

Control de Robots Móviles con Incertidumbres Dinámicas usando Redes de Base Radial

Francisco G. Rossomando* Carlos Soria** Ricardo Carelli**

**Subsecretaría de Ciencia y Técnica, Ministerio de la Producción y Desarrollo Económico, Gobierno de San Juan, Centro Cívico – Av. España 50 (S) – 5° Piso CP J5400ARL San Juan, Argentina*

(e-mail: frossomando@sanjuan.gov.ar)

***Instituto de Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Av. Libertador 1109 Oeste, CP J5400ARL, San Juan, Argentina*

(e-mail: {csoria; rcarelli}@inaut.unsj.edu.ar)

Resumen: En este trabajo se presenta un control de seguimiento de trayectorias de robots móviles. La estructura de control propuesta combina una linealización por realimentación basada en el modelo cinemático nominal, y una red neuronal directa para el control dinámico adaptable. La dinámica del robot es aprendida por una red neuronal basada en funciones de base radial (RN-FBR) en un lazo de realimentación adaptable, ajustando el peso y las funciones de base radial. Se muestra un análisis de estabilidad del sistema de neuro-control adaptable. Se comprueba que los errores de control están limitados en función del error de aproximación de la RN-FBR. El funcionamiento del controlador también se verifica experimentalmente. Copyright © 2010 CEA.

Palabras Clave: robot móvil, control no lineal, redes neuronales, control adaptable, funciones de base radial.

1. INTRODUCCIÓN

El control de trayectorias en tiempo real de un robot móvil es un tema de relevancia en el campo de la robótica. Sin embargo, debido al deslizamiento, perturbaciones, incertidumbres, errores de sensado, etc., se producen errores entre las posiciones deseadas y reales del robot. Es por ello que el control eficiente de un robot móvil para realizar el seguimiento preciso de una trayectoria deseada es aún un tema activo de investigación en robótica.

Los trabajos publicados sobre el diseño de controladores para el seguimiento de trayectorias se basan en general en la cinemática de los robots móviles, como los que se presentan en García y Tornero (2008) y Kühne *et al.* (2005). Sin embargo, para llevar a cabo tareas que requieren movimientos de alta velocidad o transporte de cargas pesadas, es importante además tener en cuenta la dinámica del robot. En este caso, las incertidumbres o cambios en la dinámica no deberían perjudicar el desempeño del controlador. A modo de ejemplo, en el caso de transporte de carga, las características dinámicas como la masa, centro de masa y la inercia se modifican con la carga transportada. Para mantener un buen desempeño, el controlador debe ser capaz de adaptarse a este tipo de cambios. En Liu *et al.* (2004) y Dong y Guo (2005) se presentan controladores de seguimiento de trayectoria que compensan la dinámica del robot y tienen en cuenta sus incertidumbres. El desempeño de estos controladores se muestra mediante simulaciones. Otros trabajos similares son desarrollados por Liyong y Wei (2007) y Chaitanya y Sarkar (2007). Das y Kar (2006) presentan un controlador de lógica difusa adaptable donde la incertidumbre del sistema, que incluye variación de parámetros del robot móvil y no linealidades

desconocidas, se estiman por un sistema de lógica difusa cuyos parámetros se sintonizan en línea. Da y Song (2003) presentan el diseño de un controlador adaptable directo utilizando lógica difusa y redes neuronales. En este trabajo se usa la selección supervisada de centros, y se aplica a los sistemas de múltiple entrada y una salida (MISO) sin referencia a su uso en robots móviles. Los resultados se basan únicamente en simulaciones.

Bugeja y Fabri (2007) presentan el uso de una RN-FBR para aproximación dinámica de robots móviles, en la que los centroides permanecen fijos y los pesos se estiman estocásticamente en tiempo real. En este trabajo no se presenta análisis de estabilidad del sistema de control y los autores muestran solo resultados de simulación. Kim *et al.* (2000) han propuesto un controlador adaptable robusto para un robot móvil que se compone de dos partes. La primera se basa en la cinemática del robot y se encarga de generar las referencias para la segunda parte, que compensa la dinámica del modelo. Sin embargo, los parámetros adaptados no son los parámetros reales del robot, y no se presentan resultados experimentales. Además, las acciones de control se dan en términos de pares, mientras que los robots comerciales usualmente aceptan comandos de velocidad.

De la Cruz y Carelli, (2006) presentan una parametrización lineal de un robot móvil unicycle y el diseño de un controlador de seguimiento de trayectoria que se basa en el modelo conocido completo del robot. Una de las ventajas de este controlador es que sus parámetros están directamente relacionados con los parámetros físicos del robot. Sin embargo, si los parámetros no se identifican correctamente o cambian con el tiempo debido, por ejemplo, a una variación de la carga, el desempeño del

controlador se verá afectado. En Martins et al. (2008) se presenta un controlador de trayectorias adaptable basado en el modelo de (De la Cruz y Carelli, 2006), con prueba de estabilidad basada en Lyapunov.

En este trabajo, se desarrolla el diseño de un controlador de seguimiento de trayectoria adaptable basado en un controlador neuronal a los efectos de compensar la dinámica del robot. El sistema de control está diseñado en dos partes: una incluye un controlador de la cinemática y otra un controlador de la dinámica. Se supone que la principal fuente de incertidumbre se localiza en el modelo dinámico del robot. El neuro-controlador está diseñado sobre la base de una RN-FBR, y se utiliza el método de Lyapunov para obtener la actualización de las leyes de ajuste de los pesos de conexión y las funciones de base radial de la RN-FBR.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta el modelo de un robot tipo uniclo, sobre el cual se desarrolla el diseño del controlador. En la Sección 3 se desarrolla el diseño del controlador cinemático y en la Sección 4 el correspondiente al controlador dinámico, incluyendo los análisis de estabilidad y de errores de control. La Sección 5 contiene algunos resultados experimentales que muestran el desempeño del controlador adaptable y además se analizan los errores de experimentación para diferentes propuestas de control. Por último, la sección 6 contiene las conclusiones del trabajo.

2. MODELO DEL ROBOT

En este trabajo se consideran robots móviles con estructura cinemática denominada de tipo uniclo. Este tipo de robots posee dos ruedas motrices independientes y otra rueda libre que no influye en la cinemática del vehículo y solo sirve para equilibrar la plataforma móvil. Estos robots presentan una restricción del tipo holónoma que limita la dirección del movimiento (Canudas de Wit et al., 1997). En esta sección se revisa el modelo del robot móvil tipo uniclo cuya representación esquemática se muestra en la Figura 1, con indicación de los parámetros y variables de interés. Las variables v y ω son las velocidades lineal y angular desarrolladas por el robot, G es el centro de masa del robot, c es la posición de la rueda libre, h es el punto de interés con coordenadas r_x , r_y en el plano XY, ψ es la orientación del robot, a es la distancia entre el punto de interés y el punto central del eje virtual vinculado a las ruedas de tracción. La representación matemática del modelo completo (De la Cruz y Carelli, 2006), está dada por:

Modelo Cinemático

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{rx} \\ \delta_{ry} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Modelo Dinámico

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_3}{\partial_1} \omega^2 - \frac{\partial_4}{\partial_1} v \\ -\frac{\partial_5}{\partial_2} v \omega - \frac{\partial_6}{\partial_2} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\partial_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\partial_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^d_{ref} \\ \omega^d_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_v \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \quad (2)$$

El vector de parámetros identificados y el vector de parámetros de incertidumbres asociados al robot móvil son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \vartheta &= [\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3 \ \vartheta_4 \ \vartheta_5 \ \vartheta_6]^T \\ \delta &= [\delta_{rx} \ \delta_{ry} \ 0 \ \delta_v \ \delta_\omega]^T \end{aligned} \quad (3)$$

El vector de parámetros está definido en el Apéndice. Los elementos del vector de incertidumbres δ_{rx} y δ_{ry} son funciones de la velocidad de deslizamiento y de la orientación del robot, δ_v y δ_ω son funciones de los parámetros físicos como la masa, la inercia, diámetros de las ruedas y parámetros de los servos, fuerzas aplicadas sobre las ruedas, y otros factores son considerados como perturbaciones.

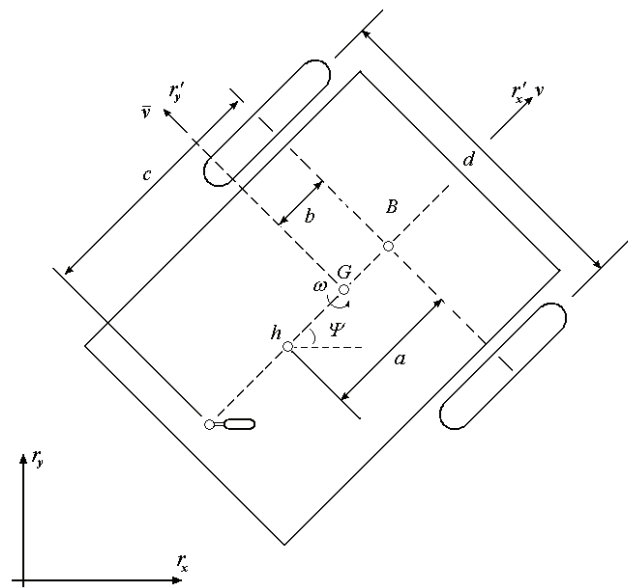


Figura 1: Parámetros del robot móvil tipo uniclo.

3. CONTROLADOR CINEMATICO

Para el diseño del sistema de control, se consideran dos controladores: uno cinemático y otro dinámico. En esta sección se describe el diseño del controlador de cinemática inversa basado en el modelo cinemático del robot. El controlador propuesto está dado por:

$$\begin{bmatrix} v^c_{ref} \\ \omega^c_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_{xd} + l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{r}_x\right) \\ \dot{r}_{yd} + l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{r}_y\right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Donde $\dot{r}_{xd}(t)$, $\dot{r}_{yd}(t)$ son las velocidades deseadas, \tilde{r}_x , \tilde{r}_y son los errores de trayectoria, las funciones de tangente hiperbólica $\tanh(\cdot)$ se incluyen para evitar la saturación de las velocidades deseadas, l_x , l_y , k_x , k_y son parámetros positivos de diseño.

Sustituyendo (4) en (1) bajo el supuesto de seguimiento perfecto de velocidad de seguimiento $v_{ref}^c(t) \equiv v(t)$, $\omega_{ref}^c(t) \equiv \omega(t)$, la ecuaci3n de lazo cerrado resulta,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}}_x \\ \dot{\tilde{r}}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{r}_x\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{r}_y\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Definiendo el vector de error de salida $\tilde{\mathbf{h}} = [\tilde{r}_x \quad \tilde{r}_y]^T$, la ecuaci3n (5) puede ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} = - \begin{bmatrix} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{r}_x\right) & 0 \\ 0 & l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{r}_y\right) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}} \quad (6)$$

Escogiendo una funci3n candidata de Lyapunov como $V = \tilde{\mathbf{h}}^T(t) \tilde{\mathbf{h}}(t)$ se puede concluir que $\tilde{\mathbf{h}}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En la Secci3n 4, se completa el an3lisis abandonando la suposici3n de seguimiento perfecto de velocidad.

4. CONTROLADOR DINAMICO

4.1 Formulaci3n del Problema.

El controlador dinámico tiene por objeto, a partir de las referencias de velocidad generadas por el controlador cinemático, generar comandos de velocidad para el robot que compensen los efectos dinámicos del mismo y logren el comportamiento segun una dinámica de referencia. En este trabajo se utiliza una red neuronal de base radial (RN-FBR), la cual debe ser entrenada en línea. Por lo general, el procedimiento para el entrenamiento de redes FBR se divide en dos fases: el entrenamiento para el ajuste de los centros de funciones de base radial en la capa oculta, seguido por el entrenamiento de los pesos de conexiones entre la capa de salida y la capa oculta. Sin embargo, en las aplicaciones de control encontradas en la bibliografía, el entrenamiento en línea se refiere sólo a los pesos de conexi3n entre la capa oculta y la capa de salida, y los centros se ajustan fuera de línea (S. Haykin, 1999). En este trabajo se propone el ajuste en línea tanto de los pesos de conexi3n como de las funciones de base radial utilizando la teoría de Lyapunov para su aplicaci3n en rob3tica móvil. Esto reduce los errores de aproximaci3n de la red neuronal.

El controlador implementado como una RN, recibe las referencias de velocidades lineal y angular que genera el controlador cinemático $\mathbf{u}_c^T = [v_{ref}^c \quad \omega_{ref}^c]^T$, y produce otro par de comandos de velocidades lineal y angular para ser enviados a los servos del robot $\mathbf{u}_d^T = [v_{ref}^d \quad \omega_{ref}^d]^T$, tal como se muestra en la Figura 2.

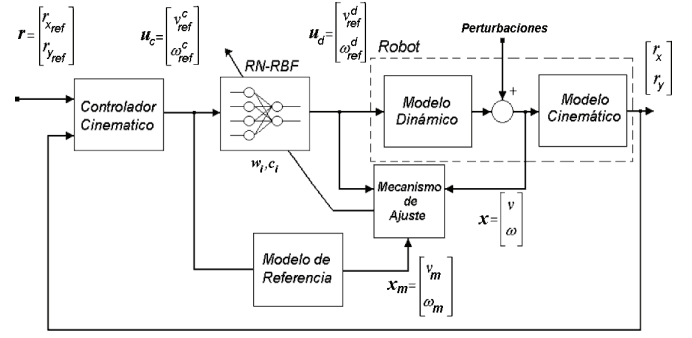


Figura 2: Estructura de Control.

El sistema dinámico del robot (2) puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}\mathbf{u}_d + \delta \quad (7)$$

donde $\mathbf{x} = [v \quad \omega]^T$, $\mathbf{u}_d = [v_{ref}^d \quad \omega_{ref}^d]^T$, $\delta = [\delta_v \quad \delta_\omega]^T$ son las variables de estado, de entrada al modelo dinámico y de incertidumbre respectivamente,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial_3}{\partial_1} \omega^2 - \frac{\partial_4}{\partial_1} v \\ -\frac{\partial_5}{\partial_2} v \omega - \frac{\partial_6}{\partial_2} \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\partial_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\partial_2} \end{bmatrix}.$$

Se considera que el vector de estado $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^{2 \times 1}$ puede medirse. Se define el siguiente error de modelo:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x} \quad (8)$$

donde \mathbf{x}_m es el vector de salida deseada para el modelo de referencia, ver Figura 2

4.2 Controlador Adaptable RBF

El objetivo de control es determinar la acci3n de control $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \xi)$ basado en una red de Funciones de Base Radial (FBR) y una ley adaptable para el ajuste del vector de parámetros \mathbf{w} de la red, tal que el error entre el estado \mathbf{x} y la referencia cinemática \mathbf{u}_c sea lo más pequeño posible. Para ejecutar este objetivo se desarrolla el método de diseño para un controlador adaptable directo basado en una red FBR. A tal fin se propone una ley de control ideal $\mathbf{u}_d^*(t)$ que es generada por una red neuronal de base radial.

Una funci3n RN-FBR está definida por:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \xi_i w_i = \mathbf{w}^T \cdot \xi(\mathbf{x}) \quad \xi_i = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) \quad (9)$$

donde \mathbf{x} es el vector de entrada a la red, φ es una funci3n no lineal denominada funci3n de base radial, w_i son los pesos de conexi3n (parámetros) entre la capa oculta y la capa de salida de la red neural, \mathbf{c}_i son centros de la funci3n de base radial, M es el número de funciones radiales. La funci3n de base radial más usada es la funci3n Gaussiana:

$$\varphi(r) = \exp\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (10)$$

Con $\mathbf{r} = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|$, \mathbf{c}_i es el centro de $\varphi(r)$, σ es una constante asociada a la función $\varphi(r)$ y representa el ancho (apertura) de la función Gaussiana (en este caso $\sigma=1$). La red FBR puede ser considerada como una red de dos capas en la cual la capa oculta ejecuta la transformación no lineal para mapear el espacio de entrada en un espacio intermedio, y la capa de salida combina las salidas de la capa oculta linealmente. Como la salida depende linealmente de los pesos, entonces el entrenamiento se transforma en un problema de optimización (S. Haykin, 1999).

Las ecuaciones diferenciales de orden elevado se pueden expresar en función de una RN-FBR. En este caso (7) resulta representada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_f^* \xi^*(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_g^* \mathbf{u}_d + \delta_N \quad (11)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_f^* \xi^*(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}\mathbf{u}_d = \mathbf{w}_g^* \mathbf{u}_d$ siendo \mathbf{w}^* y ξ^* los parámetros óptimos correspondientes a la señal de control óptima $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{w}^*, \xi^*)$ que aproxima la señal ideal de control (\mathbf{u}_d^*), y δ_N es el error de aproximación el cual está acotado por una constante δ_{Max} ,

$$\delta_{Max} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\delta_N(t)| \quad (12)$$

La señal de control ideal \mathbf{u}_d^* es la que resultaría generada con los parámetros (pesos y centros de las FBR) ideales de la dinámica del robot para que el error $\mathbf{e}(t)$ sea igual a cero.

4.3 Estabilidad y Ajuste de Pesos

A continuación se obtienen las leyes de adaptación para los pesos de conexión y para los centros de la base usando el método de estabilidad de Lyapunov. Ahora, definiendo los errores

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_f = \mathbf{w}_f^* - \mathbf{w}_f \\ \tilde{\mathbf{w}}_g = \mathbf{w}_g^* - \mathbf{w}_g \\ \tilde{\xi}(\mathbf{x}) = \xi^*(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (13)$$

La ecuación (11) puede ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_f^T \xi(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_f^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{w}}_f^T \xi(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{w}}_f^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{w}}_g^T \mathbf{u}_d + \mathbf{w}_g^T \mathbf{u}_d + \delta_N \quad (14)$$

Eligiendo un modelo de referencia lineal como:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_c \quad (15)$$

donde $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz Hurwitz y \mathbf{u}_c es el vector de entrada bi-dimensional con elementos acotados. Se define el error de modelo

Derivando el error de modelo (8) se obtiene:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x} \rightarrow \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_m - \dot{\mathbf{x}} \quad (16)$$

Reemplazando (14) y (15) en (16):

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_c - \mathbf{w}_f^T \xi(\mathbf{x}) - \mathbf{w}_f^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_f^T \xi(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_f^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_g^T \mathbf{u}_d - \mathbf{w}_g^T \mathbf{u}_d + \delta_N \quad (17)$$

Se elije la acción de control como:

$$\mathbf{u}_d = (\mathbf{w}_g^T)^{-1} [\mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_c - \mathbf{w}_f^T \xi(\mathbf{x})] \quad (18)$$

Ahora se estudia la estabilidad del sistema a fin de desarrollar una ley adaptable para ajustar los vectores de los parámetros \mathbf{w} y ξ del controlador FBR. Reemplazando $\mathbf{u}_d(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \xi)$ del sistema FBR (18) en el penúltimo término de (17), la ecuación del error puede ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} - \mathbf{w}_f^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_f^T \xi(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_f^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_g^T \mathbf{u}_d + \delta_N \quad (19)$$

El término $\tilde{\mathbf{w}}_f^T \tilde{\xi}(\mathbf{x})$ involucra el producto de dos errores y se lo incluye en δ_N . Ahora, considerando:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_v & e_\omega \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} a_v & 0 \\ 0 & a_\omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{fv} & \mathbf{w}_{f\omega} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{gv} & \mathbf{w}_{g\omega} \end{bmatrix} \quad \delta_N = \begin{bmatrix} \delta_{vm} & \delta_{\omega m} \end{bmatrix}^T$$

La ecuación del error puede ser reescrita en dos componentes

$$\begin{cases} \dot{e}_v = a_v e_v - \tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \xi(\mathbf{x}) - \mathbf{w}_{fv}^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \mathbf{u}_d + \delta_{vm} \\ \dot{e}_\omega = a_\omega e_\omega - \tilde{\mathbf{w}}_{f\omega}^T \xi(\mathbf{x}) - \mathbf{w}_{f\omega}^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}_{g\omega}^T \mathbf{u}_d + \delta_{\omega m} \end{cases} \quad (20)$$

Escogiendo las matrices \mathbf{P} y \mathbf{Q} como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_v & 0 \\ 0 & p_\omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_v & 0 \\ 0 & q_\omega \end{bmatrix}$$

se define una función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} p_v e_v^2 + \frac{1}{2} p_\omega e_\omega^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \tilde{\mathbf{w}}_{fv} + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\mathbf{w}}_{f\omega}^T \tilde{\mathbf{w}}_{f\omega} + \frac{1}{2\gamma_3} \tilde{\mathbf{w}}_{gv}^T \tilde{\mathbf{w}}_{gv} + \frac{1}{2\gamma_4} \tilde{\mathbf{w}}_{g\omega}^T \tilde{\mathbf{w}}_{g\omega} + \frac{1}{2\gamma_5} \tilde{\xi}^T \tilde{\xi} \quad (21)$$

En (21) $\gamma_{1,2,3,4,5}$ son constantes positivas y la matriz \mathbf{P} es la solución de la ecuación de Lyapunov

$$\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_m = -\mathbf{Q} \quad \mathbf{Q} > 0 \quad (22)$$

Derivando V con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_v \dot{e}_v + p_v \dot{e}_v + e_\omega \dot{e}_\omega + p_\omega \dot{e}_\omega + \\ & + \frac{1}{2\gamma_1} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{fv}^T \tilde{\mathbf{w}}_{fv} + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{fv} + \frac{1}{2\gamma_2} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{f\omega}^T \tilde{\mathbf{w}}_{f\omega} + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\mathbf{w}}_{f\omega}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{f\omega} + \\ & + \frac{1}{2\gamma_3} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{gv}^T \tilde{\mathbf{w}}_{gv} + \frac{1}{2\gamma_3} \tilde{\mathbf{w}}_{gv}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{gv} + \frac{1}{2\gamma_4} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{g\omega}^T \tilde{\mathbf{w}}_{g\omega} + \frac{1}{2\gamma_4} \tilde{\mathbf{w}}_{g\omega}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{g\omega} + \\ & + \frac{1}{2\gamma_5} \dot{\tilde{\xi}}(\mathbf{x})^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\gamma_5} \tilde{\xi}(\mathbf{x})^T \dot{\tilde{\xi}}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (23)$$

Sustituyendo (20) en (23),

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{q_v e_v^2}{2} - e_v p_v \tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \xi(\mathbf{x}) - e_v p_v \mathbf{w}_{fv}^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - e_v p_v \tilde{\mathbf{w}}_{gv}^T \mathbf{u}_d - \\ & -\frac{q_\omega e_\omega^2}{2} - e_\omega p_\omega \tilde{\mathbf{w}}_{f\omega}^T \xi(\mathbf{x}) - e_\omega p_\omega \mathbf{w}_{f\omega}^T \tilde{\xi}(\mathbf{x}) - e_\omega p_\omega \tilde{\mathbf{w}}_{g\omega}^T \mathbf{u}_d - \\ & + \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{fv}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{f\omega}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{f\omega}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{gv}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{gv}}{\gamma_3} + \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{g\omega}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{g\omega}}{\gamma_4} + \frac{\tilde{\xi}^T(\mathbf{x}) \dot{\tilde{\xi}}(\mathbf{x})}{\gamma_5} + \rho \end{aligned} \quad (24)$$

donde $\rho = -(e_v p_v \delta_{vn} + e_\omega p_\omega \delta_{\omega n})$. La ecuaci3n (24) puede reescribirse como,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\left(e_v p_v \tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \xi(\mathbf{x}) - \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{fv}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{fv}}{\gamma_1} \right) - \left(e_\omega p_\omega \tilde{\mathbf{w}}_{f\omega}^T \xi(\mathbf{x}) - \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{f\omega}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{f\omega}}{\gamma_2} \right) \\ & - \left(e_v p_v \tilde{\mathbf{w}}_{gv}^T \mathbf{u}_d - \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{gv}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{gv}}{\gamma_3} \right) - \left(e_\omega p_\omega \tilde{\mathbf{w}}_{g\omega}^T \mathbf{u}_d - \frac{\tilde{\mathbf{w}}_{g\omega}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{g\omega}}{\gamma_4} \right) \\ & - \left(e_\omega p_\omega \tilde{\xi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{w}_{f\omega}^T + e_v p_v \tilde{\xi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{w}_{fv}^T - \frac{\tilde{\xi}^T(\mathbf{x}) \dot{\tilde{\xi}}(\mathbf{x})}{\gamma_5} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$-\frac{q_v e_v^2}{2} - \frac{q_\omega e_\omega^2}{2} + \rho$$

Ahora, y a los fines de encontrar una condici3n suficiente para que $\dot{V} < 0$, los t3rminos entre par3ntesis se hacen cero. De esta condici3n y sustituyendo $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{f,g} = \dot{\mathbf{w}}_{f,g} - \dot{\mathbf{w}}_{f,g}^* = \dot{\mathbf{w}}$ y $\dot{\tilde{\xi}}(\mathbf{x}) = \dot{\xi}^*(\mathbf{x}) - \dot{\xi}(\mathbf{x}) = \dot{\xi}(\mathbf{x})$, se obtienen las leyes de adaptaci3n:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{fv} &= \gamma_1 e_v p_v \xi(\mathbf{x}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{f\omega} &= \gamma_2 e_\omega p_\omega \xi(\mathbf{x}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{g\omega} &= \gamma_3 e_\omega p_\omega \mathbf{u}_d \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{gv} &= \gamma_4 e_v p_v \mathbf{u}_d \\ \dot{\tilde{\xi}}^T(\mathbf{x}) &= \gamma_5 (e_v p_v \mathbf{w}_{fv}^T + e_\omega p_\omega \mathbf{w}_{f\omega}^T) \end{aligned} \quad (26)$$

Ahora, $\dot{V} = -\frac{q_v e_v^2}{2} - \frac{q_\omega e_\omega^2}{2} + \rho$. Para que $\dot{V} < 0$, se debe verificar que

$$\frac{q_v e_v^2}{2} + \frac{q_\omega e_\omega^2}{2} \geq -(e_v p_v \delta_{vn} + e_\omega p_\omega \delta_{\omega n}) \quad (27)$$

Una condici3n suficiente para verificar (27) es

$$\begin{cases} \|q_v e_v^2\| \geq 2 \|e_v p_v \delta_{vn}\| \\ \|q_\omega e_\omega^2\| \geq 2 \|e_\omega p_\omega \delta_{\omega n}\| \end{cases} \quad (28)$$

la cual se verifica si

$$\begin{cases} q_v |e_v| \geq 2 |p_v| |\delta_{vn}| \\ q_\omega |e_\omega| \geq 2 |p_\omega| |\delta_{\omega n}| \end{cases} \quad (29)$$

Entonces, la condici3n suficiente para $\dot{V} < 0$ se expresa como,

$$\min(|e_v|, |e_\omega|) \geq \frac{2 \max(p_v, p_\omega) \delta_{Max}}{\min(q_v, q_\omega)} \quad (30)$$

Esta condici3n implica que la norma de los errores de control est3 acotada por el valor

$$B_{\delta_c} = \frac{2 \max(p_v, p_\omega) \delta_{Max}}{\min(q_v, q_\omega)} \quad (31)$$

Ahora, abandonando la suposici3n hecha en la Secci3n 3 de seguimiento perfecto de la velocidad, (5) se reescribe como

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}}_x \\ \dot{\tilde{r}}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{r}_x\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{r}_y\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

donde el vector $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = [\varepsilon_1(t) \ \varepsilon_2(t)]^T = \mathbf{H} \mathbf{e}_c(t)$, siendo $\mathbf{e}_c(t) = \mathbf{u}_c(t) - \mathbf{x}(t)$ el error de velocidad. Reescribiendo (32),

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + L(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{H} \mathbf{e}_c(t) \quad (33)$$

Donde

$$L(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{r}_x\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{r}_y\right) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{e}_c(t) = \begin{bmatrix} \cos \psi(t) & -a \sin \psi(t) \\ \sin \psi(t) & a \cos \psi(t) \end{bmatrix} \mathbf{e}_c(t)$$

Se considera la funci3n candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0, \quad (35)$$

y su derivada temporal,

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = -\tilde{\mathbf{h}}^T L(\tilde{\mathbf{h}}) + \tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{H} \mathbf{e}_c \quad (36)$$

Una condici3n suficiente para $\dot{V} \leq 0$ puede ser expresada como

$$\tilde{\mathbf{h}}^T L(\tilde{\mathbf{h}}) > \|\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{H} \mathbf{e}_c\| \quad (37)$$

Para peque1os valores de error de control $\tilde{\mathbf{h}}$ en la zona lineal de la funci3n \tanh de saturaci3n,

$$\tilde{\mathbf{h}}^T L(\tilde{\mathbf{h}}) \approx \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2 \quad (38)$$

Entonces, la condici3n suficiente para $\dot{V} < 0$ es:

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\| > \frac{\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{e}_c\|}{\min(k_x, k_y)} \quad (39)$$

Utilizando (16) puede expresarse $\mathbf{e}_c(t) = \mathbf{u}_c(t) - \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{e}(t)$. Puede probarse que la se1al $\mathbf{e}_c(t)$ est3 acotada, pues $\mathbf{u}_c(t)$ est3 acotada por (4), $\mathbf{e}(t)$ est3 acotada por (30) y, como el modelo de referencia es un sistema lineal estable, entonces

$\|\mathbf{x}_m(t)\| \leq k \|\mathbf{u}_c(t)\|$, ahora puede reescribirse la condici3n (39) teniendo en cuenta lo antes dicho y la (30) en t3rminos del error $\mathbf{e}(t)$ de aproximaci3n de la red neuronal. Adem3s, observando

que esta condición asegura el decrecimiento del error $\tilde{\mathbf{h}}$ en el tiempo, éste error estará finalmente acotado por:

$$B_{\tilde{\mathbf{h}}} = \frac{\|\mathbf{H}\|}{\min(k_x, k_y)} \left(\|\mathbf{u}_c\| + \|\mathbf{x}_m\| + \frac{2 \max(p_v, p_\omega) \delta_{Max}}{\min(q_v, q_\omega)} \right) \quad (40)$$

Este constituye un resultado práctico que expresa una cota del error de control en términos del error de aproximación de la RN.

Para valores grandes del error de control $\tilde{\mathbf{h}}$ en la zona de saturación de la función \tanh , y considerando que este error está acotado –como puede deducirse de la (33) dado que $\mathbf{e}_c(t)$ está acotado–, entonces

$$\tilde{\mathbf{h}}^T L(\tilde{\mathbf{h}}) \geq \mathbf{K} \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2 \quad (41)$$

para una matriz diagonal y constante \mathbf{K} adecuadamente elegida. Entonces, una condición suficiente para $\dot{V} \leq 0$ puede ser ahora expresada como:

$$\mathbf{K} \|\tilde{\mathbf{h}}\| > \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{e}_c\|$$

De modo similar a (40), ahora la cota para el error $\tilde{\mathbf{h}}$ está dada por:

$$B_{\tilde{\mathbf{h}}} = \frac{\|\mathbf{H}\|}{\|\mathbf{K}\|} \left(\|\mathbf{u}_c\| + \|\mathbf{x}_m\| + \frac{2 \max(p_v, p_\omega) \delta_{Max}}{\min(q_v, q_\omega)} \right) \quad (40)$$

La cota final del error depende de la evaluación de (40) y de (42): si (42) es mayor que la zona de saturación, vale esa misma cota (42). Por el contrario, si (42) es menor que la zona de saturación, vale la (40) calculada para la zona lineal de la función \tanh .

4.4 Diseño del Controlador Directo Adaptable RBF

El diseño de un controlador RBF directo adaptable se puede resumir en los siguientes pasos.

Paso 1. Cálculo fuera de línea

- Definir el número de funciones de base radial y elegir en forma aleatoria los centros de las FBR.
- Especificar los parámetros $\mathbf{a}_{v,\omega}$ tal que todos los autovalores de la matriz \mathbf{A}_m estén en el semiplano izquierdo.
- Especificar una matriz \mathbf{Q} $n \times n$ definida positiva.
- Resolver la ecuación de Lyapunov (22) para obtener una matriz simétrica $\mathbf{P} > 0$.

Paso 2. Adaptación en línea

- Aplicar el control de realimentación (18) al robot (7).
- Usar la ley de adaptación (26) para el ajuste de los pesos de conexión como también los centros de la FBR y volver al punto anterior.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para mostrar los resultados del controlador propuesto se realizaron varios experimentos en un robot móvil Pioneer 2DX (Fig. 3), que admite comandos de velocidad lineal y angular.



Figura 3: Robot móvil Pioneer 2DX.

El controlador RBF-NN se inicia con parámetros de pesos y centros aleatorios. En el experimento, el robot móvil comienza en una posición $r_x = 0,0$ m y $r_y = 0,0$ m, cargado con un peso adicional del 50% del peso del robot, y debe seguir una trayectoria circular de referencia:

$$\begin{cases} r_x = 0.75 \sin(0.03\pi t) \\ r_y = 0.75 \cos(0.03\pi t) \end{cases} \quad (40)$$

El centro del círculo de referencia se encuentra en $r_{xc} = 0,0$ m y $r_{yc} = 0,0$ m. La trayectoria de referencia comienza en $r_x = 0,75$ m y $r_y = 0,75$ m, y sigue un círculo con radio de 0,75 m. Después de 75 segundos, la trayectoria de referencia súbitamente se conmuta a un círculo de radio de 0,375 m.

La Figura 4 muestra las acciones de control del controlador neuronal adaptable, donde se aprecia la acción por el cambio de trayectoria hacia el círculo interno. La Figura 5 muestra las trayectorias seguidas por el robot con el controlador dinámico RN-FBR, y con controlador cinemático sin compensación dinámica, además de la trayectoria de referencia. Es de destacar que la dinámica no-modelada (incertidumbres) depende de diferentes factores y afectan al robot independientemente de cuál sea la trayectoria. Puede observarse la capacidad de la RN de atenuar los efectos de estas incertidumbres cuando existen cambios bruscos en la dirección y velocidad del vehículo (salto a círculos concéntricos), además de compensar las posibles variaciones de los parámetros en la dinámica modelada.

La Figura 6 muestra los errores de distancia utilizando el controlador FBR y los correspondientes utilizando únicamente el controlador cinemático que no tiene en cuenta la dinámica del robot móvil. El elevado error inicial se debe al hecho de que la posición inicial del robot comienza en un punto alejado de la referencia de trayectoria. La diferencia de errores entre el robot con RN y con control cinemático se debe, en los primeros segundos de la trayectoria, a la falta de adaptación de los pesos y centros del controlador de dinámica con RN. En cambio en los últimos segundos de la trayectoria, una vez alcanzado el ajuste óptimo, el error de trayectoria con controlador RN-FBR resulta menor que con el controlador cinemático.

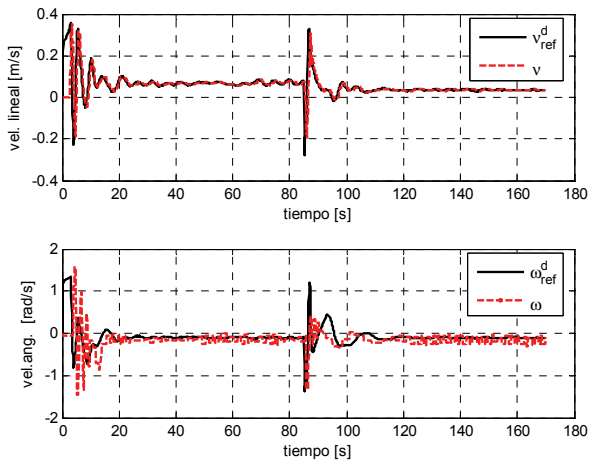


Figura 4: Acciones de control del controlador neuronal adaptable y salida de velocidades del robot.

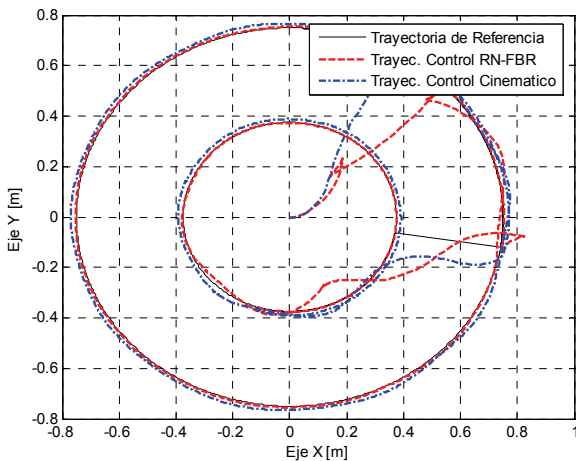


Figura 5: Referencia y trayectoria del robot con el controlador neuronal adaptable y con controlador cinem3tico.

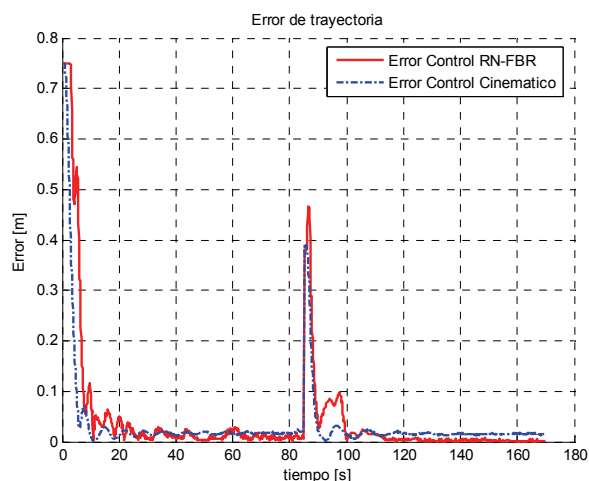


Figura 6: Evoluci3n del error de trayectoria.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un sistema de control adaptable para el seguimiento de trayectoria de robots m3viles, usando redes neuronales FBR. Se parte del supuesto de incertidumbre en el modelo de din3mica nominal del robot. Las leyes ajuste de los par3metros se obtienen del an3lisis de estabilidad de Lyapunov. El neuro-controlador propuesto y el ajuste de los pesos de conexi3n y los centros de las funciones de la FBR representan una buena soluci3n en aplicaciones de seguimiento y control de trayectorias. Se ha incluido el an3lisis de las condiciones de estabilidad y la evaluaci3n del desempe1o en funci3n de las cotas del error de aproximaci3n de la red neuronal. El sistema de control ha sido experimentado en un robot m3vil PIONEER 2DX. Los resultados muestran la aplicabilidad pr3ctica y el buen desempe1o del controlador propuesto.

REFERENCIAS

- M. K. Bugeja y S.G.Fabri, "Dual Adaptive Control for Trajectory Tracking of Mobile Robots", *IEEE ICRA, Roma, Italy, 10-14 April 2007*.
- R. Carelli y C. De La Cruz, "Dynamic Modeling and Centralized Formation Control of Mobile Robots", *32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society IECON*, Paris, 2006.
- C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin, "Theory of Robot Control", Springer-Verlag, 1997.
- V. S. K. Chaitanya y P. K. Sarkar, "A Neural Network Algorithm for the Error Optimization in the Path Tracking Control of a Mobile Robot". International Joint Conference on Neural Networks Sheraton Vancouver Wall Centre Hotel, Vancouver, BC, Canada July 16-21, 2006.
- F. P. Da y W. S. Song, Direct Adaptive control based on neural networks, *IEEE Conf. Neural Networks & Signal Processing*, Nanjing, China, 2003.
- T. Das y I. N. Kar, "Design and Implementation of an Adaptive Fuzzy Logic-Based Controller for Wheeled Mobile Robots," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 14, no. 3, May 2006.
- W. Dong y Y. Guo, "Dynamic tracking control of uncertain mobile robots," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2774-2779, 2005.
- L. Garcia y J. Tornero. Kinematic Control of Wheeled Mobile Robots. Latin American Applied Research. 38:7-16 2008.
- S. Haykin, "Neural Networks: A Comprehensive Foundation" (2nd Edition), Prentice Hall, 1999.
- M. S. Kim, J. H. Shin y J. J. Lee, "Design of a Robust Adaptive Controller for a Mobile Robot," *proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1816-1821, 2000.
- F. K3nhe, J. Gomes y W. Fetter, "Mobile Robot Trajectory Tracking Using Model Predictive Control", *II IEEE Latin-American Robotics Symposium*, S3o Luis, Brazil, 2005.
- Y. Liyong y X. Wei, "An Adaptive Tracking Method for Non-holonomic Wheeled Mobile Robots". Proceedings of the 26th Chinese Control Conference. July 26-31, 2007, Zhangjiajie, Hunan, China.
- S. Liu, H. Zhang, S. X. Yang y J. Yu, "Dynamic Control of a Mobile Robot Using an Adaptive Neurodynamics and Sliding Mode Strategy," *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, pp. 5007-5011, 2004.

F. N. Martins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli Filho, & Bastos Filho, T. F. (2008). An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking. *Control Engineering Practice*, 16, 1354- 1363.

APENDICE

Los parámetros del robot móvil Pioneer DX2 son los siguientes:

$$\vartheta_1 = \frac{\left(\frac{R_a}{k_a} (mR_l r + 2I_e) + 2rk_{DT} \right)}{(2rk_{PT})}$$

$$\vartheta_2 = \frac{\left(\frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2R_l r (I_z + mb^2)) + 2rdk_{DR} \right)}{(2rdk_{PR})}$$

$$\vartheta_3 = \frac{\left(\frac{R_a}{k_a} mbR_l \right)}{2k_{PT}}$$

$$\vartheta_4 = \left(\frac{\frac{R_a}{k_a} \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right)}{rk_{PT}} + 1 \right)$$

$$\vartheta_5 = \frac{\left(\frac{R_a}{k_a} mbR_l \right)}{dk_{PR}}$$

$$\vartheta_6 = \left(\frac{\frac{R_a}{k_a} \left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) d}{2rk_{PR}} + 1 \right)$$

Donde m es la masa del robot; r es el radio de las ruedas izquierda y derecha; k_b es igual a la constante electromotriz multiplicada por la relación de transmisión; R_a es la resistencia eléctrica; k_a es la constante de torque multiplicada por la relación de transmisión; k_{PR} , k_{PT} , y k_{DT} son constantes positivas; I_e y B_e representan el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa de la combinación rotor del motor, caja de reducción y rueda, y R_l es el radio nominal de la rueda (De la Cruz y Carelli, 2006).