

## CONTROL PREDICTIVO MIN-MAX MULTIMODELO CON RESTRICCIONES, VALIDADO SOBRE UNA PLANTA DE LABORATORIO

Teresa Alvarez\*, Jose Cuesta\*, Mónica Ontoria\*, Fernando Tadeo\*, Juan V. Martín†, John C. Allwright‡

\*Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática,  
Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain  
tere@autom.uva.es

†Dpto. de Ingeniería Electromecánica, Universidad de Burgos, 09006 Burgos, Spain

‡Control and Power Group, Electrical and Electronic Engineering Department,  
Imperial College, Exhibition Road, London SW7 2BT, UK

Resumen: Se presenta el desarrollo e implementación de un Control Predictivo Min-max sobre una planta de laboratorio. Para conseguir su aplicación a sistemas reales, es necesario modificar la formulación original del Control Predictivo Min-max con el fin de reducir su coste computacional e introducir los parámetros de sintonía habituales. Con el controlador propuesto se consigue incluir el efecto de la incertidumbre dentro de una estructura de Control Predictivo, utilizando una formulación eficiente desde el punto de vista numérico al estar basada en Programación Lineal, con parámetros de sintonía sencillos. Esta técnica se ha validado sobre una planta de laboratorio (dos tanques acoplados), comprobándose experimentalmente la estabilidad, robustez y buen rendimiento del controlador propuesto. *Copyright © 2006 CEA-IFAC*

Palabras clave: Min-max, Control Predictivo, Restricciones, Respuesta Impulsional, Programación Lineal

### 1. INTRODUCCIÓN<sup>1</sup>

Se denomina Control Predictivo a un conjunto de estrategias de control basadas en el uso de modelos para predecir el comportamiento del sistema a controlar (Camacho y Bordons, 1995, 2004; Maciejowski, 2000). Estas técnicas han adquirido una gran aceptación tanto en industria como en investigación por varias razones: las ideas básicas son sencillas de comprender, es posible aplicarlas a sistemas multivariantes de elevadas dimensiones, y

permiten tener en cuenta múltiples tipos de restricciones.

Sin embargo, como es conocido a través de los textos de Control Predictivo, existe una limitación: la necesidad de disponer de resultados de estabilidad y robustez fáciles de implementar en procesos industriales. Afortunadamente, existen un buen número de resultados interesantes aparecidos durante la última década que proponen distintas soluciones a estos problemas. (ver por ejemplo Badgwell, 1997; Campo y Morari, 1987; Hrisagis, *et al.*, 1996; Megias, *et al.*, 2002 y los artículos que los referencian).

Este artículo se centra en una de estas propuestas: la solución Min-max, estudiada en el contexto de Control Predictivo por Allwright y Papavasiliou (1992). Comparado con otras estrategias de Control Predictivo que tienen en cuenta la robustez, una ventaja clara es la simplicidad de los algoritmos utilizados, fáciles de

<sup>1</sup> Una versión previa de este artículo fue presentada en el congreso IEEE CCA 2002, Glasgow, UK. El trabajo ha sido financiado por CICYT, proyectos DPI2003-09373 y DPI2004-07444-C04-02 y por la JCyL, proyecto VA058/04. Parte del trabajo fue realizado durante una visita del primer autor al Imperial College of Science and Technology, gracias a una ayuda de la Universidad de Valladolid.

comprender por personas no necesariamente familiarizadas con técnicas de control avanzado.

La idea básica del Control Predictivo Min-max es utilizar las estrategias habituales de Control Predictivo, pero minimizando siempre el *caso peor*, en vez del caso nominal. Campo y Morari (1987) proponían minimizar como función de coste la norma infinito en el peor caso. La ventaja de esta formulación era la posibilidad de transformar este problema a un problema de Programación Lineal (LP), aunque se encontró que el tamaño de la optimización correspondiente a resolver en cada instante de tiempo la hacía no viable para implementaciones reales. Esta transformación se mejoró por Allwright y Papavasilou (1992) y, posteriormente, por Allwright (1994), dando una técnica basada en un problema de optimización que, en principio, es posible resolver en tiempo real. Además, existe la posibilidad de tratar el problema multivariable multimodelo, con incertidumbres y restricciones sobre la acción de control y la salida. Sin embargo, no se mostró su aplicación a ningún ejemplo práctico. Para convertir estos resultados teóricos a una herramienta práctica aplicable a sistemas reales, se proponen en este artículo unas modificaciones del algoritmo, demostrando su aplicabilidad sobre una planta de laboratorio.

Debe mencionarse que otras formulaciones alternativas de Control Predictivo Min-max que han sido propuestas, difieren en el tipo de función de coste, en las restricciones consideradas y en el algoritmo utilizado para resolver el problema. Por ejemplo, Kim y Kwon (1998) propusieron una solución explícita del Control Predictivo. Sin embargo, la imposibilidad de imponer restricciones hacen la técnica inadecuada para poder aplicarla a problemas reales. Álamo *et al.* (2002) propusieron una técnica que mejora el tiempo de cálculo, pero que tampoco incluye restricciones. En la misma línea Ramírez y Camacho (2002) han propuesto una técnica innovadora que han demostrado sobre un proceso real, pero como los autores mencionan, deben realizarse modificaciones adicionales para incluir restricciones.

Un algoritmo diferente, basado en una trayectoria en árbol, fue propuesto por Scokaert y Mayne (1998) para evaluar las posibles respuestas en presencia de incertidumbre. Esta técnica ha sido modificada recientemente por Wang y Rawlings (2004) para incluir representaciones politópicas de la incertidumbre, y así poder asegurar el seguimiento de la referencia sin errores estacionarios. Finalmente, Megías *et al.* (2002) han propuesto implementar un GPC quasi-infinito en la norma 1, que permite incluir la incertidumbre por un procedimiento basado en actualizar la banda predicha, de forma que en cada periodo de muestreo sólo se resuelva un problema de Programación Lineal.

En este artículo se propone un algoritmo de Control Predictivo que permite incluir distintas restricciones, utiliza un modelo sencillo de predicción (respuestas

impulsionales con incertidumbres) y se resuelve mediante un problema de Programación Lineal. Tomando como punto de partida el algoritmo propuesto por Allwright (1994), se proponen distintas modificaciones para facilitar su sintonía y permitir aprovechar la experiencia previa sobre aplicaciones reales de Control Predictivo: los horizontes de predicción y control pueden ser diferentes, se permite añadir distintas restricciones adicionales sobre la señal de control, se escoge un procedimiento de selección de la trayectoria de referencia, etc. Este algoritmo modificado se validará sobre una planta de pruebas, mostrando que es posible su implementación.

Se ha de resaltar que un interés adicional de este artículo es contribuir a aumentar el número de aplicaciones reales de esta estrategia de control, ya que apenas existen aplicaciones de Control Predictivo Min-max aplicadas a sistemas reales: Porfirio *et al.* (2003) han presentado una aplicación para una columna de destilación utilizando multimodelos (pero sin incluir la incertidumbre). Kim y Kwon (1998) han mostrado su aplicación en simulación sobre un proceso de sinterización. Ramírez y Camacho (2002) presentaron la aplicación de su propuesta a un intercambiador de calor (aunque sin considerar restricciones). Recientemente el mismo grupo (Muñoz de la Peña *et al.*, 2005) ha mostrado su aplicación a un sistema real, utilizando la información de la incertidumbre para controlar un sistema SISO sin restricciones.

En gran parte, las principales razones de esta falta de aplicaciones a problemas reales se deben a la inherente complejidad de algunas de estas técnicas, y a la necesidad de incluir factores propios de los problemas reales (restricciones múltiples, múltiples modelos, incertidumbres, etc). Por ello, se piensa que el algoritmo propuesto puede ser una aportación útil, al consistir en un problema de Programación Lineal resoluble en tiempo real, con los parámetros de sintonía habituales y, en el que se pueden incluir fácilmente modelos múltiples multivariables inciertos con restricciones. Además este artículo presenta una aplicación a un problema real, multivariable, multimodelo, con múltiples restricciones e incertidumbres.

Es importante mencionar que aunque los modelos utilizados en este artículo se describen mediante respuestas impulsionales, por ser sencillos de obtener, populares en la industria y simplificar la notación, los resultados pueden ser extendidos a otras descripciones tanto del proceso como de la incertidumbre, siguiendo las ideas presentadas en Camacho y Bordons (2004). De este modo, podría extenderse su aplicación a sistemas inestables o con integradores.

El artículo sigue la siguiente estructura: En la sección 2 se presenta el algoritmo propuesto; en la sección 3 es aplicado a un sistema real, discutiéndose los resultados obtenidos, y finalmente, se extraen unas conclusiones, discutiendo el trabajo futuro.

## 2. CONTROL PREDICTIVO MIN-MAX

Teniendo en cuenta los principios de operación de las diferentes estrategias de Control Predictivo Basado en Modelos, se propone una solución para superar la dificultad de poder asegurar un comportamiento robusto cuando hay diferencias entre el modelo utilizado en las predicciones, y el comportamiento real de la planta. También se presenta una técnica de Control Predictivo Min-max que permite utilizar simultáneamente varios modelos que representen el comportamiento de la planta en diferentes condiciones de trabajo, además de tener en cuenta la incertidumbre conocida del modelo utilizado. A continuación se presenta de forma abreviada la formulación de base, y seguidamente se presentan los elementos adicionales propuestos a añadir para poder realizar una sintonía similar a la de las técnicas más habituales de Control Predictivo, y de esta forma poder mejorar el comportamiento en sistemas reales.

### 2.1. Notación

- $\| \cdot \|_{1,\infty} = \sum_{i=N_1}^{N_2} \| \cdot \|_{\infty}$
- $M$ : horizonte de predicción en la formulación original.
- $N$ : longitud de la respuesta impulsional.
- $[N_1 \cdots N_2]$ : horizonte de predicción.
- $R$ : número de señales de control; es decir, en cada instante  $k$  el vector de señales de control es  $u^k \in \mathfrak{R}^R$ .
- $V$ : número de salidas medidas; es decir, en cada instante  $k$  el vector de señales de salidas es  $y^k \in \mathfrak{R}^V$ .
- $q$ : número de parámetros independientes necesarios para describir la incertidumbre.
- Para un vector  $X \equiv \{x_p\}$ ,  $x_p$  denota el elemento  $p$  del vector.
- Para una secuencia de vectores dependientes del tiempo  $Z \equiv \{z^k\}$ , el superíndice  $k$  indica el índice temporal de la muestra, es decir  $z^k$  denota el vector correspondiente a la muestra  $k$ .

### 2.2. Formulación original utilizando Control Predictivo Min-max

Según la formulación propuesta por Allwright (1994), la predicción de la salida del sistema en el instante  $k+d$  (siendo  $k$  el instante actual) para una determinada salida puede calcularse como:

$$y^{k+d}(\xi, u, v) = \sum_{i=1}^N H_{\xi}^i u^{k+d-i} \quad (1)$$

donde  $u[d] = \left[ \begin{matrix} (u^k)^T & (u^{k+1})^T & \dots & (u^{k+d+1})^T \end{matrix} \right]^T$  es el vector de señales de control futuras que afectan a la

salida en el instante  $d$ , mientras que  $v[d] = \left[ \begin{matrix} (u^{k-1})^T & (u^{k-2})^T & \dots & (u^{k+d-N})^T \end{matrix} \right]^T$  es el vector de 'condiciones iniciales' en el instante  $k$  que afectan a la salida en el instante  $d$  (o sea, las señales de control pasadas); finalmente,  $H_{\xi}^i$  representa la respuesta impulsional truncada con incertidumbres. Esta respuesta se parametriza de la siguiente manera:

$$H_{\xi}^i = \sum_{j=1}^q H^{ij} \xi_j \quad (2)$$

donde  $q$  es el número de incertidumbres consideradas al calcular la respuesta impulsional incierta,  $H^{ij}$  son las componentes de la matriz formada por las respuestas impulsionales de la planta (se suponen conocidas y la planta estable); finalmente  $\xi$  es la incertidumbre descrita en base a los valores máximos y mínimos posibles de cada elemento  $j$  de la respuesta impulsional:

$$\xi \in \Xi := \{ \xi \in \mathfrak{R}^q : \underline{\xi}_j \leq \xi_j \leq \overline{\xi}_j, \mathbf{1} \leq j \leq q \} \quad (3)$$

Así el vector de salidas futuras a lo largo del horizonte de predicción  $M$ , evaluado en el instante  $k$ , puede ser calculado como

$$y(\xi, u, v) = \begin{bmatrix} y^{k+1}(\xi^{k+1}, u[1], v[1]) \\ y^{k+2}(\xi^{k+2}, u[2], v[2]) \\ \vdots \\ y^{k+M}(\xi^{k+M}, u[M], v[M]) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Donde, lógicamente, en cada instante  $d$  del horizonte de predicción  $u[d]$  y  $v[d]$  corresponden a segmentos diferentes del vector de señales de control, al realizar el desplazamiento en el tiempo, según su definición. En cuanto a  $u$  y  $v$  que aparecen como argumentos del vector de salidas, corresponden a la correspondiente agrupación de los vectores  $u[d]$  y  $v[d]$ , respectivamente: se omite la forma de realizar esta agrupación en este artículo para no complicar más la notación.

De esta forma, si la salida deseada en el instante  $k+d$  se denota como  $s^{k+d}$  (setpoint), el problema Min-max a resolver en el instante ' $k$ ' se corresponde con la minimización de la suma de los mayores errores de seguimiento (ver Figura 1a), es decir:

$$\underset{u}{\text{Min}} \quad \max_{\xi \in \Xi} \sum_{i=1}^M \left\| y^{k+i}(\xi, u, v) - s^{k+i} \right\|_{\infty} \quad (5)$$

Donde el cálculo se realiza para el conjunto de los posibles modelos, y se aplican las siguientes

restricciones sobre las magnitudes de las señales de control y las salidas:

$$\begin{aligned} \underline{u} &\leq u \leq \bar{u} \\ \underline{y} &\leq y \leq \bar{y} \end{aligned} \quad (6)$$

La minimización (5) puede transformarse en un problema de Programación Lineal. Ahora bien, debe tenerse en cuenta que dicha transformación arrastra un gran número de variables, principalmente por el hecho de haber considerado valores iguales en los horizontes de predicción y control. Además, no es posible obtener un buen rendimiento ante cambios de referencia cuando se considera la salida deseada simplemente como el *setpoint*. Por ello, se propone la formulación modificada que se presenta en el siguiente apartado.

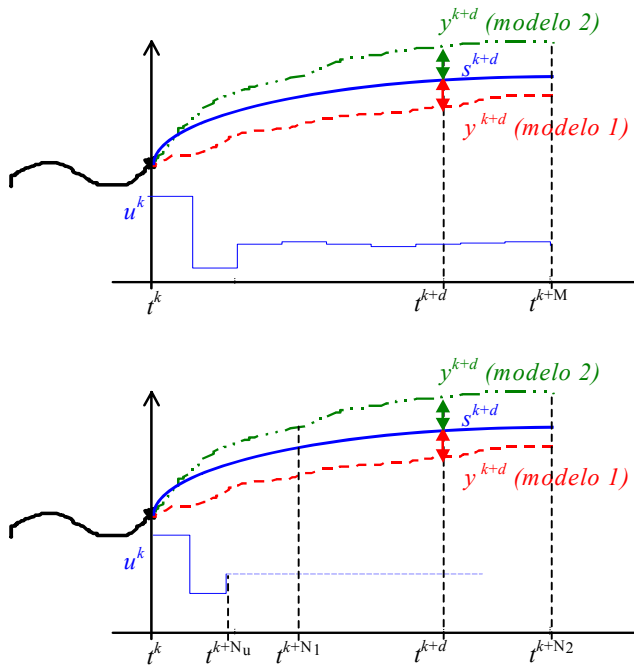


Figura 1. Esquema temporal del Control Predictivo Min-max con multimodelos: (a) Allwright (1994); (b) Formulación propuesta

### 2.3. Formulación práctica utilizando Control Predictivo Min-max

Como ya hemos comentado, la formulación que se va a proponer se basa en la presentada en el apartado anterior. En ella, se han añadido parámetros de relevada importancia para aplicaciones reales, y se ha tratado de disminuir los requerimientos de cómputo del algoritmo propuesto:

- 1) Los horizontes de predicción y control van a ser considerados distintos ( $N_2 - N_1$ : horizonte de predicción,  $N_u$ : horizonte de control), a diferencia de la formulación original en la que eran tomados como idénticos e iguales a  $M$  (ver Figura 1b). Como se mostrará más adelante, esta consideración nos va a permitir reducir el número de variables del

problema de Programación Lineal resultante, y por tanto, el tiempo de cómputo.

- 2) El intervalo de coste pasa de ser  $[1 : N] := [1, 2, \dots, N]$  a ser  $[N_1 : N_2]$ , permitiendo ignorar la respuesta del sistema para los instantes  $k+1, \dots, k+N_1-1$ . Este cambio es muy útil en sistemas de respuesta inversa (Camacho y Bordons, 1995, 2004), ya que permite disminuir los esfuerzos computacionales, al poderse escoger  $N_2$  menor que la longitud de la respuesta impulsional truncada  $N$ .
- 3) Desde el punto de vista práctico es mucho más común que se exijan restricciones sobre la velocidad y aceleración de las variables que sólo sobre su magnitud (6). Por ello, se han añadido restricciones en la velocidad de cambio de la señal de control ( $\Delta u^{k+d} = u^{k+d} - u^{k+d-1}$ ), y en su aceleración ( $\Delta^2 u^{k+d} = \Delta u^{k+d} - \Delta u^{k+d-1}$ ), que son fundamentales en aplicaciones prácticas.
- 4) Se propone una selección de la salida futura deseada  $s$ , diferente del *setpoint*. En concreto, la propuesta corresponde a una trayectoria de referencia filtrada a partir del valor actual de la salida mediante un filtro de primer orden (Camacho y Bordons, 2004):  $s^{k+d} = \alpha s^{k+d-1} + (1-\alpha)r^{k+d}$ , con  $s^k = y^k$ , donde  $r$  es el *setpoint*. El parámetro  $\alpha$ , no disponible en la formulación original, permite suavizar las transiciones entre los diferentes *setpoints*.

Una vez formulados estos cambios, y tras su aplicación en la formulación original se obtiene el siguiente resultado:

#### Teorema:

Sea  $u \in \mathfrak{R}^{R \times N_u}$  el vector de señales de control  $u$  que minimizan el siguiente problema Min-max con restricciones:

$$\begin{aligned} \min_u & \left( \max_{\rho \in \mathcal{E}} \|y(\rho) - s\|_{1,\infty} \right) \\ \underline{u} &\leq u \leq \bar{u} \\ \underline{y} &\leq y(\rho) \leq \bar{y}, \quad \forall \rho \in \mathcal{E} \equiv \left\{ \rho \in \mathfrak{R}^q : \underline{\rho}_j \leq \rho_j \leq \bar{\rho}_j \right\} \\ \underline{\Delta u} &\leq \Delta u \leq \bar{\Delta u} \\ \underline{\Delta^2 u} &\leq \Delta^2 u \leq \bar{\Delta^2 u} \end{aligned} \quad (7)$$

Este vector de señales de control puede obtenerse mediante la solución del siguiente problema dual de Programación Lineal:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{d=N_1}^{N_2} \theta_d \\
& \Phi_{dp} + \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \leq \theta_d \\
& -\Phi_{dp} \leq \sum_{i=1}^N \left( H_{\eta}^i u^{d-i} \right)_p - s_p^d \leq \Phi_{dp} \\
& -\Psi_{jdp} \leq \sum_{i=1}^N \left( H^{ij} u^{d-i} \right)_p \leq \Psi_{jdp} \\
& \underline{y}_p^d \leq \left( \sum_{i=1}^N H_{\eta}^i u^{d-i} \right)_p - \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \\
& \left( \sum_{i=1}^N H_{\eta}^i u^{d-i} \right)_p + \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \leq \bar{y}_p^d \\
& u^m = u^{N_u} \\
& \underline{u} \leq u^{d-i} \leq \bar{u} \\
& \underline{\Delta u} \leq u^{d-i} - u^{d-i-1} \leq \bar{\Delta u} \\
& \underline{\Delta^2 u} \leq u^{d-i} - 2u^{d-i-1} + u^{d-i-2} \leq \bar{\Delta^2 u}
\end{aligned} \tag{8}$$

Donde las variables a optimizar son:

$$\theta_d, \Phi_{dp}, \Psi_{jdp} \in \mathfrak{R}, u^k \in \mathfrak{R}^R$$

y sus índices correspondientes son:

$$\begin{aligned}
j & \in [1 \cdots q] \\
d & \in [N_1 \cdots N_2] \\
p & \in [1 \cdots V] \\
m & \in [(N_u - 1) \cdots N]
\end{aligned}$$

**Demostración:** ver Apéndice

**Comentarios:**

- Respecto a la formulación original presentada en la sección anterior, se ha simplificado la notación, eliminando las dependencias de las distintas variables en  $u$ , incluyendo el vector  $v$  en el propio vector  $u$  y obviando el hecho de que el instante actual de cálculo sería  $k$  y no 0.
- Por supuesto, a la hora de implementar el problema de Programación Lineal las restricciones  $u^m = u^{N_u}$  no se incluirían explícitamente, sino que bastaría con sustituir en el resto de las restricciones todas las apariciones de  $u^m$  por  $u^{N_u}$ , cuando  $m > N_u$ .
- El número de variables es ahora  $R \times V \times [N_u + (N_2 - N_1) \times (1 + R(1 + q))]$  frente a  $R \times V \times N \times (2 + R \times (1 + q))$  si se utilizara la formulación original de Allwright (1994).

- En cuanto al número de restricciones en el problema LP se han eliminado un total de  $R \times V \times (N - N_2 + N_1)$  y añadido las correspondientes a las restricciones sobre la señal de control, que suman un total de  $3R - 3$ .
- Para resolver el problema Min-max (7) basta con resolver en cada período de muestreo el problema de Programación Lineal (8), y aplicar el concepto de horizonte móvil. A pesar del elevado número de variables y restricciones en (8), con las modificaciones realizadas resulta adecuado para su implementación en control on-line. En el ejemplo que vamos a presentar en la siguiente sección (sistema de dos entradas y dos salidas, con dos modelos con incertidumbre) el tiempo de cálculo resultó ser, en todo caso, menor de 1 segundo.

### 3. APLICACIÓN A UNA PLANTA DE LABORATORIO

#### 3.1. Descripción de la Planta

Para poder comprobar el correcto funcionamiento del controlador predictivo Min-max propuesto en un sistema real decidimos aplicarlo a una planta de nuestro laboratorio formada por dos tanques acoplados. Esta selección vino dada por su carácter multivariable, por la presencia de incertidumbre, por la disponibilidad de múltiples modelos en diferentes puntos de trabajo y por la facilidad de modificar la interacción entre los dos lazos de control. Por ello, este tipo de plantas ha sido utilizada frecuentemente para probar técnicas de control avanzado (Heckenthaler y Engell, 1994; Murray-Smith, *et al.*, 2003; Albertos y Goodwin, 2002).

La planta utilizada está disponible en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Valladolid. Como se muestra en la Figura 2, el proceso consta de dos tanques conectados a través de una válvula manual, con entradas y salidas independientes de agua a través de bombas reguladas por ordenador y válvulas manuales, respectivamente. La altura de los tanques es de 80 cm, con un diámetro interno de 9.4 cm). Las señales de control son los porcentajes de bombeo de las bombas (denominados  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente), del tipo FLOJET 4405-343, 24V/2-4Amp.

Las variables medidas son los niveles de los líquidos en los tanques (denominados  $h_1$  y  $h_2$ ), y la medición se efectúa por medio de un sensor capacitivo (ABB KENT Taylor, II80LS). El control se realiza mediante un ordenador tipo PC, con Windows NT, utilizando la Real Time Toolbox de Matlab para implementar el control on-line, con la ayuda de una tarjeta de adquisición de datos Measurement Computing CIODAS16. Una foto de la planta real se muestra en la Figura 3.

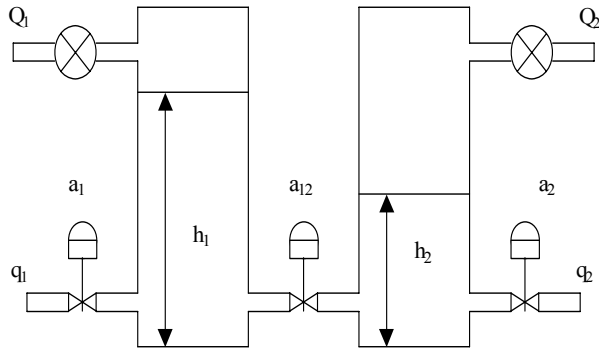


Figura 2. Esquema de la planta de laboratorio con dos tanques acoplados



Figura 3. Fotografía de la planta de laboratorio utilizada en los experimentos

Como se ha mencionado anteriormente, una de las ventajas del algoritmo de control Min-max propuesto es la posibilidad de incluir modelos múltiples, cada uno de los cuales representa diferentes comportamientos de la planta. En la planta de nuestro laboratorio estos modelos corresponden a modelos identificados en diferentes puntos de trabajo. Alguno de los datos medidos de la planta, utilizados para la identificación se muestran en la Figura 4. La Figura 5 compara los valores medidos con los predichos utilizando el modelo identificado en el correspondiente punto de trabajo: puede comprobarse cómo el modelo identificado reproduce fielmente el comportamiento del proceso en condiciones ideales.

Para realizar el control de la planta, se escogieron dos modelos extremos, identificados en diferentes puntos de trabajo, que se utilizarán como multimodelos para el control on-line. Como resumen de sus características puede mencionarse que presentan variaciones en la ganancia nominal en estado estacionario de

$$DC_{inf} = \begin{pmatrix} 1.6747 & 1.4349 \\ 1.7317 & 1.5637 \end{pmatrix}, \text{ en un modelo a}$$

$$DC_{sup} = \begin{pmatrix} 1.9012 & 1.5247 \\ 1.5599 & 1.5222 \end{pmatrix}, \text{ en el otro. El tiempo de}$$

establecimiento en segundos varía de

$$ST_{inf} = \begin{pmatrix} 146 & 166 \\ 168 & 142 \end{pmatrix} \text{ a } ST_{sup} = \begin{pmatrix} 134 & 210 \\ 192 & 124 \end{pmatrix}.$$

Además, cada uno de estos modelos se ve afectado por la incertidumbre, que se estimó durante la propia identificación de la siguiente manera:

- Se supuso que la incertidumbre viene dado por la diferencia entre las distintas respuestas impulsionales obtenidas al realizar experimentos equivalentes en el mismo punto de trabajo (se considera que la incertidumbre inherente a los cambios de puntos de trabajo se encuentra ya incluida en los multimodelos).
- Se realizaron varios experimentos y se evaluaron (por correlación) diferentes respuestas impulsionales.
- Por simple resta de las respuestas impulsionales estimadas y la nominal se obtuvo el vector de incertidumbres.

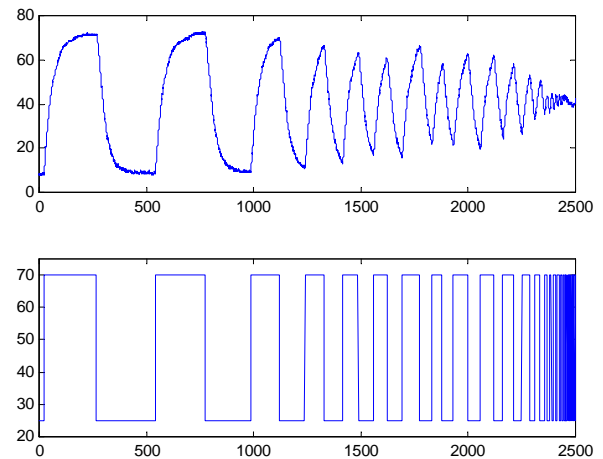


Figura 4. Registros entrada/salida de un experimento sobre la planta de laboratorio

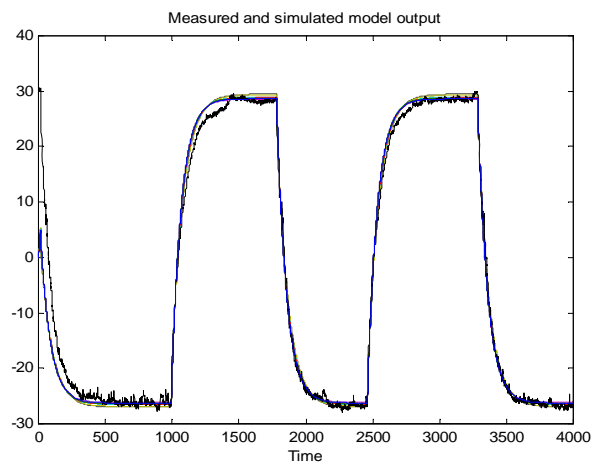


Figura 5. Comparación entre la respuesta obtenida con predicción y la respuesta medida del proceso

### 3.2. Resultados Experimentales

El algoritmo propuesto se implementó en Matlab, utilizando la Real-Time Toolbox de Humusoft en la programación del control de la planta. Se realizaron experimentos diferentes para comprobar la robustez del controlador Min-max en distintos puntos de trabajo, y con distintas incertidumbres (debidas a la dependencia del comportamiento de la planta con el punto de trabajo, y a los cambios no medidos del flujo de entrada).

A continuación se muestran algunos de estos experimentos, que por simplicidad corresponden al mismo estado inicial y a la misma trayectoria: comenzando con los tanques vacíos se requiere que los niveles de los líquidos, del primer y segundo tanque, alcancen los valores de 55 y 60 cm, respectivamente. A los 400 segundos se solicita un vaciado del primer tanque hasta 40 cm (no predicho).

La selección de los parámetros de sintonía se realizó de la forma siguiente:

- A partir del tiempo de establecimiento del modelo más rápido (30 segundos), se seleccionó un periodo de muestro de 2.5 segundos.
- Las restricciones sobre la señal de control se seleccionaron experimentalmente a partir de las limitaciones físicas del sistema:
  - $\bar{u} = [100 \ 100]'$
  - $\underline{u} = [0 \ 0]'$
  - $\overline{\Delta u} = [10 \ 10]'$
  - $\underline{\Delta u} = [-10 \ -10]'$
  - $\overline{\Delta^2 u} = [5 \ 5]'$
  - $\underline{\Delta^2 u} = [-5 \ -5]'$
- Las salidas (nivel de los tanques) se limitaron entre el 10% y el 90% del nivel máximo.
- A partir de las respuestas impulsionales de los modelos identificados se seleccionaron los horizontes de predicción  $N_1 = 2$  (ya que, el primer valor de la respuesta impulsional resultó ser despreciable) y  $N_2 = 12$ .
- Para obtener un buen seguimiento de la señal de referencia y un elevado rechazo frente a perturbaciones se seleccionó el Horizonte de Control  $N_u = 5$  (mínimo valor que proporciona una respuesta suave), y el parámetro de filtrado de la referencia  $\alpha = 0.5$ .
- Es importante observar que con la selección de parámetros realizada el número de variables del problema LP a resolver en cada periodo de muestro es de 300, frente a las 3200 variables si se hubiera utilizado la formulación original.

El primer experimento mostrado (Figura 6) corresponde a la implementación del controlador Min-max propuesto, pero utilizando un único modelo y sin considerar la incertidumbre (lo que lo hace similar a controladores basados en la respuesta impulsional que no consideran incertidumbre). Como era de esperar las discrepancias entre el modelo multivariable utilizado y el real causan sobrepicos, esfuerzos de control innecesarios y no eliminan la interacción entre lazos.

En un segundo experimento, mostrado en la Figura 7, el controlador predictivo Min-max incluye la información de la incertidumbre esperable en el rango de operación ( $\underline{\rho} = 0.6, \overline{\rho} = 1.4$ ), a pesar de que se sigue utilizando un único modelo. Como era de esperar, se observa una respuesta más robusta y con menores esfuerzos de control, aunque más lenta.

El tercer experimento mostrado (Figura 8) corresponde al controlador propuesto en su formulación completa, considerando los dos modelos identificados del sistema en diferentes condiciones, y la incertidumbre adicional en ellos, aunque menor al distribuirse entre ambos modelos ( $\underline{\rho} = 0.8, \overline{\rho} = 1.2$ ). Observando la Figura 8 puede comprobarse que se obtiene un buen rendimiento del controlador, con una respuesta suave, robusta, y con poca interacción.

## 4. CONCLUSIONES

Este artículo ha presentado cómo la formulación original del Control Predictivo Min-max (Allwright, 1992) puede modificarse para permitir su implementación en procesos con periodos de muestro pequeños, demostrando su aplicabilidad sobre una planta real a nivel de laboratorio (dos tanques acoplados). Experimentalmente se demuestran que este controlador permite asegurar la robustez del sistema.

Un tema importante es asegurar que en todo momento el problema de Programación Lineal (7) proporcione una solución válida, quizás relajando alguna de las restricciones. Para ello se propone como trabajo futuro aplicar técnicas como las propuestas por Alvarez y Prada (1997) para asegurar la factibilidad. También se propone considerar la incertidumbre en otro tipo de modelos (respuesta salto, función de transferencia, etc.). También se plantea estudiar la posibilidad de asegurar a priori la estabilidad de los controladores utilizando las ideas del Stabilizing Predictive Control (Kouvaritakis *et al.*, 1992).

## AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren manifestar su agradecimiento a los revisores por los comentarios sugeridos, al haber contribuido significativamente a mejorar el artículo.

## REFERENCIAS

- Álamo, T., Ramírez, D.R. y Camacho, E.F. (2002). Efficient implementation of Min-max Model Predictive Control with Bounded Uncertainties, *Proceedings of CCA'02*, Glasgow (Reino Unido), pp. 651-656.
- Albertos, P. y Goodwin, G.C. (2002) Virtual Sensors for Control Applications, *Annual Reviews in Control*, **26**, pp. 101-112.
- Alvarez, T., Prada, C. Handling Infeasibilities in Predictive Control (1997). *Computers and Chemical Engineering*, **21**, S577-S582.
- Allwright, J.C. (1994). On Min-max Model-Based Predictive Control. *Advances in Model Predictive Control*, Oxford University Press, pp. 246-255.
- Allwright, J.C. y Papavasiliou, G.C. (1992). On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses, *Systems and Control Letters*, **18**, pp. 159-164.
- Badgwell, T.A. (1997). Robust model predictive control of stable linear systems, *International Journal of Control*, **68**, pp. 797-818.
- Camacho, E. y Bordons, C. (1995). *Model Predictive Control in the Process Industry*, Springer Verlag.
- Camacho, E. y Bordons, C. (2004). Control Predictivo: Pasado, Presente y Futuro, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática*, **1**, pp. 5-28.
- Campo, P.J. y Morari, M. (1987). Robust Model Predictive Control, *Proceedings of ACC'87*, Minneapolis, Minnesota, pp. 1021-1026.
- Hrissagis, K., O. Crisalle y M. Sznaiar (1996). An  $l_1/H_\infty$  Design Methodology for Robustifying Predictive Regulators with Optimal Nominal Performance, Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA, **G**, pp. 237-242.
- Heckenthaler, T., y Engell, S. (1994). Approximately Time-Optimal Fuzzy Control of a Two-Tank System, *IEEE Control Systems Magazine*, **14**, pp. 24-30.
- Kim, Y.H. y Kwon, W.H. (1998). An application of Min-max generalized predictive control to sintering processes, *Control Engineering Practice*, **6**, pp. 999-1007.
- Kouvaritakis, B., Rossiter, J.A. y Chang, A.O.T. (1992). Stable Generalised Predictive Control: an algorithm with guaranteed stability, *Proc. IEE-D*, **139**, pp. 349-362.
- Maciejowski, J.M. (2000). *Predictive Control with constraints*, Prentice Hall.
- Megías, D., Serrano, J. y Prada, C. (2002). Min-max constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming, *Journal of Process Control*, **12**, pp. 495-505.
- Murray-Smith, D.J., Kocijan, J., Gong, M. (2003). A Signal Convolution Method for Estimation of Controller Parameter Sensitivity Functions for Tuning of Feedback Control Systems by an Iterative Process, *Control Engineering Practice*, **11**, pp. 1087-1094.
- Muñoz de la Peña, D, Ramírez, D.R., Camacho, E.F., Alamo, T. (2005), Application of an explicit Min-max MPC to a scaled laboratory process, *Control Engineering Practice*, **13**(12), pp. 1463-1471.
- Porfirio, C.R., Almeida Neto, E. y Odloak, D. (2003). Multi-model Predictive Control of an Industrial C3/C4 Splitter, *Control Engineering Practice*, **11**, pp. 765-769.
- Ramírez, D.R. y Camacho, E.F. (2004). Implementation of Min-max MPC using hinging hyperplanes: Application to a heat exchanger, *Control Engineering Practice*, **12**(9), pp. 1197-1205.
- Scokaert, P.O.M. y Mayne, D.Q. (1998). Min-max Feedback Model Predictive Control for Constrained Linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, pp. 1136-1142.
- Wang, Y.J. y Rawlings, J.B. (2004), A New Robust Model Predictive Control Method I: Theory and Computation, *Journal of Process Control*, **14**, pp. 231-247.

## APÉNDICE: DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

En primer lugar se resolverá el problema sin restricciones:

$$\min_u \left( \max_{\rho \in \Xi} \|y(\rho) - s\|_{1,\infty} \right)$$

Teniendo en cuenta que

$$\| \cdot \|_{1,\infty} = \sum_{i=N_1}^{N_2} \| \cdot \|_{\infty}$$

si en el instante actual las predicciones  $y_p$  de la salida número  $p$ , en presencia de incertidumbres variables en el tiempo  $\rho$  pueden expresarse como:

$$y_p(\rho) = \sum_{i=1}^N \left( H_{\eta}^i u^{d-i} + \sum_{j=1}^q H^{ij} u^{d-i} \delta_j \right)_p$$

resulta que

$$\max_{\rho \in \Xi} \|y(\rho) - s\|_{1,\infty} = \max_{\rho \in \Xi} \sum_{i=N_1}^{N_2} \left\| \sum_{i=1}^N \left( H_{\eta}^i u^{d-i} + \sum_{j=1}^q H^{ij} u^{d-i} \delta_j \right) - s \right\|_{\infty}$$

Aplicando la definición de norma infinito:

$$\max_{\rho \in \Xi} \|y(\rho) - s\|_{1,\infty} = \max_{\rho \in \Xi} \sum_{i=N_1}^{N_2} \max_{1 \leq p \leq V} \left| \sum_{i=1}^N \left( H_{\eta}^i u^{d-i} + \sum_{j=1}^q H^{ij} u^{d-i} \delta_j \right)_p - s_p \right|$$

Definiendo las variables (dependientes de  $u$ ):



$$\alpha_{dpi} = \sum_{j=1}^N \left( H_{\eta}^i u^{d-i} \right)_p$$

$$\beta_{jdp} = \sum_{j=1}^N \left( H_{\eta}^{ij} u^{d-i} \right)_p$$

teniendo en cuenta que,

$$\max_{\rho \in \Xi} \left| \alpha_{dpi} + \sum_{j=1}^q \beta_{jdp} \delta_j \right|_p - s_p = \left| \alpha_{dpi} - s_p \right| + \sum_{j=1}^q \left| \beta_{jdp} \right| \max_{\rho \in \Xi} \left| \delta_j \right|$$

y denotando  $\max_{\rho \in \Xi} \left| \delta_j \right| = \Delta_j$  (aplicar esta última

relación es fundamental para reducir la complejidad del problema de Programación lineal, pues elimina la necesidad de realizar la búsqueda en todos los vértices), resulta entonces que:

$$\max_{\rho \in \Xi} \|y(\rho) - s\|_{1,\infty} = \sum_{i=N_1}^{N_2} \max_{1 \leq p \leq V} \left( \left| \alpha_{dpi} - s_p \right| + \sum_{j=1}^q \left| \beta_{jdp} \right| \Delta_j \right)$$

Para transformar esta expresión a un problema de Programación Lineal primero hay que eliminar los valores absolutos: para ello basta tener en cuenta que el módulo de un vector  $x$  puede calcularse como la solución óptima del siguiente problema de Programación Lineal:

$$\min_{\varphi \in \mathfrak{R}^+} \varphi$$

$$s.t. \quad -\varphi \leq x \leq \varphi$$

Aplicando esta propiedad resulta:

$$\max_{\rho \in \Xi} \|y(\rho) - s\|_{1,\infty} = \min_{\Psi_{jdp}, \Phi_{dp}} \sum_{d=N_1}^{N_2} \max_{1 \leq p \leq V} \left( \Phi_{dp} + \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \right)$$

$$-\Phi_{dp} \leq \sum_{i=1}^N \left( \alpha_{dpi} - s_p^{k+d} \right) \leq \Phi_{dp}$$

$$-\Psi_{jdp} \leq \sum_{i=1}^N \beta_{jdp} \leq \Psi_{jdp}$$

Para eliminar el máximo de la minimización anterior basta sólo con definir unas nuevas variables auxiliares  $\theta_d$ , que cumplan:

$$\max_{1 \leq p \leq V} \left( \Phi_{dp} + \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \right) = \min_{\theta_d} \theta_d$$

de modo que,

$$\Phi_{dp} + \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \leq \theta_d$$

Basta deshacer los cambios para obtener que

$$\max_{\rho \in \Xi} \|y(\rho) - s\|_{1,\infty} = \min_{d=N_1}^{N_2} \theta_d \quad s.t.$$

$$\Phi_{dp} + \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \leq \theta_d$$

$$-\Phi_{dp} \leq \sum_{i=1}^N \left( H_{\eta}^i u^{d-i} \right)_p - s_p^d \leq \Phi_{dp}$$

$$-\Psi_{jdp} \leq \sum_{i=1}^N \left( H_{\eta}^{ij} u^{d-i} \right)_p \leq \Psi_{jdp}$$

donde las variables de la minimización son:

$$\theta_d, \Phi_{dp}, \Psi_{jdp} \in \mathfrak{R}, \quad 1 \leq j \leq q, N_1 \leq d \leq N_2, 1 \leq p \leq V$$

De esta forma quedaría resuelto el problema sin restricciones.

Para añadir las restricciones, basta observar que los cambios de variable anteriores no dependen de  $u$ . Entonces las restricciones sobre la salida son fáciles de incluir: Para añadir estas restricciones sobre la salida

$$\underline{y}_p^k \leq y_p \leq \bar{y}_p^k$$

basta aplicar que

$$y_p(\rho) = \left( \alpha_{dpi} + \sum_{j=1}^q \beta_{jdp} \delta_j \right)_p$$

con lo que

$$\max_{\rho} y_p(\rho) = \left( \alpha_{dpi} + \sum_{j=1}^q \beta_{jdp} \Delta_j \right)_p$$

y

$$\min_{\rho} y_p(\rho) = \left( \alpha_{dpi} - \sum_{j=1}^q \beta_{jdp} \Delta_j \right)_p$$

Resulta entonces que estas restricciones sobre la salida pueden expresarse como los dos siguientes conjuntos de desigualdades:

$$\underline{y}_p^d \leq \left( \sum_{i=1}^N H_{\eta}^i u^{d-i} \right)_p - \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j$$

$$\left( \sum_{i=1}^N H_{\eta}^i u^{d-i} \right)_p + \sum_{j=1}^q \Psi_{jdp} \Delta_j \leq \bar{y}_p^d$$

Añadiendo estas desigualdades al problema sin restricciones, así como las correspondientes restricciones sobre la magnitud de la señal de control, su velocidad y aceleración, se obtiene el resultado del Teorema.

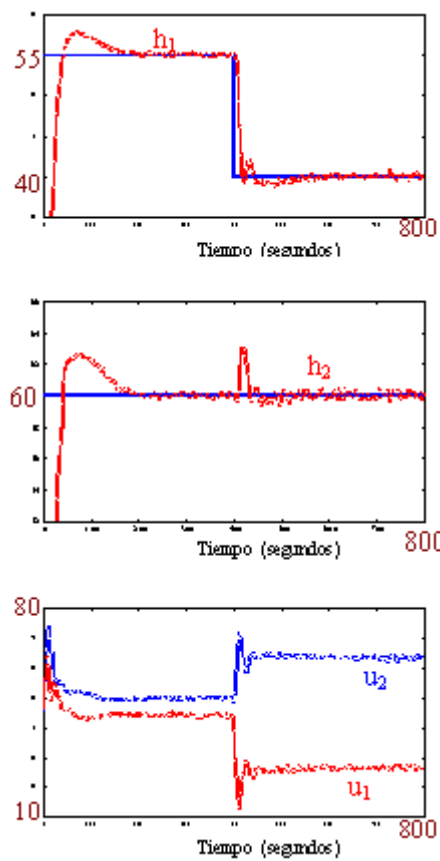


Figura 6. Experimento con un único modelo, sin considerar incertidumbres

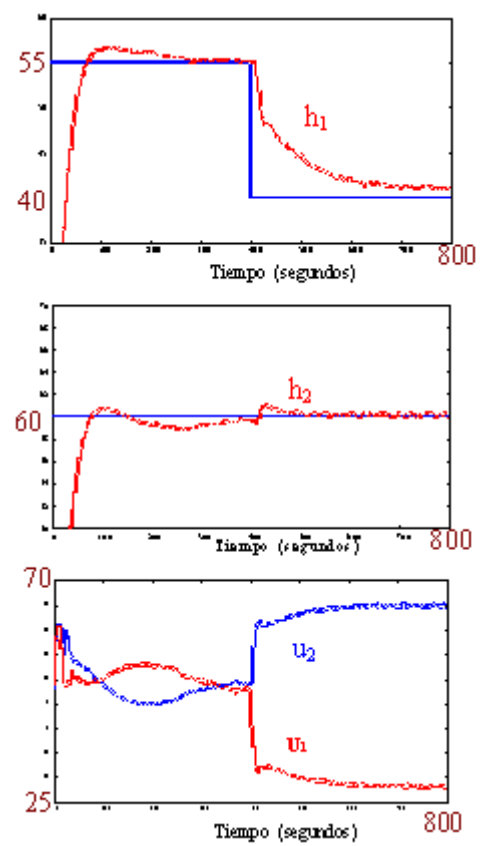


Figura 8. Experimento con dos modelos, considerando incertidumbres

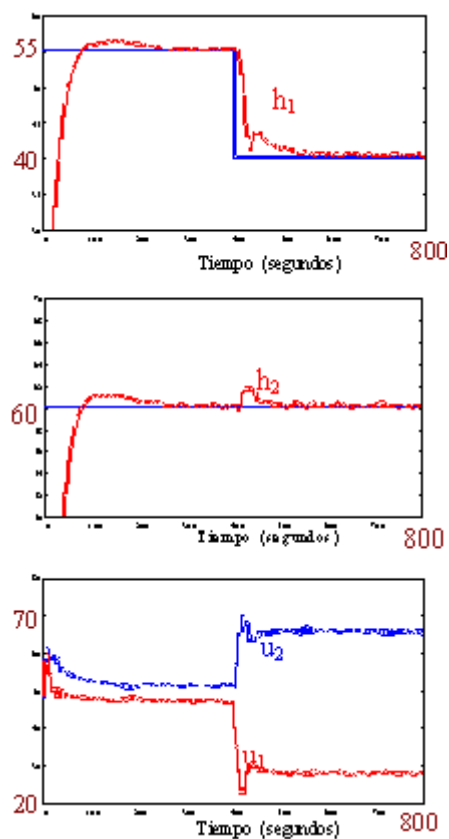


Figura 7. Experimento con un único modelo, considerando las incertidumbres