

TÉCNICA ZAD APLICADA A UN CONVERTIDOR BUCK: ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y DE TRANSICIÓN AL CAOS¹

Fabiola Angulo*, Enric Fossas† y Gerard Olivar*

**Universidad Nacional de Colombia. Departamento de
Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación,
Campus La Nubia, Manizales, Colombia
Email: {fangulog,golivart}@unal.edu.co*

*†Universitat Politècnica de Catalunya. Institut
d'Organització i Control de Sistemes Industrials. Avda.
Diagonal 647, pl 11. 08027 Barcelona, España
Email: enric.fossas@upc.edu*

Resumen: En este trabajo se presentan algunos resultados obtenidos al analizar el convertidor *buck* controlado mediante un modulador de anchura de pulsos (PWM) centrado. El ciclo de trabajo se calcula obligando a que una salida, definida como una ecuación diferencial de primer orden en el error en tensión, tenga promedio cero en cada ciclo. Los resultados obtenidos han mostrado que la técnica garantiza frecuencia de conmutación fija y una variedad de fenómenos no lineales como bifurcaciones y caos, en la medida en que el parámetro asociado a la dinámica de primer orden, varía. Estos fenómenos han sido estudiados en el presente trabajo de forma analítica y numérica. Finalmente a nivel de simulación se ha hecho uso de la técnica Time Delay Auto-Synchronization para controlar el sistema. *Copyright ©2005 CEA-IFAC*

Palabras clave: frecuencia de conmutación fija, bifurcaciones, caos, control de caos, convertidor *buck*.

1. INTRODUCCIÓN

Una rama de los sistemas de potencia se dedica al estudio y control de fuentes conmutadas en sus diferentes clases: DC/DC, DC/AC, AC/DC y AC/AC y configuraciones: buck, boost, buck-boost, Čuk, etc. Debido a la necesidad de disponer de fuentes de voltaje altamente fiables y al amplio abanico de fenómenos no lineales que de por sí presentan, su estudio y control ocupan un lugar importante en los sistemas dinámicos.

En general, los modelos dinámicos de estos convertidores vienen dados por campos vectoriales continuos que se definen promediando ciclo a ciclo el comportamiento del convertidor. A su vez, se diseña una ley de control continua que se implementa mediante un modulador de anchura de pulsos (PWM); la acción del modulador coincide, en promedio, con la acción de control. Debido a la realimentación y a la continua conmutación de la fuente, el sistema en conjunto presenta, para ciertos valores de los parámetros, comportamientos propios de sistemas no lineales. A principios de la década de los 80 ya se observó la presencia de caos en circuitos de potencia (Baillieul *et al.*, 1980)

¹ Trabajo financiado por el Proyecto Europeo SICONOS: IST-2001-37172.

Los convertidores de potencia han sido ampliamente estudiados como sistemas de estructura variable debido a la conmutación inherente a su configuración. En (Bilalović *et al.*, 1983; Venkataramanan *et al.*, 1985) Sabanović y sus colaboradores diseñan controladores en modo de deslizamiento para estas estructuras. En (Carpita *et al.*, 1988) se sintetiza como superficie de deslizamiento un esquema Proporcional-Derivativo en el error de salida. Este esquema se generalizará en (Fliess and Sira-Ramírez, 1993) para sistemas lineales de grado relativo mayor que uno. Los resultados de Sabanović y Carpita mostraron un controlador robusto, estable y eficiente. Sin embargo, debido a la acción discontinua del controlador, aparece “chattering” en el sistema, aumentando el rizado y la distorsión a la salida. Con objeto de disminuir el “chattering” diversos autores han trabajado un esquema de control que garantice una frecuencia de conmutación fija. Así, en (Borle and Chemmangot, 1995), se plantea sintetizar un controlador (Zero Averaged Current Error) que garantice promedio cero del error de corriente en cada iteración. Recientemente Fossas y sus colaboradores (Fossas *et al.*, 2001) han propuesto una nueva técnica de control para convertidores de potencia. Esencialmente se trata de un diseño “feed-forward” el cual, fijada una salida auxiliar, define una acción de control digital que garantiza promedio cero de la salida auxiliar en cada iteración. Con esta técnica de control se tiene frecuencia fija de conmutación. Asimismo se heredan el desempeño y las características de robustez derivadas de la elección de la salida auxiliar. Resultados numéricos y experimentales han mostrado la bondad de la técnica de ZAD (Zero Average Dynamics) para implementaciones del modulador con pulso al lado (Biel *et al.*, 2002; Ramos *et al.*, 2003). Sin embargo, la mayoría de implementaciones contempla el caso de pulso centrado, debido principalmente a razones técnicas relativas a la medición de corriente. Además, la expresión del ciclo de trabajo que se obtiene para este caso es mucho más sencilla que para el pulso a un lado.

En el presente artículo se estudian analítica y numéricamente los controladores ZAD con pulso centrado. En la sección 2 se plantea el problema a resolver. La sección 3 está dedicada al estudio de la estabilidad del sistema en lazo cerrado, usando los exponentes de Lyapunov para determinar el límite de estabilidad. En la sección 4 se analiza la transición al caos, basándose en la aplicación de Poincaré y se caracterizan analíticamente las tres primeras bifurcaciones. La sección 5 presenta algunos resultados experimentales que confirman el límite de estabilidad. En la sección 6 se aplica la técnica de autosincronización por retardo de tiempo (TDAS) para controlar el sistema cuando

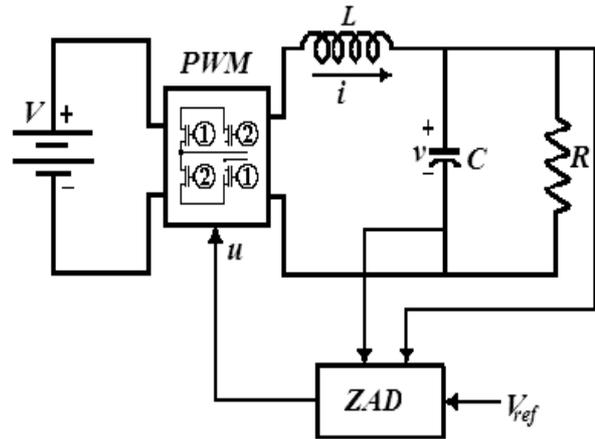


Figura 1. Esquema de un convertidor de potencia

opera en zona de caos. Las conclusiones se detallan, finalmente, en la sección 7.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Un modulador por anchura de pulsos (PWM) consiste en un circuito compuesto de interruptores y una fuente de alimentación DC, el cual en conjunto debe entregar a la salida un valor promedio en un período de conmutación. A este efecto el PWM conmuta entre la posición ON (conducción) y la posición OFF (no conducción). En cada período, al tiempo (normalizado a 1) que el conmutador permanece en ON se le conoce como ciclo de trabajo.

Existen diferentes formas de calcular el ciclo de trabajo; la más usada consiste en comparar una rampa de referencia con la señal de error del sistema. Con este esquema (Deane and Hamill, 1990; Fossas and Olivar, 1996; di Bernardo *et al.*, 1996; di Bernardo *et al.*, 1997) han observado y estudiado fenómenos caóticos en el convertidor reductor.

En la Figura 1 se muestra un esquema simplificado de un convertidor de potencia. Este sistema puede actuar como un convertidor DC-DC o DC-AC dependiendo de si la señal de referencia (V_{ref} en la figura) es constante o senoidal.

El convertidor reductor de la Figura 1 se puede modelar mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \frac{dv}{d\tau} \\ \frac{di}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V}{L} \end{pmatrix} u \quad (1)$$

El voltaje v en el condensador y la corriente i en el inductor configuran las variables de estado. La variable de control u toma valores discretos en el conjunto $\{-1, 1\}$ haciendo referencia a la

posición de los interruptores 1 y 2 en la Figura 1, los cuales permiten alimentación $+V$ o $-V$. Con el objeto de adimensionalizar la dinámica se efectúa el siguiente cambio de variables $x_1 = v/V$, $x_{1ref} = V_{ref}/V$, $x_2 = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{L}{C}} i$ y $t = \tau/\sqrt{LC}$, donde t es la nueva variable respecto de la cual se van a obtener las derivadas. De acuerdo con los cambios de variables propuestos se tiene que $\gamma = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, el período de muestreo $T = T_c/\sqrt{LC}$ y las ecuaciones se pueden reescribir como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2)$$

y de forma compacta como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$.

Este sistema va a ser controlado mediante un PWM imponiendo que el promedio de la función $s(\mathbf{x})$ en cada período de conmutación sea cero. Siguiendo a (Carpita *et al.*, 1988), $s(\mathbf{x})$ se define como:

$$s(\mathbf{x}) = (x_1 - x_{1ref}) + k_s(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref}) \quad (3)$$

donde x_1 es la variable a regular, x_{1ref} es la señal de referencia y k_s es la constante de tiempo asociada a la dinámica de primer orden en el error. Para $k_s \in [0,15,3,24]$ el sistema regula en régimen caótico; cuando $k_s > 3,24$ el sistema regula en régimen periódico estable. Sin embargo, para valores altos de k_s , del orden de 10, el sistema pierde la capacidad de regulación. La señal de control suministrada al sistema para $l \leq T$ resulta en

$$u = \begin{cases} u_+ & \text{si } kT \leq t \leq kT + l/2 \\ u_- & \text{si } kT + l/2 < t < kT + (T - l/2) \\ u_+ & \text{si } kT + (T - l/2) \leq t \leq kT + T \end{cases} \quad (4)$$

donde $u_+ = 1$ y $u_- = -1$. Así pues se está suponiendo que entre kT y $kT + \frac{l}{2}$ el signo del pulso es positivo y que entre $kT + \frac{l}{2}$ y $(k+1)T - \frac{l}{2}$ el pulso cambia a -1 , para finalmente, en el último tramo, retornar a $+1$. Esto implica que l hace alusión al tiempo que la fuente permanece en $+1$. Al valor $\frac{l}{T}$ se le conoce como el ciclo de trabajo y se denotará por d .

Por tratarse de un sistema lineal e invariante en el tiempo sometido a pulsos unitarios, la solución general se puede escribir como

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \left(e^{\mathbf{A}(T-l/2)} + \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A}l/2} - \mathbf{I} \right) \mathbf{b} - e^{\mathbf{A}l/2} \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A}(T-l)} - \mathbf{I} \right) \mathbf{b} \quad (5)$$

El ciclo de trabajo l/T , que puede variar de ciclo a ciclo, se obtiene, tal como se ha dicho antes, de resolver la siguiente ecuación

$$\int_{kT}^{(k+1)T} s(\mathbf{x}(t)) dt = 0 \quad (6)$$

El cálculo exacto del tiempo de conmutación implica, en cada iteración, la resolución de una ecuación trascendente, lo que puede ser un inconveniente en caso de una implementación en línea. Por este motivo se buscan nuevas alternativas para evaluar l de manera más simple. Una aproximación consiste en suponer que la salida auxiliar se comporta como una función lineal a trozos. Las consideraciones básicas tenidas en cuenta en este esquema se pueden resumir en

- 1. La dinámica del error o salida auxiliar se comporta como una recta a tramos.
- 2. Las pendientes de la dinámica del error en cada tramo están determinadas por las pendientes calculadas en el momento de la conmutación. Esto incluye suponer que la pendiente al inicio del período, notada como $\dot{s}_1(\mathbf{x}(kT))$, es la misma que al final. Para obtener un valor aproximado de la pendiente $\dot{s}_2(\mathbf{x}(kT))$, correspondiente al tramo intermedio, se toman los mismos datos que se han usado para calcular $\dot{s}_1(\mathbf{x}(kT))$ y se invierte el signo de la señal de control.

Con estas aproximaciones se tiene

$$d := \frac{l}{T} = \frac{2s(\mathbf{x}(kT)) + T\dot{s}_2(\mathbf{x}(kT))}{T(\dot{s}_2(\mathbf{x}(kT)) - \dot{s}_1(\mathbf{x}(kT)))}. \quad (7)$$

Esta expresión será válida si su valor se encuentra entre 0 y 1. De lo contrario se tomará el valor resultante de saturar d en el intervalo $[0, 1]$. A fin de resaltar el acierto de estas simplificaciones las Figuras 2 y 3 muestran, respectivamente, el promedio de la salida y el error en tensión para una señal de referencia senoidal (DC-AC). Se han asignado los siguientes valores a los parámetros del convertidor: $C = 40\mu F$, $L = 2mH$, $R = 20\Omega$, $T_c = 50\mu s$ y $V = 40V$. En el sistema adimensional se tiene: $\gamma = 0,35$ y $T = 0,1767$. El parámetro de bifurcación k_s toma el valor 4,5 y la señal de referencia es

$$x_{1ref} = 0,8 \sin 0,0889t$$

que corresponde a una señal de 32V y 50Hz.

La Figura 2 muestra el valor de la integral de la salida auxiliar y la Figura 3 el error relativo, tomando como base la amplitud de la señal de referencia.

De estas gráficas se concluye que la aproximación es buena. La integral de la salida auxiliar es del orden de $4e-4$ y el error de salida máximo es 0,44 %, tomando como base la amplitud de la señal de entrada.

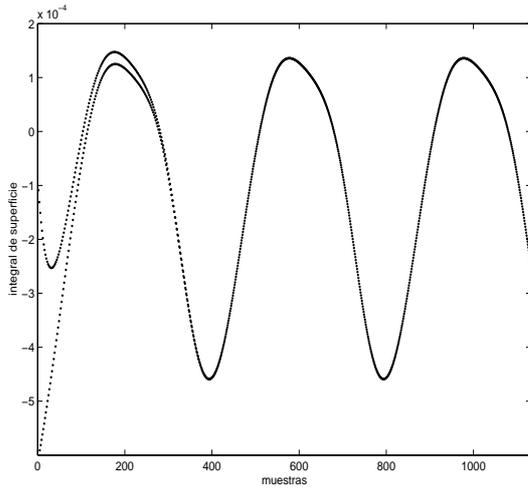


Figura 2. Integral de la salida auxiliar suponiendo $s(\mathbf{x})$ lineal a trozos.

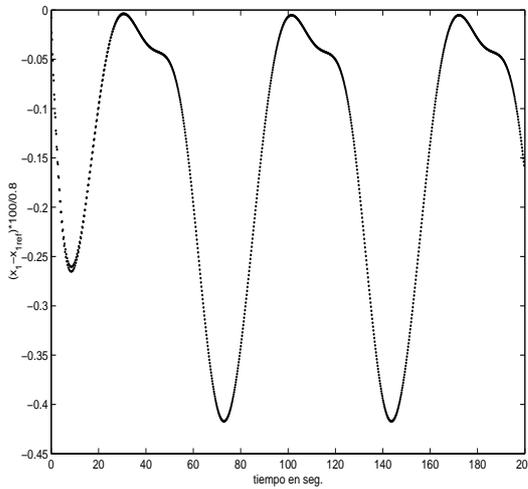


Figura 3. Error de seguimiento suponiendo $s(\mathbf{x})$ recta a trozos.

Estos resultados validan la ley de control que se obtiene de suponer una salida auxiliar $s(x)$ lineal a trozos. Se procede a continuación a analizar el comportamiento dinámico del sistema en el caso de regulación (DC-DC): estabilidad y estudio de la transición al caos.

3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LA TÉCNICA ZAD

Nótese que el punto de equilibrio \mathbf{x}^* satisface $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$; a su vez \mathbf{x}^* permite calcular el ciclo de trabajo “de equilibrio” d^* . Sin embargo, ciertas aproximaciones permiten simplificar los cálculos sin aumentar significativamente el error. Parece natural suponer que el sistema no satura, así pues la expresión de d viene dada por:

$$d = \frac{2s + T\dot{s}_2}{T(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)} \quad (8)$$

donde $s = s(\mathbf{x}(kT))$, $\dot{s}_1 = \dot{s}_1(\mathbf{x}(kT))|_{u_+}$ y $\dot{s}_2 = \dot{s}_2(\mathbf{x}(kT))|_{u_-}$. Se asume que la generación del pulso obedece a la secuencia $\{+1, -1, +1\}$ y será la utilizada a lo largo de este trabajo.

El término correspondiente al denominador $\dot{s}_2 - \dot{s}_1$ se puede escribir como

$$\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = -2k_s u_+ = -2k_s \quad (9)$$

Igual que antes se toma $u_+ = 1$ que corresponde al pulso al inicio del ciclo. Esto permite expresar d de manera más simple como

$$d = -\frac{2s + T\dot{s}_2}{2T k_s} \quad (10)$$

3.1 Puntos de equilibrio

Para calcular los puntos de equilibrio procedemos a determinar s y \dot{s}_2 . De la ecuación de la salida auxiliar se tiene,

$$\dot{s} = (1 - k_s \gamma) \dot{x}_1 + k_s \dot{x}_2 - \dot{x}_{1ref} - k_s \ddot{x}_{1ref} \quad (11)$$

Para calcular \dot{s}_2 se debe tener en cuenta que ésta corresponde a la pendiente de $s(\mathbf{x})$ en el tramo intermedio y que por lo tanto la señal de control allí toma el valor de $u = -1$. Si se reemplazan \dot{x}_1 y \dot{x}_2 de las ecuaciones de estado, con la consideración anterior se tiene

$$\dot{s}_2 = (k_s \gamma^2 - \gamma - k_s) x_1 + (1 - k_s \gamma) x_2 - k_s - \dot{x}_{1ref} - k_s \ddot{x}_{1ref} \quad (12)$$

Para el sistema en el equilibrio $x_1 = x_{1ref}$ con lo cual $s = 0$ y $x_2 = \dot{x}_{1ref} + \gamma x_{1ref}$. En el caso de regulación todas las derivadas de la referencia son cero, y por lo tanto el ciclo de trabajo en estado estacionario viene dado por :

$$d^* = \frac{1 + x_{1ref}}{2} \quad (13)$$

En el supuesto que el ciclo iniciara con $u = -1$, d^* tomaría el valor $d^* = \frac{1}{2}(1 - x_{1ref})$.

Se ha obtenido el punto de equilibrio $(x_1^*, x_2^*) = (x_{1ref}, \gamma x_{1ref})$, que corresponde a un ciclo de trabajo en estado estacionario $d^* = \frac{1 + x_{1ref}}{2}$.

A continuación se hace uso de los exponentes de Lyapunov para determinar el límite de la estabilidad y la presencia de caos en el sistema.

3.2 Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov (E. L.) son una herramienta matemática por medio de la cual se puede determinar la velocidad de convergencia o divergencia de dos órbitas de una ecuación

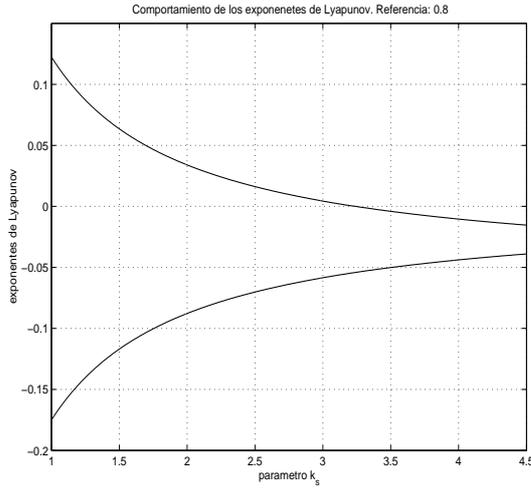


Figura 4. Exponentes de Lyapunov.

diferencial, las cuales se inician infinitesimalmente cerca la una de la otra. Si las trayectorias que se inician muy cerca convergen una a la otra, los E. L. asociados serán negativos. Si las trayectorias divergen existirá, por lo menos, un E. L. positivo. Para calcular los E. L. se requiere el conocimiento de las órbitas y por lo tanto su cálculo analítico se hace muy complejo. Por este motivo, generalmente se recurre a un procedimiento numérico para hallarlos.

En esta sección se calculan los E. L. directamente de la aplicación de Poincaré sustituyendo, en las ecuaciones dinámicas, los valores de los parámetros definidos al final de la sección 2. La aplicación de Poincaré, a su vez, resulta directamente del muestreo síncrono. Nótese la continuidad, en los instantes de muestreo, del campo vectorial que describe el sistema dinámico. Ello facilita el cálculo de los E. L. (Lim and Hamill, 1999). De tener discontinuidad, se pueden usar otros métodos ya sean numéricos (Lim and Hamill, 1999) y/o analíticos (Janaki *et al.*, 1999), (Batlle *et al.*, 2003).

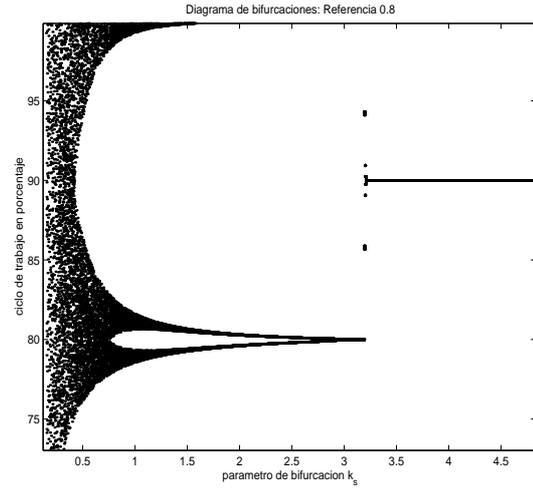
La solución de las ecuaciones de estado dada por (5) puede escribirse de manera simplificada como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(k))$$

que corresponde a la aplicación de Poincaré. Considérese $\mathbf{DF}(\mathbf{x})$ la matriz jacobiana de \mathbf{F} y sea $q_i(\mathbf{DF}(\mathbf{x}))$ el i -ésimo valor propio de $\mathbf{DF}(\mathbf{x})$. El exponente de Lyapunov λ_i para cada valor propio está dado por:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \log |q_i(\mathbf{DF}(\mathbf{x}(k)))| \right\} \quad (14)$$

La Figura 4 muestra la evolución de los exponentes de Lyapunov en función del parámetro k_s . Se observa un valor límite de estabilidad en $k_s = 3,25$.

Figura 5. Diagrama de bifurcaciones, referencia $x_{1ref} = 0,8$.

La presencia de un E. L. positivo en un sistema cuyas trayectorias evolucionan en una zona acotada del espacio de estado garantiza comportamiento caótico (Banerjee and Verghese, 2001). Por otro lado, la suma de todos los exponentes de Lyapunov en un atractor caótico debe ser negativa (Parker and Chua, 1989).

En la Figura 5 se presenta un diagrama de bifurcaciones 1-dimensional, en el cual la variable de estudio es el ciclo de trabajo y el parámetro de bifurcación sigue siendo k_s . Como puede observarse, la transición al caos es lenta. A continuación se estudian las primeras bifurcaciones, a través de las cuales el sistema evoluciona a comportamiento caótico.

4. ANÁLISIS DE LA TRANSICIÓN AL CAOS

En esta sección se presenta de manera resumida la forma en la que el sistema pasa de estable a caótico. Se han estudiado las tres primeras bifurcaciones desde un punto de vista analítico y numérico. Debe tenerse en cuenta que una vez que se pierda la estabilidad debe haber un momento en el cual el ciclo de trabajo se sature.

El ciclo de trabajo se puede definir como

$$d = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) + c_3 \quad (15)$$

donde $c_1 = \frac{2-2k_s\gamma+Tk_s\gamma^2-\gamma T-Tk_s}{-2Tk_s}$, $c_2 = \frac{2k_s+T-k_s\gamma T}{-2Tk_s}$ y $c_3 = \frac{x_{1ref}}{Tk_s} + \frac{1}{2}$. El sistema presenta una zona de no saturación definida en el espacio de estados por la ecuación

$$0 < c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) + c_3 < 1, \quad (16)$$

cuyo resultado se ha esquematizado en la Figura 6.

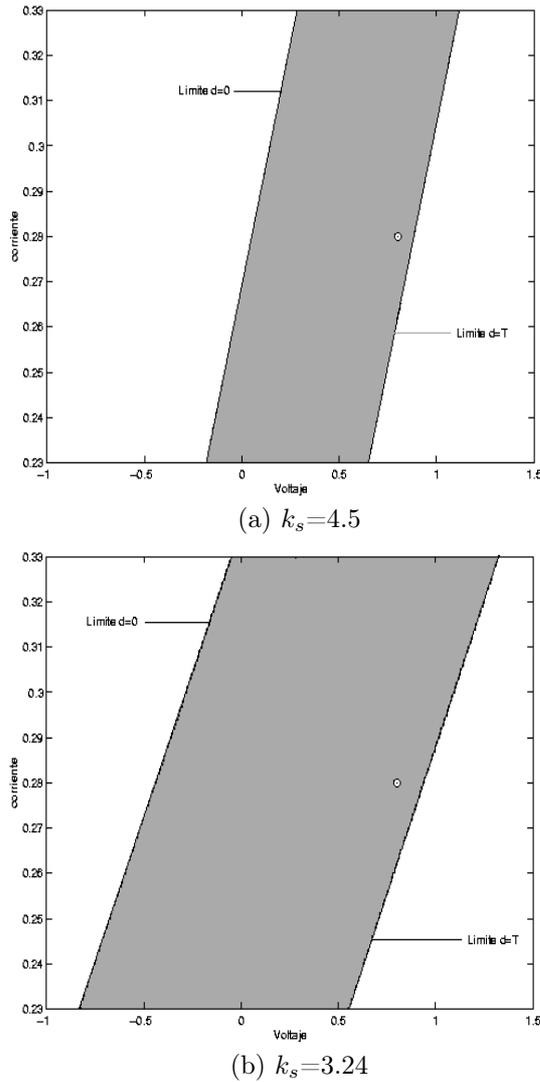


Figura 6. Zona del plano de fase donde el estado no da lugar a saturación del ciclo de trabajo.

La frontera de la región está definida por $d = 0$ y $d = 1$. Dentro de la zona comprendida entre las rectas, el sistema evoluciona de acuerdo con las ecuaciones (15) y (5). Por fuera de esta región el sistema evoluciona de acuerdo a

$$\mathbf{x}(k+1)T = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{b}, \quad (17)$$

si $d \geq 1$ o a

$$\mathbf{x}(k+1)T = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) - \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{b}, \quad (18)$$

si $d \leq 0$. Estando \mathbf{A} y \mathbf{b} definidas como en la ecuación (2). A la recta $d = 0$ se la notará como P, y a la recta $d = 1$ se la notará como Q. a partir del análisis de estas ecuaciones y sus implicaciones en el comportamiento del sistema se analiza la transición al caos.

Diversas simulaciones han mostrado que, independientemente del valor de la constante $k_s \in (0,3, 5)$, el voltaje de salida del sistema permanece en torno al valor de estado estacionario con un

error no superior al 1%. Esta observación permite hacer algunas simplificaciones respecto al valor del estado x_1 , asociado al voltaje en el condensador, al poderse considerar constante.

Cuando el ciclo de trabajo se encuentra entre 0 y 1, existen dos puntos de conmutación, que se corresponden con dos puntos de las curvas en el espacio de estados $X(d/2)$ y $X(1-d/2)$, tal como se muestra en la Figura 7. Se han calculado los diversos puntos de conmutación de las curvas $X(d/2)$ y $X(1-d/2)$ en el espacio de estados de la siguiente manera: se supone que el sistema regula, es decir se asume $x_1(0) = 0,7996$ que corresponde al valor de estado estacionario para una referencia de 0,8. Cada valor de $d \in [0, 1]$ se sustituye en la ecuación (15) para obtener los diversos valores de $x_2(0)$. Una vez se ha evaluado $x_2(0)$ se tiene toda la información $(\mathbf{x}(0)$ y $d)$, para resolver las ecuaciones de estado y se pueden hallar las curvas que limitan el momento de la conmutación, tal como se muestra en la Figura 7. Nótese que para un tiempo $d = 0$ la curva de $X(d/2)$ toca la recta P debido a que se corresponde con el estado inicial $\mathbf{x}(0)$. Las curvas $X(d/2)$ y $X(1-d/2)$ se intersectan para el tiempo $d = 1$; el punto de intersección corresponde al vértice de la figura.

Otro límite importante para un posterior análisis del sistema es la imagen de la recta límite inferior Q, a la cual llamaremos R, ya que para cualquier condición inicial por debajo de Q le corresponde una imagen por debajo de R. En la Figura 7 se muestran estas zonas. Al variar la constante k_s se va perdiendo simetría. En la Figura 8, se presenta la misma clasificación en el espacio de estados para un valor de la constante $k_s = 0,5$. Se puede ver cómo la curva $X(1-d/2)$ ha perdido su simetría respecto de $X(d/2)$ comparada con la Figura 7.

A partir de estos elementos que hemos señalado en el espacio de estados se puede iniciar el análisis del sistema en su transición al caos.

4.1 Primera bifurcación

En la tabla 1 se determinan los multiplicadores característicos de la aplicación de Poincaré, los cuales corresponden a los valores propios del sistema linealizado alrededor del punto fijo $(x_{1ref}, \gamma x_{1ref})$. Un análisis de estos valores propios permite establecer que la primera bifurcación es de tipo "flip" (Kuznetsov, 1998), debido a que el valor propio que pasa de estable a inestable lo hace cruzando por -1 en el intervalo $k_s \in (3,24, 3,25)$.

Este tipo de bifurcación presenta un doblamiento de período; a saber, el sistema pasa de tener una órbita 1-periódica estable a tener una órbita 1-periódica inestable y una órbita 2-periódica estable. En la Figura 9 se muestra la evolución de

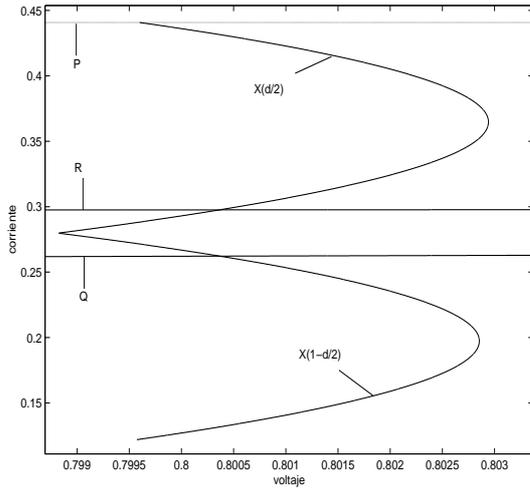


Figura 7. Separación en zonas del espacio de estado para un valor de $k_s = 4,5$. Las rectas P y Q se corresponden con las rectas $d = 0$ y $d = 1$ de la Figura 6. La recta R corresponde con la imagen de $d = 1$.

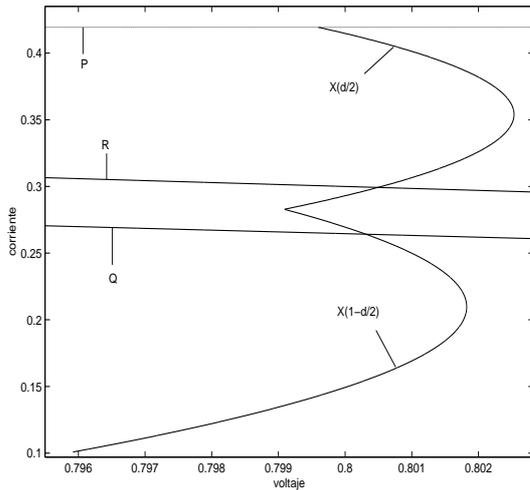


Figura 8. Separación en zonas del espacio de estado para un valor de $k_s = 0,5$.

Tabla 1. Multiplicadores característicos de la aplicación de Poincaré cerca del límite de la estabilidad

k_s	λ_1	λ_2
3,25	0,9474	-0,9998
3,24	0,9472	-1,0000

una órbita 1-periódica estable cuando $k_s=4,5$. En este caso el sistema evoluciona de acuerdo a:

$$\mathbf{x}(0) \mapsto \mathbf{x}(d/2) \mapsto \mathbf{x}(1 - d/2) \mapsto \mathbf{x}(0)$$

Después de perderse la estabilidad de la órbita 1-periódica, se observa el comportamiento de la Figura 10. Debido a la bifurcación “flip”, la órbita 2-periódica es una órbita estable, que da lugar a dos nuevos puntos fijos 2-periódicos. En un rango muy estrecho del parámetro k_s esta órbita 2-

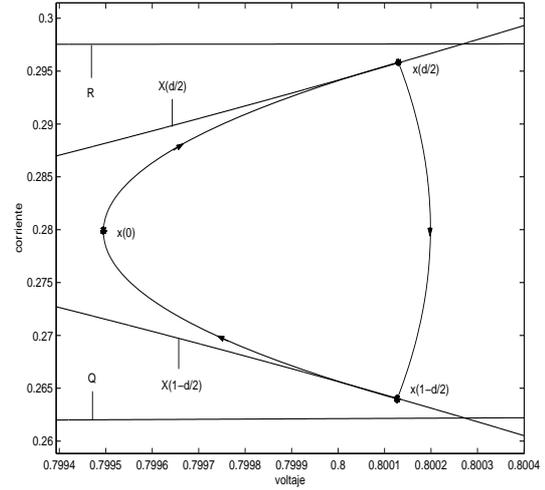


Figura 9. Evolución de las trayectorias en el espacio de estados para un valor de $k_s = 4,5$.

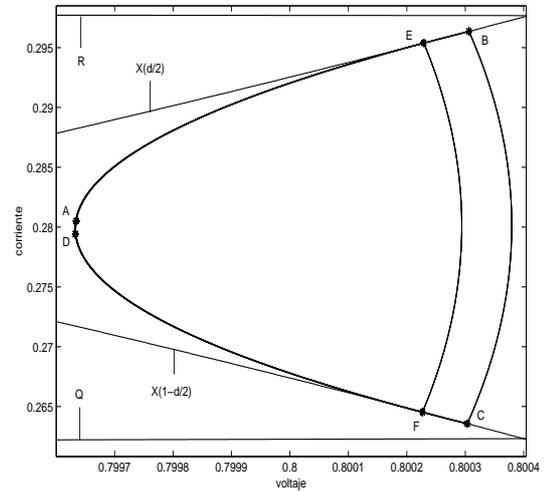


Figura 10. Evolución de las trayectorias en el espacio de estados para un valor de $k_s = 3,2443$.

periódica satisface que ninguno de sus dos ciclos de trabajo satura. A medida que el parámetro k_s disminuye, uno de los puntos fijos 2-periódicos se acerca a la recta Q y el otro a R. Así mismo se generan nuevos puntos de conmutación, desplazados respecto del de la órbita 1-periódica: uno hacia la derecha (sobre la curva $X(d/2)$), lo que implica un d menor como resultado del hecho de que el estado inicial se está alejando de la recta Q; y el otro, a la izquierda, acercándose al vértice de las curvas $X(d/2)$ y $X(1-d/2)$, esto implica un d mayor, como resultado del equilibrio que se acerca a la curva Q. En este caso la órbita evoluciona de acuerdo con la secuencia A-B-C-D-E-F-A, que puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &\mapsto \mathbf{x}(d/2) \mapsto \mathbf{x}(1 - d/2) \mapsto \mathbf{x}(1) \\ &\mapsto \mathbf{x}(1 + d/2) \mapsto \mathbf{x}(2 - d/2) \mapsto \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

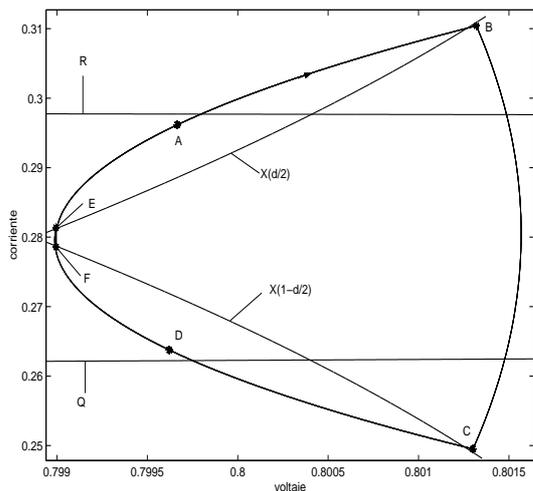


Figura 11. Evolución de las trayectorias en el espacio de estados para un valor de $k_s = 3,2425$.

Disminuyendo más la constante, para un valor de $k_s=3.2425$ las órbitas del sistema evolucionan como se muestra en la Figura 11, en la cual se ha preservado el orden de asignación de puntos en relación con la órbita (A-B-C-D-E-F-A). Los puntos fijos, obtenidos de la aplicación de Poincaré son A ($\mathbf{x}(0)$) y D ($\mathbf{x}(1)$).

Cuanto más se disminuye el parámetro k_s , más se acerca un punto fijo 2-periódico al límite Q; y mayor se vuelve el tiempo de conmutación d para un período y menor para el otro. Finalmente el punto fijo colisionará con la recta $d = Q$ lo que llevará a un ciclo $d = 1$ y un ciclo $0 < d < 1$. Por este motivo la siguiente bifurcación se sucede por “corner collision” (di Bernardo *et al.*, 2001).

4.2 Segunda bifurcación

Una vez un equilibrio 2-periódico choca con el límite Q se sucede una “corner collision” y puede ser confirmada via un estudio del Jacobiano de la aplicación P^2 , la cual corresponde con la segunda iteración de la aplicación de Poincaré. Esta bifurcación se caracteriza porque preserva el número de puntos de equilibrio pero cambia la evolución de las órbitas en el espacio de estados tal como se muestra en la Figura 12. Al saturar un período, en un tramo de la órbita ésta no tocará las curvas $X(d/2)$ y $X(1-d/2)$. En este caso la secuencia es A-B-C-D-A y puede ser escrita como

$$\mathbf{x}(0) \mapsto \mathbf{x}(d/2) \mapsto \mathbf{x}(1-d/2) \mapsto \mathbf{x}(1) \mapsto \mathbf{x}(0)$$

En la tabla 2 se presentan los multiplicadores característicos de la segunda iteración de la aplicación de Poincaré evaluados en el equilibrio. Se han calculado suponiendo primero que ninguno de los dos ciclos satura (no sat-no sat), y luego

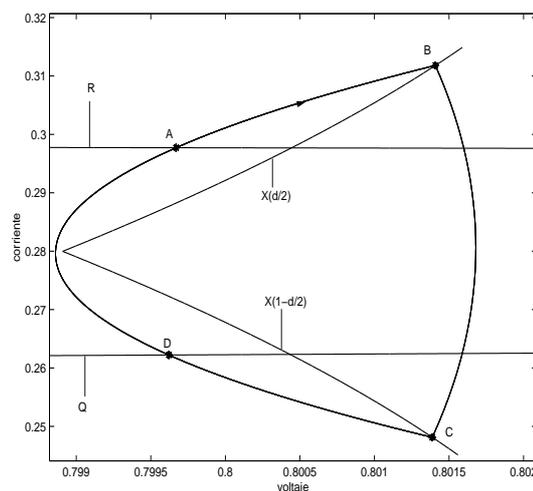


Figura 12. Evolución de las trayectorias en el espacio de estados para un valor de $k_s = 3,242$.

Tabla 2. Multiplicadores característicos de P^2 : cerca de $k_s = 3,24$

2T: no sat-no sat. $k_s = 3,2425$	2T: sat-no sat. $k_s = 3,242$
$\lambda_1 = 0,89741$	$\lambda_1 = 0,89815$
$\lambda_2 = 0,99999$	$\lambda_2 = -0,99129$

suponiendo que uno satura y el siguiente no (sat-no sat). Se observa que hay una discontinuidad en el Jacobiano, al cambiar abruptamente un valor propio del sistema linealizado.

En el rango comprendido entre $k_s \in [2.995, 3.242]$ aproximadamente, siguen existiendo órbitas 2-periódicas, caracterizadas porque en un período el ciclo satura y en el siguiente no. La imagen del punto de equilibrio que colisiona con el límite Q se encuentra sobre R y la trayectoria generada al pasar de Q a R no toca las curvas $X(d/2)$ ni $X(1-d/2)$. El ciclo de trabajo siguiente, que se genera a partir de la imagen en R, está comprendido entre $0 < d < 1$ y eso da lugar a una trayectoria que lleva nuevamente el estado al límite Q. Como un valor propio se ha acercado a -1 , se tiene que la siguiente bifurcación es de tipo “flip”, cosa que sucede en $k_s=2.998$ aproximadamente.

4.3 Tercera bifurcación

La tercera bifurcación que se sucede en el sistema es nuevamente de tipo “flip”. Se caracteriza porque un valor propio de la segunda iteración de la aplicación de Poincaré cruza por -1 , tal como se muestra en la tabla 3. Debido a que nos encontramos en una órbita 2-periódica y se sucede una bifurcación tipo flip, se generarán entonces órbitas 4-periódicas.

Tabla 3. Multiplicadores característicos de P^2 : sat-no sat, cerca de $k_s = 3$

k_s	λ_1	λ_2
2,998	0,890369	-0,99985
2,997	0,890335	-1,0000237

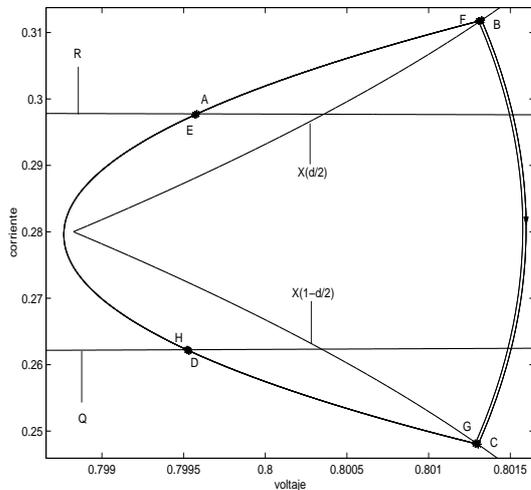


Figura 13. Evolución de las trayectorias en el espacio de estados para un valor de $k_s = 2,998$.

El punto de equilibrio que se encuentra por debajo del límite Q (pero muy cerca a él) genera dos nuevos equilibrios. Ambos puntos por estar debajo del límite Q dan lugar a ciclos saturados, proyectando sus imágenes debajo del límite R. Éstas están muy cerca entre sí, provocando que los valores del ciclo de trabajo estén también próximos por lo que aparecen las órbitas muy juntas, como se muestra en la Figura 13.

Las órbitas 4-periódicas se suceden en un rango muy estrecho del parámetro k_s , lo cual lleva casi de inmediato a la aparición de bandas, las cuales se asemejan mucho a órbitas 8-periódicas, 16-periódicas, etc. debido a la precisión. En realidad debe pensarse que a partir de $k_s = 2,997$ aproximadamente se sucede el fenómeno de generación de bandas.

4.4 Cuarta bifurcación y aparición de caos

En un rango aproximado de k_s entre 3 y 2.5, una pequeña zona entre el límite Q y su imagen en el espacio de estados R, operan como zonas de acumulación, lo que conlleva la presencia de bandas caóticas, ya que no aparecen puntos de equilibrio estables claramente distinguibles sino regiones 8-periódicas etc. del espacio de estados que atraen a las órbitas. Así se suceden las sucesivas bifurcaciones y se llega al caos. En la Figura 14, se observa una órbita más compleja, habiendo cambiado muy poco el parámetro k_s . Está caracterizada porque la trayectoria toca nuevamente el

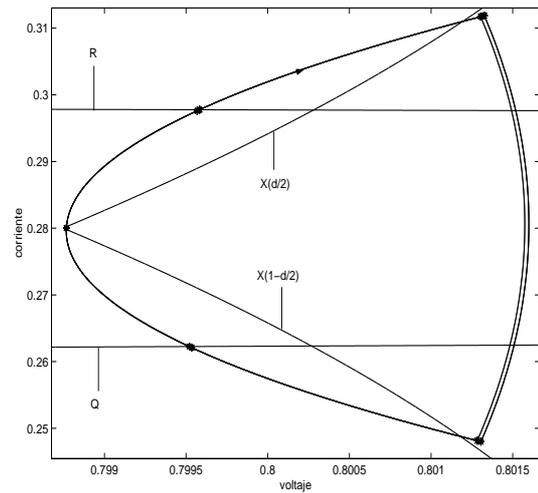


Figura 14. Evolución de las trayectorias en el espacio de estados para un valor de $k_s = 2,99794$.

vértice y hay puntos de equilibrio que han entrado en la franja comprendida entre Q y R, lo que hace suponer que inmediatamente después de suceder el doblamiento de período le sigue una “corner collision”.

En la medida en que se disminuye el parámetro k_s se van generando las bandas caóticas que llevan al sistema lentamente al caos completo (caos de una banda), posiblemente por sucesivos doblamientos de período seguidos de “corner collision”.

En la siguiente sección se controlará el sistema cuando opera en régimen caótico. Los resultados han sido obtenidos únicamente a nivel de simulación.

5. CONTROL DE CAOS, CON APLICACIÓN DE LA TÉCNICA TDAS

Actualmente son bien conocidas dos técnicas de control de caos: OGY (Ott *et al.*, 1990) y TDAS (Pyragas, 1992). La técnica OGY usa pequeñas perturbaciones de la órbita inestable a controlar que convive con el caos para estabilizarla, mientras que en el método TDAS se toma como base de la realimentación el estado retardado. Diferentes autores han explotado la potencia de las técnicas OGY y TDAS para controlar el caos, o introducir variaciones en ellas y generar nuevas estrategias de control. Por ejemplo Poddar (Poddar *et al.*, 1995), define dos maneras de controlar el caos: por perturbación de los parámetros y por cambio en el instante de conmutación. Otros investigadores por el contrario (Batlle *et al.*, 1997), (Baranovski *et al.*, 2000) y (Rodríguez *et al.*, 1999), utilizaron y demostraron la validez de las técnicas OGY, TDAS y algunas variantes sobre ellas confirmando de manera analítica y experimental su utilidad (Santos and Rodríguez, 1998).

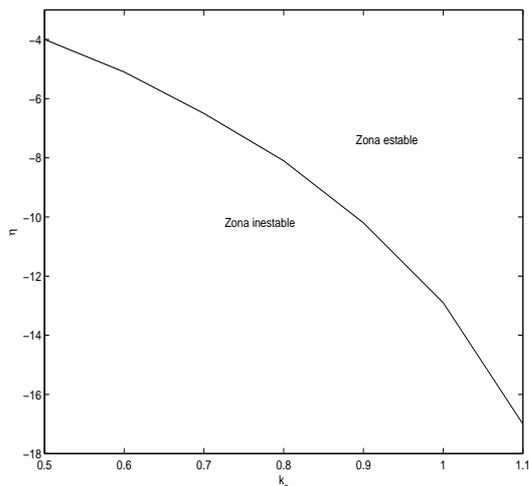


Figura 15. Zonas estable e inestable para el sistema con TDAS.

En esta sección se hará uso de la técnica TDAS para controlar el caos. Teniendo en cuenta que la variable que induce la inestabilidad en el sistema propuesto, puede ser asociada al ciclo de trabajo, para controlar la órbita 1-periódica se presume suficiente modificar el ciclo de trabajo de acuerdo a

$$d(k) = d + \eta(d(k) - d(k-1)) \quad (19)$$

donde $d(k)$ es el ciclo de trabajo que se va a aplicar, d es valor obtenido con la ecuación (10), $d(k-1)$ es el ciclo de trabajo de la iteración anterior y η es el factor de realimentación.

En la Figura 15 se muestra el límite de la estabilidad calculado con los Exponentes de Lyapunov, cuando el sistema es controlado con la técnica aquí descrita. En ella se observa la combinación de η y k_s que garantizan estabilidad en el sistema.

En la Figura 16 se presentan los resultados cuando $k_s=0.5$ y $\eta = -0.1$. Los valores de los estados obtenidos de la aplicación de Poincaré en régimen permanente son $x_1=0.7999$ y $x_2=0.2801$, llevando a un error de regulación de 0,0125 %.

6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En el presente artículo se han estudiado analítica y numéricamente los controladores ZAD con pulso centrado. Estos controladores digitales garantizan frecuencia fija de conmutación, bajo error de salida y robustez ante perturbaciones.

Se ha hecho un cálculo numérico del límite de la estabilidad a través de los exponentes de Lyapunov, el cual permite concluir la presencia de caos en el sistema.

Se ha hecho un estudio de la transición al caos. En este sentido se han detectado bifurcaciones

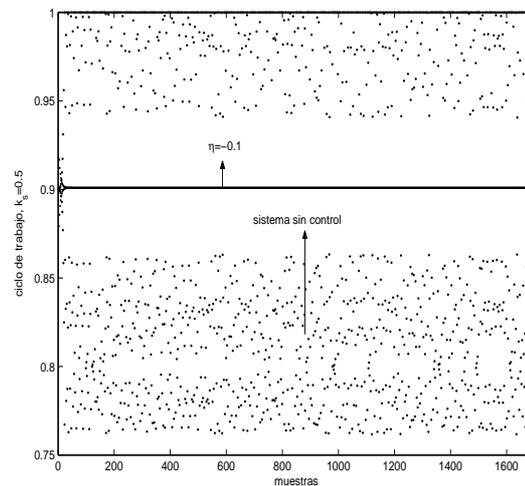


Figura 16. Ciclo de trabajo para el sistema con y sin realimentación, para un valor de la constante $k_s = 0,5$ y controlado con TDAS.

por doblamiento de período y por “corner collision”. También se presentan bandas caóticas y probablemente doblamiento de estas bandas. El estudio de la conformación exacta de las bandas y su doblamiento forma parte del trabajo futuro.

La técnica de control de caos por TDAS ha demostrado ser efectiva en este caso, permitiendo que el sistema estabilice y logrando nuevamente un promedio cero de la dinámica del error, el cual se había perdido en régimen caótico. Su implementación a nivel de laboratorio también forma parte del trabajo futuro.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a los revisores las sugerencias que han contribuido a mejorar la calidad de este artículo.

REFERENCIAS

- Baillieul, J., R.W. Brockett and R.B. Washburn (1980). Chaotic motion in nonlinear feedback systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **27**, No. 11, 990–997.
- Banerjee, S. and G.C. Verghese (2001). *Eds. Non-linear phenomena in power electronics*. IEEE Press. Piscataway.
- Baranovski, A.L., A. Mögel, W. Schwarz and O. Woywode (2000). Chaotic control of a dc-dc-converter. *In Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems* **2**, 108–111.
- Batlle, C., E. Fossas and G. Olivar (1997). Time delay stabilization of the buck converter. *In Proceedings of the IEEE International Conference in Control of Oscillations and Chaos* **3**, 590–593.

- Battle, C., I. Massana and A. Miralles (2003). Lyapunov exponents for bilinear systems. application to the buck converter. *International Journal of Bifurcations and Chaos* **13**, 713–722.
- Biel, D., E. Fossas, R. Ramos and F. Guinjoan (2002). Implementación de controles "pseudo-sliding" en sistemas conmutados. *Congreso Latinoamericano de Control Automático*.
- Bilalović, F., O. Mušić and A. Šabanović (1983). Buck converter regulator operating in the sliding mode. *Proceedings VII International PCI* pp. 331–340.
- Borle, L.J. and N. Chemmangot (1995). Zero average current error controlled power flow for ac-dc power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics* **10**, No. 6, 725–732.
- Carpita, M., M. Marchesoni, M. Oberti and L. Puguisi (1988). Power conditioning system using slide mode control. *In Proceedings of the IEEE Power Electronics Specialist Conference* pp. 623–633.
- Deane, J.H.B. and D.C. Hamill (1990). Analysis, simulation and experimental study of chaos in the buck converter. *In Proceedings IEEE Power Electronics Specialists Conference II*, 491–498.
- di Bernardo, M., C.J. Budd and A.R. Champneys (2001). Corner collision implies border-collision bifurcation. *Physica D* **154**, 171–194.
- di Bernardo, M., F. Garofalo, L. Glielmo and F. Vasca (1996). Quasi-periodic behaviors in dc/dc converters. *In Proceedings IEEE Power Electronics Specialists Conference* pp. 1376–1381.
- di Bernardo, M., F. Garofalo, L. Glielmo and F. Vasca (1997). Analysis of chaotic buck, boost and buck-boost converters through switching maps. *In Proceedings of the IEEE Power Electronics Specialists Conference* pp. 754–760.
- Fliess, M. and H. Sira-Ramírez (1993). Régimes glissants structures variables linéaires et modules. *C. R. Acad. Sci. Paris I*, 703–706.
- Fossas, E. and G. Olivar (1996). Study of chaos in the buck converter. *Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* **43**, No 1, 13–25.
- Fossas, E., R. Griñó and D. Biel (2001). *Quasi-Sliding control based on pulse width modulation, zero averaged dynamics and the L2 norm*, In *Advances in Variable Structure System, Analysis, Integration and Applications*. pp. 335–344. World Scientific. Singapur.
- Janaki, T.M., G. Rangarajan, S. Habib and R.D. Ryne (1999). Computation of the lyapunov spectrum for continuous-time dynamical systems and discrete maps. *Physics Reviews E* **60**, 6614–6626.
- Kuznetsov, Y. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer Verlag. New York.
- Lim, Y.H. and D.C. Hamill (1999). Problems of computing lyapunov exponents in power electronics. *In proceedings IEEE International Symposium on Circuits and systems* **5**, 297–301.
- Ott, E., C. Grebogi and J. Yorke (1990). Controlling chaos. *Physics Review Letter* **64**, 1196–1199.
- Parker, T.S. and L.O. Chua (1989). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Verlag. New York.
- Poddar, G., K. Chakrabarty and S. Banerjee (1995). Control of chaos in the boost converter. *Electronics letters* **31**, No. 11, 841–842.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letter A* **170**, 421–428.
- Ramos, R., D. Biel, E. Fossas and F. Guinjoan (2003). A fixed-frequency quasi-sliding control algorithm: Application to power inverters design by means of fpga implementation. *IEEE Transactions on Power Electronics*.
- Rodríguez, J.L., R. Santos and G.C. Verghese (1999). Analysis and control of chaotic dc-dc switching power converters. *In Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems* **5**, 287–292.
- Santos, R. and J.L. Rodríguez (1998). Control of dc-dc converters in the chaotic regime. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications* pp. 832–837.
- Venkataramanan, R., A. Sabanović and S. Čuk (1985). Sliding mode control of dc-to-dc converters. *Proceedings IECON 1985* pp. 251–258.