

## INVERSIÓN, UN CONCEPTO UNIFICADOR EN LA ENSEÑANZA DEL CONTROL AUTOMÁTICO

Mario E. Salgado Brocal

*Departamento de Electrónica  
Universidad Técnica Federico Santa María  
Valparaíso, Chile  
msb@elo.utfsm.cl*

### Resumen

Este es un artículo sobre conceptos fundamentales en la enseñanza del Control Automático. En particular, se sostiene que el concepto de inversión es clave para entender los conflictos y compromisos en la resolución del problema de diseño de sistemas de control. Se ilustra como este concepto está subyacente en todas los enfoques que se utilizan para resolver ese problema. El artículo desarrolla la idea de que la comprensión y el manejo del concepto de inversión permite enseñar la disciplina con prescindencia de esa variedad de enfoques y métodos. *Copyright © 2006 CEA-IFAC.*

Palabras clave : Inversión, control realimentado, diseño, control multivariado, enseñanza del Control Automático.

### 1. INTRODUCCIÓN

La disciplina del Control Automático abarca un conjunto amplio de temas, en el que abundan teorías y puntos de vista aparentemente desconectados. Cuando la teoría se enfoca en el caso lineal, el problema de diseño, así como sus objetivos y especificaciones, puede ser formulado con precisión, usando la transformación de Laplace y las herramientas asociadas al análisis en frecuencia (véase, por ejemplo, (Kwakernaak and Sivan, 1972)). Sin embargo, si uno trata de depurar conceptos y definir el problema de diseño en un marco más amplio y con nuevas teorías, esas herramientas ya no pueden ser usadas con la misma eficacia. En esa forma, una dificultad mayor para crear un curso o un conjunto de cursos sobre diseño de sistemas de control, es elegir cuáles son los conceptos principales a enseñar a los estudiantes. En otras palabras, la dificultad es seleccionar las ideas claves que puedan sobrevivir a la aparición,

en número creciente, de nuevas teorías, nuevos métodos y nuevas herramientas. Este desafío debe ser enfrentado, de forma que el estudiante pueda, no sólo adquirir un conocimiento sólido de la disciplina, sino que también, él/ella sea capaz de alcanzar niveles avanzados de conocimientos sin perder de vista los temas que son esenciales en la solución del problema de diseño.

A nuestro juicio, la idea de *inversión* es uno de esos conceptos fundamentales, su importancia nos parece sólo superada por la del concepto de realimentación. Sostenemos que esa idea es un elemento clave para entender en profundidad el diseño de sistemas de control. Esa convicción es la principal motivación para este artículo.

El concepto de inversión se origina naturalmente cuando se intenta resolver el problema básico de seguimiento: considere una planta (el sistema a ser controlado) con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , las que están relacionadas por el modelo de entrada-

salida  $y(t) = g_t\langle u(t) \rangle$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . En esta descripción,  $g_t\langle \circ \rangle$  es un operador generalizado, incluso variante en el tiempo, no lineal y dinámico, que captura la forma en que la salida depende de la entrada. Supondremos, inicialmente, que esta planta es estable, eso es, que el operador  $g_t\langle \circ \rangle$  es estable, en el sentido que la salida  $y(t)$  permanece acotada, para cualquier entrada acotada  $u(t)$ . Se requiere que la salida siga una señal de referencia arbitraria y acotada  $r(t)$ . ¿Cuál es una ley de control apropiada a esta especificación? En otras palabras, ¿cuál es una elección adecuada para  $c_t\langle \circ \rangle$  tal que  $u(t) = c_t\langle r(t) \rangle$  e  $y(t) = r(t)$ ? La situación se describe en la Figura 1 donde

$$y(t) = g_t\langle c_t\langle r(t) \rangle \rangle.$$

Entonces, para lograr  $y(t) = r(t)$ , la ley de control debe ser:

$$c_t\langle \circ \rangle = g_t^{-1}\langle \circ \rangle, \quad (1)$$

de modo que el controlador  $c_t\langle \circ \rangle$  realice una operación inversa de aquella realizada por el operador  $g_t\langle \circ \rangle$ .

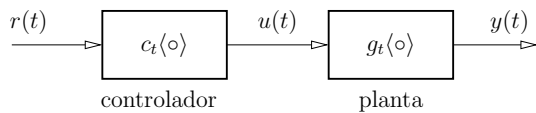


Figura 1. Problema fundamental de seguimiento.

*Ejemplo* Suponga que la planta es modelada por:

$$g_t\langle \circ \rangle : y(t) = \frac{1}{5} \sqrt{|u(t)|},$$

y suponga además que el objetivo del control es seguir una referencia  $r(t)$ , arbitraria pero acotada. Entonces, el controlador ideal  $c_t\langle \circ \rangle$  puede ser calculado a partir de la condición:

$$r(t) = \frac{1}{5} \sqrt{|u(t)|},$$

que conduce al inverso

$$c_t\langle \circ \rangle : u(t) = 25 (r(t))^2.$$

La Ecuación (1) condensa el paradigma básico de inversión, que subyace en la teoría del diseño de sistemas de control. Sin embargo, existen razones que analizaremos más adelante, por las cuales este inverso es físicamente irrealizable. En la sección siguiente, discutiremos algunos temas fundamentales sobre la construcción del inverso y sobre su realizabilidad. Después de ello, en las secciones

restantes, exploramos y hacemos explícita la interrelación entre el paradigma de inversión y la solución al problema de diseño. Para lograr este propósito definimos el problema de diseño como el de encontrar una forma técnicamente realizable para actuar sobre un proceso dado, de modo que el comportamiento de ese proceso esté tan cercano como sea posible a una conducta deseada prescrita. Además, este objetivo debe ser logrado en presencia de incertidumbre sobre el proceso y de perturbaciones externas incontrolables.

## 2. INVERSIÓN APROXIMADA

En lo sucesivo, nos referiremos a la solución dada por (1) como el inverso *perfecto* o *ideal*. Esta solución requiere que  $g_t^{-1}\langle \circ \rangle$  esté bien definida. Sin embargo,  $c_t\langle \circ \rangle$  dada en (1) podría tener sólo significado matemático, ya que hay otros criterios que determinan cuán cerca del inverso ideal se encuentra una buena solución al problema de diseño. Algunos de estos elementos son:

**Estabilidad** Se ha supuesto que el operador  $g_t\langle \circ \rangle$  es estable. Sin embargo, el esquema de control representado en la Figura 1 también requiere que  $u(t)$  esté acotado. Por lo tanto, el operador  $g_t^{-1}\langle \circ \rangle$  debe ser estable, es decir, debe generar un  $u(t)$  acotado para todo  $r(t)$  acotado.

**Causalidad** El controlador dado por (1) debe ser físicamente realizable. Si, por ejemplo, la planta a ser controlada tiene un retardo desde la entrada a la salida, entonces el inverso puede existir matemáticamente, pero no es causal y, por lo tanto, no es físicamente realizable.

**Actuación limitada** En una aplicación real, la señal de control  $u(t)$  debe estar restringida dentro de ciertos límites, característicos del actuador. Esta restricción puede impedir la obtención de un inverso perfecto. Análogamente, en la mayoría de las aplicaciones, también existen límites a la velocidad con que varía la señal de actuación.

**Incetidumbre** En alguna medida, todo modelo para describir el sistema a controlar, es inexacto. Por lo tanto, un controlador debe ser capaz de controlar el modelo; sin embargo, ello no significa necesariamente que pueda controlar la planta.

Los temas señalados, y otros que discutiremos más adelante, definen un marco en el cual construir un inverso realista. Para ilustrar las ideas principales, considere una planta y un controlador lineales e invariantes en tiempo, modelados por:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_o(s)U(s); & \text{planta (nominal)} \\ U(s) &= C_a(s)R(s); & \text{controlador} \end{aligned}$$

con

$$G_o(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - c_i)}{\prod_{\ell=1}^n (s - p_\ell)} e^{-s\tau},$$

donde  $n > m$  y  $\tau \geq 0$ . Además, bajo la suposición de estabilidad,  $\Re\{p_\ell\} < 0$ , para  $\ell = 1, 2, \dots, n$ , donde  $\Re\{\dots\}$  denota *parte real de*.

El paradigma de inversión lleva, idealmente, a  $C_a(s) = G_o(s)^{-1}$ . Esta elección permite seguir perfectamente una referencia arbitraria  $r(t)$  solamente si:

- $G_o(s)$  es una descripción perfecta de la planta (incertidumbre)
- $C_a(s)$  es estable y realizable, lo cual significa:
  - (i)  $\Re\{c_i\} < 0$  for  $i = 1, 2, \dots, m$  (estabilidad).
  - (ii)  $\tau = 0$  (causalidad)
  - (iii)  $m = n$  (causalidad)

Así, aún para sistemas lineales, la inversión perfecta no puede ser lograda, ya que:

- La observación de los sistemas reales revela que un cambio abrupto en la entrada nunca genera un cambio abrupto en la salida. Por lo tanto,  $m$  debería ser menor que  $n$ .
- En todo sistema real, hay un retardo, aunque sea pequeño. Este retardo captura los retardos involucrados en fenómenos de transferencia de masa, energía e información.
- Algunos sistemas tienen ceros fuera de la región de estabilidad, es decir, hay al menos un cero  $c_\ell$ , tal que  $\Re\{c_\ell\} \geq 0$ .

Adicionalmente, una descripción lineal es siempre una aproximación de la planta real en una región limitada de operación, ya que toda planta real posee rasgos no-lineales, incluyendo saturación en la entrada. Por lo tanto, una meta más realista es buscar un inverso aproximado. Diremos que tenemos un *buen inverso* si ese inverso aproximado es estable, realizable, robusto, y si genera comandos de control dentro de límites aceptables.

### 3. INVERSIÓN Y CONTROL REALIMENTADO

Ya que no podemos construir un inverso perfecto de la planta, la pregunta natural es; ¿cómo podemos obtener un inverso aproximado? Un enfoque posible se muestra en la Figura 2, donde la planta es descrita por  $g_t(\circ)$ . El controlador  $\tilde{c}_t(\circ)$  tiene una estructura con realimentación que incluye dos bloques:  $\tilde{g}_t(\circ)$ , el cual es un modelo de  $g_t(\circ)$ , y un segundo bloque, modelado por el operador  $h_t(\circ)$ . En lo sucesivo, nos referiremos a  $\tilde{g}_t(\circ)$  como el *modelo nominal de la planta*.

De la Figura 2 tenemos que:

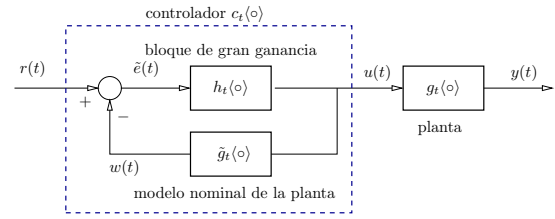


Figura 2. Solución en lazo abierto para el problema de seguimiento.

$$u(t) = h_t \langle r(t) - \tilde{g}_t \langle u(t) \rangle \rangle.$$

Así:

$$u(t) = \tilde{g}_t^{-1} \langle r(t) - h_t^{-1} \langle u(t) \rangle \rangle,$$

a partir de donde, bajo la suposición que  $|h_t^{-1} \langle u(t) \rangle| \ll |r(t)|$ , obtenemos  $u(t) = \tilde{g}_t^{-1} \langle r(t) \rangle$ . La condición  $|h_t^{-1} \langle u(t) \rangle| \ll |r(t)|$  es satisfecha si  $|u(t)|$  es acotada y si  $h_t(\circ)$  es un operador de gran ganancia. Esta segunda condición es ilustrada en el ejemplo que sigue. Finalmente, si el modelo nominal  $\tilde{g}_t(\circ)$  es una representación exacta de la planta, es decir, si  $\tilde{g}_t(\circ) = g_t(\circ)$ , entonces llegamos a

$$u(t) = c_t \langle r(t) \rangle = g_t^{-1} \langle r(t) \rangle. \quad (2)$$

Se observa en la ecuación (2) que el controlador implementa el inverso de la planta.

*Ejemplo* Considere una planta no-lineal con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , descrita por:

$$g_t(\circ) : \frac{dy(t)}{dt} + 2\sqrt{|y(t)|} = u(t).$$

Entonces, podemos usar la estrategia propuesta en la Figura 2. Suponemos que el operador de gran ganancia  $h_t(\circ)$  es una ganancia grande,  $K$ . Con esta elección, el controlador de lazo abierto es el que se muestra en la Figura 3.

Usando MATLAB-SIMULINK, se realiza una simulación con  $r(t) = 1 + \cos(t) - \sin(t)$  y  $K = 1000$ . El desempeño de seguimiento es apreciado en la Figura 4. Se puede observar que la magnitud del error de seguimiento  $r(t) - y(t)$  es muy pequeña. En este caso particular, uno puede elegir un valor de  $K$  aún más grande, por ejemplo,  $K = 10000$ , para verificar que el error disminuye aproximadamente en un orden de magnitud. Este buen desempeño descansa en el hecho que, en este ejemplo, la ganancia del operador  $h_t(\circ)$  puede ser elegida muy grande, sin comprometer la estabilidad del controlador  $c_t(\circ)$ .

El enfoque descrito en la Figura 2 requiere un buen modelo nominal de la planta, más precisamente, este enfoque necesita que la señal  $|w(t) - y(t)|$  sea pequeña. Esta observación sugiere que

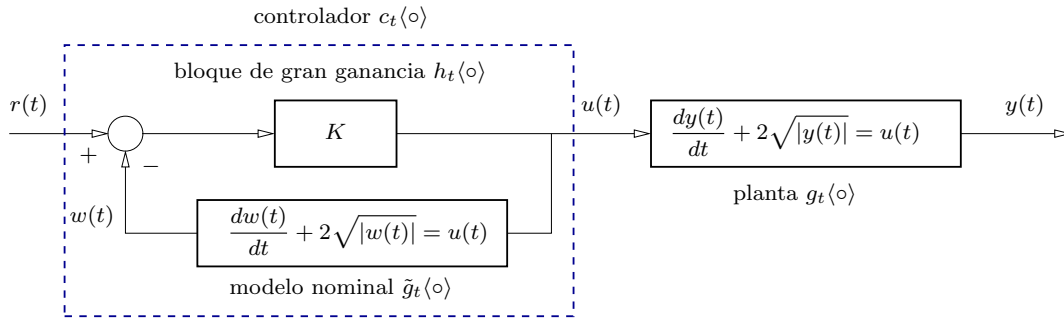


Figura 3. Solución de lazo abierto para el problema de seguimiento en una planta no-lineal.

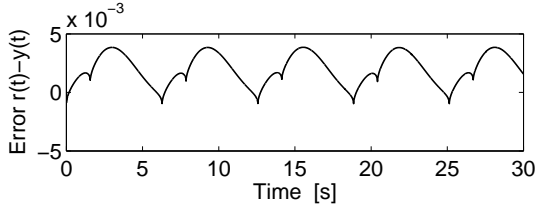


Figura 4. Error de seguimiento para la solución de lazo abierto.  $K = 1000$  y  $r(t) = 1 + \cos(t) - \sin(t)$ .

una solución mejor es comparar directamente la referencia  $r(t)$  con  $y(t)$ . Esta idea lleva, en una evolución natural, desde la estructura de la Figura 2 hacia el lazo de control con realimentación mostrado en la Figura 5, donde se ha incluido el ruido de medición  $n(t)$ .

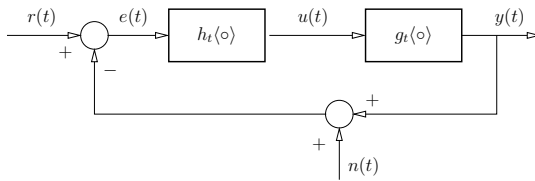


Figura 5. Solución de lazo cerrado para el problema de seguimiento.

Al desplazarnos hacia el control en lazo cerrado los temas de estabilidad y ruido de medición se hacen relevantes. Sin embargo, una mirada más cuidadosa permite descubrir que el tema de estabilidad ya estaba presente en la Figura 2, ya que, para garantizar que  $u(t)$  sea acotada,  $w(t)$  debe ser acotada, para toda referencia  $r(t)$  acotada. Para enfrentar este tema necesitamos el modelo de la planta; eso crea la noción de un *lazo nominal de control*, donde el controlador comanda el modelo nominal de la planta, en vez de comandar la planta misma. El efecto de la fidelidad del modelo en el desempeño del control, introduce el tema de robustez en el problema de diseño.

La presencia de ruido de medición introduce una restricción adicional a la construcción del inverso, ya que el controlador  $h_t(\cdot)$  genera la señal  $u(t)$ , en base a la señal de error  $e(t) = r(t) - n(t) - y(t)$ . Por lo tanto, un inverso perfecto haría que la salida del

lazo cerrado siguiera exactamente una referencia ruidosa  $r(t) - n(t)$ . Este hecho obliga a restringir el inverso. Esto es posible si la referencia y el ruido de medición tienen espectros que no se traslapan significativamente.

Consideremos ahora el marco de trabajo de tiempo continuo, lineal e invariante en tiempo. El controlador es entonces descrito por su función de transferencia  $C(s)$ ; supongamos además que la planta es descrita por el modelo nominal con función de transferencia  $G_o(s)$ . El lazo de control nominal resultante se muestra en la Figura 6.

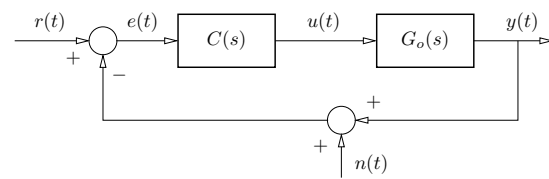


Figura 6. Lazo de control nominal lineal.

La función de transferencia desde  $r(t)$  y  $n(t)$  a  $y(t)$ ,  $u(t)$  and  $e(t)$  pueden ser calculadas usando funciones de sensibilidad (Goodwin *et al.*, 2001). Estas funciones de sensibilidad se definen en la siguiente forma:

$$S_o(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)C(s)} \quad \text{sensibilidad,} \quad (3)$$

$$T_o(s) = \frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} \quad \text{sensibilidad complementaria,} \quad (4)$$

$$S_{uo}(s) = \frac{C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} \quad \text{sensibilidad de control.} \quad (5)$$

La transición desde el control en lazo abierto hacia el control, en lazo cerrado, que se ha descrito, es útil para explicar, usando el paradigma de inversión, algunas ideas centrales:

- Para lograr un buen inverso, necesitamos que  $h_t(\cdot)$  sea un controlador de gran ganancia. Este requerimiento se traduce en hacer  $|C(j\omega)|$  grande en aquellas frecuencias donde se requiere un buen inverso.

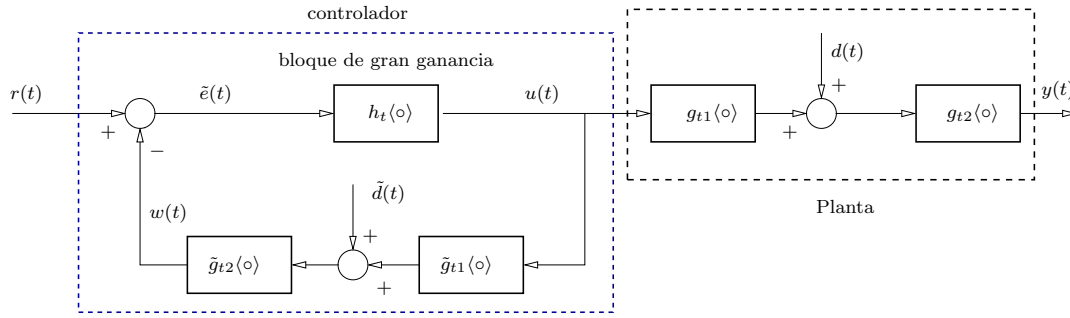


Figura 7. Solución de lazo abierto para el problema de compensación de perturbaciones.

- En (3) y en (4) observamos que  $|C(j\omega)|$  grande es equivalente a  $|S_o(j\omega)|$  pequeño o, equivalentemente, a hacer  $T_o(j\omega)$  cercano a 1. Por lo tanto, la magnitud de la sensibilidad  $|S_o(j\omega)|$  debe ser pequeña en la banda de frecuencia donde necesitamos un buen inverso. Recíprocamente, la banda del lazo cerrado es la banda de frecuencias donde el lazo implementa implícitamente un buen inverso.
- Cuando la referencia es una señal sinusoidal de frecuencia  $\omega_o$ , el seguimiento perfecto en estado estacionario se logra si el lazo implementa un inverso perfecto a la frecuencia  $\omega = \omega_o$ . Esto es, si  $C(s)$  tiene polos en  $\pm j\omega_o$ , haciendo que  $|C(\pm j\omega_o)| = \infty$ . Sin embargo, esto no es necesario si la planta tiene polos en las mismas ubicaciones.
- En particular, la acción integral en el controlador es introducida, precisamente para obtener un inverso perfecto a frecuencia cero. Eso es, si  $C(s)$  tiene al menos un polo en  $s = 0$ . Como en el caso anterior, esto no es necesario si la planta tiene un polo en la misma ubicación.
- Al examinar la ecuación (5) se observa que cuando  $|C(s)|$  es grande, entonces  $S_{uo}(s)$  se aproxima a  $G_o(s)^{-1}$ . Así, la calidad del inverso aproximado, implícito en el lazo cerrado de la Figura 6, puede también ser cuantificada a través de la magnitud  $|G_o(s)^{-1} - S_{uo}(s)|$ .
- $G_o(j\omega)$  tiene usualmente una característica filtrante pasa-bajos. En consecuencia,  $G_o(s)^{-1}$  es usualmente pasa-altos. Dado que  $U(s) = S_{uo}(s)(R(s) - N(s))$ , entonces un lazo de control en el que se implementa un buen inverso, puede demandar una señal de control de gran magnitud y con componentes significativas de alta frecuencia, dependiendo de los espectros de la referencia y el ruido de medición.
- El efecto perjudicial del ruido de medición, puede ser apreciado al notar que  $Y(j\omega) = T_o(j\omega)R(j\omega) - T_o(j\omega)N(j\omega)$ . Por lo tanto, ya que el buen seguimiento requiere que  $T_o(j\omega)$  sea cercano a 1, el objetivo de inmunidad al ruido entra en conflicto con el objetivo de seguimiento.

Una observación adicional es que los lazos de control realimentado en las Figuras 5 y 6 pueden también ser usados para controlar plantas inestables, ya que la realimentación proporciona un mecanismo de estabilización que no existe en el esquema de lazo abierto de la Figura 2. En el caso inestable, el principio de inversión, está también subyacente en la solución del problema de diseño, ya que un buen seguimiento siempre requiere un  $|S_o(j\omega)|$  pequeño en una banda especificada de frecuencias. Sin embargo, para obtener un lazo cerrado estable, necesitamos introducir algunas restricciones adicionales (Goodwin *et al.*, 2001).

#### 4. EL INVERSO Y LA COMPENSACIÓN DE PERTURBACIONES

La idea de inversión ha sido utilizada hasta aquí para satisfacer especificaciones de seguimiento. Sin embargo, resulta ser también un concepto clave en el problema de compensación de perturbaciones. Con ese propósito, extendemos la idea condensada en la Figura 2 a la forma mostrada en la Figura 7.

En la Figura 7,  $\tilde{d}(t)$  modela la perturbación  $d(t)$  inyectada en un punto intermedio de la estructura de la planta. Por su parte  $\tilde{g}_{t1}(s)$  y  $\tilde{g}_{t2}(s)$  son modelos para las secciones correspondientes de la planta. En una primera aproximación al problema, podemos suponer que  $\tilde{d}(t)$  se construye a partir de la medición de la perturbación  $d(t)$ . Sin embargo, la forma en la que se obtiene  $\tilde{d}(t)$  pierde importancia, cuando la arquitectura mostrada en la Figura 7 evoluciona hacia otra arquitectura, en la que no se requiere una estimación explícita de  $d(t)$ . De la Figura 7 tenemos que:

$$u(t) = h_t \left\langle r(t) - \tilde{g}_{t2} \langle \tilde{d}(t) + \tilde{g}_{t1} \langle u(t) \rangle \rangle \right\rangle,$$

De esta forma:

$$u(t) = \tilde{g}_{t1}^{-1} \left\langle -\tilde{d}(t) + \tilde{g}_{t2}^{-1} \langle r(t) - h_t^{-1} \langle u(t) \rangle \rangle \right\rangle. \quad (6)$$

También

$$y(t) = g_{t2} \left\langle d(t) + g_{t1} \langle u(t) \rangle \right\rangle. \quad (7)$$

Si  $h_t\langle\circ\rangle$  es un operador de gran ganancia, si el modelo de la planta, y el modelo de la perturbación son perfectos y si el controlador es estable, entonces, se puede demostrar, usando (6) en (7), que el controlador de la Figura 7 lleva a  $y(t) = r(t)$ . La necesidad de modelado perfecto, esto es,  $\tilde{g}_{t1}\langle\circ\rangle = g_{t1}\langle\circ\rangle$ ,  $\tilde{g}_{t2}\langle\circ\rangle = g_{t2}\langle\circ\rangle$ , y  $\tilde{d}(t) = d(t)$ , es equivalente a exigir que  $w(t) = y(t)$ . Con esta última observación, nos damos cuenta que  $\tilde{\epsilon}(t)$  puede ser obtenido directamente como el error de seguimiento  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Entonces, la arquitectura de control equivalente es la que aparece en la Figura 8.

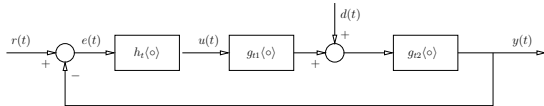


Figura 8. Solución de lazo cerrado para la compensación de perturbaciones

La discusión precedente muestra que el tema de inversión, relevante en el diseño de seguimiento de referencias, es también clave en el diseño para compensación de perturbaciones.

## 5. INVERSIÓN, MODELO INTERNO Y PARAMETRIZACIÓN DE YOULA

Considere la Figura 1 con una planta estable  $g_t\langle\circ\rangle$  y suponga que  $c_t\langle\circ\rangle$  ha sido diseñado en base a un modelo nominal de la planta  $\tilde{g}_t\langle\circ\rangle$ . Entonces, el impacto del error de modelado puede ser cuantificado usando la estructura mostrada en la Figura 9.

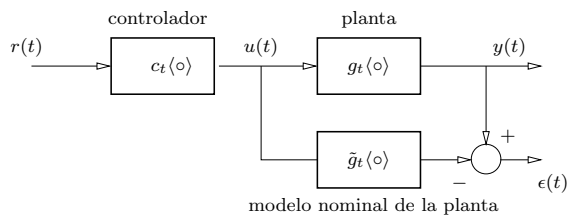


Figura 9. Arquitectura de lazo abierto con modelo nominal.

En la Figura 9, la señal  $\epsilon(t)$  captura no solamente el error de modelado, sino también los efectos de otras fuentes de incertidumbre, incluyendo perturbaciones y posibles desajustes en las condiciones iniciales. Así también, si  $\tilde{g}_t\langle\circ\rangle = g_t\langle\circ\rangle$ , si no hay perturbaciones, y si las condiciones iniciales en la planta y el modelo son las mismas, entonces  $\epsilon(t) = 0, \forall t \geq 0$ .

Si  $\epsilon(t)$  es realimentado como se muestra en la Figura 10, entonces llegamos a una estructura de control que retiene la dimensión conceptual de la estrategia de lazo abierto y, al mismo tiempo, se beneficia de la compensación de incertidumbre que se logra con la realimentación. La inclusión del

modelo de la planta como parte del controlador es la idea distintiva de esta arquitectura. Esa idea es conocida genéricamente como control por modelo interno (*Internal Model Control, IMC*).

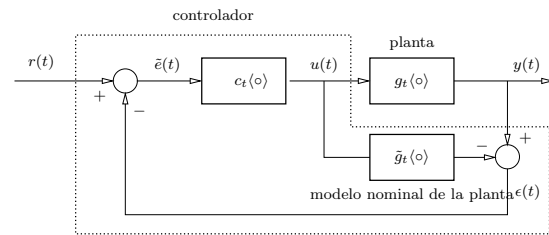


Figura 10. Arquitectura IMC.

En el caso lineal e invariante en el tiempo, el enfoque IMC es reconocido como un caso particular del enfoque de Youla (Morari and Zafriou, 1989), que analizamos a continuación.

Las suposiciones de linealidad e invariancia en el tiempo trasladan la arquitectura de la Figura 10 al lazo de control lineal que aparece en la Figura 11, donde hemos agregado una perturbación de entrada  $d_i(t)$ , una perturbación de salida  $d_o(t)$ , y ruido de medición,  $n(t)$ . En la Figura 11,  $Q(s)$ , al cual nos referiremos como *parámetro de Youla*, es la función de transferencia de la versión lineal e invariante en el tiempo, de  $c_t\langle\circ\rangle$ . La estructura mostrada en esa figura, implementa la forma parametrizada, desarrollada por Youla, de todos los controladores estabilizantes. En otras palabras, si  $G(s)$  es estable y si el modelo es perfecto, esto es, si  $G_o(s) = G(s)$ , entonces el lazo cerrado es internamente estable si y sólo si  $Q(s)$  es estable. Decimos que el lazo es internamente estable si todas las señales en el lazo son acotadas, cualquiera sea la combinación de referencias acotadas, perturbaciones acotadas y ruido acotado.

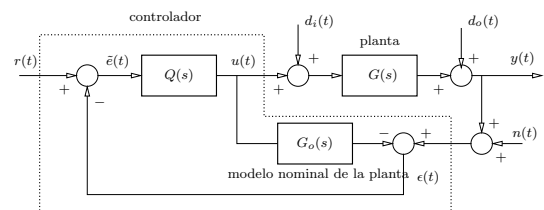


Figura 11. Arquitectura de Youla control con perturbación de entrada  $d_i(t)$ , perturbación de salida  $d_o(t)$  y ruido de medición  $n(t)$ .

La arquitectura de Youla, mostrada en la Figura 11 es equivalente al lazo realimentado clásico de la Figura 6 si  $C(s)$  se elige como:

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_o(s)}.$$

Por lo tanto, en el caso nominal, es decir, cuando  $G_o(s) = G(s)$ , las funciones de sensibilidad (3)-(5) se pueden expresar como:

$$S_o(s) = 1 - Q(s)G_o(s), \quad T_o(s) = Q(s)G_o(s) \quad (8)$$

$$S_{uo}(s) = Q(s). \quad (9)$$

El problema de diseño del control entonces involucra la búsqueda de un  $Q(s)$  que sea un buen inverso of  $G_o(s)$ , eso es, la búsqueda de  $Q(s)$ , de modo que  $Q(j\omega)G_o(j\omega)$  sea aproximadamente 1 en una banda de frecuencias que depende de los espectros de la referencia, las perturbaciones y el ruido. Las expresiones en (8) destacan la conexión entre inversión y desempeño del lazo. Esta conexión es ilustrada a continuación con un ejemplo.

*Ejemplo* Considere una planta con un modelo nominal dado por

$$G_o(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)}.$$

Suponga que las especificaciones para el control son:

- E1** Seguimiento de una referencia con energía significativa sólo en la banda de  $[0, 2]$  [rad/s].
- E2** Compensación perfecta de una perturbación de entrada constante.
- E3** Compensación de una perturbación de salida con energía significativa sólo en la banda de  $[1, 5]$  [rad/s].
- E4** Inmunidad a un ruido de medición con energía significativa en la banda de  $[40, 400]$  [rad/s].

Primero notamos que:

$$Y(s) = T_o(s)R(s) + S_o(s)G_o(s)D_i(s) + S_o(s)D_o(s) - T(s)N(s)$$

$$Y(s) = Q(s)G_o(s)R(s) + (1 - Q(s)G_o(s))G_o(s)D_i(s) + (1 - Q(s)G_o(s))D_o(s) - Q(s)G_o(s)N(s)$$

donde  $R(s)$ ,  $D_i(s)$ ,  $D_o(s)$  y  $N(s)$  son las transformadas de Laplace de referencia, perturbación de entrada, perturbación de salida y ruido, respectivamente. Entonces, la solución ideal es encontrar un  $Q(s)$  estable y propio, con restricciones que permitan satisfacer las especificaciones descritas, es decir,

- E1 :  $Q(j\omega) \approx G_o(j\omega)^{-1}, \quad \omega \in [0, 2]$  [rad/s]
- E2 :  $Q(0) = G_o(0)^{-1}$
- E3 :  $Q(j\omega) \approx G_o(j\omega)^{-1}, \quad \omega \in [1, 5]$  [rad/s]
- E4 :  $|Q(j\omega)| \ll |G_o(j\omega)|^{-1}, \quad \omega \in [40, 400]$  [rad/s]

Una solución simple es

$$Q(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+4)} \cdot \frac{1}{(0,1s+1)^2}. \quad (10)$$

La elección (10) tiene dos factores: un inverso perfecto, pero impropio, para satisfacer las tres primeras especificaciones, y un segundo factor para que  $Q(s)$  sea propia y satisfaga la cuarta especificación.

Un rasgo clave de la arquitectura de Youla es que la inversión juega un rol explícito en el diseño del control. Este rasgo también destaca que los principales obstáculos para construir un buen inverso son: grado relativo, cero de fase no mínima, ceros pequeños de fase mínima y polos inestables. En especial, la parametrización de Youla, aplicada al control de sistemas con retardo, acepta que no se puede construir un inverso causal para el retardo. Así, la meta es entonces obtener un buen inverso para el factor racional de la función de transferencia que describe a la planta. Este enfoque hace del predictor de Smith (Smith, 1958) un caso especial de la parametrización de Youla. La arquitectura de Youla puede usarse también en el control de plantas inestables; sin embargo, en este caso, no basta que  $Q(s)$  sea estable, sino que además es necesario que satisfaga ciertas condiciones de interpolación (Goodwin *et al.*, 2001).

## 6. NO LINEALIDADES E INVERSIÓN

El problema de diseño en control, usualmente encuentra no linealidades en la descripción de la planta y en el sistema de medición. También, en algunos casos, ciertas no linealidades son introducidas a propósito en el controlador, aún cuando el modelo en uso de la planta sea lineal. En todos estos casos, hay desafíos para la idea de construir un buen inverso. Un campo de aplicaciones donde la idea de inversión se usa explícitamente es en el control robótico por inversión cinemática o dinámica (Asada and Slotine, 1986).

Considere primero el problema de diseño para plantas no lineales que tienen modelos nominales no lineales. En este caso, los principios generales establecidos en las secciones precedentes se aplican sin mayores dificultades. Así, la limitación para construir un buen controlador también se origina en la dificultad para construir un buen inverso. Algunas técnicas, como las presentadas en (Goodwin *et al.*, 2001), involucran la construcción de inversos no lineales, en base a linealización exacta. Para que esta estrategia sea efectiva, se requiere cierto grado de lisura en las no linealidades, ello es un requerimiento para la existencia del inverso. Una situación común, en la que esa lisura

no existe, impidiendo por ello la obtención de un inverso estable y realizable, es saturación. En realidad, saturación en la entrada y en el estado son inevitables en el mundo real. Por lo tanto hay que desarrollar métodos especiales para hacer frente a esas situaciones.

En muchos lazos de control industrial, los sensores presentan características no lineales. La descripción de esas no linealidades es usualmente suministrada por el fabricante, y esa información debe ser integrada al problema de diseño. La forma estándar de tratar esas no linealidades es compensarlas usando algoritmos de linealización ad-hoc. Por otro lado, nuestro objetivo final es controlar la salida de la planta, pero cuando se usa control realimentado, sólo podemos controlar la medición de esa variable. Esta es la principal razón por la cual mediciones ruidosas, distorsionadas e imprecisas tienen un efecto perjudicial inmediato en el desempeño del control. Esta situación lleva a concluir que el paradigma de inversión debe ser aplicado a la planta equivalente, esto es, a la planta misma en cascada con el sistema de medición. La inversión del sistema de medición usualmente requiere la linealización mencionada más arriba.

Las no linealidades y la inversión también se conectan cuando se usan cierto tipo de controladores no lineales. Éste es el caso de los controladores *on-off* y *bang-bang*, como se muestra en la Figura 12.

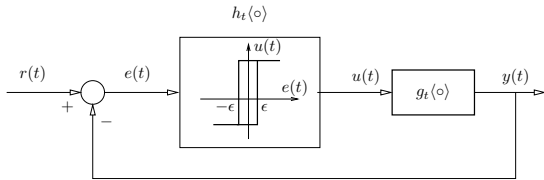


Figura 12. Control realimentado usando un controlador *bang-bang* con histéresis.

En la Figura 12 observamos un controlador *bang-bang* con histéresis. En este controlador, un cambio en el error  $e(t)$  no produce cambio en la señal de control  $u(t)$ , excepto cuando  $|e(t)|$  cruza el valor  $\epsilon$ . Así, un controlador como el ilustrado puede ser identificado como el bloque de gran ganancia  $h(\circ)$  de la Figura 5, solamente cuando el lazo está operando en torno a las condiciones de conmutación, ya que entonces, un muy pequeño cambio en el error  $e(t)$  genera un cambio comparativamente grande en la actuación  $u(t)$ .

## 7. INVERSIÓN Y CONTROL MULTIVARIABLE

El diseño del control para plantas de varias entradas y varias salidas (*multiple-input multiple-output*, MIMO) tiene los mismos ingredientes que

los discutidos en las secciones previas. Esto implica que la inversión es también la clave en la solución del problema de diseño, y que, por lo tanto, la meta del diseñador es construir una buena (realizable y estable) aproximación para el inverso del modelo nominal de la planta. Sin embargo, en este caso, hay algunos temas adicionales, tales como desacoplo y diseño de controladores con estructura restringida (véase (Salgado and Conley, 2004)). En realidad, el desacoplo puede ser visto como una inversión estructural, donde el objetivo es lograr una estructura diagonal.

En el caso lineal, los obstáculos para obtener un buen inverso son los mismos que en el caso escalar: ceros de fase no mínima, retardos, polos inestables y la naturaleza estrictamente propia de la planta. En el caso MIMO lineal, para enfrentar estas dificultades necesitamos herramientas adicionales, como los interactores. En ese marco, la imposibilidad de construir un inverso perfecto para modelos estrictamente propios, con retardos y ceros de fase no mínima es reconocida extrayendo esas características del modelo usando interactores adecuados (Silva and Salgado, 2005). Para profundizar esta afirmación, consideremos un sistema lineal, estable y de tiempo discreto. Supongamos que denotamos su función (matricial) de transferencia por  $G(z)$ , entonces siempre se puede encontrar una matriz  $\Xi(z)$ , de modo que

$$G_m(z) = \Xi(z)G(z) \quad (11)$$

donde  $G_m(z)$  es una función de transferencia estable, bipropia y con todos sus ceros al interior del disco unitario. Esto significa que  $\Xi(z)$  extrae todos los retardos del sistema y todos los ceros finitos del sistema que se encuentran fuera del disco unitario. Por lo tanto, en el caso general,  $\Xi(z)$  será inestable e impropia. Si el sistema no tiene ceros sobre la circunferencia unitaria, entonces siempre se puede escoger  $\Xi(z)$  unitaria (recuerde que una matriz  $\Xi(z)$  es unitaria si y sólo si  $\Xi(z^{-1})^T \Xi(z) = I$ ). Como ejemplo, suponga que

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{5}{(5z-4)z^7} & 0 & \frac{4}{(5z-4)z^5} \\ \frac{2,5}{(5z-4)z^6} & \frac{5}{5z-4} & \frac{6}{(5z-4)z^4} \\ 0 & \frac{2,5}{5z-4} & \frac{3}{(5z-4)z^4} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Los polos de  $G(z)$  están localizados en  $z = 0$  y en  $z = 0,8$  (y son múltiples). Además

$$\det G(z) = \frac{25}{(5z-4)z^{10}} \quad (13)$$

Por lo tanto, la planta es estable y todos sus ceros finitos están ubicados al interior del disco unitario. Sin embargo, es estrictamente propia, lo cual indica que el inverso exacto sería impropio.



Esto motiva el uso del interactivo definido en (11), el cual resulta (ver (Silva and Salgado, 2005)) dado por

$$\Xi(z) = \begin{bmatrix} z^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0, 2z(z^6 + 4) & p(z) \\ 0 & p(z) & 0, 2z(4z^6 + 1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde  $p(z) = -2z(z^2 - 1)((z^2 + 1)^2 - 1)/5$ . Esto lleva a

$$G_m(z) = \frac{1}{(5z - 4)z^5} \begin{bmatrix} 5z^4 & 0 & 4z^6 \\ 0, 5(z^6 + 4) & 5z^6 & 6z^2 \\ 2, 5p(z) & 2, 5z^6 & 3z^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

El lector puede verificar que  $\Xi(1) = I$ ,  $\det \Xi(z) = z^{14}$ , y que  $G_m(z)$  es bipropia, estable y de fase mínima, específicamente  $\lim_{z \rightarrow \infty} \det(G_m(z)) = 0, 2$ . En otras palabras,  $G_m(z)$  tiene un inverso estable y realizable. En la próxima sección se ilustra una forma en que este resultado se conecta con el diseño del controlador.

Es además necesario señalar que en el diseño de control MIMO, la construcción del inverso tiene que ser negociada con algunos otros factores que limitan el desempeño, y que no están presentes en el caso escalar. Uno de ellos es cuando la planta MIMO tiene cero de fase no mínima con direcciones no canónicas. En ese caso, el desacoplo (necesario para la inversión) derramará esos ceros en todos los canales, con un efecto perjudicial para el desempeño del lazo, especialmente si esos ceros están cerca del límite de estabilidad.

## 8. OPTIMALIDAD E INVERSIÓN

Uno de las estrategias más poderosas en el diseño de sistemas de control es usar alguna forma de optimización. La función de costo se construye para cuantificar alguna medida de desempeño, tal como el error de control para una referencia escalón. Si esa función no penaliza de forma alguna la señal de control, es decir, si se trata de un problema de control barato (*cheap-control*), entonces la solución genera el mejor inverso aproximado en la métrica que se está utilizando. Para ilustrar esta afirmación, consideramos a continuación dos casos de diseño óptimo.

Considere primero el problema de minimizar la norma 2 de la sensibilidad nominal en una estructura con parametrización de Youla,

$$\min_{Q(s) \in \mathcal{S}} \|S_o(s)\|_2 = \min_{Q(s) \in \mathcal{S}} \|1 - G_o(s)Q(s)\|_2,$$

donde  $G_o(s)$  es el modelo nominal estable de la planta, con grado relativo  $p$ , y donde  $\mathcal{S}$  es el conjunto de todas las funciones de transferencia racionales y estables. Por lo tanto, la solución óptima es el mejor inverso aproximado, propio y estable, de  $G_o(s)$ . Si  $G_o(s)$  es no sólo estable, sino que también es de fase mínima, la solución óptima es  $Q^o(s) = G_o(s)^{-1}$ . Sin embargo, dado que esta solución es impropia, una buena solución, aunque sub-óptima es el inverso aproximado

$$Q^{so}(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^p} G_o(s)^{-1}.$$

Esta elección lleva a la sensibilidad complementaria

$$T_o(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^p},$$

donde  $\tau > 0$  es tan pequeño como se requiera de acuerdo a la especificación de ancho de la banda del lazo cerrado (es necesario recordar que esta banda corresponde a la banda de frecuencia donde existe un buen inverso).

Si  $G_o(s)$  es de fase no mínima, sabemos que un inverso perfecto (o casi perfecto) no es útil, ya que sería inestable. El mejor (en sentido cuadrático) inverso aproximado puede ser calculado usando el teorema de Pitágoras (Doyle *et al.*, 1992). Aunque la solución puede no ser un buen inverso, es posible obtener, al menos, un inverso perfecto en un conjunto finito dado de frecuencias. También se pueden introducir funciones de peso, cuyo rol es especificar las bandas de frecuencias donde se desea un buen inverso.

El caso MIMO, más complejo, nos sirve a continuación para ilustrar este enfoque.

Suponga que se desea que la salida de una planta estable con matriz de transferencia  $G(z)$ , siga una referencia tipo escalón dada por  $R(z) = vz/(z-1)$ , donde  $v$  es un vector que describe la dirección de la referencia. Suponga además que se desea diseñar un controlador en forma de Youla, tal que el error de control  $e(k)$  sea minimizado en norma 2, es decir, se trata de calcular  $Q(z)$ , estable y propio, de modo que

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)^T e(k) \quad (16)$$

sea minimizado. Esto es equivalente, de acuerdo a Parseval, a minimizar

$$J = \left\| \left( I - G(z)Q(z) \right) \frac{vz}{z-1} \right\|_2^2 \quad (17)$$

Se puede demostrar que si  $G(z)$  tiene todos sus ceros finitos al interior del disco unitario, como

ocurre en (12), entonces la solución óptima es (Silva and Salgado, 2005):

$$Q_{opt}(z) = G_m(z)^{-1} \quad (18)$$

Este resultado dice que el mejor controlador realizable se obtiene al invertir la planta multiplicada por el interacto. Note además que el factor  $vz/(z-1)$  asigna ponderación infinita al error de ajuste a la frecuencia  $\omega = 0$ . Por ello es que  $Q(z)$  invierte exactamente a  $G(z)$  a esa frecuencia, lo que es equivalente a forzar integración en  $C(z)$ .

Como un segundo caso, considere una planta con un modelo de fase mínima  $G_o(s)$ , con  $m$  ceros y  $n$  polos ( $m < n$ ) y una descripción en espacio de estado  $(A, B, C, 0)$ . Esta planta tiene entrada  $u(t)$ , salida  $y(t)$  y estado  $x(t)$ . Suponga además que deseamos diseñar un regulador cuadrático lineal (LQR) con la función de costo dada por:

$$J = \int_0^{\infty} (y(t)^2 + \rho^2 u(t)^2) dt = \int_0^{\infty} (x(t)^T C^T C x(t) + \rho^2 u(t)^2) dt \quad (19)$$

En este caso es sabido (Kwakernaak and Sivan, 1972) que, a medida que  $\rho$  tiende a cero (*cheap control*), los polos del lazo cerrado tienden a los  $m$  ceros de la planta. Los restantes  $n - m$  polos tienden a infinito siguiendo un patrón Butterworth. Esto significa que estamos efectivamente implementando un inverso aproximado, ya que todos los ceros son cancelados y sólo se agregan polos muy rápidos. Sin embargo, a medida que  $\rho$  aumenta, los polos del lazo cerrado tienden a los polos de la planta. Esto nos aleja del inverso ideal.

*Ejemplo* Considere una planta estable y de fase mínima con una función de transferencia nominal dada por:

$$G_o(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

con una realización en espacio de estado  $(A, B, C, 0)$ , donde  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = [3 \ -2]^T$  y  $C = [1 \ 1]$ . Suponga que decidimos diseñar un controlador basado en la realimentación del estado observado. Suponga además que diseñamos un observador muy rápido, por ejemplo con autovalores en  $-40$  y en  $-50$ . La función de costo está dada por (19) donde  $\rho = 10^{-5}$ , es decir, formulamos un problema de control barato. La ganancia del observador  $K_o$  y al ganancia de realimentación  $K_c$  pueden ser calculadas usando técnicas estándares, las que arrojan, como resultado:

$$K_o = [1911 \ -1824]^T; \quad \text{y} \quad K_c = [315,2 \ 314,2].$$

Para este tipo de problemas existe un lazo equivalente de realimentación de la salida (Goodwin *et al.*, 2001) donde el controlador tiene función de transferencia  $C_1(s)$  dada por

$$C_1(s) = K_c(sI - A + K_o C + B K_c)^{-1} K_o = \frac{29228,0(s+21,6)}{(s+403,2)(s+4,0)}, \quad (20)$$

lo cual lleva a polos del lazo cerrado ubicados en los polos del observador, es decir, en  $s = -40$  y  $s = -50$ , en  $s = -4$  (que cancela el cero de la planta) y en  $s = -316$ .

Supongamos que re-diseñamos el controlador, usando  $\rho = 0,1$ . Entonces

$$K_o = [1911 \ -1824]^T; \quad \text{y} \quad K_c = [2,48 \ 2,03].$$

El controlador equivalente  $C_2(s)$  está dado por:

$$C_2(s) = \frac{1031,7875(s+5,589)}{(s+76,81)(s+16,57)}.$$

Los polos del lazo cerrado están ahora en los polos del observador, es decir, en  $s = -40$  y  $s = -50$ , y los otros dos en  $s = -3,19 \pm j1,63$ .

Las respuestas en frecuencia  $|C_1(j\omega)|$  y  $|C_2(j\omega)|$  se muestran en la Figura 13.

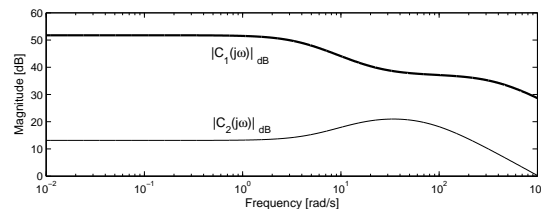


Figura 13. Regulador cuadrático óptimo con realimentación del estado observado.

La Figura 13 ilustra el hecho que cuando el control es barato, ( $\rho = 10^{-5}$ ), la solución del regulador óptimo genera un controlador de gran ganancia en una banda ancha de frecuencias, esto es, se obtiene un buen inverso del modelo de la planta. Sin embargo, tal como se aprecia en la misma figura, si se tiene que pagar un precio no despreciable por la acción del controlador, entonces la ganancia del controlador es significativamente reducida, lo cual conduce a un inverso pobre.

En general, la solución a un problema de control óptimo también permite calcular el mejor desempeño posible (con controladores realizables), en la métrica seleccionada. El resultado general es que el desempeño (nominal) mejora a medida que

la solución óptima implementa un mejor inverso para el modelo de la planta.

## 9. CONCLUSIONS

En este artículo hemos desarrollado los fundamentos que dan a la inversión un rol central en la solución del problema de diseño. Los fundamentos de mayor relevancia pueden resumirse en la siguiente forma:

- La solución al problema de diseño del control está directamente relacionada con la construcción de un inverso aproximado para el modelo de la planta.
- La realimentación y los controladores de alta ganancia son elementos claves en la construcción implícita de ese inverso.
- El desafío de fondo en el diseño es construir un inverso que satisface restricciones tales como estabilidad, robustez, actuación limitada e inmunidad al ruido de medición. Este desafío origina la necesidad de negociar especificaciones (Kwakernaak and Sivan, 1972), (Goodwin *et al.*, 2001).
- En esencia, una planta es difícil de controlar si es difícil construir un buen inverso. Recordemos que, en este artículo, hemos usado la expresión *buen inverso* para denotar un inverso aproximado del modelo de la planta, estable, realizable, robusto, y que, al mismo tiempo genera comandos de control dentro de límites aceptables.

El análisis en este artículo da soporte a nuestra convicción de que la inversión debiera tener un rol articulador en la enseñanza del Control Automático. Se ha ilustrado la forma en que este concepto permea la totalidad de la disciplina. Aunque la discusión ha estado limitada a un conjunto reducido de enfoques y métodos, puede demostrarse fácilmente que el rol de la inversión es crucial también en enfoques no tradicionales, como el control por tablas y el control borroso. En nuestra experiencia es un desafío interesante para los estudiantes, en niveles avanzados, descubrir el rol de la inversión en diferentes teorías y métodos de síntesis y diseño.

## REFERENCIAS

- Asada, H. and J. E. Slotine (1986). *Robot Analysis and Control*. J. Wiley.
- Doyle, J. B. Francis and A. Tannembaum (1992). *Feedback control Theory*. Macmillan Publishing Company. New York.
- Goodwin, Graham C., Stefan Graebe and Mario E. Salgado (2001). *Control System Design*. Prentice Hall. New Jersey.
- Kwakernaak, H. and R. Sivan (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience. New York.
- Morari, M. and E. Zafriou (1989). *Robust process control*. Prentice Hall Inc.. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Salgado, Mario and Arthur Conley (2004). MIMO interaction measure and controller structure selection. *International Journal of Control* **77**(4), 367–383.
- Silva, E. and M. Salgado (2005). Performance bounds for feedback control of nonminimum-phase MIMO systems with arbitrary delay structure. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*.
- Smith, O.J.M. (1958). *Feedback Control Systems*. McGraw Hill Book Company. New York.