

Validación Experimental de un Observador de Alta Ganancia Constante Continuo-Discreto para una Columna de Destilación Binaria

A. Aguilera-González*, A. C. Téllez-Anguiano*,
C. M. Astorga-Zaragoza*, D. Juárez-Romero** y E. Quintero-Mármol*

* Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior
Internado Palmira S/N, Col. Palmira, 62490, Cuernavaca, Mor., México
(e-mail: adri.aguilera06e@cenidet.edu.mx, adrianat@cenidet.edu.mx,
astorga@cenidet.edu.mx, eqm@cenidet.edu.mx)

** Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, CIICAp, Av.
Universidad 101, Col. Chamilpa CP 62209, Cuernavaca, Mor., México.

Resumen: En este artículo se presenta un observador de alta ganancia continuo-discreto para estimar las composiciones molares en una columna de destilación para la mezcla Etanol-Agua, empleando las mediciones de las temperaturas en los platos. Una de las principales ventajas de este observador es su ganancia constante, por lo que sintonizarlo depende únicamente de la elección de parámetros constantes que deben satisfacer algunas desigualdades algebraicas simples. El observador continuo-discreto presenta un buen seguimiento de la dinámica del proceso a pesar de usar menos datos que un observador puramente discreto. La efectividad del método propuesto para la estimación de concentraciones en una columna de destilación, así como su adecuado desempeño en comparación con la versión puramente discreta del observador, son demostrados empleando datos experimentales. Copyright © 2010 CEA.

Palabras Clave: Sistemas no lineales, columna de destilación, observador continuo-discreto.

1. INTRODUCCIÓN

En el control de columnas de destilación la estimación en línea de los estados que no son directamente medibles es un problema fundamental. Un ejemplo de estados del sistema es la composición del producto; su estimación requiere medir variables secundarias como la temperatura, lo cual ha sido propuesto por algunos autores en Quintero-Mármol *et al.* (1991); Olsen *et al.* (2002); Tronci *et al.* (2005).

Aplicar leyes de control en columnas de destilación requiere la información continua de las fracciones molares de los componentes (Han, 2006). Ésta puede medirse fuera de línea utilizando cromatógrafos de gases o detectores de índice de refracción. Sin embargo, con estas técnicas los costos son altos en relación a inversión, implementación y mantenimiento de los instrumentos.

Una solución viable consiste en diseñar observadores de estados, también conocidos como *sensores virtuales*. Para implementar los observadores a sistemas físicos es necesario contar con sus modelos matemáticos, a partir de los cuales se plantea una estructura y así obtener la información para reconstruir las variables que no pueden ser medidas directamente.

En el diseño de observadores, es posible fijar el periodo de muestreo (de las mediciones) de acuerdo a la dinámica del sistema. Un método para construir observadores consiste precisamente en discretizar el sistema de acuerdo al tiempo de muestreo en el cual se realizan dichas mediciones (Quintero-Mármol *et al.*, 1991).

Sin embargo, existen procesos en los que el periodo de muestreo de las mediciones es grande y generalmente diferente al tiempo de integración usado para las ecuaciones diferenciales del modelo dinámico; para este caso una alternativa de solución es el diseño de *Observadores Continuo-Discretos (OCD)* (Nadri *et al.*, 2004), cuya principal ventaja radica en emplear un tiempo de integración (para la etapa de predicción) diferente del tiempo de muestreo (para la etapa de corrección) del observador. Esta condición permite emplear un tiempo *relativamente amplio* durante la adquisición de las variables medibles usadas para la estimación.

La validación experimental de observadores, especialmente los continuo-discretos, implica diversos problemas entre los que se encuentran la estabilidad y la robustez. Algunas soluciones han sido presentadas en Yaz *et al.* (2007), donde se realiza el diseño de observadores continuo-discretos basados en una matriz lineal de desigualdades (LMI). En otro trabajo, Ibrir (2007) se presenta el análisis del criterio del círculo unitario para probar la estabilidad de observadores no lineales continuo-discretos.

Los observadores son ampliamente usados en diferentes áreas de control como: diagnóstico de fallas (Shields *et al.*, 2001) y control de procesos (Jana *et al.*, 2006), entre otras. Este trabajo muestra la implementación y validación experimental de un observador de alta ganancia (Hammouri *et al.*, 2002), extendido al caso continuo-discreto. Este observador estima la fracción molar líquida del componente ligero de la mezcla (Etanol-Agua) a partir de la medición de la temperatura del sistema (inyección de salida), este enfoque fue presentado en

Nadri *et al.* (2004). Este método supone un proceso sencillo de sintonización de la ganancia del observador, teniendo como propósitos la estabilidad y un error de estimación que tienda exponencialmente a cero (Deza *et al.*, 1991).

2. MODELO DE UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN BINARIA

El modelo matemático de una columna de destilación consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales obtenidas de los balances de materia y componente para cada uno de sus platos; incluye también un conjunto de ecuaciones algebraicas utilizadas para describir el equilibrio líquido-vapor de la mezcla; donde sus fases de líquido y de vapor son designadas x y y respectivamente.

El modelo propuesto tiene la estructura mostrada en la Fig. 1. En ésta se consideran las tres etapas principales de la columna de destilación (condensador, plato y hervidor).

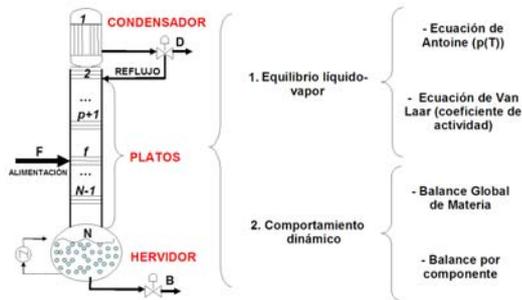


Figura 1. Estructura del modelo propuesto.

2.1 Descripción física de una columna de destilación

En general, una columna de destilación consta de N etapas, de los cuales $N-2$ son platos y los dos restantes son un condensador y un hervidor. Los platos son numerados ascendentemente del condensador al hervidor: $p = 1, \dots, N$.

Las secciones de la columna de destilación consideradas son:

- Condensador (plato $p = 1$)
- Sección de rectificación (platos: $p = 2, \dots, f - 1$)
- Plato de alimentación (plato $p = f$)
- Sección de agotamiento (platos: $p = f + 1, \dots, N - 1$)
- Hervidor (plato $p = N$).

2.2 Equilibrio líquido-vapor

Si un vapor y un líquido están en íntimo contacto por un largo periodo de tiempo se alcanza el equilibrio entre las dos fases.

Para efectos de las no idealidades de sistemas químicos a baja presión, la ecuación que representa la composición molar de vapor en función del componente ligero es:

$$y_i P_T = P_i^{sat} x_i \gamma_i \quad (1)$$

donde $i = 1$ para etanol e $i = 2$ para agua, P_T es la presión total del proceso, P_i^{sat} es la presión de saturación y γ_i es el coeficiente de actividad para cada componente. Este último es un factor de corrección altamente dependiente de la

concentración. Un método para determinar este coeficiente para cada componente es con el uso de la ecuación de Van Laar:

$$\ln \gamma_1 = A_{12} \left(\frac{A_{21} x_2}{A_{12} x_1 + A_{21} x_2} \right)^2$$

$$\ln \gamma_2 = A_{21} \left(\frac{A_{12} x_1}{A_{12} x_1 + A_{21} x_2} \right)^2 \quad (2)$$

donde A_{12} y A_{21} son parámetros constantes de interacción establecidos para mezclas binarias; el valor de estas constantes para la mezcla Etanol-Agua pueden ser encontrados en Perry (1999).

2.3 Flujos y parámetros de alimentación

En una columna de destilación existen flujos molares de líquido y vapor internos y externos que varían en cada plato (estado). Para realizar la formulación del modelo se consideraron las siguientes simplificaciones (Luyben, 1992; Halvorsen and Skogestad, 2000):

- Presión constante.
- Equilibrio líquido-vapor ideal.
- Mezcla no ideal en la fase líquida.
- La dinámica de la retención molar de vapor es despreciable en comparación con la retención de molar de líquido.
- Hervidor como un solo plato, condensador total.

Los flujos molares de vapor y de líquido están dados por V_R y L_R en la sección de rectificación, por V_S y L_S en la sección de agotamiento, y se calculan mediante:

$$\begin{aligned} V_R &= V_S + (1 - q_F)F, & p &= 1, \dots, f \\ L_R &= (1 - R)V_R, & p &= 1, \dots, f - 1 \\ V_S &= \frac{Q_b}{\Delta H_1^{vap} x_{1,N} + \Delta H_2^{vap} (1 - x_{1,N})}, & p &= f + 1, \dots, N \\ L_S &= L_R + q_F F, & p &= f, \dots, N \\ D &= V_R r_v \\ B &= (L_S - V_S) b_v \end{aligned} \quad (3)$$

donde H_i^{vap} es la energía de vaporización de cada componente, R es la tasa de reflujo, F es el flujo de la alimentación, $x_{1,N}$ es la composición del componente ligero en el plato N (hervidor), r_v y b_v son los porcentajes de apertura de las válvulas de los productos destilado (D) y de fondo (B) respectivamente. q_F es la calidad del flujo de alimentación o *grado de vaporización*, que indica en qué fase se encuentra un componente en el instante en que ingresa al proceso y se calcula mediante:

$$q_F = 1 + \frac{C_p (T_b - T_F)}{H^{vap}} \quad (4)$$

donde T_F es la temperatura de la alimentación y H^{vap} es el calor de vaporización de la alimentación (Murray-Gunther, 2003).

En relación a las condiciones térmicas de la alimentación el grado de vaporización puede asumir los valores presentados en la Tabla 1.

Tabla 1. Factor de calidad de la alimentación

Valor	Grado de vaporización
$q_F < 0$	vapor sobrecalentado
$q_F = 0$	alimentación en el punto de burbuja
$0 < q_F < 1$	alimentación de líquido y vapor
$q_F = 1$	alimentación en el punto de rocío
$q_F > 1$	alimentación subenfriada

2.4 Balance de materia y componente

Las composiciones del producto de fondo y del producto destilado son estimadas usando el modelo dinámico basado en los balances de materia y componente.

De acuerdo a las simplificaciones dadas en la subsección anterior, un conjunto de ecuaciones diferenciales representa el balance global de materia que define la retención de masa en cada etapa de la columna, en función del componente ligero de la mezcla (Murray-Gunther, 2003):

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= V_2 - L_1 - D \\ \dot{M}_p &= V_{p+1} - L_p - V_p + L_{p-1} + \delta(p)F, \quad p = 2, \dots, N-1 \\ \dot{M}_N &= L_{N-1} - V_N - B \end{aligned} \quad (5)$$

donde \dot{M}_p representa la dinámica de la retención molar de líquido en cada etapa. El balance por componente para cada plato está dado por:

$$\begin{aligned} M_1 \dot{x}_1 &= V_2 y_2 - L_1 x_1 - D x_1 \\ M_p \dot{x}_p &= V_{p+1} y_{p+1} - L_p x_p - V_p y_p + L_{p-1} x_{p-1} + \delta(p) F x_F \\ M_N \dot{x}_N &= L_{N-1} x_{N-1} - V_N y_N - B x_N \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\delta(p) = 1$ si $p = f$ y $\delta(p) = 0$ si $p \neq f$.

Las entalpías del proceso se consideran constantes en cada plato, por lo tanto, el balance de energía no se considera en el desarrollo de este modelo.

2.5 Modelo de estados

Las entradas controladas del proceso son: el calor aplicado al hervidor (potencia calefactora) y el periodo de apertura de la válvula de reflujo. Esto es: $\mathbf{u}(t) = [Q_b(t), r_v(t)]^T$.

A partir de las Ecs. (5) y (6), se puede obtener un modelo no lineal que tiene la siguiente estructura triangular:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= f_1(\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{u}) \\ \dot{\zeta}_p &= f_p(\zeta_1, \dots, \zeta_p, \zeta_{p+1}, \mathbf{u}), \quad p = 2, \dots, f-2 \\ \dot{\zeta}_{f-1} &= f_{f-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_{f-1}, \zeta_f, \mathbf{u}) \\ \dot{\zeta}_f &= f_f(\zeta_{f-1}, \dots, \zeta_N, \mathbf{u}, \mathbf{d}) \\ \dot{\zeta}_p &= f_p(\zeta_{p-1}, \dots, \zeta_N, \mathbf{u}, \mathbf{d}), \quad p = f+1, \dots, N-1 \\ \dot{\zeta}_N &= f_N(\zeta_{N-1}, \zeta_N, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (7)$$

donde, ζ representa los estados del proceso (composiciones líquidas del componente ligero). El modelo permite calcular los flujos B, D, V_p, L_p y T_p, x_p a partir de las entradas Q_b, r_v, b_v, F_v, x_F , (el subíndice p corresponde al número del plato donde se calcula la variable)(Hammouri *et al.*, 2002).

3. DISEÑO DEL OBSERVADOR DE ALTA GANANCIA

Para los sistemas no lineales uniformemente observables, es posible diseñar un observador cuya ganancia no depende de las entradas, empleando una forma canónica (triangular) (Hammouri *et al.*, 2002).

Considerando un sistema no lineal con la siguiente estructura compacta:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}^1 &= \mathbf{f}^1(\zeta(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\zeta}^2 &= \mathbf{f}^2(\zeta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \\ \varrho(t) &= (\varrho_1(t), \varrho_2(t))^T = (\mathbf{C}_{n_1} \zeta^1(t), \mathbf{C}_{n_2} \zeta^2(t))^T \end{aligned} \quad (8)$$

donde:

$\zeta(t) = [\zeta^1(t), \zeta^2(t)]^T \in \mathbf{R}^n$ es el vector de estados.

$N = n_1 + n_2$ corresponde al número total de estados (depende de la ubicación del plato de alimentación).

$\mathbf{C}_{n_j} = [1, 0, \dots, 0]$, representa el vector de salidas del sistema.

$\zeta^j = [\zeta_1^j, \zeta_2^j, \dots, \zeta_{n_j}^j]^T \in \mathbf{R}^{n_j}$ para $j = 1, 2$, según corresponde a la sección de rectificación o agotamiento.

$\varrho_j = \mathbf{C}_{n_j} \zeta^j = \zeta_1^j$ representa al primer componente de ζ^j .

La entrada es $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$; $\mathbf{d}(t) = \varepsilon(t)$ es una función desconocida y acotada que representa una perturbación, en este caso, la dinámica de la alimentación (\dot{x}_F).

Entonces el sistema dado en la Ec.(7), puede ser reescrito como sigue:

Sección de rectificación:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1^1 &= \mathbf{f}_1^1(\zeta_1(t), \zeta_2(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\zeta}_2^1 &= \mathbf{f}_2^1(\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\zeta}_3^1 &= \mathbf{f}_3^1(\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \zeta_4(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\zeta}_4^1 &= \mathbf{f}_4^1(\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \zeta_4(t), \zeta_5(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\zeta}_5^1 &= \mathbf{f}_5^1(\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \zeta_4(t), \zeta_5(t), \zeta_6(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\zeta}_6^1 &= \mathbf{f}_6^1(\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \zeta_4(t), \zeta_5(t), \zeta_6(t), \zeta_7(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

Sección de agotamiento:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_7^2 &= \mathbf{f}_7^2(\zeta_6(t), \zeta_7(t), \zeta_8(t), \zeta_9(t), \zeta_{10}(t), \zeta_{11}(t), \zeta_{12}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \\ \dot{\zeta}_8^2 &= \mathbf{f}_8^2(\zeta_7(t), \zeta_8(t), \zeta_9(t), \zeta_{10}(t), \zeta_{11}(t), \zeta_{12}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \\ \dot{\zeta}_9^2 &= \mathbf{f}_9^2(\zeta_8(t), \zeta_9(t), \zeta_{10}(t), \zeta_{11}(t), \zeta_{12}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \\ \dot{\zeta}_{10}^2 &= \mathbf{f}_{10}^2(\zeta_9(t), \zeta_{10}(t), \zeta_{11}(t), \zeta_{12}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \\ \dot{\zeta}_{11}^2 &= \mathbf{f}_{11}^2(\zeta_{10}(t), \zeta_{11}(t), \zeta_{12}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)) \\ \dot{\zeta}_{12}^2 &= \mathbf{f}_{12}^2(\zeta_{11}(t), \zeta_{12}(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

Y la salida está dada por:

$$\varrho(t) = (\varrho_1(t), \varrho_2(t))^T = (\mathbf{C}_{n_1} \zeta^1(t), \mathbf{C}_{n_2} \zeta^2(t))^T$$

Ahora, considerando que:

$$\frac{\partial f_i^j}{\partial \zeta_{i+1}}(\zeta, \mathbf{u}) \neq 0; \quad \forall(\zeta, \mathbf{u}). \quad (11)$$

Se tiene la siguiente hipótesis:

■ (H1)

(i) \mathbf{f}_i^j es globalmente Lipschitz y uniformemente acotado con respecto a ζ .

(ii) $\exists \alpha > 0$, tal que $\forall(\zeta, \mathbf{u}) \in (U \times \mathbf{R}^n)$ se tiene:

$$\frac{\partial f_i^j}{\partial \zeta_{i+1}} \geq \alpha$$

Entonces es posible encontrar un vector constante \mathbf{K} , tal que, el siguiente sistema:

$$\dot{\hat{\zeta}} = \mathbf{f}(\hat{\zeta}, \mathbf{u}) + \Delta_\theta \mathbf{K}(\mathbf{C} \hat{\zeta} - \varrho) \quad (12)$$

se convierte en un observador de alta ganancia para el sistema dado por las Ecs. 9 y 10, con $\Delta_\theta = \text{diag}(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$.

Posteriormente, se toman en cuenta los siguientes preliminares:

i) $\mathbf{C}_{n_j} = [1, \dots, 0] \in \mathbf{R}^{n_j}$, donde n_j es el tamaño de cada vector de estados ζ^j .

ii)

$$\mathbf{A}_{n_j}(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_1(t) & 0 & 0 \\ \vdots & & a_2(t) & 0 \\ 0 & \ddots & & a_{n_j-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $a_k(t)$, $k = 1, \dots, n_j-1$ son funciones acotadas y desconocidas que deben satisfacer la siguiente hipótesis:

- (H2) $\forall t \geq 0$, existen dos números reales finitos $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha \leq a_k(t) \leq \beta$.

Siendo \mathbf{S}_{n_j} una matriz simétrica dada por:

$$\mathbf{S}_{n_j} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & s_{(n_j-1)n_j} \\ 0 & \dots & 0 & s_{(n_j-1)n_j} & s_{n_j n_j} \end{bmatrix},$$

es posible obtener el siguiente Lema:

Lema 1 Es posible encontrar matrices definidas positivas \mathbf{S}_{n_j} y una constante $\mu > 0$ tales que:

$$\forall t, \mathbf{S}_{n_j} \mathbf{A}_{n_j}(t) + \mathbf{A}_{n_j}^T(t) \mathbf{S}_{n_j} \leq -\mu \mathbf{I}_d \quad (13)$$

donde \mathbf{I}_d es la matriz identidad. Además, \mathbf{S}_{n_j} depende únicamente de los límites α, β y no del conocimiento de $\mathbf{A}_{n_j}(t)$.

Para el caso de sistemas con una sola salida (ver hipótesis (H1)), el diseño de un observador para un sistema de la forma mostrada en la Ec. (8) debe satisfacer la siguiente hipótesis:

- (H3)
 - (i) $\exists c > 0$ tal que $\forall(\zeta, \mathbf{u}), \|\partial f^j / \partial \zeta(\zeta, \mathbf{u})\| \leq c$
 - (ii) $\exists \alpha > 0$, tal que $\forall \zeta, \forall \mathbf{u}, \partial f_i^j / \partial \zeta_{i+1}^j(\zeta, \mathbf{u}) \geq \alpha$, para $j = 1, 2$ y para $1 \leq i \leq n_j - 1$

Asumiendo entonces que el sistema dado en la Ec. (8) satisface las hipótesis (H1) a (H3), un observador que permite la convergencia exponencial de los estados estimados $\hat{\zeta}$, hacia los estados reales del proceso, está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}}^1 &= \mathbf{f}^1(\hat{\zeta}, \mathbf{u}) - r_1 \Delta_{\theta \delta_1} \mathbf{S}_{n_1}^{-1} \mathbf{C}_{n_1}^T (\mathbf{C}_{n_1} \hat{\zeta}^1 - \varrho_1) \\ \dot{\hat{\zeta}}^2 &= \mathbf{f}^2(\hat{\zeta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) - r_2 \Delta_{\theta \delta_2} \mathbf{S}_{n_2}^{-1} \mathbf{C}_{n_2}^T (\mathbf{C}_{n_2} \hat{\zeta}^2 - \varrho_2) \end{aligned} \quad (14)$$

donde r_1, r_2 y θ son constantes positivas: $r_1 > 0, r_2 > 0; \theta > 0; N = n_1 + n_2$ corresponde al número total de estados; además $\Delta_{\theta \delta_j} = \text{diag}(\theta^{\delta_j}, \theta^{2\delta_j}, \dots, \theta^{n_j \delta_j})$; y $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0; \mathbf{S}_{n_1}$ es la matriz dada por el **Lema 1**.

Considerado lo anteriormente planteado (Hammouri *et al.*, 2002) proponen el siguiente teorema:

Teorema 1: Denotando que ε es el límite superior de $d(t)$ es decir; $\varepsilon = \sup_{t \geq 0} |d(t)|$, entonces para $r_1 > 0, r_2 > 0, \theta > 0$ suficientemente grandes y $\forall \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tales que:

$$\frac{2n_1 - 1}{2n_2 + 1} \delta_1 < \delta_2 < \frac{2n_1 + 1}{2n_2 - 1} \delta_1; \quad (15)$$

y estableciendo,

$$\|\hat{\zeta}(t) - \zeta(t)\| \leq \psi e^{-\mu t} + \psi' \varepsilon; \quad (16)$$

para algunos valores constantes $\psi > 0, \mu > 0$ y $\psi' > 0$, y $\mu \rightarrow +\infty$ si $\theta \rightarrow 0$. La demostración del teorema es presentada por los autores en (Hammouri *et al.*, 2002).

3.1 Extensión del observador al caso continuo-discreto

Existen procesos donde la medición de sus variables se realiza empleando tiempos de muestro grandes. En (Ben, 1997) se demuestra que hay ciertas restricciones en la dimensión de periodo de muestreo que usa un observador puramente discreto. Una alternativa de solución para este problema es emplear observadores continuo-discretos (Deza *et al.*, 1991).

Si un sistema no lineal es uniformemente observable, como el descrito en la Ec. (17):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ \varrho &= h(x) \end{aligned} \quad (17)$$

donde $x \in \mathbf{R}^n, u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ son entradas medibles y $\varrho \in \mathbf{R}$ es una salida medible, es posible estimar en línea la variable $x(t)$, usando un modelo conocido del sistema y las mediciones de $u(t)$ y $\varrho(t)$. Esta tarea es desarrollada por un algoritmo recursivo, formado por una etapa de predicción, mostrada en la Ec. (18), y una etapa de corrección, mostrada en la Ec. (19).

I. Etapa de predicción en el intervalo $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\hat{\dot{x}} = f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t))u(t) \quad (18)$$

II. Etapa de corrección en el instante de tiempo $t = t_{k+1}$:

$$\hat{x}(t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1}^-) - \omega_0 (\hat{x}(t_{k+1}) - y(t_{k+1})) \quad (19)$$

donde ω_0 está dada por la Ec. (20).

$$\omega_0(\hat{x}(t_{k+1})) = \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}(t_{k+1}^-)} \right)^{-1} \mathbf{S}^{-1}(t_{k+1}) \mathbf{C}^T \quad (20)$$

y

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix},$$

donde $L_f^{n-1} h(x)$ representa la n -ésima $h(x)$ derivada de Lie en la dirección de $f(x)$. $\mathbf{S}(t_{k+1})$ es una matriz simétrica definida positiva. La expresión t_{k+1}^- mostrada en la Ec. (21) representa el valor límite de una variable en t_{k+1} , es decir:

$$\mathbf{S}(t_{k+1}^-) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}} \mathbf{S}(t) \quad (21)$$

La convergencia asintótica a cero del error de estimación $e = \hat{x}(t) - x(t)$ de este observador se demuestra en (Deza *et al.*, 1991). Otro tipo de observador continuo-discreto para sistemas no lineales con inyección de salida se muestra en (Nadri *et al.*, 2004).

3.2 Aplicación a una columna de destilación

En esta sección el observador propuesto por Targui se extiende al caso continuo-discreto y es aplicado a una columna de destilación binaria.

Se asume que la etapa de corrección se lleva a cabo en el tiempo t_k correspondiente al instante de la medición discreta, de esta manera el observador propuesto para el sistema de la columna de destilación mostrado en la Ec. (7) es:

I. Para $t \in [t_k, t_{k+1}]$ la etapa de predicción se obtiene mediante la Ec. (22).

$$\hat{x}_k(t) = f(\hat{x}_k(t), u(t)) \quad (22)$$

II. Para $t = t_{k+1}$ la etapa de corrección se calcula por la Ec. (23).

$$\hat{x}_{k+1}(t) = \hat{x}_{k+1}^- - r \Delta \theta S_{\theta}^{-1} C^T (C \hat{x}_{k+1}^- - \rho_{k+1}) \quad (23)$$

El error de estimación tiende exponencialmente a cero si el tiempo de muestreo es lo suficientemente pequeño $\forall \theta \in [\theta_0, \theta_1]$, donde θ_0 y θ_1 son constantes positivas (Deza *et al.*, 1991). Dado que la ganancia del observador es constante, se cumple la siguiente consideración:

$$\forall t > 0, A_k^T(t) S_k + S_k A_k(t) - \rho C_k^T C_k \leq -\eta I_k$$

donde S_k es una matriz simétrica definida positiva con la siguiente estructura:

$$S_k = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & s_{k-1k} \\ 0 & \dots & 0 & s_{k-1k} & s_{kk} \end{bmatrix}$$

donde C_k es un vector de k elementos:

$$C_k = [1, 0, \dots, 0]$$

y A_k es dada por:

$$A_k(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_1(t) & 0 & 0 \\ \vdots & & a_2(t) & \\ 0 & & \ddots & a_{k-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los términos a_i son desconocidos y deben satisfacer la hipótesis (H2).

4. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DEL OBSERVADOR

Para validar el desempeño del observador se emplean los datos obtenidos de la planta piloto de destilación, localizada en el Laboratorio de Control de Procesos del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) en Cuernavaca, Morelos, México.

La columna de destilación cuenta con doce platos, donde las mediciones de temperatura se encuentran disponibles a través de 8 sensores RTD's Pt-100 localizados en los platos 1, 2, 4, 6, 7, 9, 11 y 12.

La mezcla usada en este trabajo es Etanol - Agua, considerada como no ideal (azeotrópica). En los experimentos se utilizan 2000 ml de Etanol y 2000 ml de Agua en el depósito del hervidor; se considera la presión total del proceso en 105,86 kPa. Las especificaciones de cada componente de la mezcla se muestran en la Tabla 2.

Tabla2. Especificaciones de cada componente de la mezcla Etanol-Agua (Gmehling, 1988)

Parámetro	Etanol	Agua
Densidad ρ_c (g/cm ³)	0.79	1
Peso molecular M_{w_i} (g)	46.07	18.01
Temp. ebullición T_b (°C)	78.40	100
Entalpia de vap. H^v ap _i (kJ/mol)	38.56	40.65
Calor específico C_p (kJ/mol °C)	0.11	0.19

Los cambios considerador en las entradas controladas se presentan en la Tabla 3.

Tabla3. Entradas del proceso (Experimento 1)

Entrada	Señal	t arranque
Q_b	1500 Watts	0 min
Reflujo	Total	0 min
Q_b	Escalón 1500 – 1750 Watts	3 min
Reflujo	Pulso(t_{on} 12s; t_{off} = 6s)	13,5 min
Reflujo	Total	27 min
Q_b	Escalón 1750 – 1250 Watts	39,5 min

La dinámica del proceso es adecuada para la aplicación de un observador continuo-discreto. Ya que una vez el sistema alcanza su estado estable, los cambios que se presentan en las variables medibles (temperaturas) son lentos, por lo que tomar mediciones en instantes de tiempo cortos perjudica el desempeño del algoritmo de estimación, con el procesamiento de datos redundantes.

Por esta razón, la aplicación de un observador continuo-discreto en la columna de destilación es viable y se presenta como una alternativa a la estimación de estados con una menor demanda de tiempo de procesamiento manteniendo la confiabilidad de los observadores puramente discretos.

El experimento dura 48 minutos, partiendo del estado estable. Las entradas controladas que se consideraron fueron: un aumento en la potencia calefactora y cambios en el porcentaje de reflujo. Dichas entradas son escalones dada la característica de los controladores utilizados para su manejo.

En el observador continuo-discreto el tiempo de integración, correspondiente a la etapa de predicción, no necesariamente corresponde al tiempo de muestreo (correspondiente al tiempo en que se realizan las mediciones de temperatura para la etapa de corrección). Para el caso de la versión puramente discreta del observador, el periodo de integración (etapa de predicción y corrección) es $\Delta t = 3s$.

En los experimentos aquí reportados, se emplearon diferentes tiempos de muestreo para validar el observador continuo-discreto, manteniendo constante el tiempo de integración en la etapa de predicción (3s); los valores considerados para el tiempo de muestreo (etapa de corrección) fueron de: 0,5, 1,5 y 2,5 minutos.

La ganancia del observador se obtiene fijando los siguientes parámetros: $r_1 = r_2 = 12$, $\theta = 0,3$; satisfaciendo la Ec.

(14) $\delta_1 = 1,2$, $\delta_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{2n_1+1}{2n_2-1} \right)^2 \right]$ $\delta_1 = 0,0983$ (donde $n_1 = f - 1 = 6$, $n_2 = n - f + 2 = 6$). Finalmente el Lema 1 proporciona:

$$S_{n_1} = S_{n_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10,5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 15,5 \end{bmatrix}$$

El observador estima las composiciones del componente ligero (Etanol) para cada plato a partir de las mediciones de temperatura en el plato 1 (el condensador) y en el plato 12 (el hervidor).

Las Figs. 2 a 5 muestran la comparación entre la composición estimada por el observador (considerando los tiempos de muestro mencionados anteriormente) y la obtenida experimentalmente para los platos 1, 3, 9 y 12, respectivamente. En estas figuras puede apreciarse una adecuada convergencia del observador, la cual puede verificarse al observar el error obtenido en la estimación del observador.

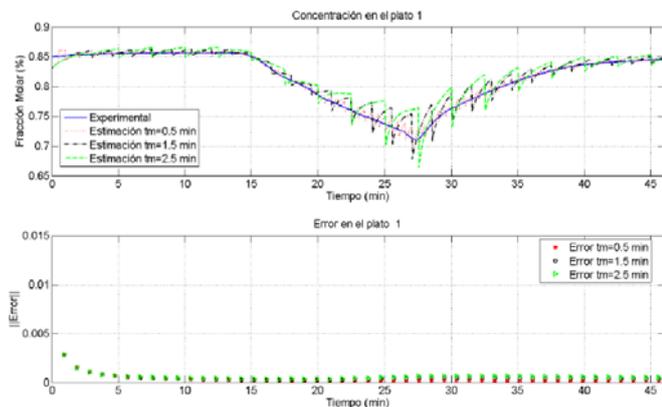


Figura 2. Validación experimental. Plato 1.

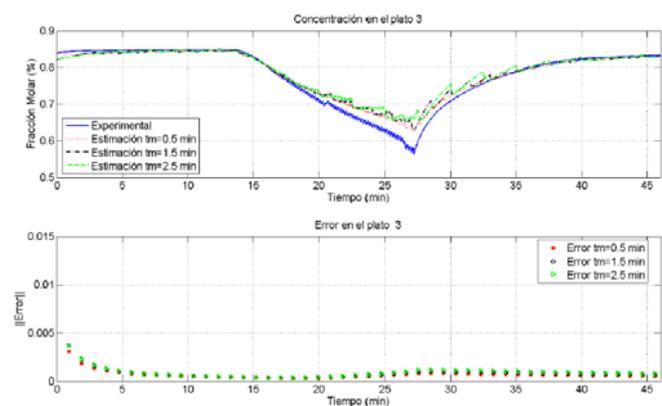


Figura 3. Validación experimental. Plato 3.

El observador calcula la composición adecuadamente, con errores máximos de 0,01 y mínimos de 0,0001 entre el estimado y los datos experimentales (la norma Euclidiana fue usada para evaluar dicho error).

De igual forma, es posible reducir el tiempo de convergencia manipulando el tiempo de las mediciones discretas, como se

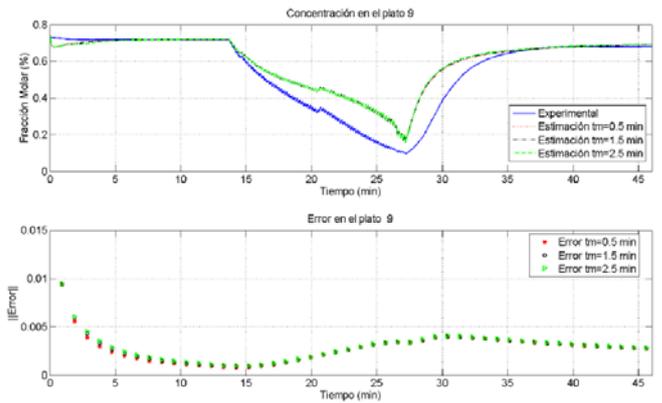


Figura 4. Validación experimental. Plato 9.

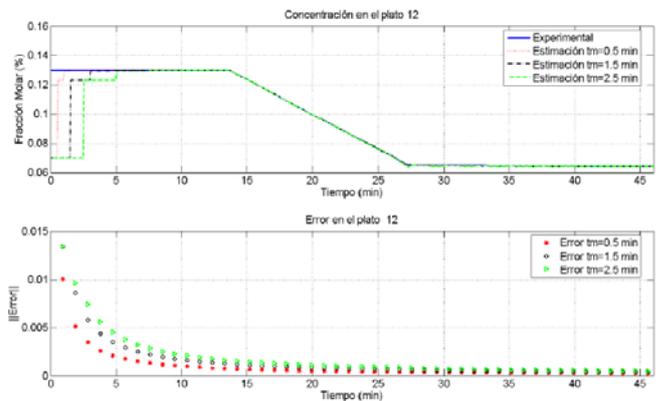


Figura 5. Validación experimental. Plato 12.

aprecia en las Figs. 2 a 5. El observador presenta un buen desempeño ante los cambios en las señales de entrada y estima los estados de acuerdo a lo esperado.

4.1 Comparación del observador continuo vs. continuo-discreto

Con la finalidad de comprobar la ventaja que representa el emplear un observador de alta ganancia, en su versión continuo-discreta, en procesos con dinámica lenta que permiten un periodo de muestro grande, se realiza una comparación de éste con su versión puramente discreta. Se emplean para ellos los mismos parámetros y especificaciones mostradas en la sección anterior, pero con las entradas (perturbaciones) mostradas en la Tabla 4. El experimento tiene una duración total de 170 minutos.

Tabla 4. Entradas del proceso (Experimento 2)

Entrada	Señal	t arranque
Q_b	1500 Watts	0 min
Reflujo	Total	0 min
Reflujo	Pulso($t_{on} 12s; t_{off} = 6s$)	46 min
Reflujo	Total	58 min
Q_b	Escalón 1500 – 1750 Watts	69 min
Reflujo	Pulso($t_{on} 12s; t_{off} = 6s$)	128 min
Q_b	Escalón 1750 – 1250 Watts	130 min
Reflujo	Total	147 min

Como se menciona anteriormente, en el observador discreto los tiempos empleados para la etapa de predicción y para la etapa de corrección son iguales, mientras que en el observador continuo-discreto pueden diferir. La Fig. 6 muestra el desempeño de observador de alta ganancia, en sus dos versiones,

empleando un tiempo de 3 segundos para ambos casos. Como se observa en la figura, al manejar el mismo tiempo de muestreo en ambas versiones del observador se obtiene, lógicamente, un desempeño similar para los dos observadores.

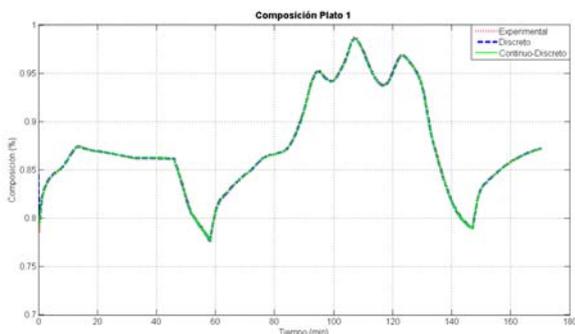


Figura 6. Discreto vs continuo-discreto. Tiempo de muestreo = 3 seg

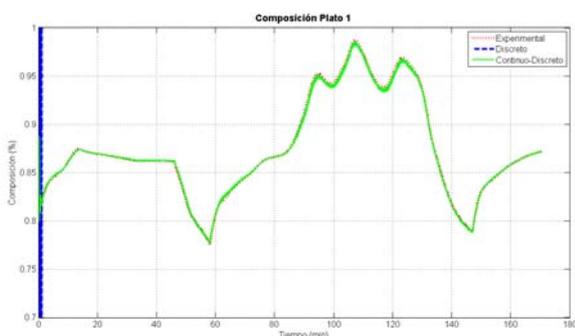


Figura 7. Discreto vs continuo-discreto. Tiempo de muestreo = 6 seg

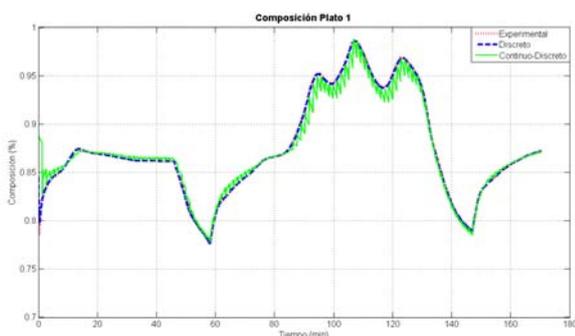


Figura 8. Discreto vs continuo-discreto. Tiempo de muestreo = 90 seg

Sin embargo, si en el observador discreto el tiempo de muestreo (igual al tiempo de integración) es elevado a más de 5 segundos, dicho observador no puede efectuar una estimación adecuada de las concentraciones requeridas, mientras que el observador continuo discreto, trabajando con un tiempo de integración de 3 segundos y un tiempo de muestreo de 6 segundos, sigue realizando una estimación adecuada de los estados del sistema, como se observa en la Fig.7.

En la Fig. 8 se observa el desempeño del observador continuo-discreto con un tiempo de muestreo de 90 segundos (el tiempo

de integración se mantiene en 3 segundos), comparado con el observador discreto trabajando con un tiempo de 3 segundos, como puede apreciarse, aún con un tiempo de muestreo 15 veces mayor al empleado en el observador discreto, el observador continuo-discreto presenta un buen desempeño, realizando una adecuada estimación de las concentraciones de la planta.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta un observador continuo-discreto para una clase de sistemas no lineales. Con el fin de obtener el observador deseado, se desarrolla un modelo apropiado para una mezcla binaria Etanol-Agua (no ideal).

Por la dinámica propia del sistema el modelo propuesto se presenta en una estructura triangular, lo que permite que pueda ser utilizado en tareas de estimación de variables, puesto que se comprueba su observabilidad.

Una de las principales ventajas del observador es que puede estimar temperaturas y concentraciones en todos los platos de la columna de destilación basándose únicamente en dos mediciones de temperatura disponibles en la columna. Un aspecto importante en el observador propuesto, es su ganancia, que por ser constante no necesita resolver un sistema dinámico para la sintonización de sus parámetros.

El observador continuo-discreto fue validado utilizando datos experimentales obtenidos de un proceso de destilación de Etanol-Agua, su desempeño fue adecuado a pesar de las no linealidades del sistema y de los cambios aplicados en las entradas.

Se comprueba experimentalmente que el observador de alta ganancia continuo-discreto mantiene un error mínimo a pesar de usar menos datos (de los que usa un observador puramente discreto), en la implementación del algoritmo. Además presenta un adecuado seguimiento de la dinámica del proceso en lazo abierto.

REFERENCIAS

- Ben, S. (1997). Observation et commande de systemes non lineaires temps-discret. PhD thesis. Universite Claude Bernard-Lyon 1. Lyon, France.
- Deza, F., E. Busvelle and J. P. Gauthier (1991). Exponentielly converging observers and internal stability using dynamic output feedback for distillation columns. *Chem. Eng. Science* **47**, 3935–3941.
- Gmehling, J. (1988). *Chemistry Data Series - DECHEMA*. Vol. 1. Germany.
- Halvorsen, I. J. and S. Skogestad (2000). Distillation theory. *Encyclopedia of Separation Science*.
- Hammouri, H., B. Targui and F. Armanet (2002). High gain observer based on a triangular structure. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **12**, 497–518.
- Han, M. (2006). Nonlinear model based control of two-product reactive distillation column. In: *SICE-ICASE International Joint Conference*. Busan, Korea. pp. 3320–3323.
- Ibrir, S. (2007). Circle-criterion approach to discrete-time nonlinear observer design. *Automatica* **43**(8), 1432–1441.
- Jana, A.K., A.-N. Samantab and S. Gangulyb (2006). Observer-based control algorithms for a distillation column. *Chemical Engineering Science* **61**, 4071–4085.
- Luyben, W. L. (1992). *Practical Distillation Control*. Van Nostrand Reinhold. New York, USA.

Murray-Gunther, A. (2003). Dynamic Mathematical Model of a Distillation Column. PhD thesis. University of Tennessee at Chattanooga.

Nadri, M., H. Hammouri and C. Astorga (2004). Observer design for continuous-discrete time state affine systems up to output injection. *European Journal of Control* **10**(3), .

Olsen, D. G., B. R. Young and W. Y. Svrcek (2002). A study in advanced control application to an azeotropic distillation column within a vinyl acetate monomer process design. *Asia Pacific Journal of Chemical Engineering* **10**(1-2), 47–60.

Perry, R.H. (1999). *Perry's chemical engineer's handbook*. 7 ed.

Quintero-Mármol, E., W. L. Luyben and C. Georgakis (1991). Application of an extended luenberger observer to the control of multicomponent batch distillation. *Ind. Eng. Chem. Res.* **30**, 1870–1880.

Shields, D., S. Ashton and S. Daley (2001). Design of nonlinear observers for detecting faults in hydraulic sub-sea pipelines. *Control Engineering Practice* **9**, 297–311.

Tronci, S., F. Bezzo, M. Barolo and R. Baratti (2005). Geometric observer for a distillation column: Development and experimental testing. *Ind. Eng. Chem. Res.s* **44**, 9884–9893.

Yaz, E. E., C. S. Jeong, A. Bahakeem and Y. I. Yaz (2007). Discrete-time nonlinear observer design with general criteria. *Journal of the Franklin Institute* **344**(6), 918–928.

Letras minúsculas	Significado
n_2	Número de etapas en la sección de enriquecimiento.
f^1	Función de la sección de empobrecimiento.
f^2	Función de la sección de enriquecimiento.
Letras griegas	Significado
α_p	Volatilidad relativa.
ρ_c	Densidad (g/cm^3).
ω	Porcentaje en peso de un componente.
γ_i	Coefficiente de actividad.
ϕ_i	Coefficiente de fugacidad.
Subíndices	Significado
i	Componente.
p	Plato.
j	Sección superior o inferior.
v	Volumétrico.
H	Componente pesado de la mezcla.
L	Componente ligero de la mezcla.
R	Sección de rectificación.
S	Sección de agotamiento.
0	Condición inicial.
1	Sección superior de la columna.
2	Sección inferior de la columna.

Apéndice A. NOTACIÓN

Tabla5. Notación

Letras Mayúsculas	Significado
A_i	Constante de Van Laar.
B_i	Constante de Van Laar.
C_i	Constante de Van Laar.
B	Producto de fondo.
D	Producto destilado.
C	Concentración (%).
F	Flujo molar de la alimentación (moles/min).
F_v	Flujo volumétrico de la alimentación (ml/min).
K_i	Constante de equilibrio.
L	Flujo molar líquido (moles/min).
L_R	Flujo líquido en la sección de rectificación (moles/min).
L_S	Flujo líquido en la sección de agotamiento (moles/min).
M_i	Masa molar retenida en cada estado (moles).
N	Número total de platos.
W_i	Peso molecular (g).
P	Presión total (kPa).
P_i^{sat}	Presión parcial (de saturación) del componente i (kPa).
P_i^v	Presión de vapor del componente i (kPa).
Q_b	Potencia calefactora añadida al hervidor (watts).
R	Reflujo (0-1).
T_e	Tiempo de muestreo, en el observador continuo-discreto.
T_{exp}	Temperatura medida experimentalmente ($^{\circ}C$).
T_{model}	Temperatura estimada por el modelo ($^{\circ}C$).
T_p	Temperatura en cada plato ($^{\circ}C$).
T_F	Temperatura de la alimentación ($^{\circ}C$).
T_{b_i}	Temperatura de ebullición ($^{\circ}C$).
V	Flujo molar de vapor (moles/min).
V_R	Flujo de vapor en la sección de rectificación (moles/min).
V_S	Flujo de vapor en la sección de agotamiento (moles/min).
Letras minúsculas	Significado
f	Plato de alimentación.
p	Número de plato.
q_F	Calidad de la alimentación.
z_F	Concentración líquida en la alimentación.
x_p	Concentraciones molares líquidas.
y_p	Concentraciones molares de vapor.
x_i	Fracción molar líquida del componente i en equilibrio.
y_i	Fracción molar de vapor del componente i en equilibrio.
f^L	Fugacidad del líquido en un estado de referencia.
n_1	Número de etapas en la sección de empobrecimiento.