para el termino *P* es un modelo simétrico *Simple Inercial* de acuerdo a los *Tipos: 1, 2 y 6*. Los diagramas *SA* son simétricos y las zonas de extensión y compresión son muy similares en el comportamiento dinámico, Figs. 11(M,N,O), 11(Q,R,S), 11(U,V,W), así como en la ganancia de fuerza ante la manipulación, Figs. 11(P,T,X). Los clasificamos como *Tipo-0*, para  $\omega B$ , Figs. 11(M-O), *Tipo-4*, para  $\omega M$ , Figs. 11(Q,R,S), y *Tipo-5*, para  $\omega A$ , Figs. 11(U,V,W). Con la Tabla 8, propusimos un modelo *Completo* con influencia del desplazamiento.

En la Tabla 9 mostramos las combinaciones de los tipos de diagrama en cada frecuencia y los terminos *P* y *SA* propuestos, basado en las Tablas 7 y 8. Definidos los modelos identificamos los parámetros y el índice *ESR*.

Tabla 9: Resumen de modelos para cada amortiguador.

Componente	Modelo <i>P</i>		Modelo <i>SA</i>	
	Regla	Modelo	Regla	Modelo
1-Pasivo	1-3-3	Simple rígido	-	-
2-MR (Continuo)	1-2-6	Simple inercial	0-4-5	Completo
3-MR (on/off)	1-3-3	Simple rígido	1-5-5	Completo
4-EH	0-2-5	Completo	4-5-5	Completo

El amortiguador-2 *MR continuo* es bien representado por todos los modelos. El modelo propuesto *Simple Inercial*, es ligeramente mejor. Cuando se compara con el modelo *Completo*, este último mejora la precisión. En el comportamiento *SA*, la inclusión del efecto de la corriente eléctrica, la velocidad y el desplazamiento en la precedencia es clave para incrementar la precisión, Tabla 10.

Adicional al análisis cuantitativo se puede utilizar un análisis cualitativo guiado por los diagramas Voronoi, Voronoi (1908), que muestran la densidad de puntos de dos variables en un plano. El plano es dividido por una malla, y la densidad de cada celda de la malla es calculada. El color de la celda representa el nivel de densidad. Mientras más uniforme sea el color y la forma del diagrama característico, el modelo evaluado es mejor.

Tabla 10: Indices *ESR*.

Modelo	Amortiguador				
	<i>P</i>	<i>SA</i>	<i>MR Continuo</i>	<i>MR on/off</i>	<i>EH</i>
Simple	Completo		0.0249	0.0417	0.059
Simple Inercial	Completo		<b>0.0247</b>	0.0396	0.0567
Simple Rígido	Completo		0.0249	<b>0.0399</b>	0.0505
Completo	Simple		0.0253	0.0397	<b>0.0494</b>
Completo	Completo		0.0167	0.1048	0.0463

Todas las señales en los diagramas fueron normalizadas usando el percentil de 99 % para obtener un mallado uniforme y se construyeron los diagramas Voronoi *FD*, *FV* y *FI*.

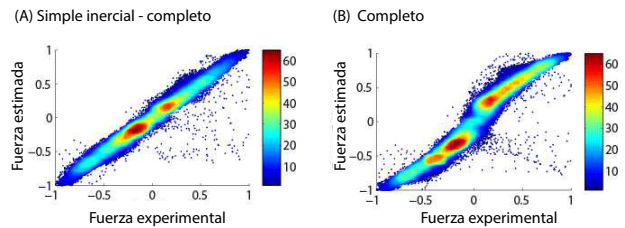


Figura 12: Fuerza simulada vs fuerza experimental (normalizadas).

En la Fig. 12 mostramos un diagrama Voronoi de la fuerza simulada normalizada (eje vertical) versus la fuerza experimental normalizada (eje horizontal). En este diagrama se esperaría una línea recta para un modelo perfecto. Cualitativamente, el modelo propuesto representa mejor la fuerza que el modelo completo, ya que la Fig. 12A es una línea mientras la Fig. 12B tiene algunas curvas.

Los diagramas característicos *FV*, *FD* y *FI*, Figs. 13, muestran que las formas de los diagramas simulados son similares a los diagramas construidos con datos experimentales, al igual que la concentración de datos. Obtuvimos resultados numéricos y gráficos similares con los otros 3 amortiguadores comerciales para validar la metodología propuesta.

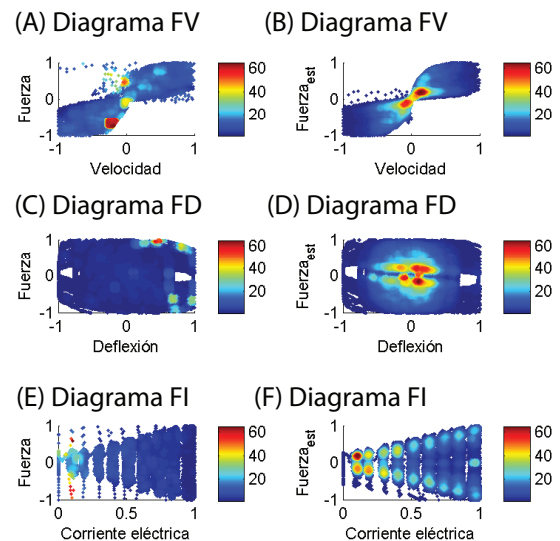


Figura 13: Comparación los datos experimentales (A,C,E) y simulados (B,D,F).

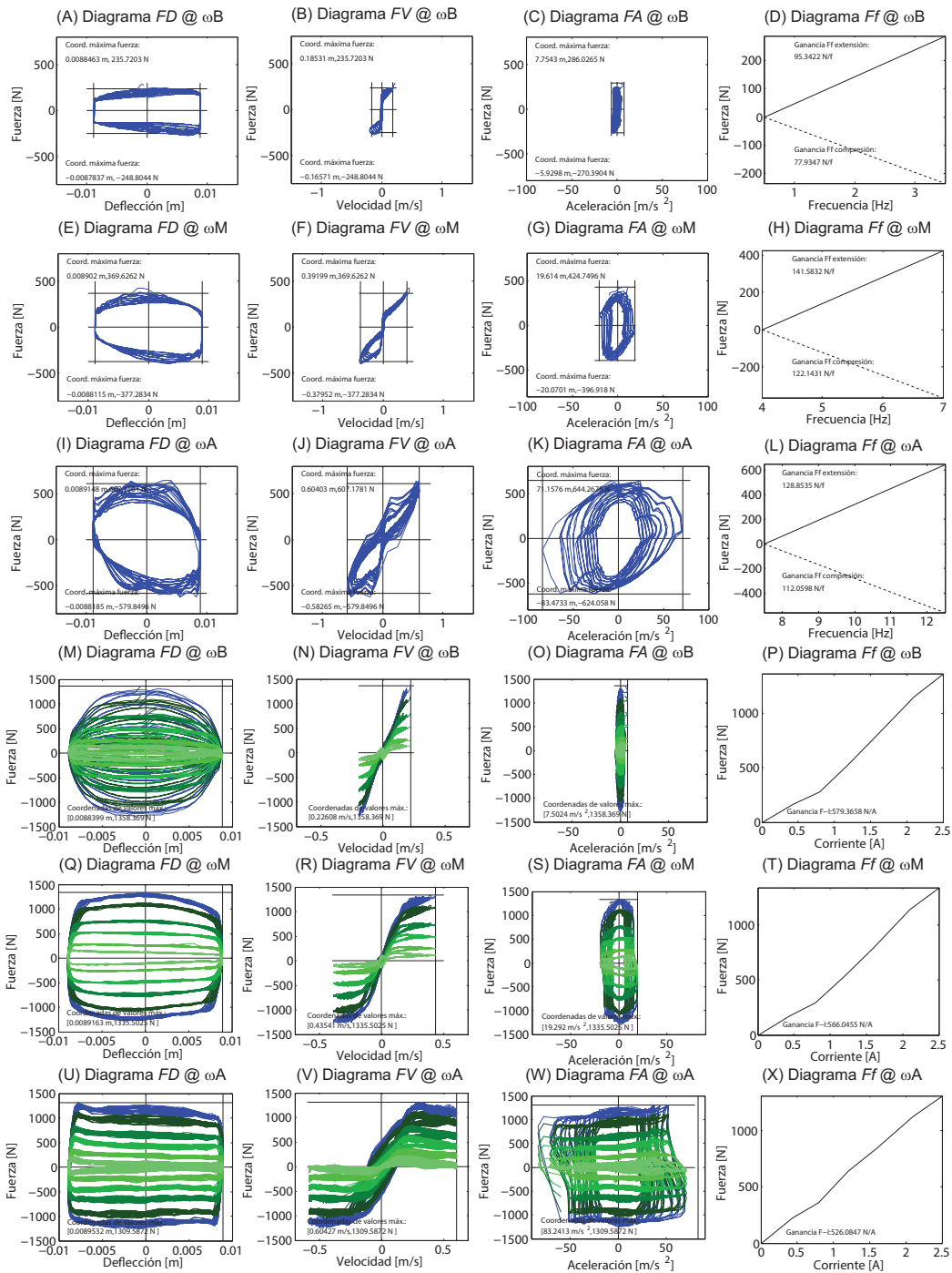


Figura 11: Diagramas característicos para un amortiguador SA MR Continuo. En los primeros tres renglones ( $\omega B$ ,  $\omega M$  y  $\omega A$ ), cada renglón muestra cuatro diagramas del comportamiento pasivo:  $FD$ ,  $FV$ ,  $FA$  y  $Ff$ . El diagrama  $Ff$  representa la ganancia de fuerza en un rango de frecuencia. Son tres renglones, donde cada renglón representa los anchos de banda de interés previamente definidos. En los renglones 4–6, correspondientes también a los anchos de banda de frecuencia, se muestran los diagramas del amortiguador SA. El diagrama  $Ff$  muestra la ganancia de fuerza y pendiente que se obtiene debido a la variable exógena en ese ancho de banda.



## 5. Conclusión

Propusimos una metodología sencilla para el modelado de amortiguadores pasivos y semi-activos a partir de pruebas experimentales estándar. Usando datos experimentales se construyen diagramas característicos que guían al diseñador en la elaboración de la estructura del modelo, a partir de una ecuación genérica que introduce una estructura matemática de cómputo simplificado. Validamos experimentalmente la propuesta con cuatro amortiguadores comerciales de características muy diferentes. Obtuvimos resultados con errores menores al 5 %.

Como trabajo futuro, automatizaremos el proceso de clasificación de los diagramas característicos a los patrones establecidos y validaremos con otras tecnologías comerciales de amortiguadores.

## English Summary

### Modeling of Dampers guided by their Characteristic Diagrams

**Abstract** A methodology for modeling guided by its characteristic damping diagrams is proposed. From experimental data generated by standard tests the damper characteristic diagrams are constructed, which considers the force versus displacement, velocity and acceleration for the frequencies of interest. These characteristic diagrams can be classified into seven patterns, which serve as a guide to build the same mathematical model that can be identified with algorithms conventional. The methodology was validated with four different technologies of commercial dampers. The precision of the results presented errors less than 5 %.

**Keywords:** semi-active damper passive damper modeling methodology simulation

## Agradecimientos

Agradecemos el apoyo del *Tecnológico de Monterrey* vía la *Catedra de Autotrónica* y al *CONACyT* vía los proyectos *PCP 05/13* y *Bilateral México-España # 142183*.

## 6. Referencias

- Basso, R., 1998. Experimental Characterization of Damping Force in Shock Absorbers with Constant Velocity Excitation. *Vehicle System Dynamics* 30, 431–442.
- Boggs, C. M., 2009. The Use of Simulation to Expedite Experimental Investigations of the Effect of High-Performance Shock Absorbers. Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Calvo, J. A., Lopez-Boada, B., Roman, J. L. S., Gauchia, A., 2009. Influence of a Shock Absorber Model on Vehicle Dynamic Simulation. *Proc. IMechE Part D: J. Automobile Eng.* 223, 189–202.
- Carrera-Akutain, X., nolas, J. V., Savall, J., Biera, J., 2006. A Parametric Damper Model Validated on a Track. *Int J Heavy Vehicle Syst* 13 (3), 145–163.
- Çesmeci, S., Engin, T., 2010. Modeling and Testing of a Field-Controllable Magneto-Rheological Fluid Damper. *Int J of Mechanical Sciences* 52 (8), 1036–1046.
- Choi, S.-B., Lee, S.-K., Park, Y.-P., 2001. A Hysteresis Model for Field-Dependent Damping Force of a MagnetoRheological Damper. *J of Sound and Vibration* 245 (2), 375–383.
- Codeca, F., S.M.Savaresi, Spelta, C., Montiglio, M., Leluzzi, M., 2008. Identification of An Electro-Hydraulic Controllable Shock Absorber Using Black-Block Non-Linear Models. In: *17<sup>th</sup> IEEE Int Conf on Control Applications Part of IEEE Multi-conf on Syst and Control*, USA, pp. 462–467.
- Coleman, T. F., Li, Y., 1996. An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. *SIAM J on Optimization* 6, 418–445.
- Dixon, J. C., 2008. *The Shock Absorber Handbook*. Wiley-PEPublishing.
- Duym, S., 1997. An Alternative Force State Map for Shock Absorbers. *IMEchE Proc Instn Mech Engrs Part D* 211, 175–179.
- Duym, S., 2000. Simulation Tools, Modelling and Identification, for an Automotive Shock Absorber in the Context of Vehicle Dynamics. *Vehicle Systems Dynamics* 33, 261–285.
- Guo, S., Yang, S., Pan, C., 2006. Dynamical Modeling of Magneto-rheological Damper Behaviors. *Int. Mater. Sys. and Struct.* 17, 3–14.
- Heo, S. J., Park, K., Son, S. H., 2003. Modelling of Continuously Variable Damper for Design of Semi-Active Suspension Systems. *Int J of Vehicle Design* 1, 41–57.
- Hong, K. S., Sohn, H. C., Hedrick, J. K., 2002. Modified Skyhook Control of Semi-Active Suspensions: A New Model, Gain Scheduling, and Hardware-in-the-Loop Tuning. *J. Dyn. Sys., Meas., Control* 124 (1), 158–167.
- Joarder, M. N., 2003. Influence of Nonlinear Asymmetric Suspension Properties on the Ride Characteristics of Road Vehicle. Master's thesis, Concordia University, Canada.
- Kwok, N. M., Ha, Q. P., Nguyen, T. H., Li, J., Samali, B., 2006. A Novel Hysteretic Model for Magneto-Rheological Fluid Dampers and Parameter Identification using Particle Swarm Optimization. *Sensors and Actuators A: Physical* 132, 441–451.
- Ma, X. Q., Rakheja, S., Su, C. Y., 2007. Development and Relative Assessments of Models for Characterizing the Current Dependent Hysteresis Properties of MagnetoRheological Fluid Dampers. *J of Intelligent Material Systems and Structures* 24 (10), 487–502.
- Rakheja, S., Sankar, S., 1985. Vibration and Shock Isolation Performance of a Semi-Active On-Off Damper. *J of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* 107, 384–403.
- Savaresi, S., Bittanti, S., Montiglio, M., 2005a. Identification of Semi-Physical and Black-Box Non-Linear Models: the Case of MR-Dampers for Vehicles Control. *Automatica* 41 (1), 113–127.
- Savaresi, S., Bittanti, S., Montiglio, M., 2005b. Identification of Semi-Physical and Black-Box Non-Linear Models: the Case of MR-Dampers for Vehicles Control. *Automatica*, 41 (1), 113–127.
- Savaresi, S., Silani, E., Bittanti, S., Porciani, N., 2003. On Performance Evaluation Methods and Control Strategies for Semi-Active Suspension Systems. In: *The 42<sup>nd</sup> IEEE Conf on Decision and Control*. USA, pp. 2264 – 2269.
- Savaresi, S., Spelta, C., July 2007. Mixed Sky-Hook and ADD: Approaching the Filtering Limits of a Semi-Active Suspension. *J. Dyn. Sys., Meas., Control* 129 (4), 382–392.
- Sims, N. D., Holmes, N. J., Stanway, R., 2004. A Unified Modeling and Model Updating Procedure for ElectroRheological and MagnetoRheological Vibration Dampers. *Smart Mater Structs* 13, 100–121.
- Voronoi, G., 1908. Nouvelles Applications des Parametres Continus a la Theorie des formes Quadratiques. *J für die Reine und Angewandte Mathematik* 133, 97–178.
- Wang, L. X., Kamath, H., 2006. Modelling Hysteretic Behaviour in MR Fluids and Dampers using Phase-Transition Theory. *Smart Mater. Struct.* 15, 1725–1733.
- Warner, B., 1996. An Analytical and Experimental Investigation of High Performance Suspension Dampers. Ph.D. thesis, Concordia University, Canada.
- Wright, M. H., 1995. Direct Search Methods: Once Scorned, Now Respectable. In: *Numerical Analysis 1995: Proceedings of the 1995 Dundee Biennial Conference in Numerical Analysis*.
- Yonaba, H., Ancil, F., Fortin, V., 2010. Comparing Sigmoid Transfer Functions for Neural Network Multistep Ahead Streamflow Forecasting. *J of Hydrologic Eng* 15, 275–283.

Tabla .11: Nomenclatura.

Variable	Descripción	Unidades
$\omega$	Frecuencia	$rads/s$
$\alpha$	Amplitud	mm
$M$	Manipulación (variable exógena)	-
$k_a, k_b$	Pendiente de rigidez alto y bajo	N/m
$k_{SA}$	Pendiente de rigidez en zona de precedencia para $F_{SA M}$	N/m
$z$	Desplazamiento	m
$\dot{z}$	Velocidad	m/s
$\ddot{z}$	Aceleración	$m^2/s$
$c_a, c_b$	Pendiente de amortiguamiento bajo y alto	Ns/m
$c_{SA}$	Pendiente de amortiguamiento en zona de precedencia para $F_{SA M}$	Ns/m
$m_d$	Masa del cuerpo del amortiguador	kg
$m_{SA}$	Masa virtual del amortiguador cuando $M > 0$	kg
$F_{Kwok}$	Fuerza no lineal de modelo Kwok	N
$r_{pre}$	Coefficiente en la zona de precedencia relacionado con el amortiguamiento	s/m
$h_{pre}$	Coefficiente en la zona de precedencia relacionado con la histéresis	1/m
$F_{Guo}$	Fuerza no lineal de modelo Guo	N
$F_{Çes}$	Fuerza no lineal de modelo Çesmeçi	N
$F_{D M}, F_D$	Fuerza de amortiguamiento	N
$F_P, F_{SA M}$	Componente pasivo y semi-activo de $F_{D M}$	N
$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$	Rectas en planos característicos	-
$\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$	Puntos en planos característicos	-
$k_p$	Coefficiente de rigidez	N/m
$c_p$	Coefficiente de amortiguamiento	Ns/m
$c_{pre}$	Coefficiente de amortiguamiento en zona de precedencia	Ns/m
$c_{pos}$	Coefficiente de amortiguamiento en zona de postcedencia	Ns/m
$f_0$	Fuerza constante de amortiguamiento	N
$\tau$	Constante de tiempo de respuesta de $F_{D M}$ ante cambios de manipulación	s
$\omega_B, \omega_M, \omega_A$	Ancho de banda de frecuencia baja, media y alta	hz
$v_1$	Umbral de velocidad para cambio de zona de pre a postcedencia para $F_P$	m/s
$v_2$	Umbral de velocidad para cambio de zona de pre a postcedencia para $F_{SA M}$	m/s
$g_{SA}$	Pendiente de fuerza semi-activa debida a la manipulación aplicada, $M$	N/(Unidades manipulación)
$\theta$	Variable auxiliar	
$coeficiente_{subíndice+}$	Coefficiente con respecto a $\dot{z} > 0$	-
$coeficiente_{subíndice-}$	Coefficiente con respecto a $\dot{z} < 0$	-
$F_s, f_s$	Fuerza sigmoidal de amortiguamiento en $F_P$	N
$f_{h,z}$	Fuerza sigmoidal de amortiguamiento con histéresis debido a $z$ en $F_P$	N
$f_{h,\dot{z}}$	Fuerza sigmoidal de amortiguamiento con histéresis debido a $\dot{z}$ en $F_P$	N
$f_{pre-c,z,M}$	Fuerza de amortiguamiento en zona de precedencia dependiente de $z$ para $F_{SA}$	N
$f_{pre-c,\dot{z},M}$	Fuerza de amortiguamiento en zona de precedencia dependiente de $\dot{z}$ para $F_{SA}$	N
$f_{c,s}$	Magnitud de fuerza sigmoidal de amortiguamiento	N
$f_{h1}$	Magnitud de fuerza de amortiguamiento para $f_{h,z}$	N
$f_{h2}$	Magnitud de fuerza sigmoidal de amortiguamiento para $f_{h,\dot{z}}$	N
$r_s$	Coefficiente de amortiguamiento sigmoidal para $F_P$	s/m
$h_s$	Coefficiente de amortiguamiento sigmoidal con histéresis para $F_P$	1/m
$r_z$	Coefficiente de amortiguamiento en zona de precedencia debido a $z$ para $F_P$	s/m
$h_z$	Coefficiente de amortiguamiento en zona de precedencia con histéresis debido a $z$ para $F_P$	1/m
$r_{\dot{z}}$	Coefficiente de amortiguamiento en zona de precedencia debido a $\dot{z}$ para $F_P$	s/m
$h_{\dot{z}}$	Coefficiente de amortiguamiento en zona de precedencia con histéresis debido a $\dot{z}$ para $F_P$	1/m
$r_{\dot{z},M}$	Coefficiente de amortiguamiento sigmoidal debido a $\dot{z}$ para $F_{SA}$	s/m
$r_{z,M}$	Coefficiente de amortiguamiento en zona de precedencia debido a $z$ para $F_{SA}$	s/m