

INTRODUCCIÓN AL CONTROL FRACCIONARIO

Blas M. Vinagre, Concepción A. Monje

*Departamento de Electrónica e Ingeniería Electromecánica,
Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de
Extremadura, Badajoz, España,
email: {bvinagre, cmonje}@unex.es*

Resumen: Este trabajo pretende ser una introducción y una invitación al Control Fraccionario, entendido éste como el conjunto de aplicaciones del Cálculo Fraccionario en Teoría de Control. Quiere servir para que los miembros de la comunidad de control perciban cómo el cálculo fraccionario puede ampliar los horizontes de su disciplina. Por ello, el trabajo se ha estructurado como un libro de texto que recorre desde los fundamentos y definiciones básicas del cálculo fraccionario hasta las estrategias de implantación de controladores y filtros fraccionarios, pasando por el análisis de sistemas y el diseño de controladores. Finalmente, se hace un breve esbozo de la actualidad del control fraccionario. *Copyright © 2006 CEA-IFAC*

Palabras Clave: Cálculo fraccionario, teoría de control, realización de controladores, discretización, aproximación numérica.

1. INTRODUCCIÓN

Cálculo fraccionario es la denominación acuñada para la extensión del cálculo que permite considerar la integración y la derivación de cualquier orden, no necesariamente entero. En el dominio del tiempo, los operadores derivada e integral fraccionarios vienen definidos por la operación de convolución, por lo que están especialmente indicados para describir fenómenos de memoria; en el dominio de Laplace dichos operadores se corresponden con el operador s^α , $\alpha \in \mathbb{R}$.

La primera mención a la posibilidad de extender el sentido de la expresión $\frac{d^n y}{dx^n}$ para el caso de n no entero se encuentra en la correspondencia entre Leibnitz y L'Hôpital, y hasta el siglo XIX fue un asunto que sólo trataron algunos eminentes científicos, como Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann o Abel, siendo este último quien por primera vez lo aplicó en Física al solucionar una ecuación integral surgida en la formulación

del llamado problema de la tautócrona. A partir de entonces, y con especial énfasis en las últimas cuatro décadas, el cálculo fraccionario se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y sistemas físicos estudiados en multitud de campos de la ciencia y la ingeniería. Entre ellos se pueden destacar la ciencia de materiales, la teoría del caos y los fractales, la electrónica de dispositivos, la física teórica, la mecánica, etc. Un amplio espectro de aplicaciones en estos u otros campos se puede encontrar en los textos (Podlubny, 1999; Miller and Ross, 1993; Hilfer, 2000).

En cierta forma, las aplicaciones del cálculo fraccionario han experimentado una evolución análoga a la experimentada por la propia teoría de control, siguiendo dos caminos separados según que el punto de partida fuera el dominio del tiempo o el de la frecuencia. Mientras que las aplicaciones del cálculo fraccionario al modelado de sistemas físicos han utilizado, salvo en el caso de algunas aplicaciones en electroquímica, el dominio del

tiempo, las aplicaciones en control han utilizado, mayoritariamente y desde el principio, el dominio de la frecuencia.

Las primeras aplicaciones del cálculo fraccionario en control se dieron a principios de los años 60. Estas primeras aplicaciones hacían uso del operador integral de orden no entero para el control de servos y de sistemas con saturación. Estos trabajos, probablemente sin conocimiento de los autores, hacían uso de las propiedades de la que Bode denominó *función de transferencia ideal en lazo abierto*, cuya forma era $F(s) = \frac{A}{s^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir, era un integrador fraccionario. La principal propiedad de esta función es que, cuando se conecta en lazo cerrado, da sistemas robustos a cambios en la carga o ganancia del proceso (A); es decir, los cambios en la carga se reflejan en cambios en el ancho de banda del sistema en lazo cerrado, pero se mantiene constante el margen de fase o, lo que es equivalente, la sobreoscilación máxima. Esta propiedad es la que marcó las aplicaciones en control que a partir de los años 70 se han venido desarrollando en la Universidad de Burdeos dando como resultado el sistema CRONE (Control Robusto de Orden No Entero (Oustaloup, 1995)). A partir de entonces, aunque de forma aislada, han venido apareciendo trabajos que aplicaban los operadores fraccionarios a problemas de control, tanto explotando su robustez y su capacidad para tratar el control de sistemas de orden fraccionario, como para el control de sistemas de parámetros distribuidos. Así mismo, han aparecido artículos sobre aspectos más generales del uso de controladores fraccionarios, o sobre el uso del cálculo fraccionario en disciplinas íntimamente relacionadas con la teoría de control, como son el tratamiento de señales, el ajuste de curvas y la estimación de parámetros, o el diseño y realización de filtros.

Este trabajo, que pretende ser una introducción a la teoría de control fraccionario, sigue la estructura de un texto típico de control. Así, en la sección 2 se dan las definiciones básicas del cálculo fraccionario comunmente utilizadas; en la sección 3 se estudian los modelos y representaciones de los sistemas fraccionarios, así como sus principales características dinámicas; en la sección 4 se justifica el uso del cálculo fraccionario en control y se hace una breve revisión de lo más destacado en este campo. La sección 5 está dedicada al problema de la realización o implantación de operadores y controladores fraccionarios, última y fundamental etapa de toda aplicación práctica, mientras que en la sección 6 se hacen unos comentarios finales sobre herramientas software para simulación y diseño de sistemas y controladores fraccionarios. Finalmente, en la sección 7 se esboza, a modo de conclusión, el estado actual y las perspectivas futuras de la disciplina objeto del trabajo.

2. FUNDAMENTOS DE CÁLCULO FRACCIONARIO

Un amplio estudio de las definiciones y conceptos incluidos en esta sección puede encontrarse en (Podlubny, 1999; Miller and Ross, 1993)

2.1 Operadores Fraccionarios

La integral fraccionaria De acuerdo con la concepción de Riemann-Liouville, la noción de integral fraccionaria de orden α , $\text{Re}(\alpha) > 0$, es una consecuencia natural de la fórmula atribuida a Cauchy, que reduce el cálculo de la primitiva correspondiente a la integración de multiplicidad n de una función $f(t)$ a una integración simple de tipo convolución. La fórmula de Cauchy puede expresarse como

$$I_c^n f(t) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad \tau > c, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1)$$

donde \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los números enteros positivos. De una forma natural, se puede extender la validez de la fórmula anterior de valores del índice enteros positivos a valores reales positivos utilizando la función Gamma. Teniendo en cuenta que $(n-1)! = \Gamma(n)$, e introduciendo el número real positivo α , se define la *integral fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$* como

$$I_c^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \tau > c, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (2)$$

donde \mathbb{R}^+ es el conjunto de los números reales positivos. Su transformada de Laplace viene dada por la expresión

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s). \quad (3)$$

La derivada fraccionaria Llamando D^n con $n \in \mathbb{Z}^+$ al operador derivada de orden n , e introduciendo el entero positivo m tal que $m-1 < \alpha < m$, se obtiene la definición de Riemann-Liouville para la *derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$*

$${}_R D^\alpha f(t) \equiv \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right], \quad m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{Z}^+, \quad (4)$$

cuya transformada de Laplace puede expresarse como

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k f^{\alpha-k-1}(0). \quad (5)$$

siendo $f^l(0)$ el valor de la derivada de orden l de la función f en el origen.

Una definición alternativa de la derivada fraccionaria es la introducida por Caputo

$${}_C D^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}^+. \quad (6)$$

Esta definición incorpora los valores iniciales de la función y sus derivadas de orden entero menor, es decir, condiciones iniciales que son físicamente interpretables de la manera tradicional. Así, su transformada de Laplace es de la forma

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0). \quad (7)$$

De gran interés para la implantación discreta de controladores y filtros de orden fraccionario es la definición de Gründwald-Letnikov para la derivada fraccionaria. Dicha definición se basa en la generalización de la bien conocida fórmula de las diferencias de orden $n \in \mathbb{Z}^+$, para el caso de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, y supone el uso de las diferencias regresivas, es decir

$$(D^\alpha f(t))_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh-jh), \quad (8)$$

siendo su transformada de Laplace de la forma

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s). \quad (9)$$

Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario
Se sabe que los problemas clásicos de relajación y oscilación vienen gobernados por ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de orden uno y dos respectivamente. En esta sección se estudiarán las ecuaciones diferenciales que resultan de generalizar el orden. Así, se puede reformular el problema considerando la siguiente expresión general para la ecuación diferencial fraccionaria de orden $\alpha > 0$

$${}_C D^\alpha u(t) + u(t) = {}_R D^\alpha \left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^k(0^+) \right) + u(t) = q(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

siendo m un entero positivo definido por $m-1 < \alpha < m$, que determina el número de valores iniciales $u^k(0^+) = b_k$, $k = 1, 2, \dots, m-1$. Los casos

particulares de relajación y oscilación se obtienen haciendo $m = 1$ y $m = 2$, respectivamente.

Introduciendo la función de Mittag-Leffler, $E_\alpha(-t^\alpha)$, definida mediante la expresión

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (11)$$

se obtiene la solución en la forma

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k I^k E_\alpha(-t^\alpha) - \int_0^t q(t-\tau) E'_\alpha(-\tau^\alpha) d\tau. \quad (12)$$

Como se puede ver, la función de Mittag-Leffler desempeña en este tipo de ecuaciones diferenciales un papel análogo al que desempeña la función exponencial en las ecuaciones diferenciales ordinarias. En efecto:

- cuando α no es entero, es decir, para $m-1 < \alpha < m$, $m-1$ representa la parte entera de α ($m-1 \equiv [\alpha]$) y m el número de condiciones iniciales necesarias y suficientes para asegurar la unicidad de la solución, $u(t)$;
- las m funciones $I^k E_\alpha(-t^\alpha)$, donde $k = 0, 1, \dots, m-1$, son las soluciones particulares de la ecuación homogénea que satisfacen las condiciones iniciales, y, por ello, son las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial fraccionaria;
- la función $E'_\alpha(-t^\alpha)$, que es la primera derivada de la función $E_\alpha(-t^\alpha)$, es la respuesta impulsiva.

Es claro que para conocer la forma de la solución es preciso conocer ciertas propiedades de la función básica $E_\alpha(-t^\alpha)$. Dicha función empieza por tener una evolución correspondiente a una relajación anómala ($\alpha < 1$), pasa por una evolución exponencial ($\alpha = 1$) y alcanza una oscilatoria ($1 < \alpha < 2$) que se hace no amortiguada para $\alpha = 2$.

3. SISTEMAS DINÁMICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

3.1 Introducción

Una vez establecidas las definiciones fundamentales del cálculo fraccionario y determinados los tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, la presente sección se dedicará al análisis de los sistemas descritos por este tipo de ecuaciones. Dicho análisis, tal como es habitual para los sistemas de orden entero, partirá de los modelos o representaciones de dichos sistemas en los diferentes dominios (tiempo, Laplace y Z) para el estudio de su comportamiento, tanto en régimen transitorio como en régimen estacionario,

discutiendo las condiciones y criterios de estabilidad, controlabilidad y observabilidad.

3.2 Modelos y Representaciones

Ecuaciones diferenciales Partiendo de lo establecido en la sección anterior, se pueden formular las ecuaciones constitutivas de un sistema dinámico de orden fraccionario, lineal, monovariable e invariante en el tiempo, de la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} u(t) \quad (13)$$

En la ecuación anterior pueden considerarse dos casos particulares que dan lugar a dos tipos de sistemas de gran interés: los sistemas de orden conmensurable y los sistemas de orden racional. Se definirán estos sistemas como sigue:

Definition 1. Un sistema es de orden conmensurable si queda descrito por una ecuación diferencial donde todos los órdenes de derivación son múltiplos enteros de un orden base, α . Es decir, sistemas para los que se cumple que

$$\alpha_k, \beta_k = k\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Así, la ecuación diferencial (13) se puede poner de la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t). \quad (15)$$

Definition 2. Un sistema es de orden racional si es de orden conmensurable y además se cumple que $\alpha = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{Z}^+$.

Utilizando la definición de Gröndwald-Letnikov para la derivada fraccionaria, se pueden obtener modelos discretos de los sistemas fraccionarios en forma de ecuaciones en diferencias generalizadas.

Representaciones entrada-salida Si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación (13) con condiciones iniciales nulas, o la transformada Z a la ecuación en diferencias equivalente, se pueden obtener las representaciones entrada-salida (externas) de los sistemas fraccionarios. En el caso de los modelos continuos, un sistema fraccionario vendrá representado por una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{\alpha_k}}. \quad (16)$$

Para el caso de sistemas discretos se obtiene una función de transferencia discreta de la forma

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (w(z^{-1}))^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k (w(z^{-1}))^{\alpha_k}} \quad (17)$$

donde $(w(z^{-1}))$ es la transformada Z del operador Δ_h^1 , en otras palabras, el equivalente discreto del operador de Laplace s .

Como puede verse en las expresiones anteriores, un sistema de orden fraccionario tiene una función de transferencia no racional en el dominio de Laplace, o, en el dominio de Z , una función de transferencia discreta de orden ilimitado respecto de z , ya que sólo en el caso de $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ habrá un número limitado de coeficientes $(-1)^l \binom{\alpha_k}{l}$ distintos de cero. En vista de ello, se puede decir que un sistema de orden fraccionario tiene una memoria ilimitada, siendo los sistemas de orden entero un caso particular de los mismos.

En el caso de que el sistema sea de orden conmensurable, la función de transferencia continua tendrá la forma

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k}. \quad (18)$$

Representaciones de estado En el caso general de sistemas multivariables, puede obtenerse una representación espacio-estado de la forma

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (19)$$

donde $\alpha = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_n]$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ es el vector de entradas, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ es la matriz de entrada, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de salida, y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times l}$ es la matriz de transmisión directa.

Para el caso particular de sistemas de orden conmensurable, se pueden obtener representaciones de estado equivalentes a las usuales para sistemas de orden entero, sin más que utilizar el operador D^α , y definir $D^\alpha x_k = x_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Uno de los problemas que plantea la representación de estados de los sistemas fraccionarios es la falta de una definición físicamente consistente de las variables de estado. Si bien hay representaciones de estado para los sistemas de orden entero

en las cuales las variables de estado no tienen correspondencia con magnitudes físicas definidas y medibles, cualquiera de ellas puede reducirse a otra en la cual sí la tengan. Así, vemos que el problema de la interpretación de las variables de estado está relacionado con la posibilidad de medir las magnitudes físicas asociadas a las variables de estado, y hasta el momento no se han dado soluciones satisfactorias para los sistemas fraccionarios. Lo mismo podríamos decir para el caso de las condiciones iniciales.

Si se tiene un sistema monovariante de orden conmensurable, cuya representación de estado es de la forma

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u, \end{aligned} \quad (20)$$

y se toman transformadas de Laplace, suponiendo que se utiliza la definición de Caputo para la derivada fraccionaria, se obtiene, en el caso de condiciones iniciales nulas, la función de transferencia del sistema como

$$G(s) = \mathbf{C}(s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (21)$$

Por otra parte, definiendo

$$\Phi(t) \equiv \mathcal{L}^{-1} \{ (s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} s^{\alpha-1} \}, t \geq 0, \quad (22)$$

y aplicando las propiedades de la transformada de Laplace, los estados se pueden obtener a partir de la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + D^{1-\alpha} \{ \Phi(t) * [\mathbf{B}u(t)] \} \\ &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t D^{1-\alpha} \{ \Phi(t-\tau) \} \mathbf{B}u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Como se puede ver, $\Phi(t)$ es la matriz que habitualmente se conoce como *matriz de transición de estados*. Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para los sistemas lineales de orden entero, se puede determinar la forma de la matriz de transición de estados. Utilizando la definición de Caputo para la derivada fraccionaria, la solución puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(\sum \frac{\mathbf{A}^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} \right) \mathbf{x}(0) \\ &= E_\alpha(\mathbf{A}t^\alpha) \mathbf{x}(0) = \Phi(t) \mathbf{x}(0). \end{aligned} \quad (24)$$

Es claro pues que la función de Mittag-Leffler desempeña el mismo papel para este tipo de sistemas que el desempeñado por la función exponencial

para los sistemas de orden entero. La bien conocida matriz exponencial, $e^{\mathbf{A}t}$, no es más que un caso particular de la matriz exponencial generalizada $E_\alpha(\mathbf{A}t^\alpha)$, a la que podríamos llamar *función matricial de Mittag-Leffler*.

3.3 Controlabilidad y Observabilidad Para Sistemas de Orden Conmensurable

En Teoría Moderna de Control (la basada en la representación de estados) dos conceptos fundamentales, tanto para el análisis de sistemas como para el diseño de controladores, son los de controlabilidad y observabilidad. Adoptando las definiciones habituales para estos conceptos, se puede demostrar que para que el sistema sea controlable debe existir solución única para la ecuación matricial

$$\mathbf{x}(t_0) = -\boldsymbol{\zeta} \mathbf{b}, \quad (25)$$

donde

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^{t_f} a_i ((t_0 - \tau)^\alpha) u(\tau) d\tau, \\ \mathbf{b} &= [b_1 \ b_2 \ b_3 \dots b_{n-1}]^T, \\ \boldsymbol{\zeta} &= [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (26)$$

Para que la ecuación (25) tenga una solución única, ha de cumplirse que el rango de $\boldsymbol{\zeta}$, la matriz de controlabilidad, sea n . Así pues, es claro que las condiciones de controlabilidad para un sistema de orden conmensurable son las mismas que para un sistema de orden entero, sin más que construir su descripción de estado en base al operador D^α o, equivalentemente, $\lambda = s^\alpha$. Lo mismo se puede decir en cuanto a las condiciones de observabilidad.

3.4 Estabilidad

Consideraciones previas De una manera general, el estudio de la estabilidad de los sistemas fraccionarios puede realizarse estudiando las soluciones de las ecuaciones diferenciales que los caracterizan, y se ha visto que la función de Mittag-Leffler representa la solución fundamental, dependiendo la forma de las soluciones de los argumentos y parámetros de esta función, o, en otras palabras, de los coeficientes y órdenes de derivación de la ecuación diferencial fraccionaria.

Una manera alternativa es partir de la función de transferencia del sistema (16). Para hacer este estudio, es preciso recordar que una función del tipo

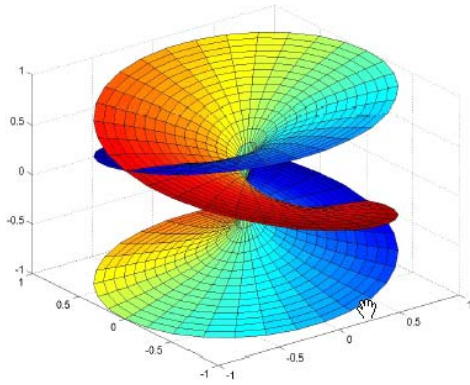


Figura 1. Superficie de Riemann correspondiente a la transformación $w = s^{1/3}$

$$f(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}, \quad (27)$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, es una función multivaluada de la variable compleja s cuyo dominio puede verse como una superficie de Riemann de un número de hojas que será finito sólo en el caso de que $\forall i, \alpha_i \in \mathbb{Q}^+$, siendo la hoja principal la definida por $-\pi < \arg(s) < \pi$. Si, $\forall i, \alpha_i \in \mathbb{Q}^+$, es decir, $\alpha = 1/q$, q entero positivo, las q hojas de la superficie de Riemann correspondiente vienen determinadas por

$$s = |s| e^{j\phi}, \quad (2k+1)\pi < \phi < (2k+3)\pi, \quad k = -1, 0, \dots, q-2, \quad (28)$$

siendo la correspondiente a $k = -1$ la denominada hoja principal. Para $w = s^\alpha$ estas hojas se transformarán en las regiones del plano w definidas por

$$w = |w| e^{j\theta}, \quad \alpha(2k+1)\pi < \theta < \alpha(2k+3)\pi. \quad (29)$$

En las Figuras 1 y 2 se ilustra esta transformación para el caso $w = s^{1/3}$. En la Figura 1 se puede ver la superficie de Riemann correspondiente a la transformación, mientras que en la Figura 2 se muestran las regiones del plano complejo w correspondientes a cada una de las hojas de la superficie de Riemann.

Así, una ecuación del tipo

$$a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0} = 0, \quad (30)$$

que, como puede verse, no es en general un polinomio, tendrá un número infinito de raíces, de las cuales sólo un número finito estará en la hoja principal de la superficie de Riemann. Se puede decir que *las raíces que están en hojas secundarias de la superficie de Riemann dan lugar a soluciones que son siempre funciones monótonamente decrecientes (tienden a cero sin oscilaciones cuando*

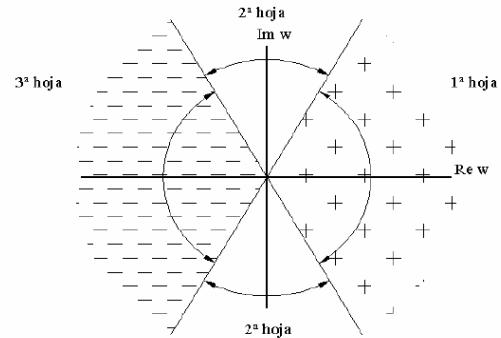


Figura 2. Regiones del plano complejo w correspondientes a la transformación $w = s^{1/3}$

$t \rightarrow \infty$) y sólo las raíces que están en la hoja principal de Riemann pueden producir una dinámica distinta: oscilación amortiguada, oscilación de amplitud constante, oscilación de amplitud creciente o crecimiento monótono.

Esta definición de la hoja principal de Riemann, que supone un corte a lo largo de \mathbb{R}^- , preserva las propiedades hermiticas de las raíces y se corresponde con el valor principal de Cauchy de la integral correspondiente a la transformación inversa de Laplace, es decir, aquél que se obtiene directamente aplicando el teorema de residuos. A las raíces que están en dicha hoja se las puede denominar *raíces estructurales o relevantes*.

Condiciones de estabilidad Hechas las consideraciones previas del apartado anterior, se pueden establecer las condiciones de estabilidad de los sistemas fraccionarios.

En el caso más general, se puede decir que *un sistema fraccionario con función de transferencia no racional, $G(s) = P(s)/Q(s)$, es estable para entrada y salida limitadas (BIBO estable) si y sólo si se cumple*

$$\exists M, |G(s)| \leq M, \quad \forall s / \operatorname{Re}(s) \geq 0. \quad (31)$$

La condición anterior se cumplirá si todas las raíces de la función $Q(s)$ que están localizadas en la hoja principal de Riemann y no son raíces de $P(s)$ tienen parte real negativa.

Para los sistemas de orden conmensurable, que tienen una ecuación característica que es un polinomio en la variable compleja $\lambda = s^\alpha$, la condición de estabilidad se puede expresar como

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (32)$$

siendo λ_i las raíces del polinomio característico. Para el caso particular de $\alpha = 1$ se obtiene la

condición de estabilidad conocida para los sistemas lineales

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2}, \quad \forall \lambda_i/Q(\lambda_i) = 0. \quad (33)$$

Criterios de estabilidad A la vista de todo lo expuesto anteriormente se puede establecer lo siguiente:

- El hecho de que todos los coeficientes de la ecuación característica sean del mismo signo no es condición necesaria ni suficiente para garantizar la estabilidad.
- El número de raíces de la ecuación característica en la hoja principal de Riemann no depende de la mayor potencia de la variable compleja en la ecuación característica.

En la actualidad no se dispone de técnicas polinómicas, tipo Routh o Jury, para analizar la estabilidad de los sistemas fraccionarios. Sólo las técnicas geométricas de análisis complejo basadas en el principio del argumento son aplicables, por ser técnicas que dan cuenta del número de singularidades de la función dentro de una curva rectificable observando la evolución del argumento de la función a lo largo de dicha curva.

Así, aplicando el principio del argumento sobre la curva generalmente conocida como camino de Nyquist (una curva que encierra todo el *semiplano derecho de la hoja principal de Riemann*), se puede determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado sin más que determinar el número de revoluciones de la curva resultante de la evaluación alrededor del punto crítico $(-1, j0)$.

3.5 Análisis de la Respuesta

Respuesta en el dominio del tiempo Como ya se ha comentado en los apartados anteriores, la forma de la respuesta dependerá de la localización de las raíces de la ecuación característica, pudiéndose presentar los siguientes casos:

- No hay raíces en la hoja principal de Riemann. En este caso, la respuesta será una función monótonamente decreciente.
- Hay raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en $Re(s) < 0, Im(s) = 0$. En este caso, la respuesta será una función monótonamente decreciente.
- Hay raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en $Re(s) < 0, Im(s) \neq 0$. En este caso, la respuesta será una función con oscilaciones amortiguadas.
- Hay raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en $Re(s) = 0, Im(s) \neq 0$. En este caso la respuesta será una función con oscilaciones de amplitud constante.

- Hay raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en $Re(s) > 0, Im(s) \neq 0$. En este caso la respuesta será una función con oscilaciones de amplitud creciente.
- Hay raíces en la hoja principal de Riemann, localizadas en $Re(s) > 0, Im(s) = 0$. En este caso la respuesta será una función monótonamente creciente.

Para el caso particular de los sistemas de orden conmensurable, la respuesta impulsiva podrá expresarse como

$$g(t) = \sum_{k=0}^n r_k t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^\alpha), \quad (34)$$

siendo λ_k los polos de la ecuación característica en (18), r_k los residuos que resultan de la descomposición en fracciones simples de dicha expresión, y $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ la función de Mittag-Leffler de dos parámetros definida como

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (35)$$

La forma de estas respuestas será: 1) monótona decreciente si $|\arg(\lambda_k)| \geq \alpha\pi$; 2) oscilatoria de amplitud decreciente si $\alpha\frac{\pi}{2} < |\arg(\lambda_k)| < \alpha\pi$; 3) oscilatoria de amplitud constante si $|\arg(\lambda_k)| = \alpha\frac{\pi}{2}$; 4) oscilatoria de amplitud creciente si $|\arg(\lambda_k)| < \alpha\frac{\pi}{2}$, $|\arg(\lambda_k)| \neq 0$; 5) monótona creciente si $|\arg(\lambda_k)| = 0$.

La respuesta al escalón responde a la expresión

$$y(t) = \sum_{k=0}^n r_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda_k t^\alpha). \quad (36)$$

Estas respuestas se ilustran en la Figura 3 para los casos en que $|\arg(\lambda_k)| \geq \alpha\frac{\pi}{2}$.

Por otra parte, es fácil entender que la técnica del lugar de las raíces se puede aplicar a los sistemas de orden conmensurable con la misma facilidad que a los sistemas de orden entero. Lo único que cambia es la interpretación, es decir, la relación de los puntos del plano complejo $\lambda = s^\alpha$ con las características dinámicas del sistema.

Respuesta en el dominio de la frecuencia En el caso más general, la respuesta en frecuencia habrá de construirse mediante la evaluación directa de la función de transferencia no racional a lo largo del eje imaginario, $s = j\omega$, $\omega \in (0, \infty)$. Sin embargo, para los sistemas de orden conmensurable, a la hora de construir su respuesta en frecuencia se pueden seguir pautas similares a las seguidas para los sistemas de orden entero. Esto es, se puede construir la respuesta en frecuencia mediante la

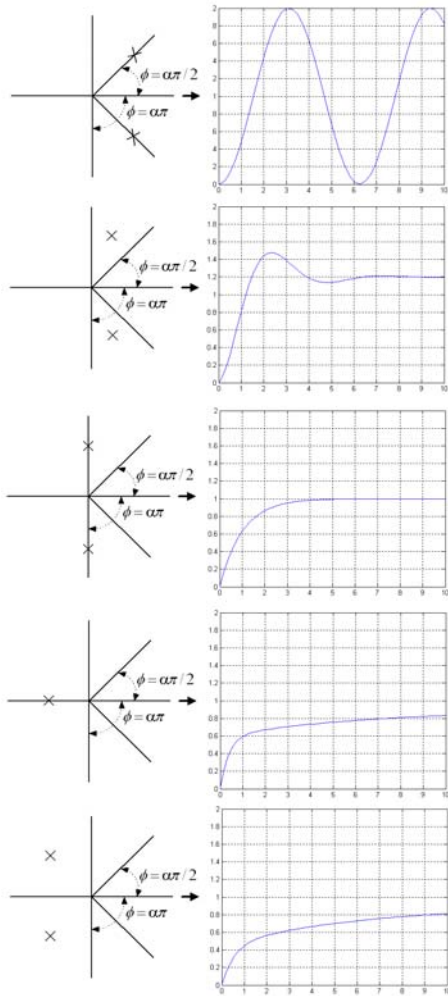


Figura 3. Respuestas al escalón en función de la localización de las raíces para $|\arg(\lambda_k)| = \alpha\frac{\pi}{2}$.

adición de las contribuciones individuales de los términos de orden α resultantes de la factorización de la función. Para cada uno de los factores resultantes, que de una forma general podemos poner como $(s^\alpha + \gamma)^{\pm 1}$, la curva de magnitud tendrá una pendiente que, partiendo de cero para bajas frecuencias, tenderá a $\pm\alpha 20\text{dB/dec}$ para altas frecuencias, y la curva de fase evolucionará desde 0° hasta $\pm\alpha\frac{\pi}{2}$. Además, se producirá resonancia para $\alpha > 1$.

Respuesta estacionaria Se puede demostrar que los sistemas de orden fraccionario siempre tienen coeficientes de error estático que son 0 ó ∞ , lo que muestra que su comportamiento, también en régimen estacionario, participa de las características del comportamiento de los sistemas de órdenes enteros menores y mayores que su orden fraccionario. Estos sistemas sólo tendrán coeficientes finitos para entradas cuya dependencia temporal sea del tipo $r(t) = At^\gamma$, cuya transformada de Laplace responde a la expresión

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = R(s) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{s^{\gamma+1}}. \quad (37)$$

4. CONTROL FRACCIONARIO

4.1 Introducción

Para modificar adecuadamente la dinámica de un proceso y que las salidas sean las deseadas se precisan fundamentalmente dos cosas: una referencia de funcionamiento, modelada por medio de las especificaciones, y un controlador que haga que ese objetivo se consiga. El *control fraccionario* propone el uso de operadores y sistemas fraccionarios en ambos cometidos, es decir, como sistemas de referencia y como controladores. Como ejemplo de ello y por tratar en este trabajo sólo los aspectos fundamentales, en lo que sigue se hablará principalmente del *integrador fraccionario como sistema de referencia*, y de los *controladores Proporcional, Integral y Derivativo Fraccionarios (FOPID)*, por incluir este controlador de tres términos todas las acciones básicas de control.

4.2 El integrador Fraccionario como Sistema de Referencia

En las secciones anteriores se ha podido comprobar que el sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{A}{s^\alpha + A}, \quad 0 < \alpha < 2, \quad (38)$$

que corresponde a la ecuación (10) bajo condiciones iniciales nulas, puede exhibir dinámicas que van desde la relajación hasta la oscilación, incluyendo las dinámicas correspondientes a los sistemas de primer orden y segundo orden como casos particulares. Resulta por tanto interesante tomar este sistema como sistema de referencia. Esto se propuso por primera vez en (Manabe, 1963) y constituye también el punto de partida para el control CRONE (Oustaloup, 1995), así como el criterio adoptado en un trabajo reciente (Barbosa, et al., 2004) para sintonizar controladores *PID* tradicionales. Tal función se puede considerar como el resultado de conectar en lazo cerrado un integrador fraccionario de ganancia A y orden α (ver Figura 4), es decir, un sistema cuya función de transferencia tiene la forma

$$F(s) = \frac{A}{s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (39)$$

La función de transferencia $F(s)$ es la que Bode denominó *función de transferencia ideal u óptima* (Bode, 1945), cuyas características principales son un margen de fase constante, $\phi_m = \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$, que depende sólo del orden de integración α , y

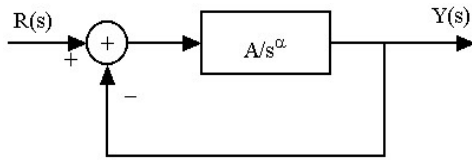


Figura 4. Integrador fraccionario como sistema de referencia. Estructura en lazo cerrado con realimentación unitaria

una frecuencia de cruce por cero decibelios que depende de la ganancia A . En el dominio del tiempo esto equivale a una respuesta escalón de la forma

$$y(t) = Ar_k t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-At^\alpha), \quad (40)$$

que tiene una sobreoscilación o máximo que depende sólo de α , siendo A el factor que modula la rapidez.

Un estudio completo de este sistema de referencia se puede encontrar en (Vinagre, et al., 2004).

4.3 Controladores Fraccionarios

Introducción Las primeras aportaciones en este campo fueron los artículos que a finales de los años cincuenta y principios de los sesenta publicaron Tustin (Tustin, et al., 1958), Carlson y Halijak (Carlson and Halijak, 1951) y S. Manabe (Manabe, 1963). El primero de ellos, al tratar del control de posición de un servomecanismo hablaba de la conveniencia de un controlador que proporcionase un margen de fase constante sobre un intervalo de frecuencias, lo que equivale a tomar como referencia para el sistema controlado una aproximación del integrador fraccionario comentado en la sección anterior. En los otros dos trabajos se estudiaba la aplicación del integrador fraccionario para el control de un servomecanismo, y el uso de controladores fraccionarios en sistemas con saturación. Tras estas aportaciones pioneras y aisladas hubo que esperar una década para que aparecieran las primeras aportaciones sistemáticas del uso de controladores fraccionarios en los trabajos de Oustaloup y sus colaboradores (Oustaloup, 1995). A partir de los años ochenta han ido apareciendo algunos otros trabajos que consideran la posibilidad de utilizar controladores fraccionarios, utilizando métodos y técnicas que van desde el lugar de las raíces hasta la optimización H_∞ . Al final de esta sección se comentarán sucintamente algunos de estos trabajos.

Acciones básicas de control Partiendo del diagrama de bloques de la Figura 5, se comentarán aquí los efectos de las acciones básicas de control del tipo Ks^μ para $\mu \in [-1, 1]$. Las acciones básicas de

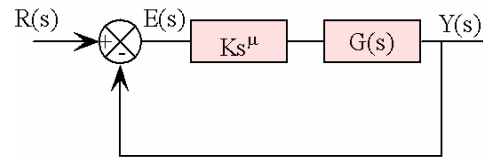


Figura 5. Acciones básicas de control. El tipo de acción ejercida depende del valor del parámetro $\mu \in [-1, 1]$

control tradicionalmente consideradas serán casos particulares de este caso general, en los que para $\mu = 0$ se ejercerá una acción proporcional, para $\mu = -1$ se ejercerá una acción integral, y para $\mu = 1$ una acción derivativa.

Como es sabido, los principales efectos de la acción integral son hacer más lenta la respuesta del sistema, disminuir la estabilidad relativa del mismo, y eliminar el error estacionario del sistema ante entradas para las que antes tenía un error finito. Dichos efectos se pueden ver en los distintos dominios de análisis. En el dominio del tiempo, los efectos sobre la respuesta transitoria se manifiestan en un decrecimiento del tiempo de subida y un aumento del tiempo de establecimiento y la sobreoscilación. En el plano complejo, los efectos de la acción integral se traducen en un desplazamiento del lugar de las raíces del sistema hacia el semiplano derecho. Por último, en el dominio de la frecuencia dichos efectos se manifiestan en un incremento de $-20dB/dec$ en las pendientes de la curva de magnitud y un descenso de $\pi/2$ en la curva de fase. En el caso de que se tenga un orden de integración fraccionario, es decir, $\mu \in (-1, 0)$, la selección del valor de μ se traduce en una determinada ponderación de los efectos arriba comentados.

En el dominio del tiempo, los efectos de la acción de control pueden inducirse de la manera en que dicha acción trata a una señal error que es una onda cuadrada (ver Figura 6). Como puede observarse, los efectos de la acción de control sobre la señal error asumida, varían entre los efectos de una acción proporcional ($\mu = 0$, onda cuadrada) y los de una acción integral ($\mu = -1$, curva a tramos rectos), mientras que para valores intermedios de μ la acción de control es creciente para un error constante, lo que resulta en la eliminación del error estacionario, y decrece cuando el error se hace cero, lo que resulta en una menor inestabilidad del sistema.

En el plano complejo, se puede ver que la selección de un valor de μ se traduce en la elección de en qué medida se desplaza el lugar de las raíces hacia el semiplano derecho, y de los valores de K que hacen que se cumpla la condición de módulo.

En el dominio de la frecuencia, el hecho de variar μ entre -1 y 0 , supone la posibilidad de introducir

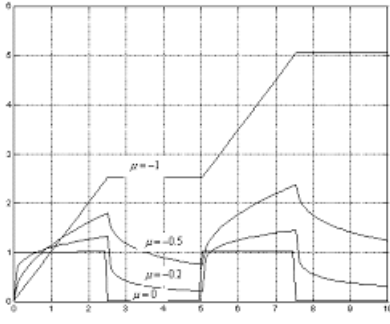


Figura 6. Efectos de la acción integral sobre una onda cuadrada según el orden de integración

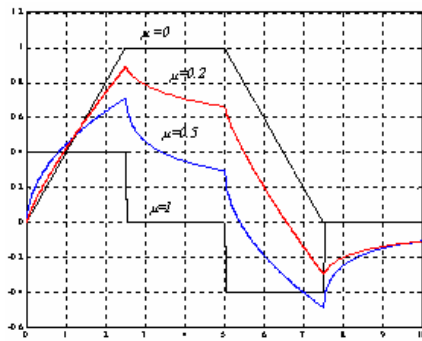


Figura 7. Efectos de la acción derivativa sobre una función trapezoidal según el orden de derivación

un incremento constante en las pendientes de la curva de magnitud que variará entre $-20dB/dec$ y $0dB/dec$, y/o un retraso constante en la curva de fase que variará entre $\pi/2$ y 0.

La acción derivativa, por su parte, aumenta la estabilidad del sistema y tiende a enfatizar los efectos de los ruidos y perturbaciones de alta frecuencia. En el dominio del tiempo, esto se manifiesta, principalmente, por una disminución tanto de la sobreoscilación como del tiempo de establecimiento. En el plano complejo, como un desplazamiento del lugar de las raíces del sistema hacia el semiplano izquierdo. En el dominio de la frecuencia, como un adelanto constante de fase de $\pi/2$ y un aumento de $20dB/dec$ en las pendientes de la curva de magnitud. Siguiendo un razonamiento paralelo al realizado para la acción integral, es fácil admitir que todos estos efectos pueden ser ponderados mediante la elección del orden de la derivada (ver Figura 7).

Controladores PID fraccionarios El controlador *PID*, que engloba las tres acciones básicas de control, es todavía el más utilizado en la industria de control de procesos debido, fundamentalmente, a su simplicidad funcional y a la robustez que proporciona a los sistemas de control, y ha recibido una atención constante desde que Ziegler y Nichols presentaron sus métodos de sintonía

en 1942 (Ziegler and Nichols, 1942). A la vista de lo expuesto en el apartado anterior, en este apartado se pretende mostrar cómo, utilizando los operadores fraccionarios, es posible obtener una estructura más general para el *PID* clásico que, manteniendo la simplicidad del concepto y lo compacto de su formulación, hace posible tratar con una clase más general de problemas de control en los cuales la naturaleza fraccionaria del controlador puede venir impuesta, bien por la naturaleza fraccionaria del propio sistema a controlar o bien por la especial naturaleza de las respuestas temporales o frecuenciales requeridas.

El controlador *PID* clásico puede considerarse como una forma particular de compensación atraso-adelanto en el dominio de la frecuencia. Su función de transferencia puede expresarse como

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (41)$$

o bien

$$C(s) = k \frac{(s/\omega_c)^2 + 2d_c s/\omega_c + 1}{s}, \quad (42)$$

con $\omega_c = \sqrt{K_i/K_d}$, $d_c = K_p/(2\sqrt{K_i K_d})$, $k = K_i$.

Por tanto, las aportaciones del controlador pueden verse como dependientes de: a) las ganancias K_p , K_i , K_d ; b) la ganancia k y los parámetros ω_c , d_c . En la respuesta en frecuencia del controlador, la elección de estas ganancias o parámetros es equivalente a la selección de la posición, suavidad y valor del mínimo en la curva de magnitud, y la pendiente de la curva de fase a la frecuencia en que se produce tal mínimo. Sin embargo, para altas y bajas frecuencias, los valores de las pendientes en la curva de magnitud y de las aportaciones de fase son fijos.

La ecuación íntegro-diferencial que define la acción de control del *FOPID* es

$$u(t) = K_p e(t) + K_i D^{-\lambda} e(t) + K_d D^{\mu} e(t). \quad (43)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior con condiciones iniciales nulas, se obtiene la función de transferencia del controlador, que puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned} C_f(s) &= K_p + \frac{K_i}{s^{\lambda}} + K_d s^{\mu} \\ &= k \frac{(s/\omega_f)^{\lambda+\mu} + 2d_f s^{\lambda}/\omega_f + 1}{s^{\lambda}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Como puede observarse, el uso del *FOPID* permite seleccionar, además de lo que permitía el *PID* clásico, bien las pendientes de la curva de

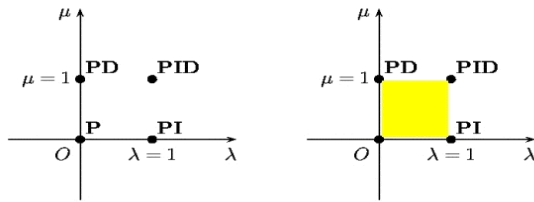


Figura 8. Ilustración gráfica de las aportaciones de un PID tradicional y uno fraccionario ($FOPID$)

magnitud, bien las aportaciones de fase a bajas y altas frecuencias. De una forma gráfica, se pueden ver las posibilidades ofrecidas por el $FOPID$ en la Figura 8. En ella, estas nuevas posibilidades se presentan gráficamente como la posibilidad de ocupar toda la superficie del cuadrado definido por los vértices que representan las únicas posibilidades del PID clásico.

Desde los trabajos de Ziegler y Nichols (Ziegler and Nichols, 1942), se han propuesto muchos métodos de diseño y procedimientos de sintonía para los controladores PID . Teniendo en cuenta la posibilidad de seleccionar no sólo las constantes del controlador, sino también los órdenes de las acciones integral y derivativa, se pueden generalizar estos métodos y procedimientos de forma que puedan hacerse más flexibles y potentes, y permitan resolver una clase más amplia de problemas de control. A modo de ilustración, podemos referirnos al trabajo expuesto en (Monje, et al., 2005a), en el que se muestra cómo, resolviendo un problema de optimización no lineal, se pueden sintonizar los parámetros de un $FOPID$ para que el sistema controlado cumpla cinco especificaciones de diseño, incluyendo entre ellas especificaciones de error estacionario, márgenes de fase y ganancia, frecuencias de cruce, fase plana alrededor de la frecuencia de cruce de ganancia, atenuación de ruido de alta frecuencia, limitación de los efectos de las perturbaciones, y limitación del esfuerzo de control. En la literatura técnica se pueden encontrar otros criterios y métodos para sintonizar controladores $FOPID$ (ver (Monje, et al., 2005a) para referencias adicionales).

Otras estrategias de control fraccionario Teniendo en cuenta la forma de las acciones básicas de control, es fácil entender que el uso de los operadores fraccionarios se extienda a otras estrategias de control diferentes al control PID , al menos a todas aquellas en las que se haga uso de una derivada o una integral. De entre todas las que se han propuesto, es de especial relevancia el control $CRONE$ (*Commande Robuste d'Ordre Non Entier*). Hasta el día de hoy existen tres generaciones del control CRONE. La *primera generación* considera el empleo de un controlador del tipo

$$C(s) = As^\alpha,$$

siendo su propósito aumentar el margen de fase del sistema en un cierto valor determinado por α . Este tipo de controladores resultan muy útiles cuando la planta a controlar tiene una fase constante, al menos en un rango de frecuencias alrededor de la frecuencia de cruce por $0dB$, en cuyo caso el sistema será robusto ante cambios en la ganancia de la planta. Cuando la planta a controlar, $G(s)$, no presenta fase plana alrededor de la frecuencia de interés, el controlador CRONE de primera generación no puede asegurar la robustez ante cambios en la ganancia del sistema. El control CRONE de *segunda generación* se basa en la identificación frecuencial del controlador $C(s)$ que hace posible que el sistema en lazo abierto sea del tipo $F(s) = C(s)G(s) = As^\alpha$, al menos en el rango de frecuencias apropiado. Tanto la primera como la segunda generación CRONE tienen por propósito que el sistema controlado sea robusto ante cambios en la ganancia de la planta. Sin embargo, hay otros tipos de incertidumbres en el modelo que no se cubren con estas dos estrategias de control. La *tercera generación* CRONE se centra en este aspecto, considerando incluso órdenes de derivación e integración complejos (ver (Oustaloup, 1995)).

También la introducción del cálculo fraccionario en el campo del control óptimo ha suscitado un interés considerable. Por ejemplo, en (Malti, et al, 2003) se estudia la norma H_2 para el caso de sistemas $SISO$ fraccionarios, aunque sin aplicar el resultado al desarrollo de estos controladores. En (Petráš and Hysiusova, 2002) se propone un método para la sintonía de un controlador de orden no entero mediante minimización de la norma H_∞ para sistemas $SISO$.

Otra de las estrategias en la que el cálculo fraccionario ha encontrado aplicación es el control adaptativo. Como ya se conoce, este tipo de control se basa, de manera general, en expresar el comportamiento deseado del sistema en términos de un modelo de referencia que describe las propiedades entrada-salida del sistema en lazo cerrado. Los parámetros del controlador se ajustan de manera que el error entre las salidas del sistema real y el de referencia sea mínimo. En (Vinagre, et al., 2002) se propone el empleo del cálculo fraccionario tanto para el ajuste de los parámetros del controlador como para la definición de los sistemas de referencia.

El control iterativo también ha sido objeto de estudio para el caso de sistemas de orden no entero. En (Chen and Moore, 2001) se propone emplear un derivador fraccionario para este tipo de control, y en (Lazarević, 2004) se presenta un nuevo algoritmo para el control por aprendizaje

teniendo en cuenta dicho derivador de orden no entero.

El estudio de compensadores en adelanto y atraso generalizados de orden fraccionario es otra de las aportaciones a destacar. Su estructura y características frecuenciales, así como técnicas para la sintonía de los mismos se describen en (Monje, et al., 2004; Monje, et al., 2005b), destacándose la mayor robustez que ofrece este tipo de compensadores frente a los de orden entero.

También cabe mencionarse la introducción del cálculo fraccionario en control de sistemas no lineales, destacándose las aportaciones en lo que se refiere al control en modo deslizante (SMC) (Calderón, 2003; Calderón, et al., 2003; El-Khazali, 2004; Vinagre and Calderón, 2006), proponiéndose en este último trabajo el uso de operadores fraccionarios tanto para determinar la superficie de deslizamiento como para la ley de control.

El observador de perturbación es otra de las estrategias consideradas. En este tipo de control, se trata la diferencia entre la salida actual del sistema y la salida del modelo nominal como una perturbación equivalente que se aplica a dicho modelo nominal. Una vez estimada la perturbación se emplea dicha estimación como una señal de compensación. La generalización de este tipo de observadores a orden fraccionario se estudia en (Chen, et al., 2003).

Todas las estrategias de control aquí citadas encuentran su aplicación en campos muy numerosos y diversos. Así, en (Oustaloup, et al., 1995; Valério, 2001) se trata el control de transmisiones flexibles, abordándose el problema de suspensiones activas en (Lanusse, et al., 2003). En (Yago, 1999) se estudia el control de estructuras viscoelásticas. Otras aplicaciones de interés se presentan en (Calderón, 2003; Calderón, et al., 2003) referidas a convertidores electrónicos de potencia tipo buck, y en (Pommier, et al., 2003), referidas a actuadores hidráulicos. El control fraccionario de sistemas térmicos es objeto de estudio en (Vinagre, et al., 2001; Petráš and Vinagre, 2002; Petráš, et al., 2002a; Sabatier, et al., 2003). La robótica es otro de los campos en los que el cálculo fraccionario está cada vez más presente. El control fraccionario de robots rígidos se aborda en (Tenreiro and Azenha, 1998; Fonseca and Tenreiro, 2003). Igualmente, se presentan estrategias para el control de robots flexibles en (Feliu, 2005; Valério and Sá Da Costa, 2005; Fujii, 1996). Por su parte, la robótica móvil y el seguimiento de trayectorias es objetivo de diversos trabajos como (Melchior, et al., 2003; Poty, 2004; Suárez, et al., 2006).

5. REALIZACIÓN DE CONTROLADORES FRACCIONARIOS

5.1 Introducción

Utilizando las definiciones de Riemann-Liouville para los operadores fraccionarios, un controlador fraccionario vendrá caracterizado por una función de transferencia continua como (16), o por una función de transferencia discreta de la forma (17). Un controlador fraccionario, por tanto, como sistema fraccionario que es, tiene una función de transferencia no racional en el dominio de Laplace, o una función de transferencia de orden ilimitado en el dominio de z . Por una parte, es obvio que sólo en el caso de orden entero es posible realizar exactamente una función de transferencia continua utilizando elementos circuitales convencionales, tales como resistencias, condensadores o inductancias. Por otra, sólo en el caso de orden entero los términos de la forma $(w(z^{-1}))^\gamma$ tendrán un número finito de términos, es decir, podrán ser realizados exactamente utilizando los procedimientos habituales para la realización de controladores discretos (ecuaciones en diferencias de orden finito o filtros digitales de orden finito). Así, lo que en el modelado suponía una ventaja – la memoria ilimitada – se convierte en un inconveniente a la hora de la implantación, y hace imposible, al menos con los conocimientos actuales, utilizar plenamente las ventajas de los controladores fraccionarios. Por ello, y teniendo en cuenta que el paso final para la aplicación de los controladores fraccionarios exige la obtención de una forma realizable de los mismos, será necesario obtener aproximaciones realizables de las funciones de transferencia que los caracterizan.

Al menos desde los años sesenta, algunos investigadores han estado interesados en obtener modelos aproximados de orden entero de sistemas de orden fraccionario, o modelos de dimensión finita de sistemas de dimensión infinita o de parámetros distribuidos. La mayoría de estos investigadores trabajaban en electroquímica, donde el problema es, generalmente, construir un circuito eléctrico equivalente de un proceso en el que hay fenómenos de difusión. Más tarde, el uso de estos circuitos equivalentes se extendió al estudio de sistemas o materiales viscoelásticos. Con los trabajos que aplican el cálculo fraccionario en control, surge la necesidad de buscar modelos que permitan la realización efectiva de controladores y filtros fraccionarios, es decir, de dispositivos cuyo comportamiento dinámico venga caracterizado por los operadores del cálculo fraccionario. Con una realización efectiva queremos decir que las aproximaciones deben reproducir con suficiente fidelidad el comportamiento ideal de los operadores, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia,

y además ser de una complejidad aceptable de forma que los recursos exigidos permitan y aconsejen su utilización práctica, lo que vendrá reflejado, fundamentalmente, en el número y distribución de polos y ceros de la aproximación.

A continuación resumiremos brevemente el estado del arte en este asunto, hablando de aproximaciones continuas y aproximaciones discretas.

5.2 Aproximaciones Continuas

Obtener un modelo continuo realizable de un controlador fraccionario supone la obtención de una aproximación racional de la función de transferencia no racional que lo caracteriza. Dicha aproximación racional puede entenderse como el resultado de aproximar el comportamiento del operador s^α , $0 < \alpha < 1$, en el plano complejo. Teniendo en cuenta que dicho operador tiene un corte de rama a lo largo del eje real negativo para $\arg(s) \in (-\pi, \pi)$ pero está libre de polos y ceros, y que un denso entrelazado de polos y ceros simples a lo largo de una línea en el plano s es, en cierto sentido, equivalente a un corte de rama, una buena aproximación continua a los operadores fraccionarios debe dar como resultado una *función racional con polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo*. Esto asegurará, además, que las aproximaciones resultantes correspondan a sistemas estables y de fase mínima. Entre otros métodos matemáticos, dos son particularmente interesantes para este propósito desde un punto de vista de control: el método de expansión en fracciones continuadas, habitualmente utilizado para la evaluación aproximada de funciones, y el método de aproximación racional, habitualmente utilizado para la interpolación de funciones. Por otra parte, se han utilizado métodos de ajuste de curvas para la obtención de aproximaciones racionales de las respuestas en frecuencia características de los sistemas fraccionarios.

Es bien sabido que el método de expansión en fracciones continuadas para la evaluación aproximada de funciones frecuentemente converge más rápidamente que la expansión en serie de potencias y en un dominio más amplio del plano complejo. El resultado de tal aproximación puede expresarse de la forma

$$G(s) \approx a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}}, \quad (45)$$

siendo a_i y b_i funciones racionales de la variable s o constantes. La expresión anterior da lugar a una función que es una aproximación racional de la función original $G(s)$.

Por otra parte, para la interpolación de funciones, las funciones racionales son frecuentemente mejores que las polinómicas por su capacidad de modelar funciones con polos y ceros. Estas técnicas están basadas en la aproximación de una función, $G(s)$, mediante una función racional definida por un cociente de polinomios en la variable s y que pasa por los puntos $(s_i, G(s_i)) \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$, es decir

$$\begin{aligned} G(s) &\approx R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(s)}{Q_v(s)} \\ &= \frac{p_0 + p_1s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1s + \dots + q_v s^v}, \\ m+1 &= \mu + v + 1. \end{aligned} \quad (46)$$

Otros métodos se basan directamente en la distribución alternada sistemática de ceros y polos (factores de adelanto y atraso) para ajustar las curvas originales de magnitud y fase de los operadores fraccionarios en el dominio de la frecuencia. Las localizaciones de los ceros y polos de esta distribución suelen obtenerse de una forma recursiva.

Además, cualquier método de identificación de sistemas o ajuste de curvas en el dominio de la frecuencia puede emplearse con objeto de obtener un modelo racional cuya respuesta en frecuencia se ajuste a la del sistema de forma que se haga mínima, utilizando generalmente mínimos cuadrados, una determinada función de coste, que suele ser de la forma

$$J = \int W(\omega) \left| H(\omega) - \hat{H}(\omega) \right|^2 d\omega, \quad (47)$$

siendo $W(\omega)$ una función de ponderación, $H(\omega)$ la respuesta en frecuencia original, y $\hat{H}(\omega)$ la respuesta en frecuencia del modelo aproximado.

Una revisión de todos estos métodos puede verse en (Vinagre, 2001; Petráš, et al., 2002b; Valério, 2005). Como se ha dicho, todas las buenas aproximaciones tienen polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo, es decir, pueden verse como la conexión en serie de factores de atraso y adelanto para ir componiendo la respuesta en frecuencia deseada (ver Figura 9).

5.3 Aproximaciones Discretas

De forma general, si una función continua $f(t)$ se aproxima mediante una función discreta, $f(nh)$, que coincide con ella en los puntos $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots, n$, siendo h el espaciado constante entre puntos o paso, la aproximación para su integral o derivada de orden α puede expresarse como

$$y(nh) = h^{\pm\alpha} (w(z^{-1}))^{\mp\alpha} f(nh), \quad (48)$$

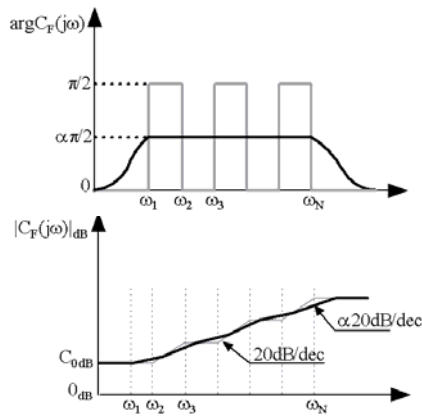


Figura 9. Factores atraso/adelanto, correspondientes a polos y ceros entrelazados, para aproximar el comportamiento frecuencial de los operadores fraccionarios

donde z^{-1} es el operador de traslación y $w(z^{-1})$ es la función generadora que, junto a su método de expansión, determinan tanto la forma como los coeficientes de la aproximación.

Es preciso tener en cuenta que el caso de la realización discreta de controladores o filtros fraccionarios no es equivalente a los casos de simulación o evaluación numérica de los operadores íntegro-diferenciales fraccionarios. En el caso de la aproximación numérica, útil para la integración numérica de ecuaciones y la simulación dinámica de sistemas, debemos tener en cuenta el coste computacional y la convergencia del algoritmo, lo que nos llevará a elegir el método y el paso a utilizar. En el caso de realización de controladores es necesario, sin embargo, tener en cuenta algunas otras consideraciones importantes.

En primer lugar, el valor de h , el paso o separación entre puntos cuando tratamos de evaluación numérica o simulación, es el valor del periodo de muestreo, T ; en segundo lugar, todo el proceso requerido por la ley de control debe realizarse en un intervalo de tiempo sensiblemente inferior al periodo de muestreo. Por otra parte, el número de términos del desarrollo de la función generadora considerados para la aproximación determina el tamaño de la memoria requerida para llevar a cabo la ley de control. Así, en este caso, el sistema microprocesador empleará impondrá restricciones en base a sus limitaciones de velocidad de muestreo, potencia de cálculo y memoria. Ello hace que tengamos que decidir no sólo el paso (periodo de muestreo) y el método (función generadora), sino el tipo de expansión y el orden del filtro.

Por otra parte, las aproximaciones discretas pueden verse como el resultado de discretizar el operador s^α , $0 < \alpha < 1$, mediante el operador discreto $(w(z^{-1}))^\alpha$. Teniendo en cuenta las relaciones entre

los planos s y z , el hecho de que sea deseable que las aproximaciones continuas sean funciones racionales en s con polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo, equivale a que las buenas aproximaciones discretas sean funciones racionales en z con ceros y polos entrelazados a lo largo de $z \in (-1, 1)$. Por último, se ha de tener en cuenta que obtener una determinada respuesta frecuencial exige muchos menos coeficientes si se utiliza un filtro *IIR* (Respuesta Impulsiva Infinita) que si se utiliza uno *FIR* (Respuesta Impulsiva Finita), es decir, una función racional en z^{-1} en lugar de un polinomio.

Son muchos los métodos propuestos en la literatura técnica para la aproximación discreta de operadores fraccionarios con propósitos de control o filtrado, y un excelente análisis de los mismos se puede encontrar en (Valério, 2005). En su mayor parte estos métodos están basados en fórmulas de cuadratura de la integral fraccionaria

$$I^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tau > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (49)$$

o en formas de aproximación numérica de las derivadas. En ambos casos se utilizan diferentes funciones generadoras correspondientes a diferentes tipos de aproximación, siendo las más usuales la *regla rectangular regresiva* (método de Euler) y la *regla trapezoidal*. La primera, con una función de la forma

$$w(z^{-1}) = (1 - z^{-1}), \quad (50)$$

da como resultado, cuando se expande en serie de potencias, el filtro *FIR* equivalente a la fórmula de Grünwald-Letnikov para la derivada fraccionaria. Si utilizamos cualquiera de estas funciones generadoras y hacemos una expansión en fracciones continuadas, o una expansión en serie de potencias separada para numerador y denominador en caso de la regla trapezoidal, obtendremos como derivadores o integradores fraccionarios aproximados filtros *IIR*. Esto es, filtros digitales de la forma

$$D^{\pm\alpha}(z) = T^\alpha \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})}, \quad (51)$$

donde P_p y Q_q son polinomios de grado p y q respectivamente, y T es el periodo de muestreo.

5.4 Consideraciones Generales sobre la Realización de los Controladores

En general, hay dos maneras de realizar los controladores: una hardware basada en el uso de

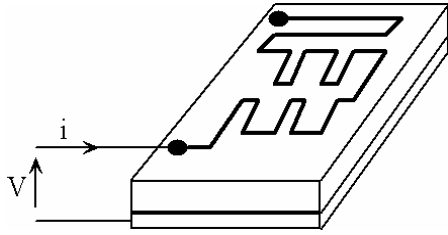


Figura 10. Dispositivo fractal para la realización de impedancias fraccionarias: $V/I = 1/Cs^\alpha$, $0 < \alpha < 1$

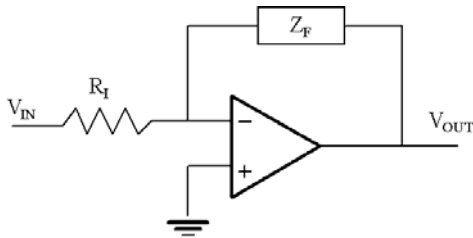


Figura 11. Filtro activo con impedancia fraccionaria (Z_F) en la realimentación: $V_{out}/V_{in} \approx -Z_F/R_I$

un dispositivo físico, y una software o discreta basada en un programa que se ejecuta en un microprocesador. En electrónica analógica, la realización hardware implicará el uso de dispositivos o circuitos electrónicos que sinteticen la función de transferencia requerida como admitancia o impedancia. Para realizar tal función se pueden considerar al menos dos posibilidades: la fabricación de un dispositivo microelectrónico que, por construcción, tenga la impedancia o admitancia requerida (ver Figura 10); o bien realizar una de las aproximaciones racionales estudiadas utilizando redes de resistencias, condensadores e inductancias con una determinada topología (escalera, cascada, árbol o celosía).

Es preciso tener en cuenta que para ser realizable como impedancia o admitancia en la forma arriba comentada, la aproximación racional de partida debe ser una función real positiva. Es posible demostrar que cualquiera de las buenas aproximaciones racionales obtenidas es una función real positiva por tener polos y ceros entrelazados a lo largo del eje real negativo. Además, estas realizaciones pueden ser mejoradas utilizando elementos activos en los circuitos, principalmente amplificadores operacionales. Es decir, puede obtenerse mayor flexibilidad en las realizaciones si las sintetizamos como filtros activos (ver Figura 11).

Para cualquier realización discreta es preciso disponer de una ecuación en diferencias. Dicha ecuación en diferencias puede obtenerse mediante la aproximación numérica de una ecuación diferencial o mediante la transformación Z inversa de numerador y denominador en una función de transferencia discreta. Para este último caso es

posible utilizar cualquiera de las aproximaciones discretas mencionadas o la versión discreta de cualquiera de las aproximaciones continuas. Por otra parte, considerando el sistema descrito por una función de transferencia discreta como un filtro digital, pueden tenerse en cuenta consideraciones útiles bien conocidas en la teoría de filtros digitales con objeto de elegir la mejor estructura para la realización.

6. HERRAMIENTAS SOFTWARE PARA EL MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS FRACCIONARIOS

Existen en la actualidad diversas herramientas software dedicadas al modelado y simulación de sistemas fraccionarios. El interés que está despertando el cálculo fraccionario, cuyas aplicaciones en campos como el de control y otros muy diversos son crecientes, hace que este tipo de herramientas sean cada vez de mayor utilidad y necesidad. El propósito común de todas ellas es ofrecer la posibilidad de incluir elementos de orden generalizado tanto para el modelado de sistemas como para el control de los mismos.

En esta línea, el equipo CRONE lleva desde principios de los años 90 desarrollando un toolbox para Matlab (Melchior, et al., 2004), consistente en varios módulos dedicados a la identificación de sistemas y control de orden fraccionario para sistemas SISO y MIMO. De entre los módulos principales caben destacarse los siguientes: *Fractional Calculus*, que incluye unidades como la derivada fraccionaria; *System Identification by Fractional Model*, para la identificación de sistemas de orden no entero; *CRONE Control System Design*, que contempla las tres generaciones del control CRONE; y *Fractional Simulink Library*, que permite incluir en los modelos de Simulink elementos de orden no entero. A la realización de esta herramienta han contribuido muy diversos trabajos, pudiéndose encontrar una buena descripción de los mismos en (Oustaloup, et al., 2000; Melchior, et al., 2002).

Otra herramienta interesante es la denominada *Ninteger* (Valério and Sá Da Costa, 2004a), que, a diferencia del toolbox del equipo CRONE, es de libre distribución con código accesible para Matlab. Desarrollada en el Instituto Superior Técnico de la Universidad Técnica de Lisboa, está ideada para facilitar el desarrollo de controladores fraccionarios en sistemas SISO, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Para ello cuenta con funciones de implementación de las distintas aproximaciones de controladores fraccionarios, funciones para la identificación de sistemas y una interfaz gráfica que permite la gestión de estas funciones y el diseño de controladores de orden

no entero de una manera interactiva y sencilla. Puede encontrarse una mayor descripción de estas funciones en (Valério and Sá Da Costa, 2002; Valério and Sá Da Costa, 2003a; Valério and Sá Da Costa, 2003b; Valério and Sá Da Costa, 2004b; Valério, 2005).

7. ACTUALIDAD DEL CONTROL FRACCIONARIO

Como signos de la creciente actividad en Control Fraccionario, diremos que, además de las cada vez más numerosas contribuciones individuales, desde el año 2002 se han ido sucediendo workshops, sesiones especiales, sesiones invitadas y números especiales en congresos y revistas internacionales: IEEE Conference on Decision and Control (Las Vegas, USA 2002), ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise (Chicago, USA 2003, Long Beach, USA 2005), Nonlinear Dynamics (Vol. 29, Nos. 1-4 2002, Vol. 38, Nos. 1-4 2004), Signal Processing (Vol. 83, No. 11, 2003, en prensa 2006). Además, se empiezan a celebrar, bajo el patrocinio de importantes organismos internacionales ligados al control automático, congresos específicos sobre cálculo fraccionario con gran representación de la comunidad de control (IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Bordeaux 2004, Oporto 2006), y a publicarse libros recogiendo los últimos avances en cálculo fraccionario, con gran número de trabajos relativos a las aplicaciones en teoría de control.

Todo ello no es más que el resultado de la actualidad del cálculo fraccionario, siendo las aplicaciones en teoría control de aquéllas que, en buena medida, han contribuido a dicha actualidad. Hoy en día, y tal como se puede ver en los eventos y publicaciones anteriormente citados (ver, e.g. (Agrawal, et al., 2004; Tenreiro, 2002; Ortigueira and Tenreiro, 2003; Le Mehauté, et al., 2005)), las aplicaciones del cálculo fraccionario en control se extienden, entre otros, a los siguientes campos:

- Teoría de sistemas: Modelado, teoría de estabilidad, sensibilidad y robustez.
- Diseño de controladores: Control adaptativo, control de aprendizaje iterativo (ILC), control deslizante (SMC), Control óptimo.
- Aplicaciones en: control y supresión de vibraciones, supresión de ruido, control de posición y velocidad, amortiguación activa, sistemas electrónicos de potencia, sistemas hidráulicos, robótica flexible, robótica móvil.

Queda, sin embargo – y sirva esto como conclusión – la formulación clara de una *Teoría de Control para Sistemas de Orden Generalizado*, es decir, queda reformular la actual teoría de control (al menos de sistemas lineales invariantes en el tiem-

po) tomando los sistemas de orden entero como casos particulares.

REFERENCIAS

- Adams, J. L., T. T. Hartley and C. F. Lorenzo (2006). Fractional-Order System Identification Using Complex-Order Distributions. En: *Proceedings of the Second IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Porto, Portugal.
- Agrawal, O. P., J. A. Tenreiro, and J. Sabatier (Ed.) (2004). Special Issue: Fractional Derivatives and Their Applications. *Nonlinear Dynamics*, **38** (1-4). Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Ahmad, W. M. and R. El-Khazali (2001). On Frequency Response of Fractional-Order Sallen-Key Filters. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 571-573.
- Ahmad, W. M., R. El-Khazali, and A. El-Wakil (2001). Fractional-Order Wien-Bridge Oscillator. *Electronics Letters*, **37**, pp.1110.
- Ahmad, W. M. and J. C. Sprott (2003). Chaos in Fractional-Order Autonomous Nonlinear Systems. *Chaos, Solitons, Fractals*, **16**, pp. 339.
- Anastasio, T. J. (1994). The Fractional-Order Dynamics of Brainstem Vestibulo-Oculomotor Neurons. *Biological Cybernetics*, **72**, pp. 69-79.
- Anastasio, T. J. (2004). Neural Control of Fractional-Order Oculomotor Dynamics. En: *First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Application*, Bordeaux, France, pp. 483-488.
- Bagley, R. L. and R. A. Calico (1991). Fractional Order state Equations for the Control of Viscoelastically Damped Structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **14** (2), pp.304-311.
- Barbosa, R. S., J. A. Tenreiro, and I. M. Ferreira (2004). Tuning of PID Controllers Based on Bode's Ideal Transfer Function. *Nonlinear Dynamics*, **38** (1-4), pp. 305-321.
- Bode, H. W. (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. Van Nostrand, Boston.
- Calderón, A. J. (2003). *Control Fraccionario de Convertidores Electrónicos de Potencia tipo Buck*. Tesis Doctoral, Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Extremadura, Badajoz.
- Calderón, A. J., B. M. Vinagre, and V. Feliu (2003). Linear Fractional Order Control of a DC-DC Buck Converter. En: *ECC 03: European Control Conference 2003*, Cambridge, UK.
- Carlson, G. E. and C. A. Halijak (1961). Simulation of the Fractional Derivative Operator and the Fractional Integral Operator. En: *Proceed-*

- ings of the *CSSCM*, **45**, Kansas State U.B.
- Chen, Y. Q., and K. L. Moore (2001). On D^α -Type Iterative Learning Control. En: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, **40**, Orlando, Florida, USA, pp. 4451-4456.
- Chen, Y. Q., B. M. Vinagre and I. Podlubny (2003). On Fractional Order Disturbance Observer. En: *Proceedings of the 19th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, Illinois, USA.
- Dorcak, L., I. Petráš, and I. Kostial (2000). The Modelling and Analysis of Fractional-Order Regulated Systems in the State Space. En: *Proceedings of the First International Carpathian Control Conference*, Podbanske, Slovak Republic, pp. 185-188.
- El-Khazali, R., W. Ahmad, and Y. Al-Assaf (2004). Sliding Mode Control of Fractional Chaotic System. In: *First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Application*, Bordeaux, France, pp. 495-500.
- Feliu, V., B. M. Vinagre, and C. A. Monje (2005). Fractional Control of a Single-Link Flexible Manipulator. En: *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Long Beach, California, USA.
- Fonseca, N. M., and J. A. Tenreiro (2003). Fractional-Order Hybrid Control of Robotic Manipulators. In: *Proceedings of the 11th International Conference on Advanced Robotics*, Coimbra, Portugal, pp. 393-398.
- Fujii, H. A., K. Nakajima, and K. Matsuda (1996). Wave Approach for Control of Orientation and Vibration of a Flexible Structure. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **19** (3), pp. 578-583.
- Gorenflo, R. and F. Mainardi (2004). Power Laws, Random Walks, and Fractional Diffusion Processes as Well-Scaled Refinement Limits. *Fractional Differentiation and Its Applications* (A. Le Mehauté, J. A. Tenreiro, J. C. Trigeassou, and J. Sabatier (Ed.)). Ubooks, Germany, pp. 497-513.
- Hartley, T. T., C. F. Lorenzo, and H. K. Qammar (1995). Chaos in a Fractional Order Chua System. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, **42** (8), pp. 485-490.
- Hilfer, R. (Ed.) (2000). *Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore.
- Lanusse, P., T. Poinot, O. Cois, A. Oustaloup, and J. Trigeassou (2003). Tuning of an Active Suspension System Using a Fractional Controller and a Closed-Loop Tuning. In: *Proceedings of the 11th International Conference on Advanced Robotics*, Coimbra, pp. 258-263.
- Lazarević, M. P. (2004). PD^α -Type Iterative Learning Control for Fractional LTI System. En: *Proceedings of the 16th International Congress of Chemical and Process Engineering*, Prague, Czech Republic.
- Le Mehauté, A., J. A. Tenreiro, J. C. Trigeassou, and J. Sabatier (Ed.) (2005). *Fractional Differentiation and Its Applications*. Ubooks, Germany.
- Li, C. G. and G. R. Chen (2004). Chaos and Hyperchaos in the Fractional Order Rossler Equations. *Physica A*, **341**, pp. 55.
- Li, C. P. and G. J. Peng (2004). Chaos in Chen's System with a Fractional Order. *Solitons and Fractals*, **22**, pp. 443.
- Liang, J., Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, and I. Podlubny (2005). Identifying Diffusion-Wave Constant, Fractional Order And Boundary Profile of a Time-Fractional Diffusion-Wave Equation from Noisy Boundary Measurements. *Fractional Differentiation and Its Applications* (A. Le Mehauté, J. A. Tenreiro, J. C. Trigeassou, and J. Sabatier (Ed.)). Ubooks, Germany, pp. 517-532.
- Ma, C. (2004). *Fractional Order Control and Its Applications in Motion Control*. Ph.D. Thesis, Tokyo, Japan.
- Malti, R., M. Aoun, O. Cois, A. Oustaloup, and F. Levron (2003). H_2 Norm of Fractional Differential Systems. En: *Proceedings of ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago.
- Malti, R. and J. Sabatier (2004). Time-Domain System Identification Using Fractional Models: A Benchmark. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 315-320.
- Manabe, S. (1963). The Non-Integer Integral and Its Application to Control Systems. *ETJ of Japan*, **6** (3).
- Matignon, D. and B. d'Andréa-Novel (1996). Some Results on Controllability and Observability of Finite-Dimensional Fractional Differential Systems. En: *Proceedings of Computational Engineering in Systems and Application Multiconference*, **2**, Lille, France, pp. 952-956.
- Matignon, D. (2000). Stability Properties for Generalized Fractional Differential Systems. *The European Series in Applied and Industrial Mathematics*, **5**, pp. 145-158.
- Melchior, P., P. Lanusse, O. Cois, F. Dancla, and A. Oustaloup (2002). Crone Toolbox for Matlab: Fractional Systems Toolbox - Tutorial Workshop on Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics. En: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA.

- Melchior, P., B. Orsoni, O. Lavialle, A. Poty, and A. Oustaloup (2003). Consideration of Obstacle Danger Level in Path Planning Using A* and Fast-Marching Optimisation: Comparative Study. *Signal processing*, **83** (11), pp. 2387-2396.
- Melchior, P., N. Petit, P. Lanusse, M. Aoun, F. Levron and A. Oustaloup (2004). Matlab Based Crone Control for Fractional Systems. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 220-227.
- Metzler, R., W. G. Glöckle, and T. F. Nonnenmacher (1994). Fractional Model Equation for Anomalous Diffusion. *Physica A*, **211**, pp.13-24.
- Miller, K. S. and B. Ross (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York.
- Monje, C. A., A. J. Calderón, B. M. Vinagre, and V. Feliu (2004). The Fractional Order Lead Compensator. En: *2nd IEEE International Conference on Computational Cybernetics*, Vienna, Austria, pp. 347-352.
- Monje, C. A., B. M. Vinagre, Y. Q. Chen, V. Feliu, P. Lanusse, and J. Sabatier (2005a). Optimal Tunings for Fractional $PI^\lambda D^\mu$ Controllers. *Fractional Differentiation and Its Applications* (A. Le Mehauté, J. A. Tenreiro, J. C. Trigeassou, and J. Sabatier (Ed.)). Ubooks, Germany, pp. 675-686.
- Monje, C. A., B. M. Vinagre, A. J. Calderón, V. Feliu, and Y. Q. Chen (2005b). Auto-Tuning of Fractional Lead-Lag Compensators. En: *16th IFAC World Congress*, Prague, July 4-8.
- Ortigueira, M. D. and J. A. Tenreiro (Eds.) (2003). Special Issue: Fractional Signal Processing and Applications. *Signal Processing*, **83** (11). Elsevier, Netherlands.
- Oustaloup, A. (1995). *La Dérivation Non Entière*. Hermès, Paris.
- Oustaloup, A., B. Mathieu, and P. Lanusse (1995). The CRONE Control of Resonant Plants: Application to a Flexible Transmission. *European Journal of Control*, **1** (2), pp. 113-121.
- Oustaloup, A., P. Melchior, P. Lanusse, O. Cois, and F. Dancla (2000). The CRONE Toolbox for Matlab. En: *11th IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, Anchorage, Alaska, USA.
- Padovan, J. and J. T. Sawicki (1997). Diophantine Type Fractional Derivative Representation of Structural Dynamics, Part I: Formulation. *Computational Mechanics*, **19**, pp. 335-340.
- Pereira, E., C. A. Monje, B. M. Vinagre, and F. Gordillo (2002). Matlab Toolbox for the Analysis of Fractional Order Systems with Hard Nonlinearities. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 214-219.
- Petráš, I. and M. Hypiusova (2002). Design of Fractional-Order Controllers via H_∞ Norm Minimisation. *Selected Topics in Modelling and Control*, **3**, pp. 50-54.
- Petráš, I. and B. M. Vinagre (2002). Practical Application of Digital Fractional-Order Controller to Temperature Control. *Acta Montanistica Slovaca*, **7** (2), pp. 131-137.
- Petráš, I., B. M. Vinagre, L. Dorcák, and V. Feliu (2002a). Fractional Digital Control of a Heat Solid: Experimental Results. In: *International Carpathian Control Conference*, Malenovice, pp. 365-370.
- Petráš, I., I. Podlubny, P. O'Leary, L. Dorcák, and B. M. Vinagre (2002b). *Analogue Realization of Fractional Order Controllers*. Fakulta Berg, TU Kosice, Kosice.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego.
- Pommier, V., R. Musset, P. Lanusse, and A. Oustaloup (2003). Study of Two Robust Control for an Hydraulic Actuator. In: *ECC 03: European Control Conference 2003*, Cambridge, UK.
- Pommier, V., Y. Janat, P. Lanusse, and A. Oustaloup (2004). Crone Control of the Elevation of a Helicopter Model. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 502-507.
- Poty, A., P. Melchior, and A. Oustaloup (2004). Dynamic Motion Planning by Fractional Potential Using Fast Marching Optimisation. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 532-538.
- Raynaud, H. F., and A. Zergaïnoh (2000). State Space Representation for Fractional Order Controllers. *Automatica*, **36**, pp. 1017-1021.
- Sabatier, J., P. Melchior, and A. Oustaloup (2003). Réalisation d'un Banc d'Essais Thermique pour l'Enseignement des Systèmes Non Entier. In: *Colloque sur l'Enseignement des Technologies et des Sciences de l'Information et des Systèmes*, Université Paul Sabatier, Toulouse, pp. 361-364.
- Schnieder, W. R. and W. Wyss (1989). Fractional Diffusion and Wave Equations. *Journal of Mathematics and Physics*, **30** (1), pp.134-144.
- Suárez, J. I., B. M. Vinagre, and Y. Q. Chen (2006). A Fractional Adaptation Scheme for Lateral Control of an AGV. *2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Porto, Portugal. (Aceptado)
- Tenreiro, J. A., and A. Azenha (1998). Fractional-Order Hybrid Control of Robot Manipulators. In: *1998 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics: Intelligent Systems for Humans in a Cyberworld*, San Diego, California, USA, pp. 788-793.

- Tenreiro, J. A. (Ed.) (2002). Special Issue: Fractional Order Calculus and Its Applications. *Nonlinear Dynamics*, **29** (1-4). Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Tustin, A., J. T. Allansson, J. M. Layton, and R. J. Jakeways (1958). The Design of Systems for Automatic Control of the Position of Massive Objects. En: *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, **105** (C), Supp. 1, pp. 1-57.
- Valério, D. and J. Sá Da Costa (2002). Time Domain Implementations of Non-Integer Order Controllers. En: *Proceedings of CONTROLO*, Aveiro, Portugal, pp. 353-358.
- Valério, D. and J. Sá Da Costa (2003a). Optimisation of Non-Integer Order Control Parameters for a Robotic Arm. En: *Proceedings of the International Conference on Advanced Robotics*, Coimbra, Portugal.
- Valério, D. and J. Sá Da Costa (2003b). Digital Implementation of Non-Integer Control and its Application to a Two-Link Robotic Arm. En: *Proceedings of the European Control Conference*, Cambridge, England.
- Valério, D. and J. Sá Da Costa (2004a). Ninteger: A Non-Integer Control Toolbox for MATLAB. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 208-213.
- Valério, D. and J. Sá Da Costa (2004b). A Method for Identifying Digital Models and Its Application to Non-Integer Control. En: *Proceedings of CONTROLO*, Faro, Portugal.
- Valério, D. (2005). *Fractional Robust System Control*. PhD Thesis, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- Valério, D. and J. Sá Da Costa (2005). Fractional Order Control of a Flexible Robot. *Fractional Differentiation and Its Applications*, (A. Le Mehauté, J. A. Tenreiro, J. C. Trigeassou, and J. Sabatier (Eds.)). Ubooks, Germany, pp. 649-660.
- Vinagre, B. M. (2001). *Modelado y Control de Sistemas Dinámicos Caracterizados por Ecuaciones Íntegro-Diferenciales de Orden Fraccionario*. Tesis Doctoral, UNED, Madrid.
- Vinagre, B. M., I. Petráš, P. Merchán, and L. Dorcák (2001). Two Digital realizations of Fractional Controllers: Application to Temperature Control of a Solid. In: *Proceedings of the European Control Conference*, Porto, Portugal, pp. 1764-1767.
- Vinagre, B. M., I. Petráš, I. Podlubny, and Y. Q. Chen (2002). Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control. *Nonlinear Dynamics*, **29** (1-4), pp. 269-279.
- Vinagre, B. M., C. A. Monje, A. J. Calderón, Y. Q. Chen, and V. Feliu (2004). The Fractional Integrator as a Reference Function. En: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, pp. 150-155.
- Vinagre, B. M., and A. J. Calderón (2006). On Fractional Sliding Mode Control. *CONTROLO 2006* (Aceptado).
- Wyss, W. (1986). The Fractional Diffusion Equation. *Journal of Mathematics and Physics*, **27** (11), pp. 2782-2785.
- Yago, B. S. (1999). Fractional-PID Control for Active Reduction of Vertical Tail Buffeting. *Tech. rep.*, Saint Louis University.
- Ziegler, J. G. and N. B. Nichols (1942). Optimum Settings for Automatic Controllers. *Transactions of the ASME*, **64**, pp. 759-768.