

LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN CONSTRUCTIVA DE SISTEMAS MECÁNICOS CON GRADO DE SUBACTUACIÓN 1 INESTABLES CON FRICCIÓN

M. López-Martínez* y J.Á. Acosta*

* Dept. Ingeniería de Sistemas y Automática.
Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de
Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n. 41092-Sevilla.
e-mail: {mlm, jaar}@esi.us.es

Resumen: En los últimos años se han desarrollado diversos métodos para controlar sistemas mecánicos subactuados. De hecho, dichos métodos no lineales han conseguido resolver problemas muy interesantes desde el punto de vista de control. Sin embargo, para obtener una solución con estos métodos, normalmente es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, lo cual no siempre es posible. En este artículo, se presenta una metodología constructiva para diseñar un controlador para una clase de sistemas mecánicos inestables en bucle abierto y con grado de subactuación uno. Para el diseño se emplean principalmente las técnicas de linealización por realimentación y Lyapunov. La metodología consiste en proponer una salida ficticia que se pueda rediseñar de forma constructiva para resolver el problema planteado, dando lugar a una *ley de control explícita*, que permite tener en cuenta la *fricción* incluso en las coordenadas no actuadas. Copyright © 2007 CEA-IFAC

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta una metodología de control, basada en la linealización por realimentación, para sistemas mecánicos con grado de subactuación uno y que pueden estar sometidos a fuerzas de fricción incluso en las coordenadas no actuadas. La metodología está basada en el diseño de una salida ficticia a través de la cual es posible alcanzar la estabilización del sistema en el origen, no sólo asintóticamente sino exponencialmente. Esta salida permite resolver el problema de forma explícita, sin necesidad de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, dando lugar a una ley de control compacta, basada en una linealización por realimentación parcial y un controlador externo diseñado por Lyapunov.

Desde el punto de vista teórico el problema de control se ha abordado con un enfoque clásico (Isidori, 1996; Marino y Tomei, 1995). Sin embargo, los resultados obtenidos guardan estrecha relación con otros métodos de control desarrollados más recientemente, dando lugar a excelentes resultados tanto teóricos como experimentales. Así, por ejemplo, cabe destacar que al elegir como salida ficticia funciones similares al momento conjugado se obtienen resultados cuya estructura es similar a los obtenidos en (Marsden y Ratiu, 1999; Bloch et al, 2000), pero con la mejora de que con el planteamiento presentado en este artículo es posible dominar la fricción incluso en las coordenadas no actuadas. Para ello, teniendo en cuenta que tomando el momento conjugado no se puede estabilizar asintóticamente la dinámica cero, se rediseña la salida usando un enfoque constructivo.

Esto permite forzar la convergencia exponencial y asintótica de la dinámica cero.

La motivación para el desarrollo de este trabajo de investigación ha sido principalmente la búsqueda de un resultado teórico con alto potencial para la implementación práctica, en la línea de los trabajos de (Åkesson y Åström, 2001). En ellos se trata de controlar sistemas pilotados inestables en bucle abierto, en los que la ley de control estabiliza al sistema, de forma que el piloto sólo tiene que modificar las velocidades de referencia de las variables actuadas.

En este artículo se presentan como ejemplos de aplicación el control de aeronaves de despegue vertical, denominado VTOL (*vertical take-off landing*), el péndulo con rueda de inercia y el péndulo sobre el carro. En el primer ejemplo el ángulo y velocidad angular de alabeo (*roll*), así como las velocidades horizontal y vertical, son las variables de salida del sistema, tal y como se emplean en trabajos como los de (Bates y Postlethwaite, 2002; Hyde, 1995; Pratt, 2000). En el segundo ejemplo, se ha incluido como diferencia principal a los trabajos de (Spong et al, 2001; Ortega et al, 2002; Gomez-Estern et al, 2004) el hecho de incluir la fricción explícitamente en el diseño del controlador, permitiendo dominar el efecto desestabilizante observado en los trabajos mencionados, y que no permiten la estabilización asintótica de la velocidad de la rueda. En el tercer ejemplo, también se ha introducido, como novedad, la fricción en la coordenada subactuada, demostrándose de nuevo, que gracias al controlador propuesto se consigue dominar dicho término.

En cuanto a trabajos previos, el primer trabajo relacionado fue (Acosta y López-Martínez, 2005) donde se planteó de forma intuitiva la idea de linealización por realimentación de forma constructiva, pero no se aportó ninguna demostración general de estabilidad asintótica, lo cual ha sido demostrado en el presente artículo. Otros trabajos como (Acosta et al, 2005; Gómez-Estern et al, 2004) han servido de motivación para resolver el caso en que existan fuerzas de fricción en las coordenadas no actuadas, pero con un enfoque totalmente distinto, en el que ni siquiera hay que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El artículo está estructurado de la siguiente manera: el segundo apartado describe la clase de sistemas subactuados a la que es aplicable la metodología propuesta. En el tercer apartado se presenta el diseño del controlador y en el cuarto el resultado principal de estabilidad asintótica alcanzado. En el quinto apartado se aplica la metodología a los tres ejemplos mencionados, y se presentan resultados de simulación. En el apartado de conclusiones se resumen las principales aportaciones

del trabajo presentado, así como las futuras líneas de investigación y aplicación.

2. CLASE DE SISTEMAS MECÁNICOS SUBACTUADOS

Para definir la clase de sistemas a la que es aplicable la metodología propuesta se partirá de la formulación Lagrangiana para la obtención de las ecuaciones de movimiento, y posteriormente se presentarán las hipótesis que deben cumplir los sistemas mecánicos para pertenecer a la clase. En este artículo se aborda el problema de controlar sistemas mecánicos subactuados, entendiendo como tales, aquellos que poseen menos entradas independientes de control que grados de libertad.

Denotando las coordenadas y velocidades generalizadas por $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ respectivamente, las ecuaciones de Lagrange vienen dadas por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla U(q) + D(\dot{q}) = [O \ I_m]^\top \tau \quad (1)$$

donde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del sistema caracterizada por ser simétrica y definida positiva, $U \in \mathbb{R}$ es la función de energía potencial, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ incluye las fuerzas centrífugas y de Coriolis, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa las fuerzas de fricción y arrastre, y $\tau \in \mathbb{R}^m$ el número de entradas de control independientes.

A continuación se definirá la clase de sistemas mecánicos para la que se ha resuelto el problema de control, obteniéndose una ley de control explícita. La clase se refiere a un conjunto de sistemas con grado de subactuación uno, es decir, $m = n - 1$, $m \geq 1$. Por esta razón, se hará una partición del conjunto de coordenadas generalizadas $q = (z, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, donde el grado de libertad subactuado se representa por la coordenada z , y los de las actuadas por el conjunto de coordenadas X . Con esta partición, las ecuaciones de movimiento pueden reescribirse como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}^\top \\ m_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} F_1(q, \dot{q}) \\ F_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-1} \end{bmatrix} \tau, \quad (2)$$

donde ahora $m_{11} \in \mathbb{R}$, $m_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $M_{22} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ y se han introducido las funciones escalar y vectorial $F_1(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}$ y $F_2(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, respectivamente.

En primer lugar se linealizarán parcialmente las ecuaciones de movimiento (1), como se describe en (Spong, 1996) donde se denominó *collocated partial feedback linearization* (véase también Grizzle et al, 2005). De hecho, tras realizar los pasos descritos en (Spong, 1996) es fácil ver que el sistema parcialmente linealizado resultante toma la forma afín en control

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_{11}(q)} F_1(q, \dot{q}) \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{m_{12}^\top(q)}{m_{11}(q)} \\ I_{n-1} \end{bmatrix} u, \quad (3)$$

donde la función escalar $F_1(q, \dot{q})$ se definió como

$$F_1(q, \dot{q}) \triangleq e_1^\top [C(q, \dot{q})\dot{q} + \nabla U(q) + D(\dot{q})], \quad (4)$$

donde e_i se refiere al i -ésimo vector de la base Euclídea n -dimensional. Finalmente, el bucle interno resultante viene dado por

$$\tau = \begin{bmatrix} -\frac{m_{12}}{m_{11}} \vdots I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(q, \dot{q}) \\ F_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \left[M_{22} - \frac{m_{12}m_{12}^\top}{m_{11}} \right] u. \quad (5)$$

Observación 1. En primer lugar, la función escalar m_{11} ha de ser uniformemente positiva para que pueda invertirse, lo cual se verifica siempre en sistemas mecánicos reales. En segundo lugar, los elementos del vector m_{12} son no nulos al menos en un entorno del origen. De esta forma, es fácil ver que si el $\text{rango}(m_{12}) < 1$, entonces el sistema es no controlable. En (Spong, 1996) a los sistemas que verifican estas dos propiedades, se los define como sistemas fuertemente acoplados inercialmente (*strongly inertially coupled*) cumpliéndose que el $\text{rango}(m_{12}) = 1$.

Una vez expresadas las ecuaciones de movimiento en la forma antes descrita, se presenta la hipótesis general que define la clase de sistemas mecánicos subactuados considerada en el presente artículo.

Hipótesis 1. Los elementos de la matriz de inercia m_{11} y m_{12} no son función de las coordenadas actuadas; la matriz M_{22} cumple que o bien es constante, o bien es función de las coordenadas actuadas; la función de energía potencial puede expresarse de la siguiente forma

$$U(q) \triangleq V(z) + \Phi(X);$$

y las fuerzas de fricción y arrastre aplicados al sistema pueden descomponerse como $D(\dot{q}) \triangleq [D_1 \ D_2]^\top$, donde las fuerzas de fricción aplicadas en las coordenadas no actuadas, denotado por D_1 , satisfacen una de las siguientes dos condiciones

- $D_1 = 0$, no hay pares de fricción aplicados sobre la coordenada no actuada.
- Existe una constante positiva d_1 tal que $\|D_1\| \leq d_1 \|\dot{z}\|$, $\forall \dot{z} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Obsérvese que la Hipótesis 1 divide la clase de sistemas dependiendo del caso de estudio. En adelante se hará referencia a esta Hipótesis como 1a ó 1b.

Observación 2. Puede compararse la clase de sistemas dada por la Hipótesis 1, con los sistemas con coordenadas cíclicas. De esta forma, si la submatriz de inercia M_{22} no depende de las coordenadas actuadas X , y la función escalar $\Phi(X)$ es nula, entonces las coordenadas X son las coordenadas cíclicas.

La Hipótesis 1 esencialmente impone que los elementos no actuados de M son función de la coordenada no actuada. Esta hipótesis se verifica en muchos ejemplos conocidos como, por ejemplo, la aeronave de despegue vertical VTOL, el péndulo con disco de inercia y el péndulo sobre el carro.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

En este apartado se presenta la metodología constructiva para la obtención del controlador. La metodología es una generalización del trabajo presentado en (Acosta y López-Martínez, 2005) para una clase de sistemas para la cual se ha demostrado estabilidad asintótica. El controlador se obtiene en varios pasos: En primer lugar se propone la salida ficticia a construir y se desarrolla un controlador a partir de la misma. En segundo lugar, se rediseña la salida para garantizar que la dinámica cero del sistema sea asintóticamente estable y localmente exponencialmente estable. Finalmente, se añade al controlador un término, diseñado por Lyapunov, para estabilizar la dinámica externa. Una de las contribuciones más importantes de este trabajo es que la salida rediseñada permite emplear, como función de Lyapunov, una función compuesta obtenida con la función de energía de la dinámica cero más una función cuadrática de la salida ficticia.

3.1 Diseño constructivo de la salida

Sea $\xi(z) \in \mathbb{R}^{n-1}$ una función vectorial suave a definir, es decir, continua y, al menos, derivable, C^2 . Así, dadas las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico subactuado (3) que verifica la Hipótesis 1, la salida a construir se define como

$$\eta_0(z, \dot{q}) \triangleq [\xi(z) \ I_{n-1}] \dot{q}, \quad \eta_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (6)$$

Obsérvese que la salida es una composición no lineal de las velocidades generalizadas. Será diseñada para que ξ tenga rango completo, al menos en un entorno del origen $z = 0$. Este punto será desarrollado más adelante. A continuación, para obtener la dinámica cero asociada a esta salida, se calcularán derivadas consecutivas hasta que la entrada de control aparezca de forma explícita. Siguiendo el procedimiento habitual se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_0 &= \dot{\xi}(z)\dot{z} + [\xi(z) \ I_{n-1}] \ddot{q} \\ &= \frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 - \frac{F_1 \xi}{m_{11}} - \underbrace{\left(\xi \frac{m_{12}^\top}{m_{11}} - I_{n-1} \right)}_{\Delta(z)} u = \nu \end{aligned} \quad (7)$$

donde se han usado las ecuaciones de movimiento (3) en la última igualdad, se ha definido la matriz $\Delta(z) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, y ν representa el controlador externo que será definido más adelante y que

estabiliza de forma asintótica la dinámica externa. Obsérvese que el grado relativo de la salida es uno, y que se obtiene una dinámica cero de segundo orden. Así, para una fácil identificación, se denotará a lo largo de todo el artículo, como $\mathcal{Z} = (z, \dot{z}) \in \mathbb{R}^2$ para representar el espacio de estados de esta dinámica cero. La ley de control que linealiza el sistema se obtiene despejando la entrada de control u , resultando

$$u = \Delta^{-1} \left(\frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 - \frac{F_1(q, \dot{q})}{m_{11}} \xi - \nu \right), \quad (8)$$

donde la matriz $\Delta(z)$ es no singular en el conjunto $\mathcal{F} \equiv \{z \in \mathbb{R} : \det(\Delta) \neq 0\}$, siendo su determinante, $\det(\Delta) = m_{12}^\top / m_{11} \xi - 1$. Para obtener el valor particular de la señal de control para la dinámica cero, se hacen cero la salida η y sus derivadas, obteniéndose que $\nu = 0$. De esta forma la señal de control particular para la dinámica cero es,

$$u_0 \triangleq u|_{\nu=0} = \Delta^{-1} \left(\frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 - \frac{F_1(q, \dot{q})}{m_{11}} \xi \right).$$

Obsérvese que ξ es la función vectorial a diseñar y que modifica el conjunto \mathcal{F} y que por construcción, el determinante $\det(\Delta) \neq 0$ al menos en un entorno del origen $z = 0$. Esto puede verse fácilmente desarrollando en serie de Taylor. El conjunto \mathcal{F} normalmente se denomina región de factibilidad (*feasibility region*) (Li y Krstic, 1997). La cuenca de atracción puede estimarse por la intersección de la región de factibilidad y el mayor subconjunto compacto de la función de Lyapunov, incluyendo el equilibrio deseado. En el próximo apartado la función vectorial $\xi(z)$ será diseñada para que establezca la dinámica cero asociada a la salida ficticia propuesta (6).

3.2 Diseño de la función vectorial $\xi(z)$

En este apartado se diseñará la función vectorial $\xi(z)$ de la salida. Para ello, se propone emplear una función escalar denotada por $E_0(\mathcal{Z}) \in \mathbb{R}$ y que representa una función de energía para la dinámica cero asociada a la salida (6). Esta función se define como

$$E_0(\mathcal{Z}) = \frac{1}{2} \hat{\Delta}(z) \dot{z}^2 + V_0 - V(z), \quad (9)$$

donde V_0 es una constante que representa la energía potencial de referencia y donde la función escalar $\hat{\Delta}(z) \in \mathbb{R}$, se define como $\hat{\Delta} \triangleq m_{11} \det(\Delta)$. Esta función de energía será empleada más adelante como candidata a función de Lyapunov para la dinámica cero, y a partir de ahí se podrá construir la función vectorial $\xi(z)$. Para ello, se calculará la derivada de la función de energía (9) a lo largo de las trayectorias del sistema, y ésta dará la clave para elegir $\xi(z)$. En este punto, se puede enunciar el primer resultado general en el siguiente lema:

Lema 1. (Condición Geométrica). Considérese el sistema dinámico dado por las ecuaciones (3) bajo la Hipótesis 1a, y el controlador dado por la ecuación (8). Entonces, la función (9) es una constante de movimiento a lo largo de las trayectorias del sistema, es decir, $\dot{E}_0(t) = 0, \forall t \geq 0$, si la función vectorial, $\xi(z)$, se define como

$$\xi(z) \triangleq K_1 m_{12}(z), \quad (10)$$

siendo $K_1 = K_1^\top$, $K_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, una matriz constante simétrica de rango completo. Además, sea el conjunto $\Omega \triangleq \{z \in \mathbb{R} | \hat{\Delta}(z) > 0\}$, y elíjase $K_1 > 0$ y $V_0 > 0$, entonces la función (9) es definida positiva en Ω , y puede interpretarse como una función de energía para la dinámica cero en ese conjunto.

Demostración. Para demostrar el lema es necesario calcular la derivada respecto al tiempo de la función de energía (9), pero para ello se han de obtener las ecuaciones de la dinámica cero. Así, la dinámica cero se obtiene haciendo $\eta_0 = \dot{\eta}_0 = 0$, lo cual implica $\nu = 0$. Sustituyendo la entrada de control (8) en la primera ecuación de (3), y simplificando la expresión se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{1}{m_{11}} (F_1(q, \dot{q}) + m_{12}^\top u_0) \\ &= -\frac{F_1(q, \dot{q})}{m_{11}} - \frac{m_{12}^\top}{m_{11}} \Delta^{-1} \left(\frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 - \frac{F_1(q, \dot{q})}{m_{11}} \xi \right) \\ &= -\frac{F_1(q, \dot{q})}{m_{11}} \left(1 - \frac{m_{12}^\top}{m_{11}} \Delta^{-1} \xi \right) - \frac{m_{12}^\top}{m_{11}} \Delta^{-1} \frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 \\ &= \frac{1}{\hat{\Delta}} \left(F_1(q, \dot{q}) - m_{12}^\top \frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

donde se ha usado la igualdad $\hat{\Delta} m_{12}^\top = m_{11} m_{12}^\top \Delta$, en la última línea. Entonces, la derivada de la energía puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{E}_0 &= \left(\frac{1}{2} \frac{d\hat{\Delta}}{dz} \dot{z}^2 + \hat{\Delta} \ddot{z} - \frac{dV}{dz} \right) \dot{z} \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{d\hat{\Delta}}{dz} \dot{z}^2 + F_1(q, \dot{q}) - m_{12}^\top \frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 - \frac{dV}{dz} \right) \dot{z} \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{d\hat{\Delta}}{dz} \dot{z}^2 + e_1^\top C \dot{q} - m_{12}^\top \frac{d\xi}{dz} \dot{z}^2 \right) \dot{z} \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dm_{12}^\top}{dz} \xi - m_{12}^\top \frac{d\xi}{dz} - \frac{dm_{11}}{dz} \right) \dot{z}^2 + e_1^\top C \dot{q} \right) \dot{z} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dm_{12}^\top}{dz} \xi - m_{12}^\top \frac{d\xi}{dz} \right) \dot{z}^2 - \dot{X}^\top \frac{\partial M_{22}}{\partial z} \dot{X} \right) \dot{z} \\ &= -\frac{1}{2} [m_{12}, \xi] \dot{z}^3 \end{aligned} \quad (12)$$

donde se ha empleado (11) en la segunda línea; se ha expandido la función $F_1(q, \dot{q})$ usando (4) en la tercera línea; se ha calculado $\frac{d\hat{\Delta}}{dz}$ en la cuarta línea; se ha expandido el término $e_1^\top C \dot{q}$ en la

quinta línea y en la última línea, por un lado los términos generados por $e_1^\top C \dot{q}$ que dependen de \dot{z} se reagrupan y los restantes son cero, ya que debido a la Hipótesis 1 M_{22} no es función de z ; y por otro lado se ha compactado la expresión haciendo uso de la definición de corchete de Lie (*Lie bracket*). Seguidamente, empleando (10) el corchete de Lie en la última línea es igual a cero, debido a que ambos vectores son paralelos, y por tanto, E_0 es una constante de movimiento para la dinámica cero. Para demostrar la última afirmación del lema, emplearemos la Observación 1 junto con (10), teniendo en cuenta que la matriz K_1 es simétrica y de rango completo. Entonces, por construcción, para cualquier $K_1 > 0$ existe al menos un entorno \mathcal{N} del origen $z = 0$ tal que $\hat{\Delta}(z) > 0$, $\forall z \in \mathcal{N}$, por continuidad. De este modo, se puede elegir la constante V_0 positiva tal que $E_0 > 0$, $\forall z \in \mathcal{N}$. Para hacer extensible el argumento a todo el conjunto Ω , simplemente hay que tener en cuenta que como (10) hace que el conjunto Ω dependa de una forma cuadrática asociada a la matriz definida positiva K_1 , se puede aumentar el valor de esta forma cuadrática aumentando K_1 , finalizando la demostración. \triangleleft

Corolario 1. El sistema dinámico dado por las ecuaciones (3) bajo la Hipótesis 1a, y el controlador definido por la ecuación (8) es un sistema débilmente de fase mínima (*weakly minimum-phase*) (Byrnes et al, 1999).

Demostración. La demostración es sencilla si se emplea el Lema 1, ya que la función de energía E_0 tiene un mínimo en el origen de la dinámica cero y, por tanto, puede usarse como función de Lyapunov para la dinámica cero. \triangleleft

Observación 3. Es importante resaltar que el conjunto Ω definido en el Lema 1 coincide, por construcción, con el conjunto de factibilidad \mathcal{F} anteriormente comentado. Luego, se pueden extrapolar los resultados locales en el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ a resultados globales $\Omega \equiv \mathbb{R}$ analizando sólo la solución dentro de este conjunto.

3.3 Rediseño de la salida

Una vez definida la función vectorial $\xi(z)$, se puede atacar el problema de control para hacer que el origen de la dinámica cero sea asintóticamente estable y localmente exponencialmente estable. Del paso anterior de diseño, es fácil ver que usando la función (9) como candidata a función de Lyapunov sólo es posible demostrar que el origen $\mathcal{Z} = \{0\}$ de la dinámica cero es estable, en el

sentido de Lyapunov. Para conseguir estabilidad asintótica es necesario modificar la salida ficticia propuesta (6). Como de la Proposición 3, la función (9) se considera una función de energía para la dinámica cero, entonces esta dinámica cero se puede interpretar como la dinámica de un sistema mecánico más simple. De ese modo, se podría realimentar la correspondiente salida pasiva (van der Schaft, 1999), con el propósito de hacer que la derivada de la función de energía a lo largo de las trayectorias sea semidefinida negativa. Para ello, se divide la acción de control en dos términos, $u_0 + u_p$, donde u_p es el término correspondiente añadido a la ley de control (8). Así, se podría obtener este nuevo término de control rediseñando la salida propuesta (6). Se denotará por η a la salida rediseñada. Entonces, como la función vectorial $\xi(z)$ ha sido definida, la nueva salida ficticia se obtiene identificando la salida pasiva para la función de energía (9), resultando

$$\eta(z, \dot{q}) \triangleq \eta_0 + K_2 \int_0^z m_{12}(\mu) d\mu, \quad \eta(\cdot) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (13)$$

donde $K_2 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, es una matriz constante, diagonal y definida positiva. Derivando la nueva salida se puede obtener la señal de control $u = u_0 + u_p$, repitiendo los cálculos anteriores, y se llega a

$$\dot{\eta}(z, \dot{q}) = \dot{\eta}_0 + K_2 m_{12}(z) \dot{z}, \quad (14)$$

y por lo tanto, el controlador rediseñado empleando (8) resulta

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_p = u_0 + \Delta^{-1} K_2 m_{12} \dot{z} \\ &= \Delta^{-1} \left(K_1 \left(\frac{dm_{12}}{dz} \dot{z}^2 - \frac{m_{12}}{m_{11}} F_1 \right) + K_2 m_{12} \dot{z} - \nu \right) \end{aligned} \quad (15)$$

4. RESULTADO PRINCIPAL

Antes de presentar el resultado principal referente a la estabilidad asintótica de la clase, hay que aclarar dos cuestiones referentes a la misma. La primera se refiere a la Hipótesis 1a y la segunda a la energía potencial de los sistemas.

La Hipótesis 1a juega un papel crucial en el problema de estabilización, por lo que será tratada ahora con mayor detalle. Se denominará a la clase de sistemas que verifica la Hipótesis 1a como la *clase constructiva*, en virtud del Lema 1. Dicho Lema, junto con la salida rediseñada (13) dará lugar a los dos siguientes resultados: la función de energía (9) es candidata a función de Lyapunov para la dinámica cero asociada a la salida rediseñada (13); y, el origen de la dinámica cero será asintóticamente estable. A pesar de

estos resultados prometedores referentes a la clase constructiva, el requerimiento de ausencia de fricción en las coordenadas no actuadas, dado por la Hipótesis 1a, es demasiado restrictivo. De hecho, es bien sabido que una vez que el origen de la dinámica cero, correspondiente a la salida definida, es asintóticamente estable, entonces es posible estabilizar local y asintóticamente el sistema completo en el origen empleando un controlador externo lineal (Isidori, 1996). Por otro lado, como se mostrará más adelante, el controlador propuesto hace que el origen de la dinámica cero sea no sólo asintóticamente estable, sino también exponencialmente estable. De esta forma, se presentarán los resultados de estabilización en dos subapartados: el primero de ellos empleando la clase constructiva; y el segundo, extendiendo la clase a sistemas con fricción en las coordenadas no actuadas. En la última sección dedicada a los ejemplos de aplicación, se resolverá el problema de control para sistemas con fricción en las coordenadas no actuadas, tanto para la aeronave VTOL, como para el péndulo con disco de inercia y el péndulo sobre el carro.

Por otro lado, la energía potencial del sistema en bucle abierto, también juega un papel crucial en el problema de estabilización. En este trabajo se considera que la clase de sistemas es tal que el punto $\mathcal{Z} = \{O\}$ corresponde a un equilibrio que en bucle abierto es inestable, y por tanto la función de energía potencial del sistema sin controlar $V(z)$ tendrá un *máximo*. Así, será necesario modificar las fuerzas inducidas por las coordenadas no actuadas por medio de un término de acoplamiento que ha sido denominado $\hat{\Delta}$. Como se pretende obtener una *solución explícita de forma constructiva* al problema de estabilización asintótica para la clase de sistemas mecánicos subactuados inestables, se introducirá la siguiente hipótesis adicional:

Hipótesis 2. $\frac{d^2V}{dz^2}(0) < 0$ y $\frac{dV}{dz} \neq 0, \forall z \in \Omega \setminus \{0\}$, que establece que el equilibrio sea aislado en Ω .

Por otro lado, el enfoque dado en (Isidori, 1996), que establece que dada una salida cuya dinámica cero asociada tiene un equilibrio asintóticamente estable, el sistema no lineal completo puede ser localmente estabilizado mediante realimentación lineal de la salida. Sin embargo, sólo tiene validez local, y no como el resultado que se presenta en este artículo, en el que se diseña un controlador externo *no lineal* basado en una función de Lyapunov, a partir de la cual se pueden estimar mayores cuencas de atracción. Además, la ley de control es explícitamente resuelta, siendo su expresión bastante simple y compacta. Finalmente resaltar que si el objetivo final del controlador propuesto fuese el de controlar la dinámica interna de un vehículo pilotado al que se le pasan manualmente

los puntos de regulación de las variables actuadas, entonces el equilibrio deseado vendría dado por $(\mathcal{Z}, \tilde{\eta}) = (O, O)$ donde $\tilde{\eta} = \eta - \eta_{ref}$ y η_{ref} es el punto de operación deseado.

4.1 Caso sin fricción $D_1 = 0$.

En la siguiente proposición se establecen las principales condiciones para estabilizar el sistema en el equilibrio deseado usando la salida (13). Además, se ha obtenido una expresión explícita compacta de la ley de control para la clase de sistemas propuesta.

Proposición 1. Dado el sistema mecánico subactuado dado por las ecuaciones (3), bajo las Hipótesis 1a y 2, y con aplicación del Lema 1, el controlador estático (15) junto con el controlador externo

$$\nu = -K_3 (m_{12}\dot{z} + P\tilde{\eta}), \quad (16)$$

para cualquier matriz $K_2 > 0$ constante diagonal y de rango completo, como la definida en (13), y la matriz diagonal $K_3 > 0$, $K_3 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, aseguran que

- (i) el sistema es parcialmente linealizable entrada-salida en el conjunto Ω empleando la salida (13);
- (ii) la función $W(\mathcal{Z}, \eta) \in \mathbb{R}$, definida positiva y acotada inferiormente, dada por

$$W(\mathcal{Z}, \tilde{\eta}) = E_0(\mathcal{Z}) + \frac{1}{2}\tilde{\eta}^\top P\tilde{\eta}, \quad (17)$$

con E_0 definido en (1) y $P = P^\top > 0$ una matriz constante, $P \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, es una función de Lyapunov en el conjunto Ω .

- (iii) el equilibrio $(\mathcal{Z}, \tilde{\eta}) = (O, O)$ de la dinámica en bucle cerrado es asintóticamente y localmente exponencialmente estable. Asimismo, la dinámica cero es exponencialmente estable (sistema de fase mínima);

Además, dado el subconjunto compacto Ω_c definido como

$$\Omega_c = \{(\mathcal{Z}, \tilde{\eta}) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \mid W(\cdot) \leq c\}, \quad (18)$$

con c una constante positiva, entonces la cuenca de atracción puede estimarse por el mayor Ω_c .

Demostración. La primera afirmación se demuestra directamente de las ecuaciones (7), (14) y (15). Para demostrar la estabilidad asintótica del origen, y así la segunda y tercera afirmación, se hará uso del Lema 1. En dicho lema, la función (9) es definida positiva en Ω y, por lo tanto, (17) también es definida positiva. Así, la derivada con respecto al tiempo de (17) a lo largo de las trayectorias del sistema resulta

$$\dot{W} = -m_{12}^\top K_2 m_{12} \dot{z}^2 + (m_{12} \dot{z} + P\tilde{\eta})^\top \nu, \quad (19)$$

donde por el lema 1 $\dot{E}_0 = 0$. Si ν es el controlador externo dado por (16), se obtiene que $\dot{W} \leq 0$, resultando que la derivada es sólo semidefinida negativa, y entonces se va a demostrar por La Salle que el mayor conjunto invariante en el conjunto $\{\dot{W} = 0\}$ es el equilibrio deseado. Así, teniendo en cuenta la observación 1, el caso de estudio es la dinámica residual con $\dot{z} = 0$ y $\tilde{\eta} = O$, y por tanto $\nu = 0$. Por definición de η (13), junto con $\dot{z} = 0$, se obtienen $n - 1$ restricciones dadas por

$$\dot{X} + K_2 \int_0^z m_{12}(\mu) d\mu - \eta_{ref} = O. \quad (20)$$

Si se demuestra que la coordenada no actuada z tiende a cero, es decir, que el origen de la dinámica cero es asintóticamente estable, entonces, por la expresión anterior el vector \dot{X} tenderá a η_{ref} , lo que equivale a que $\tilde{\eta} = O$. Para ello, tras realizar algunos cálculos se observa que la dinámica cero viene gobernada por la ecuación (11) con ξ dada en el Lema 1 por (10) y F_1 por (4). Fijando, a continuación $\dot{z} = 0$, la ecuación (11) queda $0 = \frac{1}{\hat{\Delta}} \frac{dV}{dz}$, puesto que el término $e_1^\top C \dot{q}$ bajo la Hipótesis 1 tiene como factor común \dot{z} . Invocando el lema 1, por construcción, $\hat{\Delta}(z) > 0$, $\forall z \in \Omega$ y por la Hipótesis 2 $\frac{dV}{dz} = 0$ sólo en el equilibrio $z = 0$, tomando otro valor no nulo en $\Omega \setminus \{0\}$, con lo que el conjunto invariante más grande en el conjunto $\{\dot{W} = 0\}$ es el equilibrio $(Z, \tilde{\eta}) = (O, O)$, y por lo tanto es asintóticamente estable.

El hecho de que el equilibrio sea también localmente exponencialmente estable se demuestra directamente a través de la linealización. Así, la linealización de la dinámica del bucle cerrado resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & O \\ -c_1 & -c_2 & -c_3^\top \\ O & -c_4 & -C_5 \end{bmatrix}_{z=0} \begin{bmatrix} z \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix},$$

donde $c_1 = -d^2V/dz^2 \hat{\Delta}^{-1}$ y $c_2 = m_{12}^\top (K_2 + K_3 K_2) m_{12} \hat{\Delta}^{-1}$ son escalares, $c_3 = K_3 P m_{12} \hat{\Delta}^{-1}$ y $c_4 = K_3 K_2 m_{12}$ vectores y $C_5 = K_3 P$ una matriz. Teniendo en cuenta que $\hat{\Delta}$, K_1 , y P son positivos y que K_2 , K_3 son diagonales y positivas, es posible verificar que todos los autovalores tienen parte real negativa. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad se fijará la matriz P como diagonal y también $C_5 = c_5 I_{n-1}$ donde $c_5 > 0$ es una constante. En este caso, el polinomio característico viene dado por

$$(\lambda + c_5)^{n-2} (\lambda^3 + (c_2 + c_5) \lambda^2 + (c_1 + c_2 c_5 - c_3^\top c_4) \lambda + c_1 c_5) = 0.$$

Y aplicando el criterio de Routh-Hurwitz, han de satisfacerse las siguientes condiciones

$$c_1 + c_2 c_5 - c_3^\top c_4 > 0, \quad (21)$$

$$c_2 (c_1 + c_2 c_5 + c_5^2) - (c_5 + c_2) (c_3^\top c_4) > 0. \quad (22)$$

Por otro lado, sustituyendo la desigualdad (21) en (22) resulta que

$$c_2 c_5 - c_3^\top c_4 = \left[\frac{K_3 P m_{12}^\top K_2 m_{12}}{\hat{\Delta}} \right]_{z=0} > 0,$$

lo cual siempre se verifica por definición. Por otro lado, como $c_1 > 0$ la desigualdad (21) es automáticamente satisfecha y, por lo tanto, la matriz es Hurwitz, siendo el origen localmente exponencialmente estable. Nótese que el Jacobiano de la dinámica cero es también Hurwitz ($c_1 > 0$ y $c_2 > 0$), por lo que el sistema es también de fase mínima.

Finalmente, la cuenca de atracción puede estimarse teniendo en cuenta que Ω_c es el mayor conjunto acotado de nivel de W y el Principio de La Salle. \triangleleft

Observación 4. (Globalidad). Partiendo de la proposición 1 es fácil comprobar que el origen de la dinámica cero podría ser (cuasi) globalmente asintóticamente estable si el conjunto Ω se extendiera a todo \mathbb{R} , es decir, que $\Omega \equiv \mathbb{R}$, como consecuencia de la Hipótesis 2. (Véase ejemplo 5.3).

Observación 5. (Robustez). Es importante resaltar que según la proposición 1, el origen de la dinámica cero es (localmente) exponencialmente estable, lo que le confiere al sistema en bucle cerrado cierta robustez frente a perturbaciones externas (Khalil, 2001).

4.2 Caso con fricción $D_1 \neq 0$.

En el apartado anterior se ha demostrado que la ley de control (15) estabiliza la dinámica cero para una clase de sistemas para la que se verifica la Hipótesis 1a. En este apartado se demostrará que, *la misma ley de control* (15)–(16) puede también estabilizar la dinámica cero para una clase extendida de sistemas. Del mismo modo, se demostrará que el controlador propuesto puede estabilizar asintóticamente en el equilibrio, a sistemas satisfaciendo la Hipótesis 1b.

Proposición 2. Considérese el sistema mecánico subactuado dado por las ecuaciones (3), satisfaciendo las Hipótesis 1b y 2, así como el Lema 1. Entonces, la ley de control dada por (15) junto con el controlador externo (16), para cualquier matriz constante $K_2 > 0$ de rango pleno, definida en (13), tal que $m_{12}^\top K_2 m_{12} > d_1$, $\forall z \in \Omega$ con d_1 la constante definida positiva en la Hipótesis 1b,

Tabla 1. Parámetros físicos de los sistemas

Sistema	gdl (n)	Energía Potencial		Matriz de Inercia		
		$V(z)$	$\Phi(X)$	$m_{11}(z)$	$m_{12}^\top(z)$	$M_{22}(q)$
PPC	2	$mgl \cos(z)$	-	ml^2	$ml \cos(z)$	$M + m$
PDI	2	$mgl \cos(z)$	-	$J_1 + J_2$	J_2	J_2
VTOL	3	$\frac{mgl}{\tan(\alpha)} \cos(z)$	mgx_2	J	$-\frac{ml}{\tan(\alpha)} [\cos(z) \sin(z)]$	mI

y siendo $K_3 > 0$, $K_3 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ una matriz diagonal, asegura las mismas tres afirmaciones establecidas en la proposición 1.

Demostración. La primera afirmación se demuestra directamente de (7), (14) y (15). Para demostrar la estabilidad asintótica del origen (segunda y tercera afirmación), del Lema 1 la función (9) es definida positiva en Ω y por tanto (17) también es definida positiva. La derivada respecto del tiempo de (17) a lo largo de las trayectorias del sistema se obtiene de (19), resultando

$$\dot{W} = -m_{12}^\top K_2 m_{12} \dot{z}^2 + D_1 \dot{z} + (m_{12} \dot{z} + P\tilde{\eta})^\top \nu,$$

y por la Hipótesis 1b, $\|D_1\| \leq d_1 \|\dot{z}\|$, resulta

$$\dot{W} \leq -(m_{12}^\top K_2 m_{12} - d_1) \dot{z}^2 + (m_{12} \dot{z} + P\tilde{\eta})^\top \nu,$$

y teniendo en cuenta que $m_{12}^\top K_2 m_{12} > d_1$ entonces $\dot{W} \leq 0$. Siguiendo los mismos pasos que en la demostración de la proposición 1, el equilibrio $(\mathcal{Z}, \tilde{\eta}) = (O, O)$ es asintóticamente estable.

La tercera afirmación, referente a la estabilidad exponencial del equilibrio, se demuestra analizando el Jacobiano del sistema, igual que en la demostración de la proposición 1, pero imponiendo ahora que $m_{12}^\top K_2 m_{12} > d_1$. Otra forma de demostrar la afirmación es considerar al término de fricción como una perturbación no persistente que se hace cero en el origen y con una restricción de crecimiento lineal \dot{z} , tal que $\|D_1\| \leq d_1 \|\dot{z}\|$. De esta forma, cuando se aplica al sistema que, en ausencia de perturbación, es exponencialmente estable, da lugar a que el equilibrio perturbado es también localmente exponencialmente estable (Khalil, 2001). \triangleleft

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En este apartado la ley de control propuesta se ha aplicado a tres sistemas: El péndulo plano sobre el carro (PPC), el péndulo con disco de inercia (PDI) y la aeronave de despegue vertical (VTOL), esta última caracterizándose por ser un sistema multivariable (MIMO).

La tabla 1 presenta un resumen de los parámetros físicos más relevantes de estos sistemas, en especial la matriz de inercia y la energía potencial de los mismos. Se ha denotado con la letra m la masa

en kilogramos, con l la longitud en metros, con g la constante de la gravedad en m/s^2 , con J el momento de inercia en $Kg \cdot m^2$, con α un ángulo en radianes y con I la matriz identidad de dimensión dos.

Del mismo modo, en la tabla 2 se han resumido para los tres ejemplos, las salidas η , las leyes de control internas u y las externas ν , obtenidas sustituyendo en las ecuaciones (13), (15) y (16), respectivamente.

Finalmente, hay que resaltar el hecho de que normalmente los controladores diseñados para sistemas subactuados se basan en modelos en los que se han despreciado las fuerzas de fricción, incluso las aplicadas en las coordenadas no actuadas. Sin embargo, en (Gómez-Estern et al, 2004) se demostró que dicha fricción podía desestabilizar a los sistemas subactuados. De este modo, en los ejemplos propuestos en este apartado, se han tenido en cuenta los efectos de fricción, incluyéndose en los modelos dinámicos.

Por otro lado, en lo que se refiere al procedimiento de ajuste del controlador, hay que elegir tres matrices de ponderación: K_1 , para agrandar la cuenca de atracción para aquellos casos en los que la ley de control no está globalmente definida; K_2 , para ponderar la asignación de amortiguamiento en la coordenada no actuada; y $K_3 P$, para ponderar el tiempo de respuesta de las coordenadas actuadas. En los ejemplos, se denota por \mathcal{Z} las coordenadas de las que depende la dinámica cero, y con X a las restantes coordenadas físicas de interés, obteniéndose a través de un difeomorfismo de las originales definidas en el presente trabajo.

5.1 Péndulo plano sobre el carro (PPC).

En (Bloch et al, 2000) puede encontrarse un modelo detallado de este sistema. En la tabla 1, m y l son la masa y la longitud del péndulo, mientras que M es la masa del carro. Se ha denotado con z el ángulo que forma el péndulo con la vertical, y con x el desplazamiento horizontal.

En este sistema, la ley de control interna u no está globalmente definida para todo valor de z . Así, la región Ω , que depende de la constante K_1 , lleva a un máximo valor teórico de z dado por $|z| \leq \arccos((K_1 m r l / J_p)^{-\frac{1}{2}})$ (Acosta y López-Martínez, 2005). Esta región es ajustable por medio de K_1 , pudiéndose estabilizar al sistema par-

tiendo de cualquier estado inicial que se encuentre por encima del plano horizontal del péndulo. En la figura 1 se muestra una simulación.

5.2 Péndulo con disco de Inercia (PDI).

La descripción detallada de este sistema puede encontrarse en (Spong et al, 2001), donde las fuerzas de fricción no se tuvieron en cuenta. En la tabla 1, m y l son la masa y la longitud del péndulo respectivamente, siendo J_1 la inercia del péndulo y J_2 la inercia del motor.

En este ejemplo, la solución de la ley de control sí está globalmente definida. Sin embargo, la existencia de varios puntos de equilibrio no físicamente equivalentes, hacen del origen sólo localmente asintótica y exponencialmente estable. Eligiendo $K_2 > k_2^*$ con $k_2^* = \frac{|\dot{x}|_{max}}{2\pi} < \infty$ donde $|\dot{x}|_{max}$ es el máximo valor práctico de \dot{x} , que siempre existe, y por tanto también k_2^* . En la Fig. 1 se muestra una simulación del comportamiento del sistema controlado.

5.3 Aeronave de despegue vertical (VTOL).

En (Martin et al, 1996) se puede encontrar una descripción detallada del VTOL. En la tabla 1, m representa la masa de la aeronave, l la distancia entre el centro de gravedad y el extremo del ala, J el momento de inercia respecto del eje que pasa por el centro de gravedad y α el ángulo de deflexión del ala.

En este caso, por reducir los desarrollos, se han definido las siguientes constantes en la tabla 2:

$$\begin{aligned} \hat{k}_i &= K_i \frac{ml}{\tan \alpha} \quad i=1,2,3 \\ \hat{P} &= P \frac{\tan \alpha}{ml} \\ \varepsilon &= J \frac{\tan \alpha}{ml} \end{aligned}$$

La coordenada no actuada es z , que representa el ángulo de alabeo, x_1 es el desplazamiento horizontal y x_2 el vertical. Se puede observar que en este ejemplo la ley de control está globalmente definida, y que todos los equilibrios existentes son físicamente equivalentes, por lo que la ley estabiliza cuasi-global y asintóticamente el sistema en el equilibrio deseado (véase Observación 4). En la Fig. 1 se muestra una simulación en la que se observa como todos los estados tienden asintóticamente al equilibrio.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una ley de control obtenida de forma constructiva para una clase

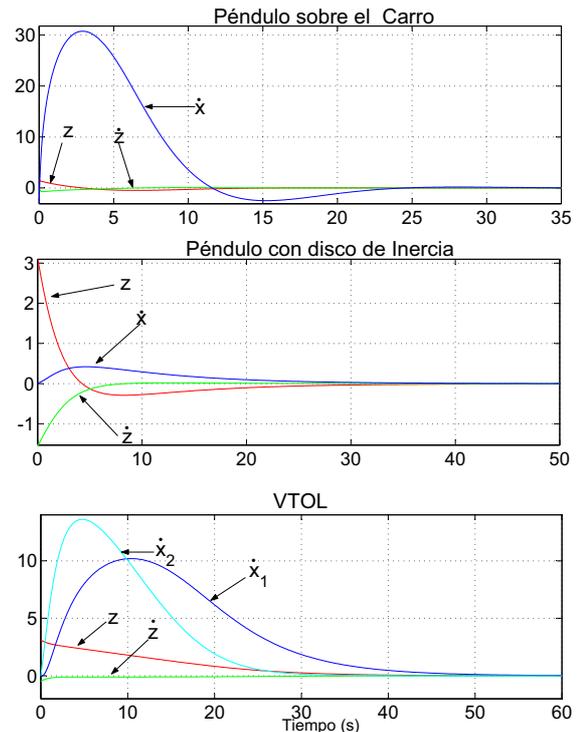


Figura 1. Simulaciones en regulación.

de sistemas mecánicos subactuados inestables con fricción y grado de subactuación uno. La metodología está basada en técnicas clásicas como la linealización por realimentación entrada-salida, así como el rediseño por Lyapunov. El controlador está basado en la obtención de una salida ficticia rediseñada de forma constructiva. La ley de control obtenida para esta clase de sistemas ha sido satisfactoriamente aplicada a tres sistemas típicamente empleados para testar leyes de control: el péndulo plano sobre el carro, el péndulo con disco de inercia y la aeronave de despegue vertical.

Actualmente se está investigando la forma de extender este trabajo a sistemas multivariables con grado de subactuación mayor que uno.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha desarrollado gracias a la financiación del Ministerio de Educación y Ciencia, a través de los proyectos CICYT-FEDER DPI2004-06419 y DPI2006-07338, por la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa y por la Junta de Andalucía TEP1563.

REFERENCIAS

Avila Vilchis, J.C., B. Brogliato, A. Dzul y R. Lozano (2003). Nonlinear modelling and Control of Helicopters. *Automatica*, **39**, pp. 1583-1596.

Tabla 2. Sistemas en bucle cerrado.

Sistema	Salida η , ec. (13)	Controlador u - ν , ec. (15)–(16)
PPC	$\dot{x} + K_1 ml \cos z \dot{z} + K_2 ml \sin z$	$\Delta = 1 - K_1 m \cos^2 z$ $\nu = -K_3 (\eta P + ml \cos z \dot{z})$ $u = \Delta^{-1} \left(\nu + K_1 ml \sin z \left(-\frac{g}{l} \cos z + \dot{z}^2 \right) - K_2 ml \cos z \dot{z} \right)$
PDI	$\dot{x} + K_1 J_2 \dot{z} + K_2 J_2 z$	$\Delta = 1 - K_1 \frac{J_2^2}{J_1 + J_2}$ $\nu = -K_3 (\eta P + J_2 \dot{z})$ $u = \Delta^{-1} \left(\nu + K_1 \frac{J_2}{J_1 + J_2} (-mgl \sin z + k_f \dot{z}) - K_2 J_2 \dot{z} \right)$
VTOL	$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \hat{k}_1 \begin{pmatrix} \cos z \\ \sin z \end{pmatrix} \dot{z} - \hat{k}_2 \begin{pmatrix} \sin z \\ 1 - \cos z \end{pmatrix}$	$\Delta^{-1} = \frac{1}{\varepsilon - \hat{k}_1} \begin{bmatrix} \varepsilon - \hat{k}_1 \sin^2 z & \frac{1}{2} \hat{k}_1 \sin 2z \\ \frac{1}{2} \hat{k}_1 \sin 2z & \varepsilon - \hat{k}_1 \cos^2 z \end{bmatrix}$ $\nu = -\hat{k}_3 \left[\hat{P}\eta - \dot{z} \begin{pmatrix} \cos z \\ \sin z \end{pmatrix} \right]$ $u = \Delta^{-1} \left[\nu + \hat{k}_1 \begin{pmatrix} -\sin z \\ \cos z \end{pmatrix} \dot{z}^2 + \hat{k}_2 \begin{pmatrix} \cos z \\ \sin z \end{pmatrix} \dot{z} + \frac{\hat{k}_1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin 2z \\ \sin^2 z \end{pmatrix} \right]$

- Åkesson, J., y K.J. Åström (2001). Safe manual control on the Furuta pendulum, *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pp. 890-895.
- Acosta, J.Á., y M. López-Martínez (2005). Constructive feedback linearization of underactuated mechanical systems with 2 DOF, *Proceedings of the Joint Conference on Decision and Control and European Control Conference*.
- Acosta, J.Á., R. Ortega y A. Astolfi (2005), Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**, (12), pp. 1936–1955.
- Bates, D., y I. Postlethwaite (2002). *Robust Multivariable Control of Aerospace Systems*. Delft University Press.
- Bloch, A.M., N.E. Leonard y J.E. Marsden (2000). Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: The first matching theorem. *IEEE Transactions on automatic control*, **45**, (12).
- Byrnes, C.I., A. Isidori y J.C. Willems (1999). Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, **36**, (11), pp. 1228-1240.
- Fantoni, I., y R. Lozano (2002). *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. London. Springer.
- Gómez-Estern, F., A.V. der Shaft y J.Á. Acosta (2004). Passivation of underactuated systems with physical damping. *Proceedings of the Nonlinear Control Systems*.
- Grizzle, J.W., C. H. Moog, y C. Chevallereau (2005). Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable, *Transactions on Automatic Control*, **50**, (5), pp. 559- 576.
- Hyde, R.A. (1995). *H_∞ aerospace control design*. Advances in industrial control series. Springer-Verlag.
- Isidori, A. (1996), *Nonlinear Control Systems*, London, Springer-Verlag.
- Khalil, H. (2001), *Nonlinear control systems*, London, UK.
- Zhong-Hua Li y M. Krstić (1997). Maximizing regions of attraction via backstepping and CLFs with singularities, *System & Control Letters*, **30**, (1), pp. 195–207.
- Marsden, J.E. y T.S. Ratiu (1999). *Introduction to mechanics and symmetry*. Springer.
- Marino, R., y P. Tomei (1995). *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. Prentice Hall International.
- Martin, P., S. Devasia y B. Paden (1996). A different look at output tracking: Control of a VTOL aircraft, *Automatica*, **32**, (1), pp. 101–107.
- Ortega, R., M.W. Spong, F. Gómez-Estern y G. Blankenstein (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on automatic control*, **47**, (8), pp. 1218-1233.
- Pratt, R.W. (2000). *Flight Control Systems: Practical issues in design and implementation*. The institution of Electrical Engineers.
- Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, New York, Springer-Verlag.
- van der Schaft, A.J. (1999). *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Berlin, Springer-VerlGag.
- Spong, M.W., P. Corke y R.Lozano (2001). Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum. *Automatica*, **37**, pp. 1845-1851.
- Spong, M.W. (1996). Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. *Proceedings of IFAC World Congress*, pp. 431-435.