

CONTROL DE VEHÍCULOS ESPACIALES

Ricardo S. Sánchez Peña ^{*,1} Roberto J. Alonso ^{**}

* *Sistemas Avanzados de Control, ESAII, Universidad Politécnica de Catalunya, Terrassa, Barcelona, España.*
E-mail: ricardo.sanchez-pena@upc.edu

** *Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE), Argentina.*
E-mail: beto@conae.gov.ar

Resumen: Este trabajo presenta una visión general del Control de orientación, indistintamente denominado de *actitud*, y de traslación utilizado en vehículos aeroespaciales (satélites, cohetes de sondeo, lanzadores, aeronaves). Se presentan los problemas de la cinemática y la dinámica, así como los distintos tipos de sensores y actuadores usualmente utilizados en misiones espaciales. El trabajo concluye con dos ejemplos tomados de aplicaciones prácticas: el control de orientación de un cohete sonda y el de del satélite de observación de la Tierra SAC-C. Copyright ©2005 CEA-IFAC

Palabras clave: Control de actitud, control de satélites, vehículos espaciales

1. INTRODUCCIÓN

Las características y exigencias sobre los sistemas de control de cohetes y satélites son muy diferentes. En los primeros, el vuelo completo puede durar desde unos pocos minutos hasta algunas horas y el peso y volumen del sistema (ordenador de a bordo, sensores, actuadores) en general no es un parámetro crítico de la misión, como es la de colocar un satélite en órbita. Esto implica que los requerimientos de *hardware* endurecido por radiación, cantidad de sensores y actuadores, redundancias, estará limitado más por los costos que por su peso y volumen. Asimismo podrán enviarse ordenadores más veloces (las endurecidas para radiación son en general más "antiguas" y lentas) lo cual permite diseñar algoritmos de control más sofisticados. Sin embargo, las exigencias de aceleraciones y vibraciones son mucho más estrictas dadas las características de un despegue desde tierra. Las maniobras deben ser más rápidas ya que el vuelo es corto y está sometido a intensas aceleraciones durante el mismo. El ejemplo de la sección 9 ilustra este punto, ya que consiste en un cohete de sondeo que permitirá ensayar un sistema de navegación y control, como

primer paso en el diseño de una última etapa de un lanzador satelital.

Los satélites en cambio tienen misiones que duran varios años, lo cual hace que el endurecimiento contra radiación sea primordial, ya que la confiabilidad depende del tiempo de exposición a la misma. Asimismo, las limitaciones son más estrictas para el peso y volumen, ya que influyen directamente sobre la carga útil del satélite (un experimento, una cámara, un sistema de comunicaciones, etc). Las exigencias de vibraciones y aceleraciones pueden ser relajadas dado que el satélite funciona nominalmente en una órbita, i.e. la aceleración es nula salvo por pequeñas perturbaciones. Las maniobras son lentas en general y salvo durante las de control de órbita, no hay aceleraciones de importancia presentes durante la misión. Por lo tanto el *hardware*, tanto en su cantidad como en su peso y volumen se ve seriamente limitado al igual que los algoritmos de control, debido al tipo de microcomputadores que pueden llevarse a bordo. El ejemplo de la sección 10 intenta ilustrar este punto, ya que allí se resuelve el problema de control de orientación de un satélite de observación de la tierra con la menor cantidad de sensores y actuadores posibles, reemplazando algunos por un observador. En éste ejemplo también, el diseño del algoritmo de control se simplificó al máximo y el énfasis en cambio se puso en las herramientas de análisis del mismo.

¹ Parcialmente financiado por el Proyecto PICT N°7263 de la ANPCyT, Argentina. El primer autor se encuentra con licencia de CONAE y del Dpto. de Electrónica, Facultad de Ingeniería-Universidad de Buenos Aires.

El objetivo de este trabajo es el de presentar el problema de orientación de satélites tomados como un cuerpo rígido o no (cuando se hallan elementos rotantes en su interior) y el de traslación de cohetes impulsados por motores de eyección de masa. La presentación incluye las ecuaciones del modelo, los sensores y actuadores necesarios y 2 ejemplos prácticos.

El movimiento de un cuerpo en el espacio está descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. La solución de las mismas permite conocer el momento de la cantidad de movimiento (momento angular) y la orientación (actitud) del cuerpo respecto a una terna de referencia (ver sección 2). El problema de la dinámica de actitud es considerado en detalle, basándose en un satélite en órbita como elemento testigo y se presenta en la sección 4. En el caso de cohetes, además se conoce el impulso lineal y la posición espacial del punto respecto a una terna de referencia. Por lo tanto, se incluyen las ecuaciones de traslación de un sistema de masa abierto que intercambia materia con el medio exterior en la sección 5.

El movimiento del satélite se puede dividir de acuerdo al tipo de variables involucradas en: *cinemática* y *dinámica*, descritas en las secciones 3 y 4, respectivamente. La cinemática relaciona la velocidad angular del satélite y su orientación en el espacio. El mínimo número de parámetros locales que identifican la actitud son tres ángulos (de Euler) que permiten reconstruir la orientación antes y después de una rotación. Sin embargo son necesarios cuatro parámetros para representar globalmente la misma (cuaternión unitario). A tal efecto se presentan diversas representaciones en la sección 2.

La dinámica describe la dependencia entre los pares externos que actúan sobre el cuerpo y la velocidad angular del mismo. Los pares externos son las perturbaciones ambientales, así como los pares de control. Las perturbaciones principales se deben al gradiente gravitatorio, al frenado aerodinámico (*drag*), pares magnéticos, radiación solar, etc. Los pares de control, en general son generados por los mismos mecanismos que los de perturbación, solo que se maximiza el efecto deseado. Por ejemplo, una bobina eléctrica genera un dipolo comandable que interactúa con el campo magnético terrestre y genera un par deseado del mismo tipo que el de perturbación del dipolo residual del satélite.

El problema de la orientación de los satélites brinda la teoría básica para entender el problema de actitud de cualquier otro vehículo, en particular un vehículo autopropulsado. Por eso lo expresado para satélites vale en forma indistinguible para cohetes. Las diferencias se hallan en algunos sensores, además del hecho que el cohete incorpora la traslación de su centro de masa como acción principal. En realidad esto último también se aplica a muchos satélites, en los casos de maniobras de control de órbita. Los actuadores y sensores se detallan en las secciones 6 y 7, respectivamente. En la

sección 8 se presentan dos tipos de estabilización de satélites: los pasivos y los activos. Los algoritmos de control para los satélites activos no se detallan en esta sección, ya que provienen de todas las áreas de la Automática, sin embargo se detallan en las secciones 9 y 10 para 2 ejemplos tomados de aplicaciones prácticas de los autores del presente trabajo: un cohete sonda y el satélite de observación de la Tierra SAC-C.

2. REPRESENTACIÓN DE LA ACTITUD

Este es uno de los problemas más ricos en el área de la ingeniería espacial y recibió un fuerte impulso a principios de los '80 por un grupo de físicos atómicos, entre los que se hallaban los Dres. Malcolm Shuster, Landis Markley, James Wertz, y recientemente Daniele Mortari. Todos ellos tomaron sus conocimientos de la física cuántica y lo trasladaron a esta nueva disciplina. La mejor referencia para esta sección es el trabajo de uno de ellos (Shuster, 1993).

El problema fundamental de la representación de la actitud, es brindar una orientación entre una terna de representación fija al cuerpo y otra terna de referencia asociada a la Tierra o a la órbita (subsección 2.1). Esta parametrización se logra mediante varios métodos, en particular: ángulos de Euler, el cuaternión unitario y la matriz de rotación son las más difundidas, (Wertz, 1978), todas ellas descritas en el Apéndice A.

La representación *más natural* de la actitud es la matriz de rotación. Esta utiliza 9 componentes con seis restricciones entre ellas, de esta manera la actitud puede ser especificada por solo tres parámetros independientes. Los ángulos de Euler se basan en este hecho y además de utilizar el mínimo número de parámetros tienen una clara identificación geométrica. De (Jurđjevic, 1997) se sabe que el mínimo conjunto de parámetros necesarios para una representación global (sin ningún tipo de ambigüedades) de la actitud son cuatro. El cuaternión unitario es el más popular de las representaciones de cuatro componentes con la restricción en la amplitud.

2.1 Sistemas de Coordenadas

El movimiento de un satélite en su órbita está relacionado a cuatro sistemas principales de coordenadas, todos ortogonales y orientados según la regla de la mano derecha (ver (Wiesel, 1997)):

1. *Principal de Coordenadas*: el origen es el centro de masa del satélite, y los ejes se alinean con los ejes principales de inercia del cuerpo. En general se asume $I_y > I_x > I_z$ y la terna se indica con subíndices p .
2. *Coordenas Asociadas al Cuerpo*: igual que el anterior, está referido al cuerpo. El origen es el centro de masa, y su orientación coincide con la estructura del satélite. Es una terna tangible

que está asociada a elementos físicos. Aquí se referencia la actitud del *hardware* bajo control (ejes mecánicos u ópticos de los instrumentos). En este trabajo esta terna se indica como \mathcal{B} , con subíndices b . Muchas veces la terna p se hace coincidir con la b , por simplicidad (ver Figura 3).

3. *Coordenadas de Navegación Local, (LVLH)*: El origen se halla en el centro de masa del satélite, el eje Z (vertical local) está alineado con el radio vector que une el centro de masa del cuerpo y el centro de la Tierra, el eje positivo Y apunta en la dirección opuesta al vector momento de la cantidad de movimiento orbital. El vector X que establece la horizontal local, completa la terna derecha y se encuentra en el plano orbital, en la dirección del vector velocidad (para órbitas circulares). Puede observarse en la Figura 23 en la que el sistema de control la hace coincidir con la terna del cuerpo.
4. *Coordenadas Inerciales, centradas en la Tierra (ECI)*: Esta terna de referencia, tiene su origen en el centro de la Tierra. El eje Z es paralelo al eje de rotación terrestre y apunta hacia el polo Norte. El eje X sobre el plano del Ecuador, es paralelo a la línea que une el centro de la Tierra con el punto Vernal (el equinoccio vernal es el punto donde el plano de la eclíptica cruza el plano del Ecuador terrestre de sur a norte). El eje Y completa la terna derecha.

Las definiciones y propiedades de las distintas representaciones de la actitud, se describen en el Apéndice A.

3. CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

La orientación de un satélite es una función temporal y está influenciada por la velocidad angular del vehículo. La descripción matemática entre la actitud del cuerpo en el espacio y su velocidad angular corresponde a lo que se llama la *cinemática del vehículo*. El tipo de representación de la actitud utilizada determina la presencia de singularidades en la solución. La ecuación cinemática basada en la representación matricial y en cuaterniones tienen la ventaja de no poseer singularidades en su estructura.

Las trayectorias que son solución del conjunto de ecuaciones diferenciales se hallan en dos clases de variedades diferenciales, el grupo $SO_3(\mathbb{R})$ para las matrices de rotación y \mathbb{S}^3 para el caso de cuaterniones unitarios.

La descripción de la cinemática parametrizada por los ángulos de Euler, y por las matrices de rotación puede ser encontrada en (Wertz, 1978).

3.1 Cinemática parametrizada por Cuaterniones.

Consideremos la rotación del sistema de coordenadas s respecto al r . En el tiempo t la rotación está dada

por el cuaternión $\mathbf{q}_r^s(t)$. Luego de un tiempo infinitesimal Δt , la representación de la rotación se expresa como $\mathbf{q}_r^s(t + \Delta t)$. El cambio de orientación desde el sistema $s(t)$ hasta el $s(t + \Delta t)$ se describe por,

$$\mathbf{q}_r^s(t) = \Delta \mathbf{q} \mathbf{q}_r^s(t + \Delta t) \quad (1)$$

donde, $\Delta \mathbf{q} = \cos \frac{\Delta \phi}{2} \mathbf{e} + \sin \frac{\Delta \phi}{2} \boldsymbol{\epsilon}$.

El vector unitario $\boldsymbol{\epsilon}$ define el eje de rotación y $\Delta \phi$ el ángulo de rotación. Para una rotación infinitesimal, se tiene,

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{e} + \cos \frac{\Delta \phi}{2} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{e} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_{sr} \Delta t}{2} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2)$$

donde, $\boldsymbol{\Omega}_{sr}$ indica la velocidad angular de la terna r respecto a la terna s . La ecuación cinemática del vehículo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_r^s}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}_r^s(t + \Delta t) - \mathbf{q}_r^s(t)}{\Delta t} \rightarrow \mathbf{q}_r^s \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\Omega}_{sr} \Delta t}{2 \Delta t} \mathbf{q}_r^s \\ \dot{\mathbf{q}}_r^s &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{sr} \mathbf{q}_r^s, \end{aligned} \quad (3)$$

Es interesante notar que $\boldsymbol{\Omega}_{po}$ es un cuaternión vectorial (escalar nulo) y la operación indicada es el producto de dos cuaterniones. En (Kuipers, 1998) se explican con gran detalle el álgebra de los cuaterniones y sus operaciones.

3.2 Cinemática de un Satélite

La forma más general ha sido expresada en la ecuación (3), la misma expresión para un satélite se particulariza en las ternas de ejes principales (p) o en los ejes fijos al cuerpo (b) como terna s y LVLH para la terna de referencia r . De esta forma tenemos,

$$\dot{\mathbf{q}}_o^p = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{po} \mathbf{q}_o^p, \quad (4)$$

donde \mathbf{q}_o^p es el cuaternión unitario que describe la rotación desde la terna LVLH hasta el sistema principal de coordenadas (SPC) definido en la subsección 2.1, el cuaternión vectorial $\boldsymbol{\Omega}_{po}$ representa la velocidad angular del SPC a LVLH. Para fines prácticos, se utiliza una fórmula equivalente a (4), dividida en una parte escalar y otra vectorial:

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{po} \cdot \mathbf{q} && \in \mathbb{R} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{po} q - \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{po} \times \mathbf{q} && \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (5)$$

La dinámica de un satélite corresponde al cambio de orientación en un sistema de coordenadas inerciales. Para ello, se establece la relación entre, $\boldsymbol{\Omega}_{po}$ y $\boldsymbol{\Omega}_{pi}$.

$$\boldsymbol{\Omega}_{po} = \boldsymbol{\Omega}_{pi} - \boldsymbol{\Omega}_{oi} = \boldsymbol{\Omega}_{pi} + \boldsymbol{\omega}_o(t) \mathbf{j}_o, \quad (6)$$

donde $-\mathbf{j}_o$ indica el vector unitario a lo largo del eje normal al plano orbital. La velocidad de rotación orbital es indicada como $\boldsymbol{\omega}_o$, considerando un plano

orbital fijo, sin movimiento en la línea de los nodos². Esta velocidad ω_0 es constante para órbitas circulares y variante en órbitas elípticas. Para encontrar más detalles y derivaciones completas, se puede ver (Shuster, 1993) y (Kuipers, 1998).

4. DINÁMICA ROTACIONAL DE UN SATÉLITE

El movimiento rotacional alrededor del centro de masa es descrito mediante la formulación Newtoniana. Esta consiste en un conjunto de tres ecuaciones diferenciales que al expresarse en la terna del cuerpo reciben el nombre de ecuaciones de movimiento de Euler. La dinámica relaciona pares aplicados sobre el satélite y la velocidad angular resultante. En la terna inercial se tiene,

$$\mathbf{T}^i = \left(\frac{d\mathbf{H}^i}{dt} \right)_i \quad (7)$$

donde \mathbf{T} es la suma de pares externos actuantes sobre el cuerpo, \mathbf{H} es el momento de la cantidad de movimiento, el subíndice i indica que la derivación es tomada respecto a la terna inercial, y el supraíndice indica en que terna el vector es expresado. Es conocido que la derivada de un vector respecto a la misma terna en la que se halla expresado, es simplemente la derivada temporal de cada componente. El momento de la cantidad de movimiento se expresa en terna del cuerpo como, $\mathbf{T}^p = I\Omega_{pi}$, donde I es el tensor de inercia. Este es un tensor simétrico y por lo tanto diagonalizable y las direcciones principales asociadas a estos valores determinan la terna asociada al cuerpo. Para expresar la ecuación diferencial (7) en una terna fija al cuerpo se tiene que aplicar el teorema del transporte, también llamado de Coriolis.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^p &= \left(\frac{d\mathbf{H}^p}{dt} \right)_p + \Omega_{pi}^p \times \mathbf{H}^p \\ &= \mathbf{T}_{GG}^p(t) + \mathbf{T}_C^p(t) + \mathbf{T}_P^p(t), \end{aligned} \quad (8)$$

donde, $\mathbf{T}_{GG}^p(t)$ representa a los pares por gradiente gravitatorio, $\mathbf{T}_C^p(t)$ los pares de control, y $\mathbf{T}_P^p(t)$ los pares perturbadores.

La ecuación de Newton para un cuerpo rígido se expresa en la terna fija al cuerpo para convertirse en la ecuación de Euler (por simplicidad se han eliminado las dependencias con el tiempo),

$$I \dot{\Omega}_{pi} = -\Omega_{pi}^p \times I \Omega_{pi}^p + \mathbf{T}_{GG}^p + \mathbf{T}_C^p + \mathbf{T}_P^p$$

Es común quitar el supraíndice mientras se expresa en la terna p . Las ecuaciones dinámicas se hallan explicadas en (Wiesel, 1997) y en (Sidi, 1997).

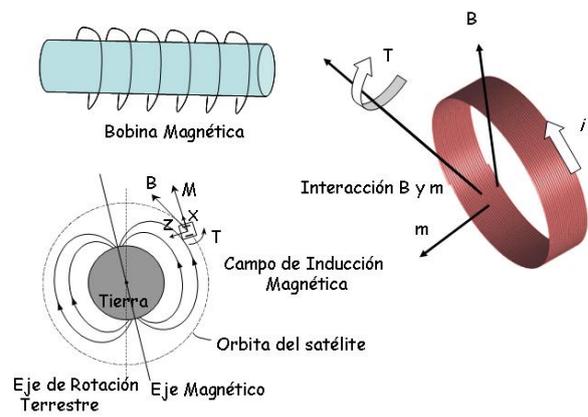


Figura 1. Pares Magnéticos.

4.1 Par Magnético

Este par es generado por la interacción entre el campo de inducción magnética de la Tierra y el dipolo residual en el que se convierte el satélite desde el punto de vista magnético. Los lazos de corriente que se originan en las baterías, en los paneles solares, en los circuitos electrónicos generan un dipolo m el cual a su vez genera un par de perturbación \mathbf{T}_M de acuerdo a $\mathbf{T}_B = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(t)$. Aquí \mathbf{m} es el dipolo residual, y $\mathbf{B}(t)$ es el campo de inducción magnética terrestre. El campo magnético es esencialmente un dipolo cuyo polo sur se halla en el hemisferio norte, aproximadamente en la latitud 79° N, y 290° E de longitud. Las desviaciones respecto al dipolo se llaman anomalías y las más importante es la Sudamericana que se halla sobre Brasil y Argentina, la opuesta se halla sobre Siberia. En general, la naturaleza de este campo magnético es desconocido, y su modelo más utilizado es el de Armónicos Esféricos (Langel 1987). Utilizando el mismo concepto, todos los satélites de órbita baja utilizan tres bobinados eléctricos, con o sin núcleo ferroso, que convenientemente dispuestas en la estructura del cuerpo generan un dipolo comandado, mediante la inyección de tres corrientes $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$, una por bobinado. El momento dipolar en la bobina j puede ser calculado como: $m(t) = \mu n i_j(t) A$, donde μ es característico del núcleo de la bobina (uno para el aire), n es el número de espiras y A es el área cubierta por la bobina. En la Figura 1 se visualiza la interacción entre los distintos vectores.

El control de satélites basado en la interacción magnética únicamente presenta el inconveniente de carecer de controlabilidad a lo largo del vector inducción magnética, $\mathbf{B}(t)$. En naves de bajo requerimiento de precisión de apuntamiento, este método es utilizado solo. En general, se combina con la presencia de ruedas de inercia, como elemento que controla la velocidad de giro de las mismas, (Chobotov, 1991).

² Nodo es la intersección del plano orbital (en su fase ascendente o descendente) y el plano de referencia, en nuestro caso ecuatorial.

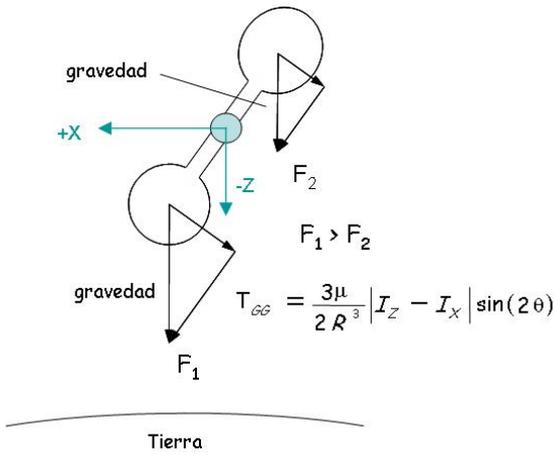


Figura 2. Pares Gravitatorios.

4.2 Par Gravitatorio

Debido a que el campo gravitatorio no es uniforme, las fuerzas gravitatorias generadas por éste son diferentes cuando actúan sobre distintas partes de la estructura. La integración de estos efectos sobre todo el cuerpo producen los pares gravitatorios. En la Figura 2 se representa un ejemplo clásico de satélite, bajo las siguientes hipótesis:

- Sólo el campo gravitacional de la Tierra es considerado.
- La Tierra es esférica y posee una masa uniformemente distribuida.
- El satélite es pequeño comparado con su distancia al centro de la Tierra y está formado por un sólo cuerpo.

El modelo del par gravitacional se calcula de acuerdo a la siguiente expresión,

$$\mathbf{T}_{GG} = \frac{3\mu_e}{R_{ce}^3} (\mathbf{1}_{R_{ce}} \times I \mathbf{1}_{R_{ce}}), \quad (9)$$

donde, μ_e es la constante gravitacional de la Tierra, R_{ce} es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el centro del satélite, este valor cambia de acuerdo a la elipticidad de la órbita, $\mathbf{1}_{R_{ce}}$ es el vector unitario del vector \mathbf{R}_{ce} también conocido como nadir. Expresando (9) en la terna LVLH, el vector nadir se transforma en el vector \mathbf{k} a lo largo del eje z . Además, de la teoría de Mecánica Celeste: $\omega_0^2 = \frac{\mu}{R_{ce}^3}$, donde ω_0 es la velocidad orbital promedio. Luego en terna LVLH el par gravitatorio, toma la expresión,

$$\mathbf{T}_{GG} = 3\omega_0^2 (\mathbf{k} \times I \mathbf{k}), \quad (10)$$

Este par puede considerarse como una perturbación a la actitud del satélite, o bien puede ser usado para el control de los mismos, mediante la implantación de un *boom* o estructura alargada que aumente las diferencias de inercia entre el eje que apunta al nadir, y cualquiera de los ejes transversales. En la Figura 3 se presenta un satélite de la Universidad de Surrey que utiliza el método de control por gradiente gravitatorio. Bajo este principio se tienen pares de control en forma



Figura 3. Satélite Controlado por Gradiente Gravitatorio.

pasiva a lo largo de solo dos ejes X e Y . A lo largo del eje longitudinal del *boom* no hay control.

4.3 Par Aerodinámico

El par aerodinámico es la principal perturbación en satélites de órbita baja. Es típicamente dos órdenes de magnitud mayor que el gradiente gravitatorio llegando a 0,1 Nm para una altura orbital del orden de los 100 km. Está producido por la interacción entre el cuerpo y las moléculas de la alta atmósfera. Asumiendo que la energía es totalmente absorbida en el impacto con el satélite, la fuerza $d\mathbf{F}$ sobre una superficie elemental dA es descrita por,

$$d\mathbf{F} = -\frac{1}{2} C_D \rho v^2 \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{1}_v) dA \quad (11)$$

donde, \mathbf{n} es la normal saliente de la superficie en consideración, $\mathbf{1}_v$ es el vector unitario a lo largo de la velocidad de traslación de la superficie del cuerpo respecto del flujo incidente de moléculas, ρ es la densidad atmosférica y C_D es el coeficiente de resistencia atmosférica.

El par aerodinámico se calcula mediante la integración sobre el total de las superficies del satélite. En general se considera el cuerpo como formado por una colección de áreas simples (rectángulos, triángulos, etc), siendo las normales a cada área fáciles de calcular. El par aerodinámico es entonces:

$$\mathbf{T}_A = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 \sum_{i=1}^k A_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{1}_v) \mathbf{1}_v \times \mathbf{r}_i$$

donde \mathbf{r}_i es el vector que une el centro de masas del satélite y el centro de presión del elemento i -ésimo. En la Figura 4 se muestra la diferencia entre el centro de presión y el centro de masa. Como en los casos anteriores, este par perturbador también puede utilizarse como par estabilizador. Un ejemplo de como se puede estabilizar un satélite mediante el uso del efecto aerodinámico puede verse en la Figura 5, donde pequeñas aletas permiten la generación de pares que mantienen en forma pasiva la orientación deseada.

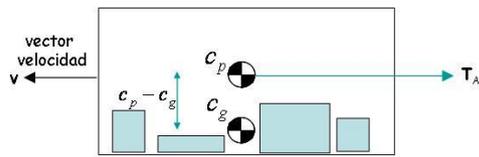


Figura 4. Par Aerodinámico.

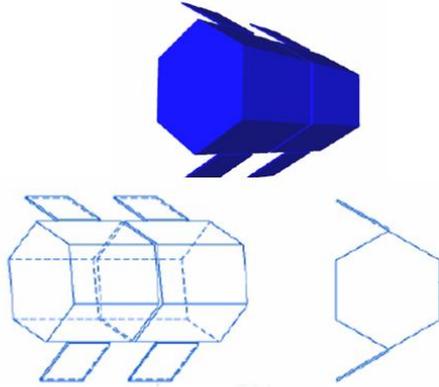


Figura 5. Satélite Controlado por pares Aerodinámicos.

Para calcular la densidad atmosférica el modelo más conocido es el de Jacchia-Roberts (Cappellani, 1976). Este modelo incluye variaciones diurnas, semianuales, etc. La densidad es determinada en función de la altura orbital, el índice de actividad geomagnética (K_p) y la temperatura exosférica, que está parametrizada por el promedio diario en la banda de 10.7 micrones, ($F_{10.7}$). La Figura 5 muestra la forma de un satélite con control pasivo aerodinámico.

5. DINÁMICA DE TRASLACIÓN

Hasta ahora se ha focalizado nuestra atención en la dinámica de rotación de un cuerpo rígido, o como se expresó anteriormente cuasi-rígido cuando el satélite tiene ruedas de reacción o de inercia. En esta sección se presenta el movimiento de traslación de un cuerpo rígido abierto, i.e. con intercambio de masa. Es importante notar que el sistema de propulsión utilizado no es esencial para el presente análisis. La ecuación de movimiento **no** se obtiene por una simple modificación de la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = \frac{d m \mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}, \quad (12)$$

donde $\frac{dm}{dt}$ se interpreta como el empuje. Para entender que (12) no es correcta, basta notar que si el cohete se halla en la rampa de lanzamiento en forma estacionaria, nunca puede elevarse si se aplica esta formulación.

La correcta derivación debe basarse en el principio de conservación del impulso lineal, es decir, el momento lineal del sistema antes de la eyección de la masa dm debe conservarse cuando esta porción de masa

ya no pertenece al cuerpo de masa m . Es decir, la conservación debe escribirse como,

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - dm(\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) = m \mathbf{v}, \quad (13)$$

donde, \mathbf{v} es la velocidad del cohete respecto al espacio inercial antes de la expulsión de la porción de masa de combustible dm , \mathbf{v}_r es la velocidad relativa de esta masa saliente respecto del cohete. Es de notar que la expresión $\mathbf{v} + \mathbf{v}_e$ es la velocidad del cohete respecto al espacio inercial. El incremento de velocidad $d\mathbf{v}$ es el ganado por el cohete al expeler la porción dm . Expandiendo la expresión se obtiene,

$$m \mathbf{v} - dm \mathbf{v}_r = 0, \quad (14)$$

dividiendo por dt y tomando límites nos queda que sin acciones externas, encontramos la ecuación del cohete como,

$$F + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_e = m \mathbf{a}, \quad (15)$$

la velocidad \mathbf{v}_e , se llama la velocidad de escape del cohete. Esta ecuación es diferente a la planteada al comienzo de esta sección. Está claro que el empuje es el negativo de $\frac{dm}{dt}$ y que un vehículo estacionario en la rampa de lanzamiento, permite elevarse con esta fórmula.

En el caso que el cohete se halle en un vuelo atmosférico, o los gases de eyección no se enfrenten a presión cero, aparece una fuerza de tipo estática, que solo depende de la diferencia de presiones internas y externas sobre el área de la tobera.

$$F + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_e - \mathbf{1}_{v_e} A (p_e - p_a) = m \mathbf{a} \quad (16)$$

donde, p_a es la presión ambiente a esa altura, p_e la presión de los gases que escapan de la tobera, A el área de salida de la tobera, y $\mathbf{1}_{v_e}$ el vector unitario del vector velocidad relativa. Si la presión es cero, $p_a = 0$, este término adicional solo es importante en la parte inicial de la trayectoria.

La expresión general para el movimiento translacional se puede encontrar en (Sutton, 1992) y en (Wiesel, 1997).

Los actuadores son motores de propulsión de distinta naturaleza (sólido, líquido o híbridos) pero que conceptualmente no distan de los que se presentan para el caso de control de actitud y órbita de satélites en la siguiente sección.

Respecto a los sensores a bordo de los cohetes, se cuenta con conjuntos compuestos por giróscopos y acelerómetros denominados Unidades de Mediciones Inerciales (ver Figura 6). Los acelerómetros son básicamente una masa que en presencia de una aceleración exterior se mueven de su posición de equilibrio (ver Figura 7) o los más modernos basados en cuarzo (ver Figura 11). Esta desviación medida en volts, es una medida de la aceleración del instrumento respecto del espacio inercial. La doble integración de la aceleración permite conocer la posición del vehículo. La

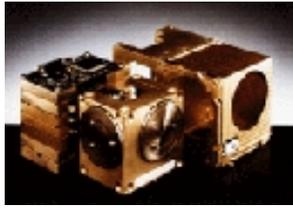


Figura 6. Unidad de Mediciones Inerciales.

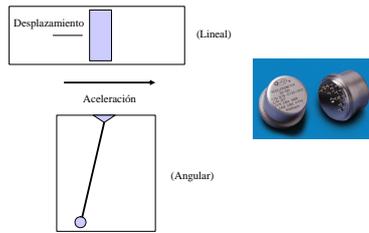


Figura 7. Acelerómetros.

Navegación, Guiado y Control de vehículos propulsados es otro tema en sí mismo y puede consultarse en (Lin, 1990).

6. ACTUADORES

Un satélite equipado con ruedas de reacción no puede ser considerado un cuerpo rígido, porque éstas se hallan girando alrededor de su eje de rotación. Estos actuadores proveen una cantidad de momento de la cantidad de movimiento, que contribuye al momento total del cuerpo. El momento total del satélite y las ruedas está dado por,

$$\mathbf{H} = I \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{pi} + \mathbf{h}_{RW}, \quad (17)$$

donde \mathbf{h}_{RW} es el momento de la cantidad de movimiento aportado por las ruedas de inercia. Introduciendo (17) en la ecuación de la dinámica del satélite, se obtiene,

$$I \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{pi}(t) = -\boldsymbol{\Omega}_{pi}(t) \times (I \boldsymbol{\Omega}_{pi}(t) + \mathbf{h}_{RW}) - \frac{d\mathbf{h}_{RW}(t)}{dt} + \mathbf{T}_{GG} + \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_M + \mathbf{T}_P$$

donde, $\frac{d\mathbf{h}_{RW}(t)}{dt}$ es ahora la acción de control, que se realiza mediante la elevación o el decrecimiento del número de revoluciones del motor de la rueda de inercia. Cuando esta velocidad alcanza un límite prefijado, es necesario volver la velocidad de rotación a su valor de referencia, para lo cual se necesita aplicar un par exterior al satélite. Este mecanismo se denomina *desaturación* de las ruedas. En general para satélites de órbita baja, los pares magnéticos son los adecuados para esta operación. En (Sidi, 1997) se explica en detalle este mecanismo. En satélites de comunicaciones o de órbitas similares, este mecanismo es realizado por

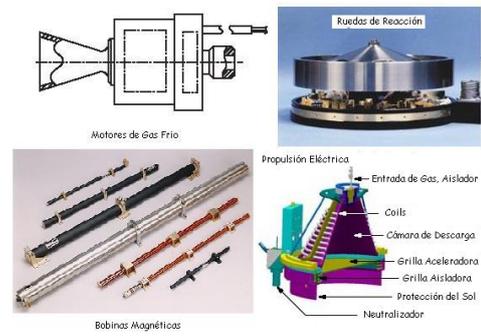


Figura 8. Esquema de Actuadores.

el par generado con toberas de gas. En la Figura 8 se muestra una rueda de reacción típica.

6.1 Motores por Eyección de Masa

Las toberas son motores por eyección de masa que generan una fuerza en el punto donde la tobera se monta sobre la estructura de la nave. Si la distancia entre el centro de masa y la posición de cada tobera es distinta de cero, se genera un par. Este es calculado como,

$$\mathbf{T}_{JET} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{JET}, \quad (18)$$

donde, \mathbf{r} es el vector que une el centro de masa del satélite y la tobera, y \mathbf{F}_{JET} es la fuerza generada por la tobera al eyectar masa. El funcionamiento de las toberas está caracterizado por el mínimo tiempo de apertura y cierre, lo que determina el perfil del par generado.

Este actuador tiene como desventaja que su uso limita la vida útil del satélite (que depende de la cantidad de combustible), pero es muy versátil ya que puede ser utilizado como actuador de traslación para elevar la altura orbital y cambiar la inclinación de su plano, y al mismo tiempo como actuador para modificar la actitud del vehículo.

La presencia de un actuador que intercambia masa con el medio ambiente, genera una transformación del sistema rígido cerrado en otro rígido pero abierto. En satélites esta distinción no es importante debido a la relación entre la masa del combustible y la masa total del satélite. Existen varios sistemas de propulsión utilizados en la práctica: química que utiliza hidracina, de gas frío mediante un gas inerte, y la propulsión eléctrica. En (Sutton, 1992) hay una detallada explicación de esto e información sobre los distintos motores disponibles, combustibles, tipos de toberas, etc.. Solo a modo indicativo, se muestra en la Figura 8 una tobera típica de gas frío y un motor eléctrico.

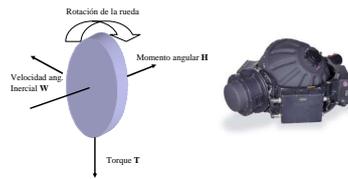


Figura 9. Giróscopo clásico.

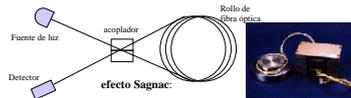


Figura 10. Giróscopo de fibra óptica (FOG).

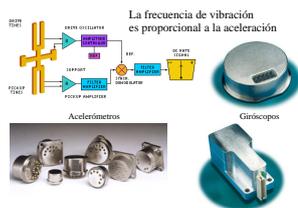


Figura 11. Giróscopos y acelerómetros de cuarzo.

7. SENSORES

Los principales sensores utilizados en el control de actitud de los satélites o de navegación de cohetes son los siguientes:

1. Sensor de Estrellas:

Son básicamente cámaras digitales con sensores del tipo CCD, con un ordenador, donde se almacena un mapa de las estrellas más brillantes. Luego de procesar una imagen, el programa interno busca en este mapa la misma configuración de estrellas y el ángulo que debería girar para alinear perfectamente ambas imágenes: la real y la almacenada. Dos ángulos son determinados con mayor precisión que el giro a lo largo del eje óptico. Es necesario al menos tres estrellas para lograr inequívocamente una medida de la actitud. Son sensibles al Sol y a la Luna. Son de precio relativamente alto y proveen precisiones del orden de 15 segundos de arco y aún mejores.

2. Magnetómetros:

El campo magnético terrestre es medido con un instrumento denominado magnetómetro de tres ejes. Los magnetómetros más comunes son

los tipo *flux-gate* que consisten en dos bobinados sobre el mismo núcleo: uno de excitación y uno de lectura. La excitación magnética satura al núcleo y permite que la presencia de un campo magnético externo adelante o atrase (según el signo) el momento en que la saturación se produce sobre el bobinado de salida. Esta medida traducida en volts es trasladada a Gauss o Teslas mediante la aplicación de un factor de escala no lineal. Los más modernos instrumentos se basan en la inclusión de una resistencia sensible a los campos magnéticos (magnetoresistivos) en un circuito eléctrico. El cambio de tensión en el mismo es debido al cambio en el valor del campo externo (ver Figura 12).

3. Sensor de Tierra:

Este sensor distingue la transición entre el horizonte terrestre y el espacio más frío que lo circunda. Debido a que solo utiliza una fuente, puede determinar dos ángulos conocidos (cabeceo y rolido). El giro alrededor del eje de nadir es indeterminado. Hay dos clases de sensores, los estáticos y los rotantes, que habitualmente se montan en una rueda de inercia, para disminuir peso y potencia. En general son microbolómetros sin refrigerar que trabajan en el infrarrojo térmico. Las precisiones de determinación son del orden de 0.03 grados en dos ejes. Su costo relativo es alto.

4. Sensor de Sol:

Determina la dirección del Sol, mediante una acumulación de celdas solares, CCD, o fotodetectores. Tiene solo solución de la actitud en dos ejes. Su precisión varía según el uso, desde las simples celdas solares que tienen una precisión de 2 grados a los más sofisticados que presenten una precisión de 0.1 grados.

5. Giróscopos:

Son sensores inerciales que detectan la velocidad de rotación inercial, aunque no determinan por si solos la actitud. Se utilizan en un arreglo de tres giróscopos ortogonales, para contar con la información a lo largo de los tres ejes. En general, tienen una deriva que produce errores que crecen con el tiempo, lo que requiere de sensores de posición para volver a cero este error periódicamente. La precisión que se logra con estos sensores depende altamente del costo, y puede llegar a órdenes de 0.01 grados por hora. El principio de funcionamiento clásico puede verse en la Figura 9, existen además otros más modernos de fibra óptica, basados en el efecto Sagnac (ver Figura 10) y los de cuarzo que también pueden utilizarse como acelerómetros (ver Figura 11).

6. Navegación por satélites:

Para ubicar con mucha precisión el centro de masa de un cohete se puede recurrir a los receptores de GPS (Glonass o futura red europea Galileo), siempre que el mismo se encuentre por debajo de los satélites de la red (aproximada-



Figura 12. Magnetómetro.



Figura 13. Sensores.

mente a unos 28.000 Km de la superficie terrestre en el caso del GPS). Estos sensores determinan la posición y velocidad lineal del punto donde se encuentra el receptor con errores del orden de los 30 metros y 0,2 m/s, respectivamente. Deben captarse al menos 4 satélites de GPS para que la estimación de ambos parámetros sea precisa. Recientemente se han utilizados receptores de GPS con múltiples antenas para determinar la actitud de un vehículo espacial.

8. MÉTODOS DE ESTABILIZACIÓN

En términos muy generales, se tienen los sistemas pasivos (sin sistema de control realimentado tradicional), que resultan más económicos aunque de menor precisión:

1. Satélites con *spin*, en los que el cuerpo principal está girando para generar un momento de la cantidad de movimiento alrededor del eje que se desea mantener constante respecto de una terna inercial. En la Figura 14 se observa el satélite brasilero SCD-1 y se muestra la rigidez en las dos direcciones normales al eje de giro allí indicado. Existen experimentos científicos o tecnológicos que permiten esta forma de movimiento del cuerpo y dada su simplicidad de implementación y su bajo costo es un método adecuado.
2. Los que utilizan las fuerzas y pares naturales para su orientación: magnéticos, aerodinámicos, campo (gradiente) gravitatorio, presión solar, co-

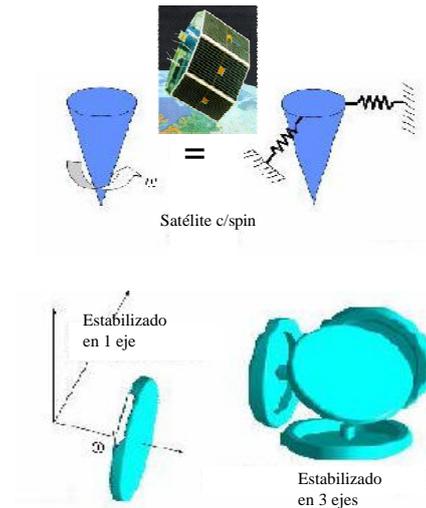


Figura 14. Métodos de Estabilización.

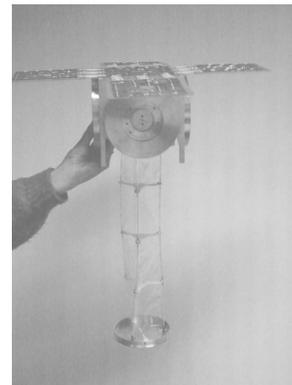


Figura 15. Satélite universitario MSU-1.

mo por ejemplo en (Chen *et al.*, 2000; Modi, 1995; Martinelli y Sánchez Peña, 2005). En la Figura 15 puede verse un sistema de control de actitud totalmente pasivo basado en fuerzas aerodinámicas, gradiente gravitatorio y amortiguamiento por fricción viscosa, de la Universidad de Buenos Aires. Aunque no es muy visible, la estructura o *boom* que aprovecha el gradiente gravitatorio, está rodeada por un material casi transparente que hace las veces de velamen, para aprovechar el par aerodinámico. En su interior cuenta con recipientes de aceite viscoso que aumentan el amortiguamiento inercial.

Los sistemas activos, ya sea porque consumen energía eléctrica o porque cuentan con sistemas de control, son más precisos aunque más caros, ya que deben agregar sensores, actuadores y ordenadores a bordo.

1. Satélites que confieren momento de la cantidad de movimiento al cuerpo por medio de la presencia de una rueda (interna al cuerpo del satélite) como se muestra en la Figura 14. Los hay de dos tipos:
2. Sin tener H_{RW} a bordo, pero controlando el sistema con cuatro ruedas de inercia como se muestra en la Figura 14. Estos casos se obtienen satélites rápidos, de alta maniobrabilidad, al precio de incorporar al diseño, mayor masa y potencia para manejar los actuadores.

Por supuesto hay combinaciones de todos los casos presentados anteriormente. En particular los activos que poseen sistemas de control, se apoyan en algoritmos que manejan los sensores y actuadores, de modo de lograr la estabilidad y performance adecuados. Existen una gran variedad de algoritmos de control para asegurar la orientación de un satélite o la posición del centro de masa de un cohete durante una misión. Estos van desde el control clásico lineal tradicional, hasta los métodos de control no lineal, adaptivo, robusto o mediante técnicas denominadas de *soft computation* como la lógica difusa, redes neuronales, algoritmos genéticos, etc. Este es un tema específico del área de Control Automático y no se profundizará más sobre esto, ya que todas ellas, por ser generales, pueden aplicarse a cualquier otro tipo de problemas. Sin embargo, en las secciones 9 y 10 se presentan con cierto detalle, dos ejemplos de control en 3 ejes, uno de un cohete sonda y otro de un satélite de observación de la Tierra, en el que participaron ambos autores.

9. EXPERIMENTO EN COHETE SONDA

El objetivo de esta experiencia es el de realizar un ensayo de un sistema de navegación y control de orientación. Los parámetros para la navegación se calculan a través de un módulo integrado GPS/inercial que mide ángulos en forma de cuaterniones (Wertz, 1978), velocidades angulares, posición, velocidad y aceleración lineal. El receptor de GPS se utiliza para corregir los errores crecientes de los sensores inerciales (giróscopos y acelerómetros) de modo que los parámetros de navegación (posición y velocidad lineal) y de orientación (cuaterniones y velocidad angular) se actualicen con un error menor.

El sistema de control utiliza toberas de gas frío como actuadores para modificar la orientación del vehículo. El número de toberas usualmente utilizadas es de 8, cuando se tiene en cuenta la posibilidad de falla en alguna de ellas. En (Sánchez Peña *et al.*, 2000) sin embargo, se demuestra que puede lograrse el mismo resultado con sólo 6 de ellas, y es el que se utiliza en este ejemplo. La ubicación y orientación de las mismas se ha realizado de acuerdo al diseño en (Servidia y Sánchez Peña, 2002), donde se definen las fuerzas positivas que entregan las 6 toberas como: (f_1, \dots, f_6) . En este ejemplo, presentaremos los re-

sultados para el caso sin fallas, para el caso general con posibles fallas ver (Sánchez Peña, 2004).

El sistema además realiza el control en 3 grados de libertad del vehículo siguiendo una trayectoria angular predeterminada. Para ello el sistema de navegación entrega las velocidades angulares en rolido (*roll*), cabeceo (*pitch*) y guiñada (*yaw*) $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ y los cuaterniones $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. El objetivo de control es el de seguir la trayectoria angular prefijada (ver Figura 18) con el menor error y en el menor tiempo posible, teniendo en cuenta la saturación de los actuadores (toberas de gas frío) y el ruido de medición.

El cohete de sondeo está compuesto por 2 etapas: la primera de ellas de combustible sólido coloca la carga útil (segunda etapa) a cierta altitud, de modo que la experiencia se realice durante la caída libre de la segunda etapa. Hay un proceso de de-espinado antes de la separación de ambas etapas, realizada por un sistema de Yo-Yo (Wertz, 1978), para disminuir la elevada velocidad angular longitudinal inicial del vehículo (1000 rpm). La segunda etapa tiene el sistema de navegación y control y es el que realiza el ensayo tecnológico. La misión completa puede observarse en la Figura 16.

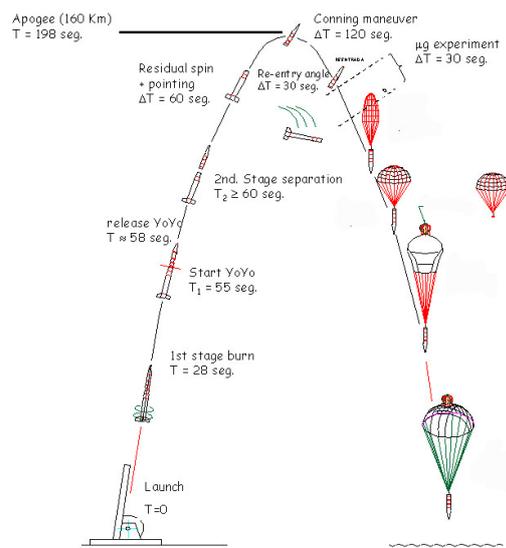


Figura 16. Experiencia de Navegación y Control en un cohete de sondeo de 2 etapas.

9.1 Modelo

Para el diseño del controlador se utiliza el tradicional modelo de cuerpo rígido, linealizado alrededor de la trayectoria deseada. La dinámica del modelo es la del error entre la trayectoria deseada y la real. Por lo tanto la señal de entrada al controlador son las velocidades angulares diferenciales $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ y los cuaterniones (q_1, q_2, q_3) ³. El controlador a ser diseñar-

³ Para pequeñas variaciones alrededor de la trayectoria nominal, el primer cuaternión $q_0 \approx 1$

do aplica pares diferenciales para seguir la trayectoria que forman parte del vector M_{ext}^b . Éstos se suman a los pares nominales, ya pre-establecidos que forman parte de M_{ext}^d . La misión se realiza a alturas mayores a los 100 Km por lo cual no tiene sentido práctico incluir en el modelo los pares aerodinámicos.

$$\begin{aligned} {}^{db}\dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} {}^{db}q^d \cdot \omega_{db}^d \\ {}^{db}\dot{q}^d &= \frac{1}{2} ({}^{db}q_0 I + {}^{db}q^d \times) \omega_{bd}^d \\ \omega_{bd}^d &= J^{-1} (C_b^d M_{ext}^b - M_{ext}^d). \end{aligned} \quad (19)$$

Aquí, \mathcal{D} representa la terna deseada de orientación del vehículo y \mathcal{B} la terna fija al vehículo real. En consecuencia el par ${}^{db}q_0, {}^{db}q^d$ representa el cuaternión de rotación entre las ternas \mathcal{B} y \mathcal{D} . ω_{bd} es la velocidad angular de la terna \mathcal{B} relativa a la terna \mathcal{D} . M_{ext}^b es la suma de los pares que actúan sobre el vehículo, y M_{ext}^d es lo mismo, pero sobre el vehículo en la trayectoria deseada. C_b^d es la matriz de rotación de la terna \mathcal{B} respecto de la \mathcal{D} .

La linealización de las ecuaciones (19) genera el modelo de errores que se indica como $G(s)$ en la Figura 17. Este modelo sencillo no considera el acoplamiento entre ejes, por lo cual la matriz dinámica es diagonal en bloques. La salida a minimizar z_1 son los cuaterniones diferenciales. Las ecuaciones se presentan a continuación:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} x(t) \quad (20)$$

$$+ \begin{bmatrix} B_{roll} & 0 & 0 \\ 0 & B_{lat} & 0 \\ 0 & 0 & B_{lat} \end{bmatrix} B_{ca} \tilde{u}(t)$$

$$z_1(t) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

con

$$x = \begin{bmatrix} q_1 \\ \omega_1 \\ q_2 \\ \omega_2 \\ q_3 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix} \quad A_{i=1,2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{roll} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ I_x \end{bmatrix} \quad B_{lat} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ I_\ell \end{bmatrix}$$

I_x es el momento de inercia respecto del eje longitudinal x del vehículo e I_ℓ respecto de los ejes laterales y y z . La matriz B_{ca} da la ubicación de los actuadores (*control allocation*), que se obtiene de acuerdo al diseño en (Servidia y Sánchez Peña, 2002). En este trabajo consideraremos al funcionamiento nominal, sin fallas, del sistema de control. En el caso de fallas en las toberas, la dinámica pasa a ser lineal y de parámetros variantes en el tiempo (LPV) y

puede aplicarse el control tolerante a fallos descrito en (Sánchez Peña, 2004).

9.2 Diseño y Simulaciones

9.2.1. Diseño del Controlador El diseño del controlador se ha realizado por la técnica del control óptimo en \mathcal{H}_∞ . Para ello se aumenta el modelo de la planta $G(s)$ con pesos $W_u(s)$ y $W_n(s)$ sobre la entrada de control y el ruido de medición, respectivamente [ver ecuaciones (20)-(21)], siendo $\tilde{u} = u + W_u w_1$. Asimismo, las salidas a minimizar han sido escaladas de acuerdo a los errores máximos permitidos en el error de orientación ($\approx 1^\circ$) y la fuerza de control (5 N). Esto se ilustra en la Figura 17 donde se indica la transformación lineal fraccional (LFT) que corresponde a las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2(t)u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\ w(t) &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este diseño, se fuerza a los polos a lazo cerrado a permanecer dentro de una determinada zona del semiplano izquierdo de modo que tanto las simulaciones como la implementación del controlador sean realizables, evitando la presencia de modos demasiado rápidos.

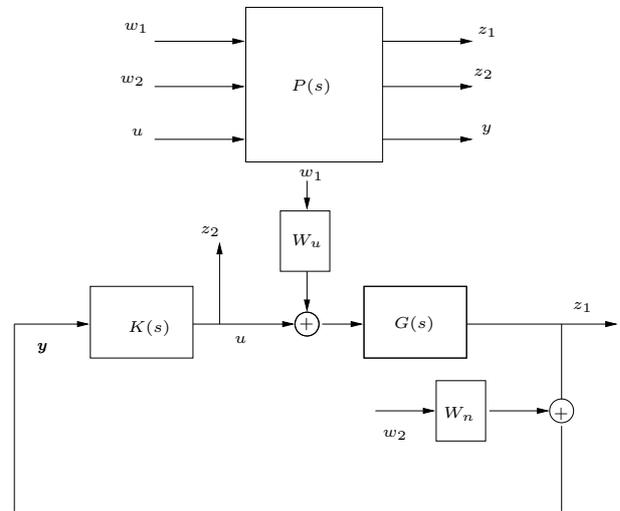


Figura 17. Esquema LFT para el diseño correspondiente al diagrama en bloques de la planta aumentada.

9.2.2. Simulaciones En la Figura 18 se indica el perfil de la nariz del cohete durante la trayectoria deseada, de modo de ensayar el sistema de navegación y control. Es un doble cono realizado alrededor de la vertical del lugar con la punta del vehículo apuntando al zenith, de modo que las antenas del receptor puedan

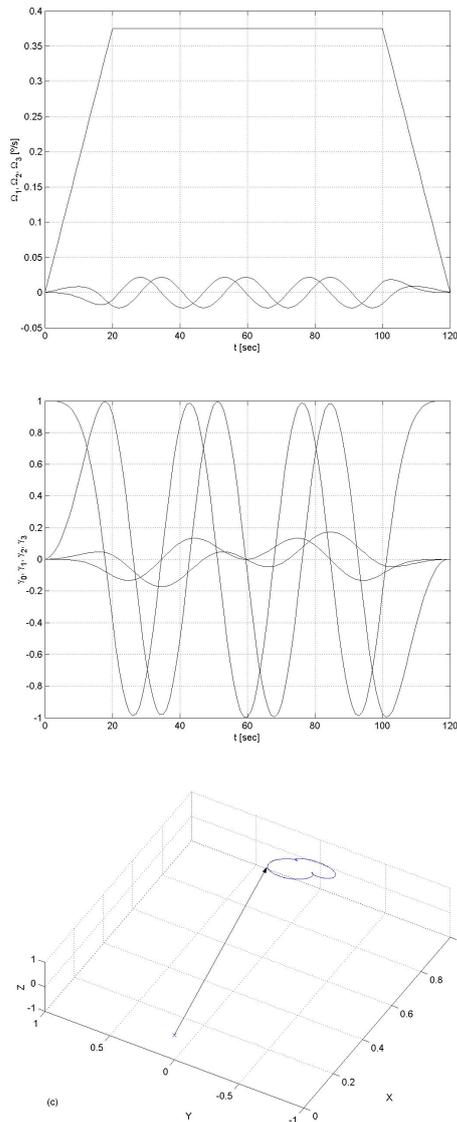


Figura 18. (de arriba hacia abajo) Velocidad angular, Cuaterniones, y nariz del cohete en modo misión (trayectoria deseada).

recibir adecuadamente las señales de los satélites de GPS. Tanto en las etapas de diseño como de simulación, se han tenido en cuenta los ruidos de medición y la saturación de los actuadores.

En las Figuras 19, 20 y 21 se indican las repuestas del sistema no lineal conectado al controlador óptimo diseñado. Allí se han simulado apartamientos iniciales de 15° y de $6^\circ/s$, los que han sido corregidos adecuadamente. El perfil del modo misión está representado por los primeros 120 seg. de la simulación.

10. CONTROL DE ORIENTACIÓN SATÉLITE SAC-C

10.1 Introducción

El satélite SAC-C (ver Figura 22) es un proyecto conjunto entre la Comisión Nacional de Actividades Es-

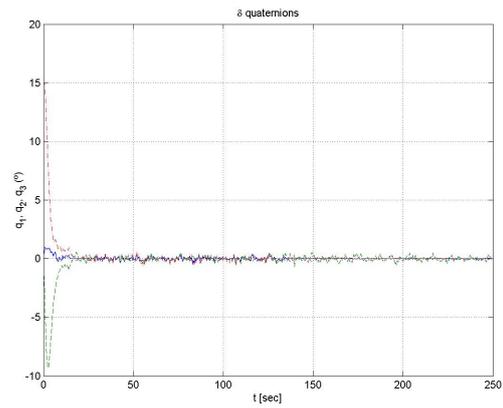


Figura 19. Errores en los Cuaterniones durante el vuelo nominal.

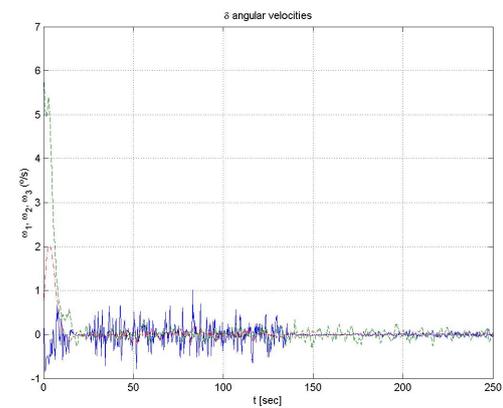


Figura 20. Errores en las velocidades angulares durante el vuelo nominal.

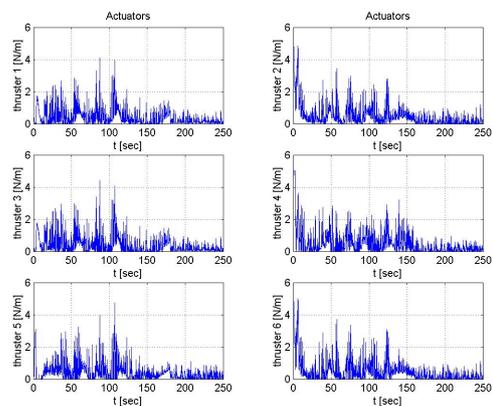


Figura 21. Fuerzas de control de toberas durante el vuelo nominal.

paciales (CONAE, Argentina) y NASA (EEUU). Fue diseñado y construido por CONAE y el lanzamiento, a finales del 2000, estuvo a cargo de NASA. A la fecha sigue operacional. Es un vehículo de observación de la Tierra que porta una cámara CCD argentina para observación de recursos naturales, una experiencia realizada por el JPL (NASA) en base al Sistema de Posicionamiento Global (GPS) y un sensor magnético de alta precisión de Dinamarca. Este último consta

de dos magnetómetros y un sensor estelar montados sobre una estructura muy liviana de 8 metros, que será desplegada en órbita. El propósito de esta estructura es la de aislar magnéticamente los sensores del campo electromagnético generado por el satélite. La longitud y el peso de la estructura la hace flexible, por lo cual el modelo del satélite no puede ser considerado como un cuerpo rígido.



Figura 22. Satélite de observación de la Tierra SAC-C.

El objetivo de control es el de apuntar la cámara CCD hacia la vertical local con una precisión de $\pm 1^\circ$ alrededor de los ejes de *roll* y *pitch*, i.e. la línea de mira debe estar en un cono de 1° de radio con respecto a la vertical local. Asimismo y basados en consideraciones ópticas, las oscilaciones (*jitter*) en el control deben permanecer dentro de los $0,05^\circ/\text{s}$.

Debido a limitaciones prácticas, es importante obtener el controlador más simple y con las menores exigencias de *hardware* y *software* posibles. Estas limitaciones surgen del hecho que el microprocesador a bordo no sólo debe procesar el control de orientación sino además alternativas de modos seguros (*safe-hold*) y lógica de fallas. Por lo tanto se busca un control del menor orden posible. Asimismo los sensores y actuadores agregan peso al vehículo, el cual se resta de la carga útil, por lo cual es conveniente minimizar el número de los mismos. En consecuencia en este diseño sólo los ejes de *roll* y *pitch* se miden con el Sensor de Horizonte (Scan Wheel Horizon sensor–SW) y sólo se aplican pares de control a los ejes de *pitch* y *yaw*. Esto se realiza utilizando las bobinas magnéticas (magnetic par coils–MTC) y las Ruedas de Inercia (Momentum wheels), éstas últimas incorporadas al sensor SW. Para el diseño se consideran los límites máximos de par aplicables por ambos tipos de actuadores.

La orientación nominal deseada del satélite en Modo Misión (MM) es la siguiente: el eje de *roll* a lo largo del vector velocidad, el de *yaw* opuesto a la vertical local y el de *pitch* perpendicular al plano orbital (ver Figura 23). El objetivo de control es diseñar un controlador del menor orden posible que logre esta actitud. Este controlador realimenta los ángulos y velocidades angulares de *roll* y *pitch* y las velocidades de las ruedas de inercia y se diseñó utilizando la técnica

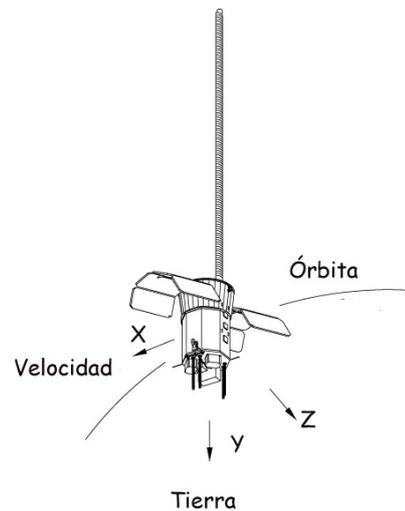


Figura 23. Terna fija al cuerpo del satélite SAC-C.

de LQR. A la realimentación constante se le agrega la dinámica de un observador del ángulo y velocidad de *yaw*, el único eje sin sensor. Por lo tanto el controlador completo cuenta con 2 estados dinámicos, se aplica y realimenta sólo 2 de los 3 ejes: lo más sencillo posible. La posibilidad de obtener un controlador de tan bajo orden y no tener que sensor o actuar sobre todos los ejes, se debe al acoplamiento entre las dinámicas de rotación del satélite y la órbita (ver (Wertz, 1978)).

Otro modo de funcionamiento es el denominado: Modo seguro de apuntamiento terrestre (*Earth Pointing Safe Hold Mode–EPSHM*) que funciona del mismo modo que el MM pero con las ruedas de inercia a velocidad constante. Este es un modo más confiable y seguro que se aplica en situaciones de falla y sólo utiliza para el control el campo magnético terrestre utilizando las bobinas magnéticas (MTC). Dada su extensión, en este trabajo no se detallará el modo EPSHM sino solamente el modo misión.

El diseño del controlador utiliza un método sencillo, basado en un control estático sumado a un observador reducido, debido a las limitaciones en el orden, sensores y actuadores mencionados anteriormente. Sin embargo se realiza un análisis exhaustivo en la sección 10.4 que involucra los objetivos de performance y de estabilidad frente a incertidumbres en el modelo, fundamentalmente debidos a la dinámica de orden superior de la estructura flexible. Para ello se utiliza el valor singular estructurado o semi-norma μ (Balas *et al.*, 1995; Sánchez Peña y Sznaiar, 1998; Zhou *et al.*, 1996) como herramienta para evaluar la performance robusta, frente a familias de perturbaciones y familias de modelos. Asimismo se agregan simulaciones para ilustrar el comportamiento del sistema frente a ruidos de medición y perturbaciones en los pares de control.

10.2 *Modelo Lineal*

Las ecuaciones no lineales de la dinámica rotacional del satélite son las siguientes:

$$\underbrace{T_w + T_m}_{control} + T_g + T_p = I_T \dot{W} + W \times (I_T W + h)$$

$$T_w^s \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ T_{wy} \\ T_{wz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{bmatrix}, \quad T_m^s \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ T_{my} \\ T_{mz} \end{bmatrix}$$

Aquí W es la velocidad angular del satélite respecto de una terna inercial, para lo cual se utiliza una terna fija al cuerpo del satélite como se indica en la Figura 23. La inercia de la porción rígida del vehículo (sin modos flexibles del *boom*) es I_T y h es el momento angular de las ruedas de inercia en la terna del satélite.

Los pares externos se componen de perturbaciones (T_p), gradiente gravitatorio, (T_g), control magnético (T_m) y mediante ruedas de inercia (T_w). El par gravitatorio se debe a la variación del campo gravitatorio a lo largo del cuerpo del satélite y el magnético al uso de las MTC. Los pares de perturbación se deben al frenado aerodinámico (casi constante en *pitch* y *yaw* a lo largo de la órbita) y a residuos de pares magnéticos y gravitatorios, ambos periódicos y despreciables en comparación con el anterior.

Los pares provenientes de las ruedas de inercia y de las bobinas se utilizan para controlar. El primero de ellos se debe al cambio de momento angular al variar la velocidad de las mismas y no cambia el momento angular total. El segundo genera un par externo, ya que se “apoya” en el campo magnético terrestre, y de este modo cambia el momento angular total y puede realizar la desaturación mencionada en la sección 6. Estos pares se aplican en los ejes de *pitch* y *yaw*. Las perturbaciones externas son desconocidas, aunque acotadas, por lo cual se las considera como pertenecientes a un conjunto acotado en energía.

El modelo se linealiza alrededor de la orientación nominal deseada descrita anteriormente. Los ángulos de *roll*, *pitch* y *yaw* alrededor de este punto de equilibrio se indican como: θ_R , θ_P , y θ_Y respectivamente. Los valores incrementales de los momentos de las ruedas de inercia son δh_y en *pitch* y δh_z en *yaw*. Para simplificar, asumimos los de la terna del satélite coincidentes con los ejes de inercia principales, i.e. $I_T = \text{diag} [I_x \ I_y \ I_z]$. Debido al acoplamiento entre los ejes de *roll* y *yaw* resulta:

$$x = \begin{bmatrix} x_{ry} \\ x_p \end{bmatrix}, \quad x_{ry} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \theta_R \\ \dot{\theta}_Y \\ \theta_Y \\ \delta h_z \end{bmatrix}, \quad x_p = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_P \\ \theta_P \\ \delta h_y \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} T_{wz} \\ T_{mz} \\ T_{wy} \\ T_{my} \end{bmatrix}, \quad T_p = \begin{bmatrix} T_{pz} \\ T_{py} \end{bmatrix}$$

Sumando los modelos de pares de las ruedas $T_{wy} = -\delta \dot{h}_y$ y $T_{wz} = -\delta \dot{h}_z$, obtenemos las ecuaciones de estado para las dinámicas de [*roll-yaw*] y de [*pitch*]:

$$\dot{x}_{ry} = A_{ry} x_{ry} + B_{ry} \begin{bmatrix} T_{wz} \\ T_{mz} \end{bmatrix} + B_z T_{pz} \quad (22)$$

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_{pitch} \begin{bmatrix} T_{wy} \\ T_{my} \end{bmatrix} + B_y T_{py} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_p T_p \\ y = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 6} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \end{bmatrix} x(t) + \mathbf{0}_{6 \times 4} u(t) \end{cases}$$

donde $x(t)$ ha sido definida anteriormente y el resto de los valores se definen en el Apéndice B.2. Notar que la salida del sistema son los estados medidos, *roll* y *pitch*.

10.3 *Diseño*

Como se indicó anteriormente, tomando las salidas de la ecuación anterior medidas por las ruedas de inercia (SW), se diseña un observador (reducido) para el ángulo y velocidad angular en *yaw* y se realimentan los estados medidos y estimados a través de una realimentación estática diseñada por medio de la técnica de LQR. Para este diseño se toman en cuenta las cotas máximas que deben satisfacer los estados y los pares de actuación:

$$\begin{bmatrix} T_{wz} \\ T_{mz} \\ T_{wy} \\ T_{my} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0,012 \sin \alpha \text{ Nm} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} 6 \cdot 10^{-4} \text{ Nm} \\ 0,024 \cos \alpha \text{ Nm} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} 6 \cdot 10^{-4} \text{ Nm} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \theta_R \\ \dot{\theta}_Y \\ \theta_Y \\ \delta h_z \\ \dot{\theta}_P \\ \theta_P \\ \delta h_y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0,1 \text{ }^\circ/\text{s} \\ 1^\circ \\ 0,1 \text{ }^\circ/\text{s} \\ 1^\circ \\ 0,06 \text{ Nms} \\ 0,1 \text{ }^\circ/\text{s} \\ 1^\circ \\ 0,06 \text{ Nms} \end{bmatrix} \quad (25)$$

La inversa de estas cotas se utilizan en los pesos que se incluyen en la resolución del problema de optimización LQR. Las cotas de δh_z y δh_y corresponden a una máxima desviación de 400 rpm, respecto de la velocidad nominal de las ruedas de inercia (3000 rpm).

El observador involucra la dinámica de [roll-yaw] solamente, ya que está desacoplada de la de *pitch*. En este caso particular por su simplicidad, la ganancia del observador puede ser calculada analíticamente (Capítulo 11, (Sánchez Peña y Sznaier, 1998)). Las variables medidas, estimadas y de entrada al observador son, respectivamente:

$$x_m \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \theta_R \\ \delta h_z \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_Y \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\theta}_Y \\ \hat{\theta}_Y \end{bmatrix}, \quad T_{cz} \triangleq \begin{bmatrix} T_{wz} \\ T_{mz} \end{bmatrix}$$

La señal de control y ganancia estática calculada a través de la correspondiente ecuación de Riccati es:

$$\begin{bmatrix} T_{wz} \\ T_{mz} \\ T_{wy} \\ T_{my} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_R & F_Y & F_{hz} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & F_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \theta_R \\ \hat{x}_Y \\ \delta h_z \\ \dot{\theta}_P \\ \theta_P \\ \delta h_y \end{bmatrix}$$

10.4 Análisis (robusto) del controlador

La dinámica de lazo cerrado toma en consideración sólo el modelo rígido del satélite y de la estructura (*boom*). Por lo tanto los modos flexibles de la estructura pueden tomarse como incertidumbre dinámica global de alta frecuencia. Para ello se utiliza información experimental provista por el fabricante del mismo (Steen-Larsen, 1995) de modo de calcular la distribución en frecuencias de esta incertidumbre. Dentro de este esquema, la dinámica incierta del *boom* se representa de la siguiente manera:

$$u_\Delta = G_{boom}(s)y_\Delta, \quad u_\Delta \triangleq \begin{bmatrix} T_{px} \\ T_{py} \end{bmatrix}, \quad y_\Delta \triangleq \begin{bmatrix} \theta_R \\ \theta_P \end{bmatrix}$$

Esto se justifica ya que la fuerza de excitación que inicia las oscilaciones de la dinámica flexible es la rotación angular del satélite en *roll* y *pitch* (la torsión alrededor de *yaw* es despreciable) Por otro lado, la perturbación del *boom* a la estructura del satélite se representa por los pares (internos) aplicados a los ejes de *roll* y *pitch* debidos a estas oscilaciones. Los experimentos en (Steen-Larsen, 1995) determinan una dinámica de frecuencias del orden de 1 Hz. En consecuencia, un peso adecuado que “cubre” esta incertidumbre de “alta frecuencia” del *boom* y que asume un error de modelado de hasta un 20% a bajas frecuencias es $W_\Delta(s) = 0,4 \frac{5s+\pi}{s+2\pi} I_{2 \times 2}$.

La especificación de performance mantiene acotados los estados y las acciones de control de las MWs y las MTCs. Por lo tanto un peso adecuado para evaluar la performance consiste en una matriz diagonal W_p con la inversa de las cotas en (24) y (25) como elementos diagonales.

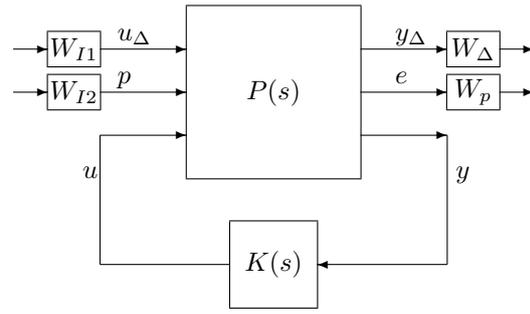


Figura 24. Transformación Lineal Fraccional para el análisis de robustez y performance.

Para realizar el análisis robusto del sistema de control se adopta el formato de LFT en donde se interconectan las porciones nominales e inciertas, los pesos para performance e incertidumbre como se indica en la Figura 24. El sistema a lazo cerrado nominal es la interconexión lineal fraccional $R(s) = F_\ell(P, K)$, siendo p las entradas de perturbación, e las salidas a acotar y (u_Δ, y_Δ) las entradas y salidas relacionadas con la incertidumbre, mencionadas en la sección anterior. Se agregan escalajes en las entradas y salidas de modo de normalizar las condiciones de performance y robustez, como se indica en la Figura 24. Los pares de perturbación se deben principalmente al efecto del frenado aerodinámico de la atmósfera en los ejes de *yaw* y *pitch* con una cota máxima de 10^{-5} Nm, y los debidos al momento magnético residual en *roll* con un máximo de 10^{-6} Nm. El error de medición angular en el sensor de horizonte es del orden de $0,3^\circ$ en *roll* y *pitch*. El error de velocidad angular en los mismos ejes se deriva del bit menos significativo (LSB) y resulta del orden de $0,01^\circ/s$. Los errores en la velocidad de las ruedas de inercia que producen errores en el momento angular en *yaw* (δh_z) y *pitch* (δh_y) llegan a un valor máximo del 2% de h_{y0} .

Las condiciones necesarias y suficientes para garantizar performance nominal, estabilidad robusta y performance robusta son (Sánchez Peña y Sznaier, 1998; Zhou *et al.*, 1996):

$$\text{ER} \iff \|W_\Delta(s)R_{11}(s)W_{I1}(s)\|_\infty \leq 1 \quad (26)$$

$$\text{PN} \iff \|W_p(s)R_{22}(s)W_{I2}(s)\|_\infty \leq 1 \quad (27)$$

$$\text{PR} \iff \sup_{s=j\omega} \mu_\Delta [W_O R(s)W_I] \leq 1 \quad (28)$$

respectivamente, siendo

$$W_O = \begin{bmatrix} W_\Delta(s) & 0 \\ 0 & W_p(s) \end{bmatrix}$$

$$W_I = \begin{bmatrix} W_{I1}(s) & 0 \\ 0 & W_{I2}(s) \end{bmatrix}$$

$$R(s) = \begin{bmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) \end{bmatrix}$$

y la estructura de incertidumbre Δ formada por 2 bloques completos (no diagonales), uno de ellos debido a la incertidumbre de alta frecuencia por los modos flexibles y la otra por el conjunto de señales de perturbación incluídos en la definición de los objetivos de performance.

10.5 Simulaciones

Se ilustran a continuación simulaciones de las variables principales a ser acotadas en modo Misión (MM). Las Figuras 25 y 26 muestran simulaciones de los ángulos, velocidades angulares y pares de control de las ruedas (MW) y magnéticos (MTC) provocados por ruido de medición y pares de perturbación aleatorios. Se observa que las respuestas del sistema en todos estas variables resultan acotadas por los valores especificados en (24)–(25). La Figura 27 muestra que las condiciones de estabilidad y performance nominal y robusta en (26)–(27)–(28) se cumplen satisfactoriamente, i.e. todas por debajo de la unidad.

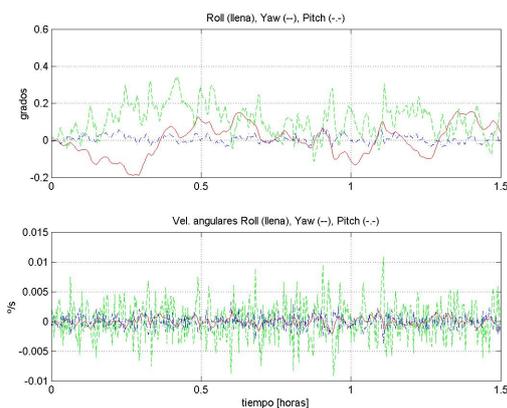


Figura 25. Errores de actitud: ángulos y velocidad angular.

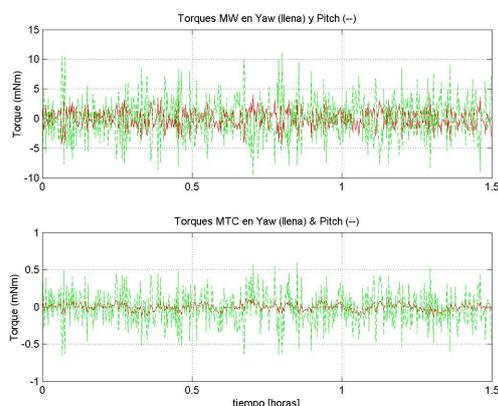


Figura 26. Pares de ruedas de inercia (MW) y bobinas magnéticas (MTC).

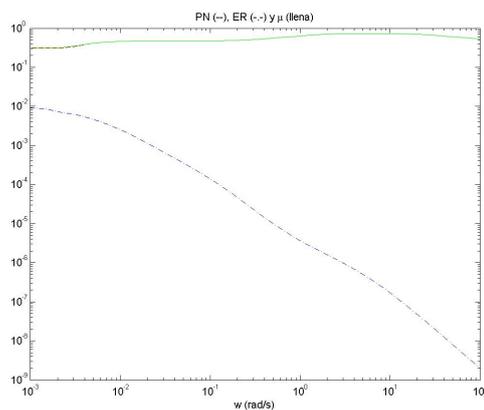


Figura 27. Análisis: Performance Nominal (PN), Estabilidad Robusta (ER) y Performance Robusta (μ).

11. CONCLUSIONES

Se ha presentado una visión general del Control de orientación de vehículos espaciales, especialmente satélites y cohetes. Se describió la cinemática y la dinámica del problema, así como los distintos tipos de sensores y actuadores utilizados. La formulación matemática también puede ser utilizada en robótica o en la navegación de cualquier otro tipo de vehículos, terrestres, aéreos o acuáticos. A lo largo del trabajo se ha comentado sobre las particularidades de las aplicaciones espaciales y las diferencias principales entre los satélites, de larga vida útil y los cohetes, de vida mucho más efímera. Esto se ilustra al final del trabajo mediante dos ejemplos tomados de aplicaciones prácticas.

AGRADECIMIENTOS

Ambos autores agradecen a la CONAE donde se han desarrollado estas experiencias y el primer autor además agradece a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- Balas, Gary J., John C. Doyle, Keith Glover, Andy Packard y Roy Smith (1995). *μ -Analysis and Synthesis Toolbox*. The Mathworks, Inc.
- Cappellani, J. (1976). Mathematical theory of the goddard trajectory determination system. Technical report. GSFC, NASA, Greenbelt, Maryland.
- Chen, Y.H., Z.C. Hong, C.H. Lin y J.S. Chern (2000). Aerodynamic and gravity gradient stabilization for microsatellites. *Acta Astronautica* **46**, 491–499.
- Chobotov, Vladimir A. (1991). *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*. Krieger Publishing Company.
- Goldstein, H. (1950). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.
- Hughes, Peter (1986). *Spacecraft Attitude Dynamics*. John Wiley and Sons, Inc.

- Jurdjevic, V. (1997). *Geometric Control Theory*. Cambridge University.
- Kuipers, Jack (1998). *Quaternion and Rotation Sequences*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.
- Lin, Ching-Fang (1990). *Modern Navigation, Guidance, and Control Processing*. Prentice Hall Series.
- Martinelli, Marcela y Ricardo S. Sánchez Peña (2005). Passive 3-axis attitude control of MSU-1 pico satellite. *Acta Astronautica* **56**, 507–517.
- Modi, V.J. (1995). On the semi-passive attitude control and propulsion of space vehicles using solar radiation pressure. *Acta Astronautica* **35**, 231–246.
- Sánchez Peña, Ricardo S. (2004). LTI and LPV techniques in FTC: a sounding rocket example. en revisión IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems.
- Sánchez Peña, Ricardo S., Roberto Alonso y Pablo Anigstein (2000). Robust optimal solution to the attitude/force. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **36**(3), 784–792.
- Sánchez Peña, Ricardo S. y Mario Sznaier (1998). *Robust Systems Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Inc.
- Servidia, Pablo y Ricardo S. Sánchez Peña (2002). Thruster design for the attitude/force control of spacecraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **38**(4), 1172–1180.
- Shuster, Malcolm (1993). A survey of attitude representations. *The Journal of the Astronautical Sciences* **41**(4), 439–517.
- Sidi, Marcel J. (1997). *Spacecraft Dynamics and Control*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press.
- Steen-Larsen, H. (1995). Boom test: Experimental values for eigenfrequencies, torsion and flexure. Technical report. Per Udsen Co.
- Sutton, George (1992). *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley and Sons, Inc.
- Wertz, James R., Ed.) (1978). *Spacecraft Attitude Determination and Control*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht The Netherlands.
- Wiesel, William E. (1997). *Spacecraft Dynamics*. Mc Graw Hill.
- Zhou, K., John C. Doyle y Keith Glover (1996). *Feedback Control Theory*. Prentice-Hall.

Apéndice A. MÉTODOS DE REPRESENTACIÓN DE LA ACTITUD

A.1 Matriz de Rotación

La matriz de rotación se construye a partir de una tríada de vectores linealmente independientes que se pueden expresar en dos ternas de referencia. Sean los vectores, r , s , t y sea C_v^z la matriz de rotación que

permite expresar en la terna z , cualquier vector que se halle expresado en la terna v . Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^z &= C_v^z \mathbf{r}^v \\ \mathbf{s}^z &= C_v^z \mathbf{s}^v \\ \mathbf{t}^z &= C_v^z \mathbf{t}^v, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde, $(\cdot)^z$ representa al vector (\cdot) expresado en la terna z . Idénticamente con $(\cdot)^v$. La matriz de rotación se calcula como,

$$C_v^z = [\mathbf{r}^z \ \mathbf{s}^z \ \mathbf{t}^z] [\mathbf{r}^v \ \mathbf{s}^v \ \mathbf{t}^v]^{-1}, \quad (\text{A.2})$$

Para generalizar la manera de encontrar esta matriz de rotación se utilizan los mismos vectores unitarios, z y v

$$C_v^z = A = [(\mathbf{i}_v)^z \ (\mathbf{j}_v)^z \ (\mathbf{k}_v)^z], \quad (\text{A.3})$$

donde, $[\mathbf{i}_v, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_v]$ son los versores que definen la terna v y $(\mathbf{i}_v)^z$ representa la proyección del vector unitario \mathbf{i}_v de la terna v en la terna z . Similarmente con \mathbf{j}_v y \mathbf{k}_v .

Sobre la matriz A existen seis restricciones, las primeras tres tienen que ver con la longitud de los vectores $[\mathbf{i}_v, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_v]$ que deben ser unitarios. Las restantes tres, son debidas a la ortogonalidad del sistema de coordenadas. Estas restricciones se escriben en forma matricial como: $A A^T = A^T A = I_{3 \times 3}$, i.e. la inversa es igual a la transpuesta y $A \in \mathbb{R}^3$ es ortogonal. En general, el determinante de toda matriz ortogonal tiene valor ± 1 , i.e. $\det(A)^2 = \det(A) \det(A^T) = \det(A A^T) = \det(I_{3 \times 3}) = 1$.

En (Goldstein, 1950) se desarrolla el concepto de similitud entre una matriz de pequeñas rotaciones y los espacios vectoriales. Para rotaciones infinitesimales, la matriz A puede escribirse como, $A \approx I + \theta$, siendo $I = I_{3 \times 3}$ para simplificar. Luego

$$A A^{-1} \approx (I + \theta) (I - \theta) = I + \theta - \theta = I \quad (\text{A.4})$$

asumiendo $\theta \cdot \theta$ como un error de segundo orden, siendo sencillo probar que $A^{-1} = I - \theta$.

La matriz de rotación siempre se puede representar como la exponencial de una matriz antisimétrica, $A = \exp[\psi_1 E_1 + \psi_2 E_2 + \psi_3 E_3]$ donde $\{E_1, E_2, E_3\}$ se definen como:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

y el vector, $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]$ es interpretado como el producto del ángulo de rotación, ψ y el eje de giro, $\mathbf{1}_\psi$, luego $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{1}_\psi \psi$. En general se representa $A = \exp[S(\boldsymbol{\psi})]$, donde S es un isomorfismo $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow SP_3(\mathbb{R})$, donde $SP_3(\mathbb{R})$ es el grupo simpléctico de matrices antisimétricas reales de 3×3 (en detalle en (Jurdjevic, 1997)):

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & t_z & -t_y \\ -t_z & 0 & t_x \\ t_y & -t_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Es útil mencionar que el eje de rotación $\mathbf{1}_\psi$ coincide con el autovector de A asociado al autovalor

unitario. El ángulo de rotación y los componentes del eje de rotación pueden ser calculados usando la fórmula de Rodríguez (Shuster, 1993) $\cos(\psi) = \frac{1}{2}(\text{traza}(A) - 1)$.

Las matrices de rotación forman un grupo, siendo la composición la multiplicación entre matrices, y la identidad y la inversa las ya conocidas para matrices. El grupo de matrices de determinante 1 se llama grupo $SO_3(\mathbb{R})$.

A.2 Cuaterniones

Una ventaja de los cuaterniones es la de proveer una forma simple para representar las expresiones cinemáticas y una forma conveniente de expresar rotaciones sucesivas. Consideremos un espacio euclidiano \mathbb{E}^4 , con la definición usual de producto escalar. Sea \mathbf{e} el vector unitario y \mathbb{E} el complemento ortogonal al espacio vectorial desarrollado por \mathbf{e} . Entonces un elemento en E^4 puede expresarse como $\tilde{\mathbf{q}} = q_0 \mathbf{e} + \mathbf{q}$, con $q_0 \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{q} \in \mathbb{E}$. Cualquier elemento de \mathbb{E} se representa como una combinación lineal de tres vectores unitarios mutuamente ortogonales, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, de modo de tener

$$\tilde{\mathbf{q}} = q_0 \mathbf{e} + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (\text{A.6})$$

Definimos, la conjugada de un cuaternión (Kuipers, 1998) como, $\tilde{\mathbf{q}}^* = q_0 \mathbf{e} - \mathbf{q}$ y su inversa como, $\tilde{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^*$. Trabajando con cuaterniones unitarios, la inversa del mismo es igual a su conjugada. La interpretación geométrica del cuaternión unitario corresponde a una esfera en \mathbb{E}^4 , es decir, $\mathbb{S}^3 = \{\tilde{\mathbf{q}} : \|\tilde{\mathbf{q}}\| = 1\}$. Algebraicamente se puede interpretar como un grupo cuya operación binaria es el producto de cuaterniones, y el elemento identidad es el vector \mathbf{e} .

Consideremos la transformación $A : \mathbb{S}^2 \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$, tal que

$$A(\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{x} \tilde{\mathbf{q}}^* \quad (\text{A.7})$$

donde \mathbf{x} es la representación en cuaterniones del vector en \mathbb{R} . Se demuestra que (Kuipers, 1998) la longitud de los vectores se mantiene, así como también la orientación.

$$\begin{aligned} \|A(\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{x})\| &= \|\tilde{\mathbf{q}} \mathbf{x} \tilde{\mathbf{q}}^*\| = \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{x}\| \|\tilde{\mathbf{q}}^*\| = \|\mathbf{x}\| \\ A(\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= A(\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{x}) \times A(\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Debido a que la transformación del cuaternión identidad, \mathbf{e} y del negativo del mismo $-\mathbf{e}$ por la matriz $A(\cdot)$, da el mismo cuaternión identidad, i.e. $A(\mathbf{e})(\mathbf{x}) = A(-\mathbf{e})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, podemos concluir que la transformación $A(\tilde{\mathbf{q}})$ es un homomorfismo, con núcleo $(-\mathbf{e}, \mathbf{e})$. Entonces, \mathbb{S}^3 es una doble cobertura de $SO_3(\mathbb{R})$, debido al hecho que dos elementos de \mathbb{S}^3 , $\tilde{\mathbf{q}}$ y $-\tilde{\mathbf{q}}$, dan el mismo elemento de $SO_3(\mathbb{R})$.

La construcción del cuaternión unitario es una consecuencia del teorema de Euler en el que se expresa que

el desplazamiento general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de un único eje.

A.3 Ángulos de Euler

La matriz de rotación entre las ternas v y z puede ser calculada por tres sucesivas rotaciones alrededor de los ejes coordenados instantáneos. En particular, la rotación alrededor del eje longitudinal o de rolido (*roll*), seguido por una rotación alrededor del eje asociado con la normal a la órbita o eje de cabeceo (*pitch*), y llegando a la terna destino mediante un tercer giro alrededor del eje de guiñada (*yaw*) o de nadir. Esta secuencia permite desarrollar la matriz A en función de tres rotaciones, θ, ψ, ϕ llamadas *ángulos de Euler*, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Esta representación de la actitud está tratada en detalle en (Hughes, 1986), donde se analiza la geometría de todas las secuencias posibles.

Apéndice B. VALORES NUMÉRICOS DE LOS EJEMPLOS

B.1 Cohete sonda

Las inercias son $I_x = 6$, $I_\ell = 150$, ambas en sistema MKS. El peso del control se simplificó a $W_u = 1$ y el de salida es $W_n(s) = \frac{1}{2s+1}$. La matriz de asignación de toberas B_{ca} es:

$$\begin{bmatrix} -2,165 & 2,165 & 2,165 & 0 & 0 & -2,165 \\ -1,25 & -1,25 & -1,25 & 2,5 & 2,5 & -1,25 \\ -0,866 & 0,866 & -0,866 & 0,866 & -0,866 & 0,866 \end{bmatrix}$$

B.2 Satélite

Las inercias del satélite son $I_x = I_y = 353$, $I_z = 62,5$, en sistema MKS. Además

$$A = \begin{bmatrix} A_{ry} & \mathbf{0}_{5 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 5} & A_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{ry} & \mathbf{0}_{5 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & B_p \end{bmatrix}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3\omega_o^2(I_z - I_x)}{I_y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \frac{1}{I_z} & 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ 0 & \frac{1}{I_y} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$B_{ry} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{I_z} & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{ry} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\omega_o(I_y - I_z - I_x) - h_y}{I_z} & 0 & 0 \\ \frac{(4\omega_o(I_z - I_y) + h_y)\omega_o}{I_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\omega_o(I_x + I_z - I_y) + h_y)}{I_x} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_o(\omega_o(I_x - I_y) + h_y)}{I_z} & 0 & 0 \\ \frac{\omega_o}{I_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

donde $h_y = 3,177$ Nms, representa los momentos de ambas ruedas de inercia a lo largo del eje y y $\omega_o = 1,24 \cdot 10^{-3}$ 1/s es la frecuencia de rotación del satélite alrededor de la Tierra. El controlador, basado en una realimentación de estados sumada a un observador reducido, resulta:

$$K(s) \equiv \left[\begin{array}{c|ccc} A_k & B_{k1} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \hline C_{k1} & D_{k1} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & D_{k2} \end{array} \right]$$

$$A_k = \begin{bmatrix} -0,0835 & -0,0015 \\ 1,5861 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{k1} = \begin{bmatrix} 0,2938 & 0,0026 & 0,0007 \\ -2,5544 & 0,0011 & -0,0002 \end{bmatrix}$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -3,8682 & -0,0758 \\ -0,4696 & -0,0151 \end{bmatrix}$$

$$D_{k1} = \begin{bmatrix} 15,7369 & 0,1469 & 0,0521 \\ -1,6334 & 0,0161 & -0,0069 \end{bmatrix}$$

$$D_{k2} = \begin{bmatrix} -35,2803 & -0,6536 & 0,0267 \\ -1,1705 & -0,0035 & -0,0032 \end{bmatrix}$$