

SOLUCIONES CUASIPERIÓDICAS EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO RESONANTE

Gustavo Revel Diego M. Alonso Jorge L. Moiola

*Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica
"Alfredo Desages"*

*Dpto. de Ing. Eléctrica y de Computadoras
Universidad Nacional del Sur*

*Avda. Alem 1253, (B8000CPB) Bahía Blanca, Argentina
and CONICET*

e-mail: grevel@uns.edu.ar

Resumen: En este trabajo se estudia la dinámica de un circuito eléctrico resonante. Se presentan varios diagramas de bifurcaciones que pueden asociarse a la forma normal truncada de la singularidad de Hopf doble. Las curvas de bifurcaciones se obtienen a través de continuaciones numéricas. Se muestra la existencia de soluciones cuasiperiódicas con dos componentes frecuenciales (toros 2D), y tres componentes (toros 3D). Estas últimas, en cierta forma, están próximas en complejidad a soluciones caóticas. El análisis se complementa con simulaciones temporales y una discusión sobre la interacción de los autovalores del sistema linealizado al variar uno de los parámetros. *Copyright © 2007 CEA-IFAC*

Palabras Clave: sistemas dinámicos, circuitos no lineales, osciladores, ciclos límite, resonancia.

1. INTRODUCCIÓN

La aparición de oscilaciones en sistemas físicos puede explicarse, en varios casos, a través del mecanismo de la bifurcación de Hopf. En general, este fenómeno ocurre cuando al variar algún parámetro del sistema un par de autovalores del modelo linealizado cruza el eje imaginario, dando origen a una solución periódica o ciclo límite. Este tipo de bifurcación ha sido ampliamente estudiada en la literatura [véase por ejemplo (Marsden y McCracken, 1976; Hassard *et al.*, 1981)], abordando una importante cantidad de aplicaciones como por ejemplo acoplamiento de satélites (Liaw y Abed, 1990), rodamientos magnéticos (Mohamed y Emad, 1993), sistemas eléctricos de potencia (Wang *et al.*, 1995), compresores (Gu *et al.*, 1999), motores de inducción (Gordillo *et al.*, 2002), por citar sólo algunas de ellas.

Una situación con mayor riqueza dinámica se tiene cuando dos pares de autovalores cruzan simultáneamente el eje imaginario. Este fenómeno se conoce como bifurcación de Hopf doble o Hopf-Hopf y explica la aparición de fenómenos oscilatorios más complejos. Algunos de estos comportamientos son las oscilaciones cuasiperiódicas que se producen como consecuencia de la interacción de dos modos oscilatorios que presentan una relación de frecuencias irracional. La solución emergente también se conoce como toro bidimensional ó 2D. En ciertos casos, esta singularidad también puede explicar el nacimiento de toros de dimensión 3 ó 3D, en los cuales aparece involucrada una tercera frecuencia que modula la amplitud de las oscilaciones del toro 2D. Esta clase de comportamientos pueden presentarse en aplicaciones tales como osciladores electrónicos y sistemas mecánicos (Yu, 2002), compresores (Coller, 2003), y siste-

mas aeroelásticos (Chamara y Coller, 2004), entre otros.

En este trabajo se aborda el análisis de la dinámica de un circuito eléctrico resonante en las cercanías de una bifurcación de Hopf doble. Si bien se trata de un ejemplo académico, resulta útil para mostrar diferentes comportamientos oscilatorios que pueden presentarse como resultado de la variación de algunos parámetros claves del circuito. Estos comportamientos se asocian a varios de los diagramas de bifurcaciones correspondientes a la forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble (Kuznetsov, 1995). Se describen tres casos de los denominados “simples” donde se detectan, además de las típicas curvas de Hopf que crean soluciones periódicas, curvas de bifurcación de Neimark-Sacker que originan toros 2D. También se distingue uno de los casos llamados “complicados” que difiere notablemente de los casos simples, incluyendo las curvas de bifurcación antes mencionadas pero con el agregado de curvas de singularidades que generan toros 3D. Estos diagramas delimitan regiones del espacio de parámetros con comportamientos dinámicos muy diferentes y permiten identificar los valores de los parámetros que conducen al comportamiento deseado del circuito. Asimismo, alertan sobre los efectos que las variaciones paramétricas pueden ocasionar en la dinámica del sistema cuando se trabaja en inmediaciones de una bifurcación de Hopf doble, ya sea sobre la estabilidad del punto de operación o a las formas de onda y su contenido espectral.

La interacción entre los modos oscilatorios al variar alguno de los parámetros también puede reflejarse en el movimiento de los autovalores del sistema linealizado. El estudio del comportamiento de los autovalores ante variaciones paramétricas ha concitado el interés de numerosos investigadores, con aplicaciones en diversas ramas de la ingeniería, como la mecánica, la eléctrica y la aeroespacial, entre otras. Un caso frecuente se presenta cuando dos pares de autovalores complejos se acercan suficientemente y, a causa de la interacción, se repelen mutuamente de modo que uno de ellos generalmente se inestabiliza. En particular, si los autovalores coinciden exactamente y existe un único autovector asociado, se tiene una resonancia fuerte (Seyranian y Mailybaev, 2003). Para alcanzar esta condición es necesario sintonizar simultáneamente dos parámetros independientes, por lo que su ocurrencia es infrecuente en aplicaciones reales. Sin embargo, los valores de los parámetros pueden estar cerca del punto de resonancia fuerte y sus efectos se observan en un cambio rápido en la dirección de movimiento de los autovalores para pequeñas variaciones paramétricas (muy alta sensibilidad) conduciendo generalmente a la inestabilidad del sistema. Por

ejemplo, en el caso de los sistemas eléctricos de potencia, este fenómeno se ha indicado como un camino posible para la generación de oscilaciones [véase por ejemplo (Kwatny y Yu, 1989; Dobson *et al.*, 2001; Padiyar y SaiKumar, 2006)]. En este trabajo se muestra una condición de resonancia fuerte en el escenario asociado con la bifurcación de Hopf doble.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se incluyen conceptos básicos de la forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble. Seguidamente, en la sección 3, se presenta el circuito eléctrico y su modelo matemático. En la sección 4 se describen los diagramas de bifurcación obtenidos en forma numérica y se comparan con los diagramas correspondientes a la forma normal. La interacción entre los modos oscilatorios se trata en la sección 5. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

2. BIFURCACIÓN DE HOPF DOBLE

Sea un sistema n -dimensional suave dependiente de k parámetros descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 4, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^k, k \geq 2.$$

Supóngase que para $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ el sistema tiene un equilibrio en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y que su linealización posee dos pares de autovalores imaginarios puros $\pm i\omega_1$ y $\pm i\omega_2$, con ω_1/ω_2 irracional.

Un procedimiento general para analizar la dinámica en un entorno de este punto consiste en reducir el sistema a la variedad centro mediante transformaciones de coordenadas, y luego eliminar los términos no lineales de alto orden hasta obtener la forma normal [esta técnica puede verse en detalle por ejemplo en (Guckenheimer y Holmes, 1993)]. Una vez aplicado este procedimiento y considerando coordenadas polares $(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$ se puede llegar a la forma normal truncada de la bifurcación de Hopf doble, que está dada por

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1 (\mu_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4), \\ \dot{r}_2 &= r_2 (\mu_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4), \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mu_{1,2}$ son los parámetros principales de bifurcación, p_{jk} y s_k , $j, k = 1, 2$, son coeficientes que pueden depender de los parámetros, al igual que las frecuencias ω_k . Nótese que si $p_{12} = s_1 = 0$, la primera ecuación junto con la tercera proveen la forma normal de la bifurcación de Hopf con frecuencia ω_1 y parámetro principal μ_1 . De la misma forma, con $p_{21} = s_2 = 0$, la segunda y cuarta ecuación dan la forma normal de una bifurcación

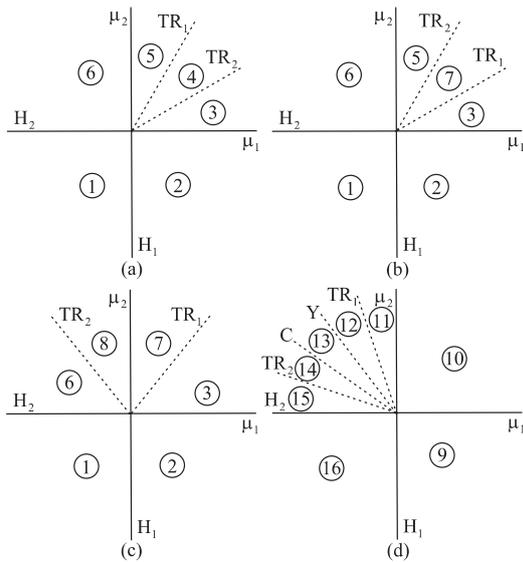


Figura 1. Diagramas de bifurcación asociados a la bifurcación de Hopf doble en el espacio de parámetros $\mu_1 - \mu_2$.

de Hopf con frecuencia ω_2 y parámetro principal μ_2 . En lo que sigue, no obstante, consideraremos el caso más general con p_{12}, p_{21}, s_1 y s_2 no nulos.

Las dos últimas ecuaciones de (1) corresponden a rotaciones en los planos $r_2 = 0$ y $r_1 = 0$ con velocidades angulares ω_1 y ω_2 , respectivamente. Dado que el primer par de ecuaciones está desacoplado del segundo, el diagrama de bifurcaciones estará determinado por el sistema planar

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1 (\mu_1 + p_{11}r_1^2 + p_{12}r_2^2 + s_1r_2^4), \\ \dot{r}_2 &= r_2 (\mu_2 + p_{21}r_1^2 + p_{22}r_2^2 + s_2r_1^4). \end{aligned} \quad (2)$$

Debido a la simetría del sistema, es suficiente considerar los casos donde $r_k \geq 0$. El punto de equilibrio E_0 con $r_1 = r_2 = 0$ de (2) corresponde a un punto de equilibrio de (1) en el origen. Los posibles equilibrios de (2) con $r_2 = 0$ ó $r_1 = 0$, denominados E_1 y E_2 respectivamente, corresponden a ciclos límites de (1). Un equilibrio E_3 con $r_{1,2} > 0$ corresponde a un toro bidimensional ó 2D del sistema original, y un ciclo límite de (2) a un toro tridimensional ó 3D de (1).

Dependiendo de los signos de p_{11} y p_{22} se tienen diferentes diagramas de bifurcaciones, que pueden dividirse en casos simples ($p_{11}p_{22} > 0$) y casos complicados ($p_{11}p_{22} < 0$). A continuación se describen algunos de estos casos que se presentan esquemáticamente en la Fig. 1. Por conveniencia se han seleccionado aquellos que, para la región del espacio de parámetros considerada, están presentes en el circuito eléctrico que se analiza en este trabajo. Los diagramas de fase asociados se muestran en la Fig. 2, donde los ejes de coordenadas ξ_k son proporcionales a r_k^2 . En ellos el origen representa el equilibrio E_0 , sobre los ejes de coordenadas se indican los puntos de equilibrio

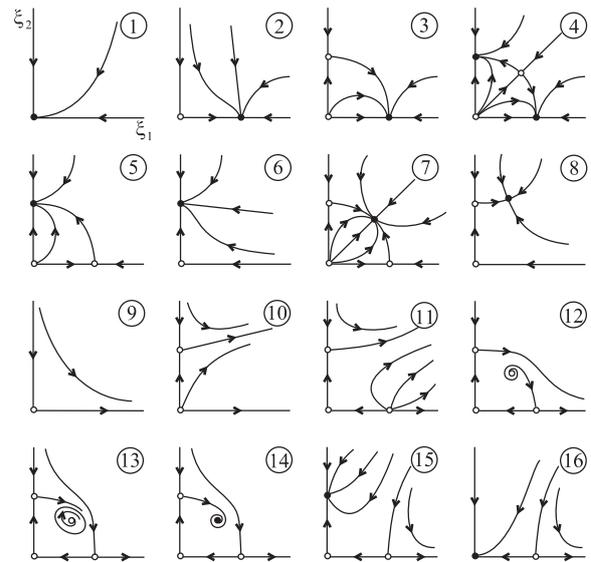


Figura 2. Diagramas de fase esquemáticos correspondientes a las regiones del espacio de parámetros indicadas en la Fig. 1.

E_1 y E_2 , en tanto que E_3 resulta fuera de los ejes. Los puntos negros indican equilibrios estables y los blancos equilibrios inestables. Para los casos simples (Fig. 1a-c) es posible hallar las siguientes curvas de bifurcaciones en el plano de parámetros $\mu_1 - \mu_2$. El equilibrio E_0 se puede bifurcar en los equilibrios E_1 ó E_2 sobre sendas curvas H_1 y H_2 , respectivamente (véanse por ejemplo las transiciones 1→2 ó 1→6); en tanto que el equilibrio E_3 puede colisionar con E_1 ó E_2 , determinando las curvas de bifurcación TR_1 y TR_2 , respectivamente (por ejemplo transiciones 4→5 ó 7→5). En los casos complicados (Fig. 1d) se tienen situaciones similares pero el equilibrio E_3 puede presentar una bifurcación de Hopf dando origen a un ciclo límite (transición 14→13), situación que no puede ocurrir en los casos simples. El tratamiento formal de esta bifurcación y los restantes diagramas asociados pueden consultarse con mayor detalle en (Kuznetsov, 1995).

Con la interpretación dada anteriormente es posible relacionar las bifurcaciones de equilibrios y ciclos de (2) con bifurcaciones de (1). Por ejemplo, las curvas H_1 y H_2 donde aparecen los equilibrios E_1 y E_2 corresponden a bifurcaciones de Hopf del sistema original. Estas curvas representan el cruce de un par de autovalores por el eje imaginario, en tanto que el punto $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$, donde ambas se intersectan, representa la ocurrencia simultánea de H_1 y H_2 , y determina la bifurcación de Hopf doble. Las curvas TR_1 y TR_2 señalan bifurcaciones de ciclos hacia toros 2D en (1) conocidas como bifurcaciones de Neimark-Sacker. En tanto que la bifurcación de Hopf del equilibrio E_3 determina el nacimiento de un toro 3D.

Aunque un sistema genérico de dimensión cuatro con términos de mayor orden que los considerados

en (1) nunca es topológicamente equivalente al sistema dado por la forma normal truncada, ésta permite capturar información sobre el comportamiento del sistema completo (Kuznetsov, 1995). En este trabajo se considera un ejemplo de un circuito eléctrico que, para distintos valores de los parámetros, presenta los cuatro comportamientos representados en la Fig. 1, los cuales están asociados a la forma normal truncada.

3. MODELO DEL CIRCUITO ELÉCTRICO

Se considera el circuito eléctrico de la Fig. 3, cuyo modelo matemático está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \eta_1 \left(\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_4 - \alpha_2 x_1^2 - \alpha_3 x_1^3 \right) + \eta_3 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1, \\ \dot{x}_3 &= \left(1 + \sqrt{2} \right) x_4, \\ \dot{x}_4 &= \left(2 - \sqrt{2} \right) (x_1 - x_3 - \eta_2 x_4), \end{aligned} \quad (3)$$

donde $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (v_{C_1}, i_{L_1}, v_{C_2}, i_{L_2})$ son los estados del sistema, η_1, η_2 y η_3 son los parámetros de bifurcación, que están relacionados con los parámetros físicos del sistema a través de $\eta_1 = \frac{1}{C_1}$, $\eta_2 = R$ y $\eta_3 = \alpha \eta_1$, siendo α la ganancia de la fuente de corriente controlada. Los restantes parámetros del circuito son constantes y sus valores están dados por $C_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $L_1 = \sqrt{2}$ y $L_2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$; el elemento no lineal está caracterizada por la relación $i_G = -\frac{1}{2}v_G - \alpha_2 v_G^2 + \alpha_3 v_G^3$, con α_2 y α_3 constantes (nótese que $v_G = -v_{C_1}$).

El único punto de equilibrio del sistema es el origen del espacio de estados $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$. Mediante cálculos de rutina es posible determinar que la linealización del sistema en el punto de equilibrio posee dos pares de autovalores sobre el eje imaginario $\lambda_1 = \pm i\omega_1$ y $\lambda_2 = \pm i\omega_2$, cuando

$$\eta_1 = 2 - \eta_3, \quad \eta_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2}\eta_3 \right),$$

con frecuencias $\omega_{1,2} = \sqrt{\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 2}}$, donde $\gamma = \frac{1}{2} [3 - (1 - \sqrt{2})\eta_3 - \frac{1}{4}\eta_3^2]$. Nótese que para el caso particular de $\eta_3 = -6 + 4\sqrt{2} \simeq -0.3431$ las frecuencias son coincidentes $\omega_1 = \omega_2 = 2^{\frac{1}{4}}$, este caso se conoce como bifurcación de Hopf resonante 1:1 y, ante perturbaciones apropiadas de tres de los parámetros del sistema, es posible construir la denominada sombrilla de Whitney (Itovich y Moiola, 2005).

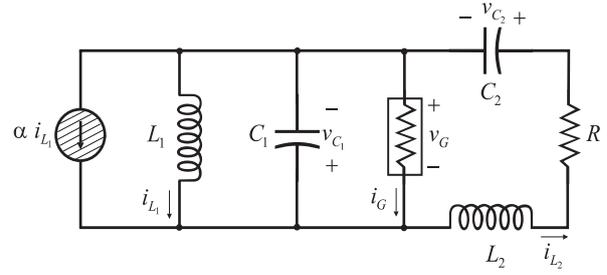


Figura 3. Circuito eléctrico del oscilador acoplado.

4. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA

La atención se centra en el análisis del comportamiento en un entorno de la bifurcación de Hopf doble. En este punto organizador de la dinámica confluyen, entre otras, dos curvas de bifurcación de Hopf. Dado que estas singularidades generan órbitas periódicas, desde el punto de vista de aplicaciones en osciladores electrónicos, el estudio de la bifurcación de Hopf doble puede resultar útil para interpretar las interacciones entre dos modos de oscilación del circuito cuando varían los parámetros, y el consecuente efecto sobre el contenido espectral de las formas de onda.

El procedimiento de reducción de las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del sistema a la forma normal no es trivial y puede resultar muy laborioso de aplicar aun para casos aparentemente simples. En este trabajo se sigue un camino alternativo que consiste en realizar un análisis numérico de la dinámica utilizando el programa de continuación de soluciones AUTO (Doedel *et al.*, 2001). El análisis de las bifurcaciones asociadas a la singularidad de Hopf doble se realiza en función de los parámetros η_1 y η_2 (variaciones de la capacidad C_1 y de la resistencia R , respectivamente), para diferentes valores del parámetro η_3 (relacionado con la fuente de corriente controlada). Las constantes del elemento no lineal se mantienen fijas en todo el trabajo con $\alpha_2 = 0.6$ y $\alpha_3 = 1$. A continuación se describen cuatro situaciones para $\eta_3 = 0, -0.075, -0.140$ y -0.220 .

4.1 Caso a

El diagrama de bifurcaciones en el plano de parámetros $\eta_1 - \eta_2$ correspondiente a $\eta_3 = 0$, es decir, sin el efecto de la fuente de corriente controlada, se muestra en la Fig. 4. El punto $(\eta_1, \eta_2) = (2, 1.7071)$ corresponde a la bifurcación de Hopf doble, donde se cortan las dos curvas de bifurcaciones de Hopf H_1 y H_2 . Para esta condición se tienen autovalores en $\lambda_1 = \pm i$ y $\lambda_2 = \pm i\sqrt{2}$.

Para facilitar la descripción de la dinámica asociada, se realizaron dos cortes horizontales variando el parámetro η_1 con η_2 fijo en $\eta_2 = 1.71$ y $\eta_2 = 1.70$. Estos cortes pueden verse en las Figs.

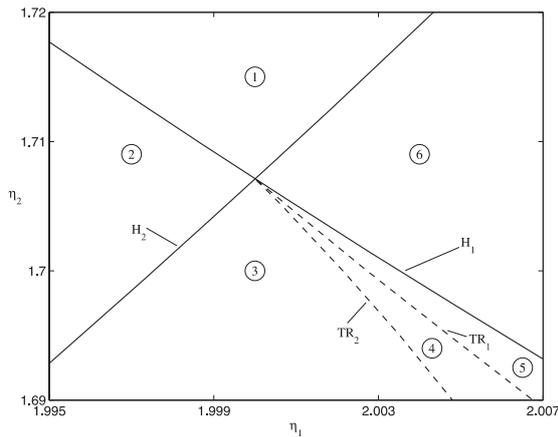


Figura 4. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_3 = 0$.

5 y 6, respectivamente, donde las líneas llenas indican que el punto de equilibrio es estable y las líneas de trazos que es inestable; los círculos llenos indican la amplitud de los ciclos límites estables y los vacíos la de los inestables. Comenzando con el corte para $\eta_2 = 1.71$ (Fig. 5), se observa que el origen (único punto de equilibrio del sistema) es estable en el segmento comprendido entre las bifurcaciones de Hopf H_1 y H_2 , e inestable a la izquierda de H_1 y a la derecha de H_2 . En H_1 nace un ciclo límite estable hacia la izquierda, en tanto que en H_2 el ciclo estable se desarrolla hacia la derecha. De esta descripción se desprende que en la región 1 de la Fig. 4 el equilibrio es estable, mientras que en las regiones 2 y 6 es inestable. Asimismo, en las regiones 2 y 6 se tendrán ciclos límites estables en un entorno del punto de equilibrio.

En el corte correspondiente a $\eta_2 = 1.70$ (Fig. 6), se observa que el origen es siempre inestable y en los puntos de bifurcaciones de Hopf H_1 y H_2 nacen ciclos límites también inestables hacia la izquierda y derecha, respectivamente. El ciclo límite creado en H_1 sufre una bifurcación de Neimark-Sacker en el punto TR_1 (dos multiplicadores de Floquet correspondientes a la linealización de la dinámica sobre la solución periódica cruzan el círculo unitario). A partir de este punto el ciclo pasa a ser estable y se crea una oscilación cuasiperiódica para valores decrecientes del parámetro η_1 (su evolución no se indica en la figura). Por su parte el ciclo límite que nace en H_2 también evidencia una bifurcación de Neimark-Sacker TR_2 dando origen a una solución cuasiperiódica para valores crecientes de η_1 . Las simulaciones realizadas indican que las soluciones cuasiperiódicas (toros) que nacen (o terminan) en TR_1 y TR_2 están conectadas o simplemente son la misma solución. Recientemente se han propuesto algoritmos para la continuación de toros, lo cual permitiría confirmar esta asevera-

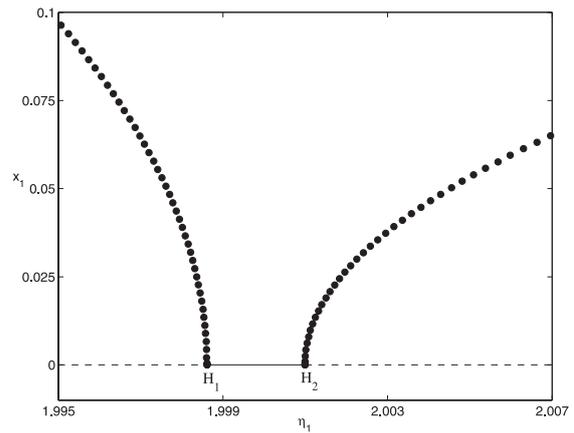


Figura 5. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_2 = 1.71$ y $\eta_3 = 0$.

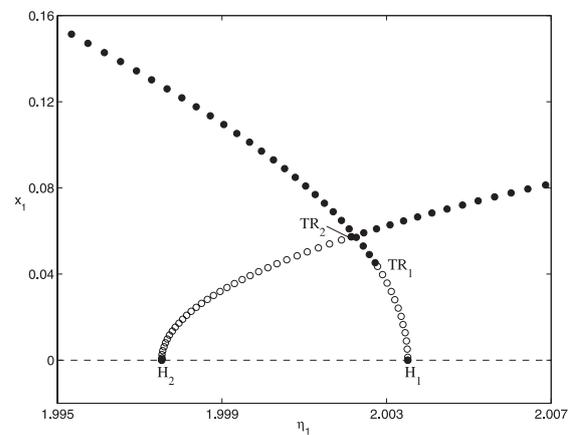


Figura 6. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_2 = 1.70$ y $\eta_3 = 0$.

ción, pero aún es una tarea dificultosa de realizar (Schilder *et al.*, 2006).

Todos los fenómenos mencionados se conectan a través de la bifurcación de Hopf doble y, por lo tanto, podrían ser predichos a partir de la forma normal de esta singularidad. Nótese que el diagrama de la Fig. 4 es análogo al esquema de la Fig. 1a, salvo por una rotación. Para describir la conexión entre los diferentes comportamientos dinámicos se consideran los retratos de fase de la Fig. 2 que indican, en forma esquemática, los escenarios de cada una de las regiones indicadas en las Figs. 1a y 4. Es conveniente recordar que en estos retratos el origen representa el punto de equilibrio del circuito, los puntos que se indican sobre los ejes de coordenadas representan ciclos límites (el ciclo que se origina en H_1 corresponde al indicado en el eje de abscisas y el originado en H_2 al del eje de ordenadas), en tanto que el punto fuera de los ejes de coordenadas representa un toro bidimensional. Comenzando por la región 1 del diagrama de bifurcaciones de la Fig. 4 donde

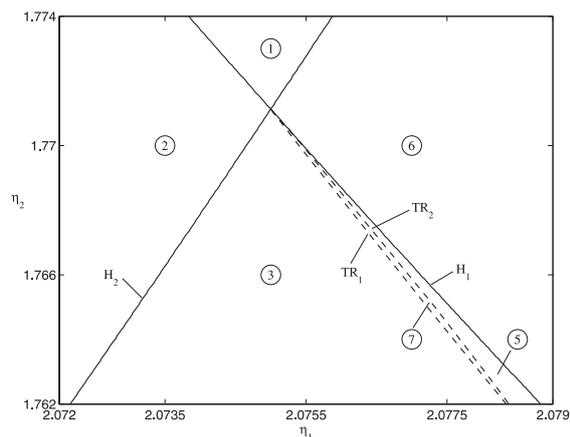


Figura 7. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_3 = -0.075$ ($\alpha_2 = 0.6$ y $\alpha_3 = 1$).

el punto de equilibrio es estable, y recorriendo el diagrama en sentido antihorario, primero se observa que el equilibrio pierde la estabilidad en H_1 y se crea un ciclo límite estable (región 2). En la región 3 se tiene un segundo ciclo, pero en este caso inestable, creado en la bifurcación de Hopf H_2 . El ciclo inestable pasa a ser estable a causa de la bifurcación de Neimark-Sacker TR_2 y se crea un toro inestable (región 4). Este toro colapsa en una segunda bifurcación de Neimark-Sacker TR_1 , por lo que en la región 5 se vuelven a tener dos ciclos, uno estable y otro inestable. El ciclo inestable se desvanece en la bifurcación de Hopf H_1 , por ello en la región 6 se tiene un ciclo estable que colapsa al pasar a la región 1 por efecto de la bifurcación de Hopf H_2 .

4.2 Caso b

Fijando $\eta_3 = -0.075$, resulta el diagrama de bifurcaciones de la Fig. 7. La bifurcación de Hopf doble se produce para $(\eta_1, \eta_2) = (2.0750, 1.7711)$, con autovalores $\lambda_1 = \pm i1.0173$ y $\lambda_2 = \pm i1.3902$. Este caso corresponde al diagrama esquemático de la Fig. 1b. El cambio que se ha producido respecto del caso descrito anteriormente es la inversión de las curvas de Neimark-Sacker TR_1 y TR_2 (compárese con la Fig. 1a). Por esta razón al pasar de la región 3 a la 7, el ciclo estable se convierte en inestable y se genera un toro 2D estable en TR_1 . Este toro colapsa en la curva TR_2 y el ciclo inestable creado en H_2 se estabiliza (región 5). La dinámica en las demás regiones es análoga al caso $\eta_3 = 0$.

4.3 Caso c

En la Fig. 8 se presentan las continuaciones correspondientes a $\eta_3 = -0.140$. En este caso la

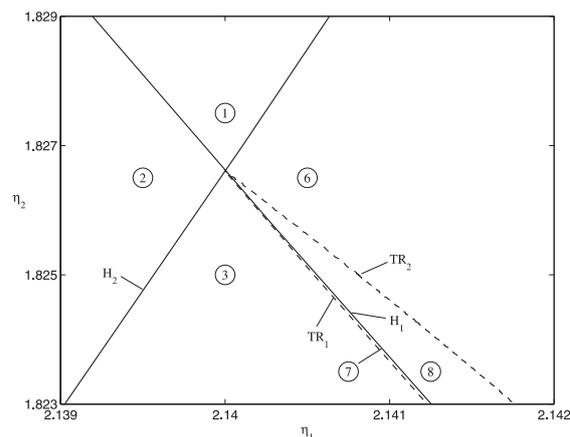


Figura 8. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_3 = -0.140$ ($\alpha_2 = 0.6$ y $\alpha_3 = 1$).

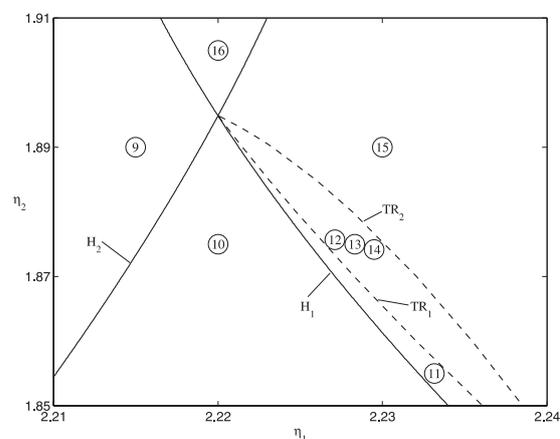


Figura 9. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_3 = -0.220$ ($\alpha_2 = 0.6$ y $\alpha_3 = 1$).

bifurcación de Hopf doble se tiene para $(\eta_1, \eta_2) = (2.140, 1.8266)$, con autovalores $\lambda_1 = \pm i1.0357$ y $\lambda_2 = \pm i1.3654$. El diagrama esquemático correspondiente es el de la Fig. 1c. Se observa que la curva de Neimark-Sacker TR_2 traspasa la curva de Hopf H_1 . Se recuerda que en la región 7 se tiene un equilibrio y dos ciclos inestables y un toro 2D estable. En la región 8 persiste sólo uno de los ciclos inestables ya que el restante colapsa en la bifurcación de Hopf H_1 . Finalmente el toro 2D se extingue en la bifurcación TR_2 y el ciclo pasa a ser estable (región 6).

4.4 Caso d

Fijando $\eta_3 = -0.220$ se obtiene el diagrama de la Fig. 9 que puede asociarse al esquema de la Fig. 1d. La bifurcación de Hopf doble ocurre para $(\eta_1, \eta_2) = (2.220, 1.8949)$, con autovalores $\lambda_1 = \pm i1.0656$ y $\lambda_2 = \pm i1.3271$. El escenario dinámico en este caso es más rico que en los descritos anteriormente y corresponde a los casos

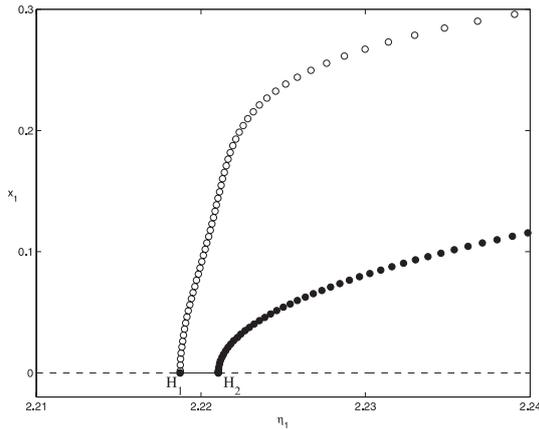


Figura 10. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_2 = 1.90$ y $\eta_3 = -0.220$.

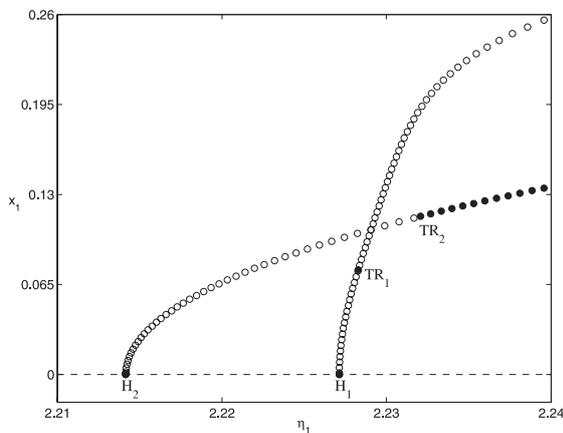


Figura 11. Diagrama de bifurcaciones correspondiente a $\eta_2 = 1.87$ y $\eta_3 = -0.220$.

complicados de la forma normal truncada que involucra bifurcaciones de toros (curvas Y y C en la Fig. 1d). En principio se puede observar que la curva de Neimark-Sacker TR_1 también cruza la curva H_1 . Una diferencia sustancial con los casos anteriores es el cambio de curvatura o criticidad en la bifurcación H_1 . Esto puede verse comparando los cortes horizontales realizados para $\eta_2 = 1.90$ (Fig. 10) y $\eta_2 = 1.87$ (Fig. 11) con los cortes de las Figs. 5 y 6, respectivamente. En los casos a-c) la bifurcación de Hopf H_1 origina un ciclo hacia la izquierda (valores decrecientes de η_1); el ciclo que nace es estable en la porción de la curva H_1 que se encuentra sobre el punto de la bifurcación de Hopf doble (intersección con H_2) e inestable por debajo de este punto (véase esta diferencia en la estabilidad del ciclo que nace en H_1 en las Figs. 5 y 6). En cambio, en el caso d) el ciclo nace hacia la derecha de H_1 y es inestable en toda la curva (Figs. 10 y 11). Esto produce un cambio completo de los diagramas de fase asociados cuya descripción se presenta a continuación.

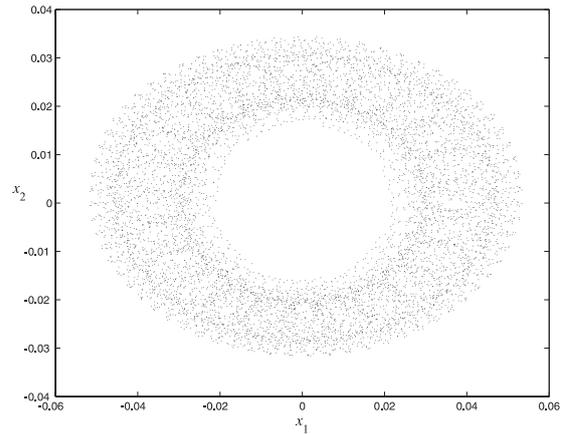


Figura 12. Oscilación cuasiperiódica o toro de dimensión 3 para $\eta_1 = 2.222220$, $\eta_2 = 1.888$, $\eta_3 = -0.220$.

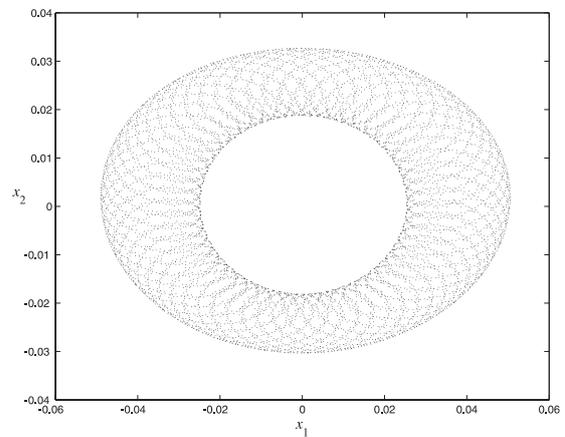


Figura 13. Oscilación cuasiperiódica o toro de dimensión 2 para $\eta_1 = 2.222225$, $\eta_2 = 1.888$, $\eta_3 = -0.220$.

En la región 9 el origen es inestable y es el único conjunto límite en su entorno. En la región 10 se tiene también un ciclo inestable a causa de la bifurcación de Hopf H_2 . En H_1 se crea un segundo ciclo inestable originando la situación de la región 11. La bifurcación de Neimark-Sacker TR_1 crea un toro 2D inestable en la región 12. Nótese que en la Fig. 9 no se indican las curvas Y y C presentes en la forma normal (compárese con la Fig. 1d) ya que corresponden a bifurcaciones de toros y hasta el momento no se cuenta con la implementación necesaria para su continuación numérica [véase (Schilder *et al.*, 2006)]. Sin embargo se han efectuado simulaciones para detectar la presencia de los conjuntos límites asociados a las regiones 12-14. Continuando con la descripción de la dinámica, el toro 2D inestable presente en la región 12 experimenta una bifurcación (curva Y) que da origen a un toro tridimensional estable (región 13). La Fig. 12 muestra una proyección del toro 3D en el plano $x_1 - x_2$ para $\eta_1 = 2.222220$ y $\eta_2 = 1.888$. Este toro colapsa sobre la curva

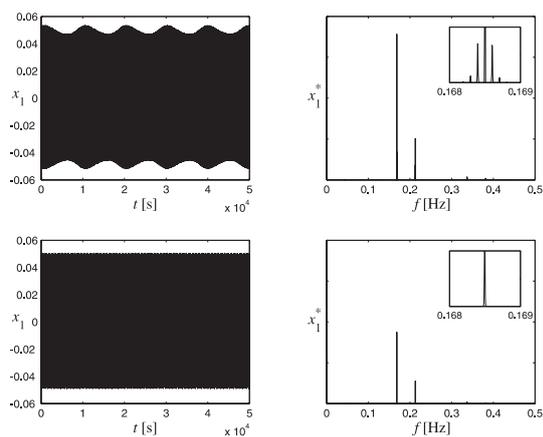


Figura 14. Señales temporales y espectros de las oscilaciones cuasiperiódicas. La fila superior corresponde al toro 3D y la inferior al 2D.

C y en la región 14 el toro 2D se estabiliza. La Fig. 13 ilustra este caso para $\eta_1 = 2.222225$ y $\eta_2 = 1.888$. Seguidamente el toro colapsa en la bifurcación de Neimark-Sacker TR_2 y uno de los ciclos inestables pasa a ser estable (región 15). Este ciclo se desvanece en la bifurcación de Hopf H_2 y el origen pasa a ser estable (región 16). Cruzando la curva H_1 se retorna a la situación inicial (región 9).

En la Fig. 14 se exhiben las señales temporales (primera columna) y el espectro de frecuencias de éstas (segunda columna). La fila superior corresponde al toro 3D ($\eta_1 = 2.222220$ y $\eta_2 = 1.888$) y la inferior al toro 2D ($\eta_1 = 2.222225$ y $\eta_2 = 1.888$). Si bien los espectros en ambos casos muestran la existencia de dos frecuencias o modos en $f_1 \cong 0.1285$ Hz y $f_2 \cong 0.2130$ Hz, se puede observar claramente que la señal correspondiente al toro 3D presenta una modulación en amplitud que en el espectro se manifiesta por la aparición de componentes frecuenciales en torno a f_1 y f_2 (comparar los recuadros de la segunda columna en la Fig. 14). Esta tercera frecuencia (moduladora) es de aproximadamente $f_3 = 0.0001$ Hz.

5. INTERACCIÓN ENTRE AUTOVALORES

Además de los fenómenos dinámicos descritos en la sección anterior, el acoplamiento entre los modos oscilatorios se pone en evidencia por la interacción entre los autovalores del sistema linealizado. En el circuito analizado se ha detectado una condición de resonancia fuerte en el escenario asociado con la bifurcación de Hopf doble. Es importante mencionar que para el caso particular de la bifurcación de Hopf resonante ($\eta_3 = -6 + 4\sqrt{2}$) se tienen autovalores coincidentes en $\pm i2^{\frac{1}{4}}$ y ambos fenómenos ocurren simultáneamente.

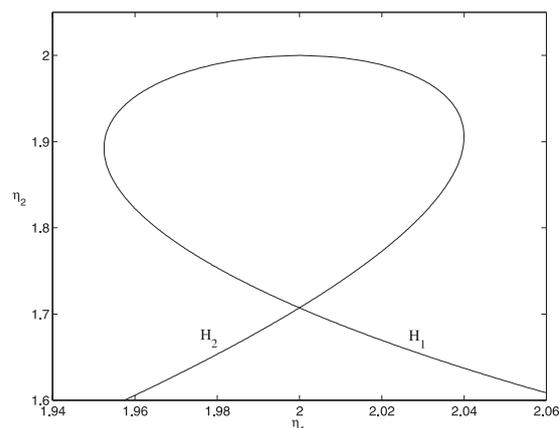


Figura 15. Curva de bifurcaciones de Hopf para $\eta_3 = 0$.

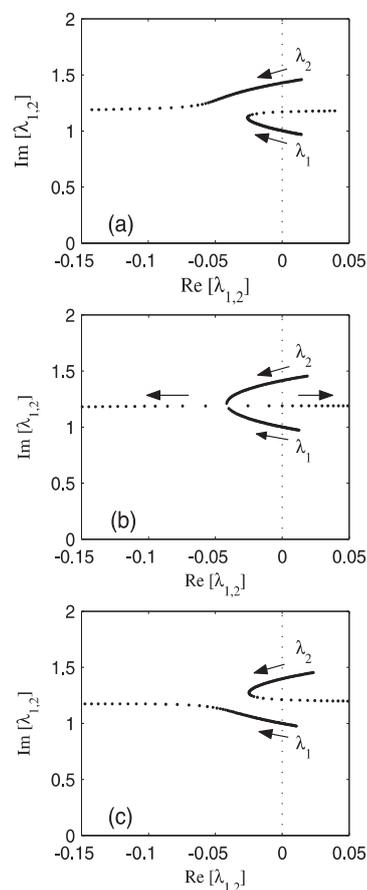


Figura 16. Movimiento de los autovalores ante variaciones de η_2 con η_1 fijo en: a) $\eta_1 = 1.99$, b) $\eta_1 = 2.00$ y c) $\eta_1 = 2.01$.

Para el caso de $\eta_3 = 0$, es decir anulando la fuente de corriente controlada, las curvas de bifurcación de Hopf H_1 y H_2 (Fig. 4) se conectan como se muestra en la Fig. 15. En el interior del bucle el punto de equilibrio es estable, y pierde la estabilidad al cruzar la curva de bifurcación de Hopf. Para analizar el fenómeno de la interacción entre autovalores se graficó su movimiento en función

del parámetro η_2 para valores de η_1 fijos. En la Fig. 16a, b y c, se muestra la evolución de los autovalores (sólo los que tienen parte imaginaria positiva) para $\eta_1 = 1.99, 2$ y 2.01 , respectivamente, a medida que varía el parámetro η_2 . Las ramas comienzan con $\eta_2 = 1.6$ (ambos autovalores en el semiplano derecho) y finalizan con $\eta_2 = 2.05$; el sentido de movimiento de los autovalores a medida que aumenta η_2 es el indicado por las flechas. Se observa que para $\eta_2 = 1.6$ los autovalores tienen parte real positiva en los tres casos, y al incrementar η_2 se desplazan hacia el semiplano izquierdo donde interaccionan y se separan rápidamente (véase el incremento en la distancia entre puntos consecutivos).

Para el caso de $\eta_1 = 1.99$ (Fig. 16a) el primer autovalor que cruza el eje imaginario es λ_2 cuando $\eta_2 = 1.6795$, situación que corresponde a la bifurcación de Hopf H_2 . Incrementando el parámetro, el autovalor λ_1 también pasa al semiplano izquierdo, cruzando el eje cuando $\eta_2 = 1.7283$ (bifurcación de Hopf H_1). Luego de la interacción, λ_1 pasa rápidamente al semiplano derecho sufriendo la bifurcación de Hopf H_1 . El escenario para $\eta_2 = 2.01$ (Fig. 16b) es similar salvo por una inversión en el comportamiento de las ramas de autovalores. La frontera entre ambos casos se tiene para $\eta_1 = 2$ y corresponde a la situación de resonancia fuerte. En este caso ambos autovalores cruzan simultáneamente del semiplano derecho al izquierdo para $\eta_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1.7071$, en tanto que la resonancia fuerte ocurre para $\eta_2 \simeq 1.9884$ en las cercanías de la curva de Hopf en el punto más alto del bucle. Esto reafirma que una pequeña variación del parámetro conducirá a la inestabilidad del sistema, lo cual es predecible por la alta sensibilidad a las variaciones paramétricas causada por la resonancia fuerte.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado cuatro diagramas de bifurcaciones asociados a la forma normal truncada de la singularidad de Hopf doble no resonante en un circuito eléctrico. El despliegue de la singularidad en todos los casos se ha realizado en forma numérica considerando la variación de dos parámetros. Se ha utilizado un tercer parámetro para lograr la transición entre los diferentes diagramas recorriendo tres casos simples y uno complicado correspondientes a la forma normal truncada. Se ha encontrado evidencia sobre la existencia de oscilaciones cuasiperiódicas que involucran la interacción de tres frecuencias, fenómeno conocido como toro 3D. La transición entre el caso c) (simple) y el caso d) (complicado) se debe a un cambio de signo en el coeficiente de curvatura de una de las curvas de bifurcación de

Hopf. Una descripción completa de este fenómeno, junto al de otros comportamientos asociados, como interacciones entre curvas de bifurcación de silla-nodo de ciclos y de doble período se reportan en (Revel *et al.*, 2008).

El análisis presentado muestra algunos de los efectos que puede causar la interacción de dos modos oscilatorios cuando varían los parámetros del circuito. Para el caso de aplicaciones en osciladores, la presencia de una bifurcación de Hopf doble puede ocasionar que variaciones paramétricas conduzcan a señales con contenidos espectrales no deseados. Más precisamente, esto se refiere a la aparición de oscilaciones cuasiperiódicas como una bifurcación de ciclo límite en la vecindad de curvas de bifurcaciones de Hopf, teniendo estas últimas asociado un sólo modo de oscilación. El modelo del circuito utilizado es académico pero sirve para ilustrar la riqueza de posibles oscilaciones periódicas y cuasiperiódicas en el escenario de las formas normales de la bifurcación de Hopf doble.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la SECyT de la UNS (PGI 24K/30), a la ANPCyT (PICT-11-12524) y a Conicet (PIP 5032) por el apoyo brindado para la concreción de este trabajo. También agradecen los comentarios de dos revisores anónimos que han permitido mejorar la redacción y claridad del manuscrito original.

REFERENCIAS

- Chamara, P. A. y B. D. Coller (2004). A study of double flutter. *Journal of Fluids and Structures* **19**, 863–879.
- Coller, B. D. (2003). Intriguing nonlinear dynamics of a controller with a sluggish actuator. *Automatica* **39**, 2049–2058.
- Dobson, I., J. Zhang, S. Greene, H. Engdahl y P. W. Sauer (2001). Is strong resonance a precursor to power system oscillations?. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I* **48**(3), 340–349.
- Doedel, E. J., R. C. Paffenroth, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Yu. A. Kuznetsov, B. Sandstede y X.-J. Wang (2001). AUTO 2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with homcont). Reporte técnico. Caltech. California, Estados Unidos.
- Gordillo, F., F. Salas, R. Ortega y J. Aracil (2002). Hopf bifurcation in indirect field-oriented control of induction motors. *Automatica* **38**(5), 829–835.
- Gu, G., A. Sparks y S. S. Banda (1999). An overview of rotating stall and surge control

- of axial flow compressors. *IEEE Trans. on Control Systems Technology* **7**(6), 639–647.
- Guckenheimer, J. y P. Holmes (1993). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag. Nueva York.
- Hassard, B., N. Kazarinoff y Y.-H. Wan (1981). *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge University Press. Londres.
- Itovich, G. R. y J. L. Moiola (2005). Double Hopf bifurcation analysis using frequency domain methods. *Nonlinear Dynamics* **39**, 235–258.
- Kuznetsov, Yu. A. (1995). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag. Nueva York.
- Kwatny, H. G. y X.-M. Yu (1989). Energy analysis of load-induced flutter instability in classical models of electric power networks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I* **36**(12), 1544–1557.
- Liaw, D. C. y E. H. Abed (1990). Stabilization of tethered satellites during station keeping. *IEEE Trans. on Automatic Control* **35**(11), 1186–1196.
- Marsden, J. y M. McCracken (1976). *Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer Verlag. Nueva York.
- Mohamed, A. M. y F. P. Emad (1993). Nonlinear oscillations in magnetic bearing systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* **38**(8), 1242–1245.
- Padiyar, K. R. y H. V. SaiKumar (2006). Investigations on strong resonance in multimachine power systems with STATCOM supplementary modulation controller. *IEEE Trans. on Power Systems* **21**(2), 754–762.
- Revel, G., D. M. Alonso y J. L. Moiola (2008). A gallery of oscillations in a resonant electric circuit: Hopf-Hopf and fold-flip interactions. Aceptado en *Int. J. of Bifurcation and Chaos*.
- Schilder, F., W. Vogt, S. Schreiber y H. Osinga (2006). Fourier methods for quasiperiodic oscillations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **67**(5), 629–671.
- Seyranian, A. P. y A. A. Mailybaev (2003). Interaction of eigenvalues in multi-parameter problems. *Journal of Sound and Vibration* **267**, 1047–1064.
- Wang, H. O., E. H. Abed y A. M. Hamdan (1995). Bifurcations, chaos, and crises in voltage collapse of a model power system. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I* **41**(3), 294–302.
- Yu, P. (2002). Analysis on double Hopf bifurcation using computer algebra with the aid of multiple scales. *Nonlinear Dynamics* **27**, 19–53.