

LÍMITES DE DESEMPEÑO Y COMPROMISOS DE DISEÑO EN SISTEMAS DE CONTROL

María Marta Seron

*Centre for Complex Dynamic Systems and Control
School of Electrical Engineering and Computer Science
The University of Newcastle
Callaghan 2308, NSW, Australia*

Resumen: En este trabajo se describen herramientas que permiten determinar límites fundamentales de desempeño en sistemas de control en realimentación. Estos límites dependen de los polos inestables y los ceros de fase no mínima de la planta y pueden usarse para determinar especificaciones alcanzables o no alcanzables y para identificar compromisos de diseño en dichos sistemas. *Copyright ©2005 CEA-IFAC*

Palabras Clave: Limitaciones de desempeño, polos inestables, ceros de fase no mínima, respuesta al escalón, integral de Bode, integral de Poisson, control óptimo “barato”.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de un sistema de control consiste en encontrar una solución de un problema particular que satisfaga determinadas especificaciones. Es razonable, y a menudo crítico, saber cuales son las especificaciones que pueden ser logradas para la planta que se quiere controlar y cuales no, antes de encarar un determinado diseño. Esta información previa requiere el conocimiento de los límites de desempeño que la planta a controlar posee. En este trabajo se describen herramientas que permiten determinar límites fundamentales de desempeño en sistemas de control en realimentación. La esencia de estos límites radica en que se aplican a todas las posibles soluciones de un problema para una determinada planta bajo la hipótesis básica de que el sistema de control sea estable. Estos límites pueden entonces usarse para determinar especificaciones alcanzables o no alcanzables y para identificar compromisos de diseño en dichos sistemas. Más aún, el conocimiento de los límites fundamentales de desempeño permite identificar problemas de diseño que son fundamentalmente difíciles, realizar compromisos deliberados cuando se elige una solución específica

y, en lo posible, “diseñar” una planta que facilite el diseño de su controlador (Braslavsky, 2003).

Las herramientas para determinar límites fundamentales de desempeño pueden clasificarse en tres categorías:

1. Relaciones en el dominio temporal.
2. Relaciones en el dominio frecuencial.
3. Relaciones derivadas del mínimo valor posible de un costo cuadrático sin peso en el control.

En este trabajo describiremos con cierto detalle cada una de estas tres categorías y daremos referencias apropiadas para expandir lo aquí presentado. La exposición está basada fundamentalmente en (Seron *et al.*, 1997) y (Seron *et al.*, 1999).

Consideraremos sistemas dinámicos caracterizados por tres atributos fundamentales:

1. están formados por interconexiones particulares de una *parte conocida* — la planta — y una *parte a diseñar* — el controlador — cuya estructura es tal que ciertas señales que interconectan las partes son indicadoras del desempeño de todo el sistema;

2. las partes de la interconexión se modelan como mapeos entrada–salida causales, es decir, una entrada aplicada en tiempo t_0 produce una respuesta de salida para $t \geq t_0$;
3. la interconexión vista como un único sistema es *estable*, es decir, una entrada acotada produce una salida acotada (la definición se precisará más adelante).

Cuando estos atributos se combinan con un adecuado formalismo matemático (por ejemplo, las partes se modelan mediante funciones de transferencia) se pueden derivar relaciones fundamentales que describen propiedades de todo el sistema sólo en términos de la parte conocida, es decir, valen para *cualquier* elección particular de la parte a diseñar. Estas relaciones dependen de propiedades dinámicas y estructurales de la parte conocida (polos y ceros de su función de transferencia) y están expresadas en términos de funciones (de sensibilidad y sensibilidad complementaria) que cuantifican el desempeño de todo el sistema. La sección siguiente describe la interconexión en la que basaremos nuestro análisis, introduce el formalismo matemático y discute consideraciones de desempeño y robustez en términos de las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria.

1.1 Sistemas de Control

Consideremos el sistema de control en realimentación unitaria de la Figura 1.

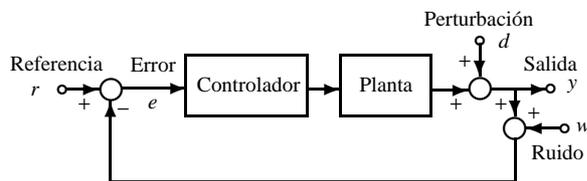


Figura 1. Sistema de control en realimentación.

Para establecer el formalismo matemático asumamos que la planta y el controlador se modelan como sistemas dinámicos de dimensión finita, lineales, estacionarios, de tiempo continuo y escalares (monoentrada y monosalida). Podemos entonces representar las señales involucradas usando la transformada de Laplace. La planta y el controlador pueden representarse por medio de funciones de transferencia $G(s)$ y $K(s)$. Asumimos que el *sistema en lazo abierto* $G(s)K(s)$ no posee modos inestables “ocultos”, es decir que no hay cancelaciones entre ceros y polos con parte real no negativa.

Definimos la *función de sensibilidad* S y la *función de sensibilidad complementaria* T como

$$S(s) \triangleq \frac{1}{1 + G(s)K(s)}, \quad (1)$$

$$T(s) \triangleq \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}. \quad (2)$$

Estas ecuaciones capturan las relaciones fundamentales para nuestro análisis. La base de dichas relaciones son las siguientes restricciones:

Restricción de Complementariedad: $S(s) + T(s) = 1$ para todo número complejo s .

Restricción de Analiticidad: si el sistema “en lazo cerrado” de la Figura 1 es *estable*, es decir, $1 + G(s)K(s)$ tiene todos sus ceros con parte real negativa, entonces las funciones T y S son *analíticas* en el semiplano complejo derecho abierto.

Restricciones de Interpolación: si q es un *cero de fase no mínima* de la planta, es decir, un cero con parte real positiva, entonces

$$S(q) = 1, \quad \text{y} \quad T(q) = 0. \quad (3)$$

De manera análoga, si p es un *polo inestable* de la planta, es decir un polo con parte real positiva, entonces

$$S(p) = 0, \quad \text{y} \quad T(p) = 1. \quad (4)$$

Las mismas restricciones se satisfacen para ceros y polos con parte real positiva del controlador.

Veremos en las Secciones 2 y 3 como estas restricciones se traducen en relaciones fundamentales para establecer límites de desempeño.

1.1.1. Consideraciones de Desempeño y Robustez

De la Figura 1 vemos que

- S mapea la referencia r al error e ;
- T mapea la referencia r a la salida y ;
- S mapea la perturbación d a la salida y ;
- T mapea el ruido de medición w a la salida y .

Si asumimos que la referencia tiene su contenido en frecuencia concentrado en bajas frecuencias entonces es razonable requerir la especificación

$$|T(j\omega)| \approx 1, \quad \forall \omega \in [0, \omega_1],$$

para cierta frecuencia ω_1 . Como $S(s) + T(s) = 1$, esto es lo mismo que

$$|S(j\omega)| \ll 1, \quad \forall \omega \in [0, \omega_1]. \quad (5)$$

Notemos que (5) también implica que las perturbaciones de salida que tengan contenido en frecuencia en el rango $[0, \omega_1]$ serán atenuadas a la salida del sistema.

Por otro lado, el ruido de medición está típicamente concentrado en altas frecuencias; entonces es razonable requerir la especificación

$$|T(j\omega)| \ll 1, \quad \forall \omega \in [\omega_2, \infty), \quad (6)$$

para cierta $\omega_2 > \omega_1$. Formas típicas para la magnitud de S y T satisfaciendo este tipo de especificaciones pueden verse en la Figura 2.

Veamos ahora consideraciones de estabilidad robusta. Si la planta real, digamos \tilde{G} , difiere del modelo nominal G , es necesario tomar precauciones adicionales para asegurar que la estabilidad del sistema se mantenga aunque el diseño del controlador se haya hecho

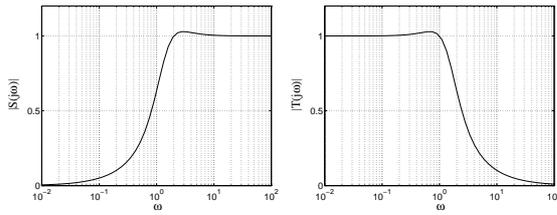


Figura 2. Formas típicas para $|S(j\omega)|$ y $|T(j\omega)|$.

en base al modelo. Una forma común de representar diferencias de modelado es mediante un modelo de incertidumbre multiplicativo, que asume

$$\tilde{G}(s) = [1 + \Delta(s)]G(s), \quad (7)$$

donde Δ es una función de transferencia estable que satisface una cota de magnitud dependiente de la frecuencia, es decir

$$|\Delta(j\omega)| \leq W(\omega), \quad \forall \omega. \quad (8)$$

Un resultado importante es que si el sistema de la Figura 1 es estable cuando la planta es G , entonces cuando la planta se reemplaza por \tilde{G} dada por (7), con Δ estable y tal que (8) se satisface, entonces el sistema sigue siendo estable si y sólo si

$$|T(j\omega)| < 1/W(\omega), \quad \forall \omega. \quad (9)$$

La cota $W(\omega)$ suele crecer a altas frecuencias ya que este modelo de incertidumbre es útil para representar errores de modelado de alta frecuencia. Por lo tanto, estabilidad robusta en presencia de incertidumbre multiplicativa típicamente requiere que $|T(j\omega)|$ sea pequeña en altas frecuencias, lo cual es consistente con la especificación (6).

Si (5) y (6) se satisfacen, los picos de S y T ocurrirán en el rango intermedio (ω_1, ω_2). Es deseable que estos picos sean pequeños para evitar excesiva sensibilidad a perturbaciones de salida o ruido de medición en ese rango. Una observación fundamental que emergerá de nuestro estudio es que los ceros de fase no mínima y los polos inestables de la planta imponen *cotas inferiores* en los picos de ambas funciones de sensibilidad.

1.2 Cronología

Presentamos aquí una breve cronología del estudio de límites de desempeño y compromisos de diseño en sistemas de control en realimentación. La exposición no intenta ser exhaustiva sino que refleja la percepción personal de la autora. Más información y referencias adicionales pueden encontrarse en los trabajos citados.

El origen del estudio de límites de desempeño y compromisos de diseño en sistemas de control puede adjudicarse al trabajo seminal de Bode en la década de 1940 que culminó con la monografía (Bode, 1945). En este trabajo, Bode utilizó la teoría de funciones analíticas con variable compleja para examinar propiedades de sistemas en realimentación en el dominio

frecuencial. Su estudio demostró que existen restricciones en el tipo de respuesta en frecuencia que puede tener un amplificador en realimentación estable. De su trabajo aplicado a sistemas de control en realimentación (Horowitz, 1963) se deduce, por ejemplo, que la función de sensibilidad, S , (definida en (1) para un caso particular) debe satisfacer la siguiente relación integral si la planta es estable:

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = 0. \quad (10)$$

Este resultado muestra que no es posible lograr una reducción arbitraria de la sensibilidad ($|S(j\omega)| < 1$) en todo punto sobre el eje imaginario, ya que si $|S(j\omega)|$ es menor que 1 en un rango de frecuencias, deberá ser mayor que 1 en algún otro rango. Este balance de áreas se ilustra en la Figura 3.

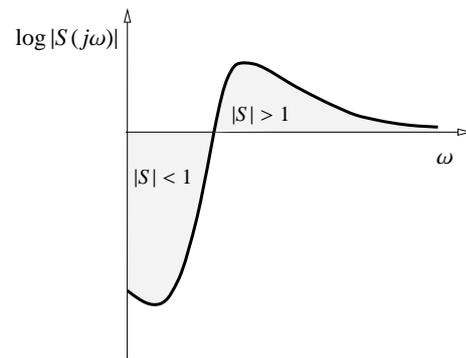


Figura 3. Balance de áreas en la integral de Bode de la función de sensibilidad.

(Francis y Zames, 1984) estudiaron las implicaciones de la presencia de ceros de fase no mínima de la planta en el contexto de optimización H_{∞} . Este trabajo demostró que si la planta tiene ceros de fase no mínima, $|S(j\omega)|$ puede hacerse arbitrariamente pequeña sobre un rango de frecuencias sólo a expensas de alcanzar picos arbitrariamente grandes fuera de ese rango. Este fenómeno es conocido como el “efecto cama de agua.”

El trabajo de (Freudenberg y Looze, 1985) amalgamó muchos de los resultados existentes y extendió las fórmulas al caso de plantas inestables. Por ejemplo, para plantas inestables, (10) deviene

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega \geq \sum_{i=1}^{n_p} p_i, \quad (11)$$

donde $\{p_i : i = 1, \dots, n_p\}$ es el conjunto de polos inestables de la planta. La relación (11) se transforma en una igualdad si el conjunto $\{p_i : i = 1, \dots, n_p\}$ incluye también los polos inestables del controlador. Otra contribución clave de (Freudenberg y Looze, 1985) fue expresar las relaciones integrales en varias formas, siguiendo la línea de Bode, por un lado, y en forma diferente utilizando integrales de Poisson, por otro lado. En particular, las integrales de Poisson permiten derivar una fórmula cerrada que muestra el efecto cama de agua que presentan las plantas de fase no mínima. Esta fórmula es conservadora si la planta tiene más de un cero de fase no mínima.

Aproximadamente en la misma época (O'Young y Francis, 1985) emplearon la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick para caracterizar, para sistemas multivariables, la menor cota superior para la función de sensibilidad sobre un rango de frecuencias bajo la condición de que la norma permanezca acotada para toda frecuencia. Esta caracterización puede utilizarse para mostrar el efecto cama de agua en sistemas multivariables de fase no mínima y es ajustada (no conservadora) para cualquier número de ceros de fase no mínima de la planta. Sin embargo, no se conoce una fórmula cerrada para esta caracterización sino que debe computarse iterativamente para cada planta.

(Freudenberg y Looze, 1987) extendieron las integrales de tipo Bode para plantas escalares con retardos. En 1988 los mismos autores publicaron la monografía (Freudenberg y Looze, 1988) que recopila los resultados para sistemas escalares y trata el caso multivariable usando valores singulares.

(Middleton, 1991) obtuvo integrales de tipo Bode para la función de sensibilidad complementaria T . Por ejemplo, la relación equivalente a (11) para un sistema que tenga al menos dos integradores puros en lazo abierto es

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \log |T(j\omega)| \frac{d\omega}{\omega^2} \geq \frac{\tau}{2} + \sum_{i=1}^{n_q} \frac{1}{q_i}, \quad (12)$$

donde $\{q_i : i = 1, \dots, n_q\}$ es el conjunto de ceros de fase no mínima de la planta y τ es un posible retardo de la planta. Este trabajo también presenta relaciones integrales en el dominio temporal que surgen de la presencia de polos inestables y ceros de fase no mínima en la planta. Estas relaciones se traducen en limitaciones de desempeño en la respuesta al escalón. Por ejemplo, el trabajo de (Middleton, 1991) demuestra que los polos inestables de la planta implican la existencia de sobrevalor e inducen un compromiso de diseño entre la magnitud de este sobrevalor y el tiempo de crecimiento de la respuesta.

Más recientemente se han publicado extensiones de los resultados anteriores a sistemas con ceros en el eje imaginario (Goodwin *et al.*, 1999), sistemas multivariables (Chen, 1995; Chen y Nett, 1995; Gómez y Goodwin, 1996; Woodyatt *et al.*, 2001; Havre y Skogestad, 2001) sistemas de estimación (Goodwin *et al.*, 1995; Goodwin y Seron, 1997), sistemas muestreados (Goodwin y Salgado, 1994; Freudenberg *et al.*, 1994; Braslavsky *et al.*, 1995) y sistemas inestacionarios y no lineales (Iglesias, 2001a; Iglesias, 2001b).

Otra línea de trabajo explora límites de desempeño desde el punto de vista del control óptimo. Este enfoque estudia el mínimo valor posible de un costo cuadrático que pondera el error de seguimiento de referencias típicas (escalones, rampas, senoides) y sin peso en el control:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y(t) - r(t)]^T [y(t) - r(t)] dt, \quad (13)$$

donde y es la salida de la planta y r es la referencia. La idea básica es que un control óptimo tendrá un desempeño cercano a su "desempeño ideal" si el peso en el control es pequeño y lo alcanzará si el peso en el control es cero. El peso en el control se escala entonces mediante un parámetro pequeño $\varepsilon > 0$ (*cheap control*) y el desempeño ideal se evalúa en el límite cuando ε tiende a cero.

(Qiu y Davison, 1993) utilizaron este enfoque para probar que, en el caso de realimentación de estados, el desempeño ideal puede caracterizarse completamente en términos de los ceros de fase no mínima de la planta. (Chen *et al.*, 2000) mostraron que en el caso de realimentación de salida unitaria (como en la Figura 1), el desempeño ideal depende tanto de los ceros de fase no mínima como de los polos inestables de la planta. Extensiones a sistemas multivariables con más salidas que entradas se publicaron en (Woodyatt *et al.*, 2002). Los trabajos (Braslavsky *et al.*, 1999) y (Jemaa y Davison, 2003) presentan resultados paralelos para sistemas de estimación. En (Seron *et al.*, 1999), para sistemas no lineales de grado relativo uno, se demostró que el mínimo valor de la norma L_2 de la salida (dada por (13) con $r(t) = 0$) es igual a la mínima energía requerida para estabilizar la *dinámica de los ceros* inestable. Este trabajo también mostró una conexión entre el mínimo valor de (13) cuando $r(t)$ es un escalón unitario y la integral de Bode para la función de sensibilidad complementaria T dada en (12). Esta conexión fue investigada en detalle y ampliada en (Middleton y Braslavsky, 2000). Extensiones a sistemas no lineales más generales pueden encontrarse en (Braslavsky *et al.*, 1998) y (Braslavsky *et al.*, 2002).

Cerramos esta sección con una breve discusión acerca de la importancia del estudio de límites de desempeño y compromisos de diseño para la ingeniería de control. En su "Bode Lecture" [primera "Bode Lecture, IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, USA, Diciembre de 1989, publicada recientemente como (Stein, 2003)], Gunter Stein utilizó el accidente en Chernobyl como ejemplo de cómo el conocimiento de estos límites puede evitar catástrofes. Por otro lado, la importancia del tema en la enseñanza de control es bien reconocida hoy día como lo demuestran, por ejemplo una serie de clases por Karl J. Åström basadas, entre otros trabajos, en su reciente artículo (Åström, 2000) y el tratamiento del tema en libros de estudio y revistas científicas. Con respecto a esto último, la revista "IEEE Transactions on Automatic Control" dedicó recientemente una edición especial al tema (Chen y Middleton, Editores invitados, 2003) y además de las monografías específicas (Freudenberg y Looze, 1988) y (Seron *et al.*, 1997), los libros más modernos de control incluyen capítulos que tratan el tema (Doyle *et al.*, 1992; Zhou *et al.*, 1996; Skogestad y Postlethwaite, 1996; Glad y Ljung, 2000; Goodwin *et al.*, 2001).

2. RELACIONES EN EL DOMINIO TEMPORAL

En esta sección combinaremos las restricciones de interpolación (3) y (4) con el siguiente resultado para obtener relaciones fundamentales en el dominio temporal para el sistema de la Figura 1.

Lema 1. Sea $H(s)$ una función de transferencia estrictamente propia¹ con todos sus polos en el semiplano complejo $\text{Re } s \leq -\alpha$, donde α es un número real positivo finito.² Sea $h(t)$ su antitransformada de Laplace, es decir

$$H(s) = \mathcal{L}h(t),$$

donde \mathcal{L} denota la transformada de Laplace. Entonces, para todo número complejo s_0 tal que $\text{Re } s_0 > -\alpha$, se verifica

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} h(t) dt = \lim_{s \rightarrow s_0} H(s).$$

Prueba. De la definición de la transformada de Laplace, para todo número complejo s en la región de convergencia de la transformada, es decir, tal que $\text{Re } s > -\alpha$, se verifica

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt.$$

El resultado es inmediato ya que s_0 está en la región de convergencia de la transformada. \square

Ahora analizaremos la *respuesta al escalón* del sistema de la Figura 1 con $r(t) = 1, d(t) = w(t) = 0, \forall t$. Estudiaremos el impacto en dicha respuesta de polos en $s = 0$ (integradores) del sistema en lazo abierto $G(s)K(s)$, y de polos inestables y ceros de fase no mínima de la planta.³ Encontraremos relaciones que se traducen en restricciones en propiedades *transitorias* del sistema, tales como *tiempo de crecimiento*, *tiempo de establecimiento*, *subvalor* y *sobrevalor* de la respuesta al escalón.

Teorema 1. (Integradores). Si el sistema de la Figura 1 es estable, entonces,

1. si $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)K(s) = c_1, 0 < |c_1| < \infty$, se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad \int_0^{\infty} e(t) dt = \frac{1}{c_1};$$

2. si $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)K(s) = c_2, 0 < |c_2| < \infty$, se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad \int_0^{\infty} e(t) dt = 0.$$

¹ Es decir, el grado del polinomio numerador es menor que el del denominador.

² Es decir, $H(s)$ es analítica en $\text{Re } s > -\alpha$.

³ Enfatizamos la planta ya que nos interesa encontrar relaciones válidas para cualquier controlador, pero resultados similares valen para polos inestables y ceros de fase no mínima del controlador.

Prueba. Sean E, Y , y R las transformadas de Laplace de e, y , y r , respectivamente. Entonces,

$$E(s) = S(s)R(s), \quad (14)$$

donde S es la función de sensibilidad definida en (1), y $R(s) = 1/s$ para un escalón unitario. En el caso (i) el sistema a lazo abierto GK tiene un polo simple en $s = 0$, es decir, $G(s)K(s) = \tilde{L}(s)/s$, donde $\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{L}(s) = c_1$. Esto se traduce en una función de sensibilidad de forma

$$S(s) = \frac{s}{s + \tilde{L}(s)},$$

y por lo tanto, de (14),

$$\lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \frac{1}{c_1}. \quad (15)$$

De (15) y el Teorema del valor final sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0.$$

De manera similar, de (15) y el Lema 1,

$$\int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \frac{1}{c_1},$$

lo que completa la prueba del caso (i).

El caso (ii) se prueba de la misma manera notando que, en este caso, el sistema en lazo abierto GK tiene un polo doble en $s = 0$. \square

Teorema 2. (Polos Inestables). Si el sistema de la Figura 1 es estable y la planta tiene un polo inestable en $s = p$ ($\text{Re } p > 0$), entonces,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e(t) dt = 0, \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt = \frac{1}{p}. \quad (17)$$

Prueba. Las hipótesis garantizan que $s = p$ está en la región de convergencia de $E(s)$, la transformada de Laplace del error. De (14), el Lema 1 y (4), sigue que

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e(t) dt = E(p) = \frac{S(p)}{p} = 0,$$

lo que prueba (16). La relación (17) se basa en (16) y el hecho de que $r = 1$, es decir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-pt} [r(t) - e(t)] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

\square

El siguiente teorema es simétrico al Teorema 2 para plantas con ceros de fase no mínima.

Teorema 3. (Ceros de Fase No Mínima). Si el sistema de la Figura 1 es estable y la planta tiene un cero de fase no mínima en $s = q$ ($\text{Re } q > 0$), entonces,

$$\int_0^{\infty} e^{-qt} e(t) dt = \frac{1}{q}, \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-qt} y(t) dt = 0. \quad (19)$$

Prueba. Similar a la prueba del Teorema 2, usando la restricción de interpolación (3). \square

Los teoremas anteriores demuestran que si la planta tiene integradores, polos inestables o ceros de fase no mínima, entonces las respuestas al escalón del error y la salida satisfacen relaciones integrales que valen para *todo* controlador que estabilice el sistema en lazo cerrado. Por ejemplo, asumiendo que el sistema está inicialmente en reposo ($y(0) = 0$, lo que implica $e(0) = y(0) - r = -1$), el Teorema 1 muestra que una combinación planta-controlador que contenga un doble integrador producirá una respuesta al escalón del error que *necesariamente* tendrá sobrevalor (cambia de signo), ya que la integral del error es cero. De manera análoga, los Teoremas 2 y 3 muestran que si la planta tiene polos o ceros *reales* con parte real mayor que cero, entonces habrá cambios de signo en las respuestas al escalón del error y de la salida.

2.1 Interpretaciones de Diseño

Veremos ahora cómo estas relaciones integrales se traducen en interpretaciones de diseño en términos de los siguientes parámetros de la respuesta al escalón: sobrevalor, subvalor, tiempo de crecimiento y tiempo de establecimiento, que se muestran en la Figura 4.

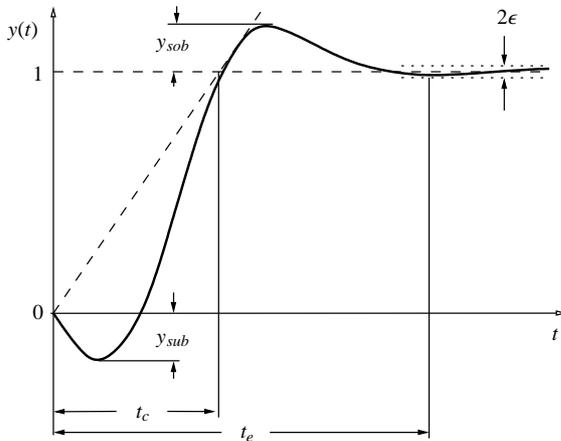


Figura 4. Parámetros de la respuesta al escalón.

Existen distintas definiciones para estos parámetros en la literatura. Para nuestros fines adoptamos las listadas a continuación, en base al sistema de control de la Figura 1. Asumimos que el sistema no tiene error estático en régimen permanente, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Sobrevalor: es el máximo valor en que la salida excede su valor de régimen permanente,

$$y_{sob} \triangleq \max_t \{-e(t)\}.$$

Subvalor: es el máximo pico negativo de la salida,

$$y_{sub} \triangleq \max_t \{-y(t)\}.$$

Tiempo de crecimiento: cuantifica aproximadamente el primer instante de tiempo en que la salida toma el valor de régimen permanente,

$$t_c \triangleq \max_{\delta} \{\delta : y(t) \leq t/\delta \text{ para todo } t \text{ en } [0, \delta]\}.$$

Tiempo de establecimiento: cuantifica el tiempo que tardan los transitorios en decaer permanentemente por debajo de un determinado nivel ε , usualmente entre el 1 y 10 % del valor de régimen permanente,

$$t_e \triangleq \min_{\delta} \{\delta : |e(t)| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \text{ en } [\delta, \infty)\}.$$

El siguiente corolario relaciona el sobrevalor con el tiempo de crecimiento para una planta inestable.

Corolario 1. (Polos Inestables y Sobrevalor). Si el sistema de la Figura 1 es estable y el sistema a lazo abierto tiene un polo inestable real, entonces la respuesta al escalón de la salida tiene sobrevalor. Si p es el polo inestable, entonces el sobrevalor y el tiempo de crecimiento t_c satisfacen las siguientes desigualdades:

$$y_{os} \geq \frac{(pt_c - 1)e^{pt_c} + 1}{pt_c} \geq \frac{pt_c}{2}. \quad (20)$$

Prueba. El Teorema 2 prueba la presencia de sobrevalor ya que $e(t)$ deberá necesariamente cambiar de signo a menos que sea idénticamente nulo. De la definición de tiempo de crecimiento sigue que $y(t) \leq t/t_c$ para $t \leq t_c$, lo que implica $e(t) \geq 1 - t/t_c$. Usando esta cota en (16) tenemos

$$-\int_{t_c}^{\infty} e^{-pt} e(t) dt \geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt. \quad (21)$$

De (21) y la definición de sobrevalor obtenemos

$$\begin{aligned} y_{os} \frac{e^{-pt_c}}{p} &= y_{os} \int_{t_c}^{\infty} e^{-pt} dt \\ &\geq \int_0^{t_c} e^{-pt} \left(1 - \frac{t}{t_c}\right) dt \\ &= \frac{(pt_c - 1) + e^{-pt_c}}{p^2 t_c}, \end{aligned}$$

de donde sigue (20). \square

El Corolario 1 muestra que si la planta tiene un polo inestable real:

- necesariamente hay sobrevalor en la respuesta al escalón
- el sobrevalor será mayor cuanto mayor sea el tiempo de crecimiento del sistema en lazo cerrado.

Se deduce que los polos inestables demandan acción de control rápida para un mejor desempeño (menor sobrevalor). Cuanto “más rápidos” (mayor magnitud) sean los polos inestables, mayor será esta demanda.

El siguiente ejemplo muestra cómo la relación entre el polo inestable y el polo dominante en lazo cerrado (que determina el tiempo de crecimiento) afecta el sobrevalor.

Ejemplo 1. Consideremos la planta

$$G(s) = \frac{s+1}{s(p-s)},$$

donde p es un número real positivo. Para esta planta se diseña un controlador en la configuración de la Figura 1 que resulta en la siguiente función de sensibilidad:

$$S(s) = \frac{\frac{s}{100}(s-p)}{\left(\frac{s}{10}+1\right)^2}.$$

Este diseño tiene la propiedad de que los dos polos del sistema a lazo cerrado están ubicados en $s = -10$ para todo valor del polo inestable de la planta p . Notar que la planta tiene un integrador por lo que el error tiende a cero en estado estacionario (Teorema 1).

La Figura 5 muestra la respuesta al escalón del sistema para valores decrecientes del polo inestable. Puede verse que para $p = 100$, que corresponde a diez veces la magnitud de los polos dominantes, el sobrevalor es mayor que el 100%, mientras que se hace cada vez más pequeño a medida que el polo decrece con respecto a la magnitud de dichos polos, haciéndose casi despreciable para $p = 1$.

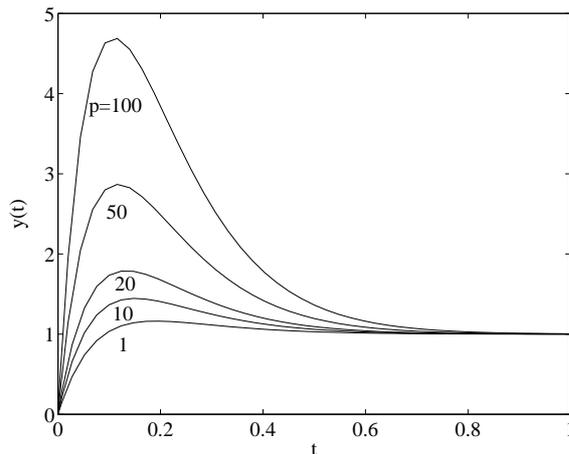


Figura 5. Respuesta al escalón de un sistema inestable.

El siguiente corolario relaciona el subvalor con el tiempo de establecimiento para una planta de fase no mínima.

Corolario 2. (Ceros de Fase No Mínima y Subvalor) Si el sistema de la Figura 1 es estable y el sistema a lazo abierto tiene un cero de fase no mínima real, entonces la respuesta al escalón de la salida tiene subvalor. Si q es el cero de fase no mínima, entonces el subvalor y el tiempo de establecimiento t_e satisfacen la siguiente desigualdad:

$$y_{us} \geq \frac{1-\epsilon}{e^{qt_e}-1}. \quad (22)$$

Prueba. Similar a la prueba del Corolario 1, usando (19) y las definiciones de tiempo de establecimiento y subvalor. \square

El Corolario 2 muestra que si la planta tiene un cero de fase no mínima real:

- necesariamente hay subvalor en la respuesta al escalón
- el subvalor será mayor cuanto menor sea el tiempo de establecimiento del sistema en lazo cerrado.

Sigue que los ceros de fase no mínima demandan acción de control lenta para un mejor desempeño (menor subvalor). Cuanto “más lentos” (menor magnitud) sean los ceros de fase no mínima, mayor será esta demanda.

El siguiente ejemplo muestra cómo la relación entre el cero de fase no mínima y el polo dominante en lazo cerrado afecta al subvalor.

Ejemplo 2. Consideremos la planta

$$G(s) = \frac{q-s}{s(s+1)},$$

donde q es un número real positivo. Para esta planta se diseña un controlador en la configuración de la Figura 1 que resulta en la siguiente función de sensibilidad complementaria:

$$T(s) = \frac{q-s}{q\left(\frac{s}{10}+1\right)^2}.$$

Este diseño tiene la propiedad de que los dos polos del sistema a lazo cerrado están ubicados en $s = -10$ para todo valor del cero de fase no mínima de la planta q . Notar que la planta tiene un integrador por lo que el error tiende a cero en estado estacionario (Teorema 1).

La Figura 6 muestra la respuesta al escalón del sistema para valores decrecientes del cero de fase no mínima. Puede verse que para $q = 100$, que corresponde a diez veces la magnitud de los polos dominantes, el subvalor es prácticamente despreciable, mientras que se hace cada vez más significativo a medida que el cero decrece con respecto a la magnitud de dichos polos.

En conclusión podemos extraer las siguientes reglas prácticas de diseño básicas para evitar sobrevalor o subvalor excesivos (Braslavsky, 2002):

1. El polo dominante en lazo cerrado debe ser mayor (en magnitud) que cualquier polo inestable en lazo abierto del sistema.
2. El polo dominante en lazo cerrado debe ser menor (en magnitud) que el menor cero de fase no mínima del sistema.

Vemos que entre las plantas inestables y de fase no mínima, aquellas que posean polos en lazo abierto a la derecha de sus ceros en el semiplano complejo dere-

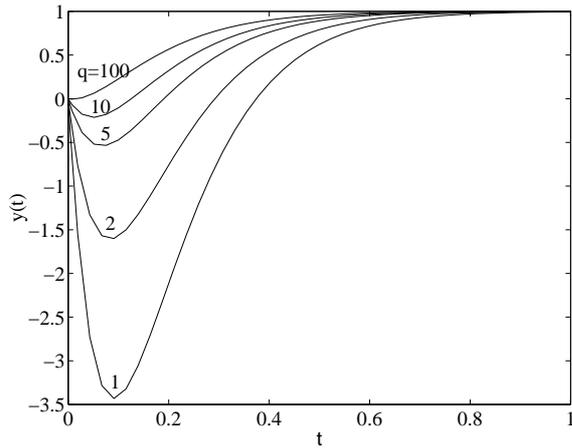


Figura 6. Respuesta al escalón de un sistema de fase no mínima.

cho abierto serán más “difíciles”, ya que no podremos satisfacer ambas reglas simultáneamente, y habrá un compromiso inevitable entre reducir el sobrevalor o el subvalor.

3. RELACIONES EN EL DOMINIO FRECUENCIAL

Ya hemos visto en la Sección 1.2 cómo la integral de Bode para S dada en (11) representa un balance de áreas en la respuesta en frecuencia (Figura 3). En el caso de la integral de Bode para T dada en (12), el balance de áreas se manifiesta si realizamos un cambio de variables $\xi = 1/\omega$ (con lo cual $d\xi = d\omega/\omega^2$) aunque en este caso la interpretación en términos de diseño no es tan evidente.

Vamos a ver ahora cómo la fórmula integral de Poisson para el semiplano puede utilizarse para derivar relaciones integrales para S y T con implicaciones de diseño de gran utilidad. Recordemos que las restricciones de interpolación implican que los polos inestables y ceros de fase no mínima de la planta y el controlador se transforman en ceros de S y T . Sean q_i , $i = 1, \dots, n_q$ los ceros de fase no mínima y p_i , $i = 1, \dots, n_p$ los polos inestables del sistema en lazo abierto $L(s) \triangleq G(s)K(s)$, respectivamente, repetidos según su multiplicidad. Introducimos los *productos de Blaschke*

$$B_S(s) = \prod_{i=1}^{n_p} \frac{p_i - s}{p_i + s}, \quad \text{y} \quad B_T(s) = \prod_{i=1}^{n_q} \frac{q_i - s}{q_i + s}, \quad (23)$$

que son funciones “pasa todo” ya que su magnitud es constante e igual a uno en el eje imaginario. Usando B_S and B_T , podemos factorizar L como

$$L(s) = \tilde{L}(s)B_S^{-1}(s)B_T(s)e^{-s\tau}, \quad (24)$$

donde $\tau \geq 0$ es un posible retardo en el sistema en lazo abierto y $\tilde{L}(s)$ es una función racional que no tiene polos ni ceros en el semiplano complejo derecho abierto. S y T pueden factorizarse entonces como

$$\begin{aligned} S(s) &= \tilde{S}(s)B_S(s), \\ T(s) &= \tilde{T}(s)B_T(s)e^{-s\tau}. \end{aligned} \quad (25)$$

Notemos que \tilde{S} y \tilde{T} no tienen ceros en el semiplano complejo derecho abierto ya que B_S y B_T extraen los ceros finitos de S y T . Por otro lado, si el sistema en lazo cerrado es estable, \tilde{S} y \tilde{T} no tienen polos en el semiplano complejo derecho cerrado. Más aún, la función $\log \tilde{S}$ es tal que $\log |\tilde{S}|/R \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, y lo mismo sucede con $\log \tilde{T}$. Todas estas propiedades permiten aplicar la fórmula integral de Poisson para el semiplano (que a su vez se basa en la fórmula integral de Cauchy) a las funciones $\log \tilde{S}$ y $\log \tilde{T}$. Esto da origen a los siguientes resultados cuya prueba puede consultarse en (Serón *et al.*, 1997).⁴ Necesitamos primero definir, para $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, $\sigma_0 > 0$, la función de peso

$$W_{s_0}(\omega) \triangleq \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2}. \quad (26)$$

Teorema 4. (Integral de Poisson para S). Supongamos que el sistema en lazo abierto L puede factorizarse como en (24) y sea q un cero de fase no mínima de L . Entonces, si el sistema en lazo cerrado es estable, la función de sensibilidad S definida en (1) satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log |S(j\omega)| W_q(\omega) d\omega = \pi \log |B_S^{-1}(q)|. \quad (27)$$

◦

Teorema 5. (Integral de Poisson para T). Supongamos que el sistema en lazo abierto L puede factorizarse como en (24) y sea p un polo inestable de L . Entonces, si el sistema en lazo cerrado es estable, la función de sensibilidad complementaria T definida en (2) satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log |T(j\omega)| W_p(\omega) d\omega = \pi \log |B_T^{-1}(p)| + \pi\sigma_p\tau. \quad (28)$$

◦

Las integrales de Poisson (27) y (28) también representan un balance entre áreas de atenuación o amplificación de sensibilidad o sensibilidad complementaria. Esto puede verse notando que la función de peso (26) es positiva para toda ω y que el lado derecho de ambas ecuaciones es no negativo ya que un producto de Blaschke B satisface $|B^{-1}(s)| \geq 1$ para s con parte real positiva.

Más aún, el balance de áreas que se deduce de (27) y (28) es más específico que el que se deduce de las integrales de Bode. La presencia de la función de peso (26) en las integrales de Poisson descarta la posibilidad de compensar un área de reducción de sensibilidad sobre un rango finito de frecuencias con un área donde $|S|$ (o $|T|$) es apenas mayor que

⁴ Estos resultados valen también cuando el sistema en lazo abierto L tiene ceros o polos en el eje imaginario.

uno sobre un rango de frecuencias arbitrariamente grande. Esto es porque la integral de (26) sobre el eje imaginario es finita e igual a π . En la Sección 3.1 veremos más propiedades de la función de peso y sus implicaciones para el diseño.

3.1 Interpretaciones de Diseño

La función de peso (26) en las integrales de Poisson (27) y (28) da cuenta explícita de la fase adicional introducida por los ceros o polos con parte real positiva.⁵ Dado un intervalo $[-\omega_1, \omega_1]$, $\omega_1 > 0$, consideremos la integral de la función de peso (26):

$$\begin{aligned}\Theta_{s_0}(\omega_1) &\triangleq \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_{s_0}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega_0 - \omega)^2} d\omega \\ &= \arctan \frac{\omega_1 - \omega_0}{\sigma_0} + \arctan \frac{\omega_1 + \omega_0}{\sigma_0}.\end{aligned}\quad (29)$$

Es fácil ver que, para un cero real $s_0 = q = \sigma_q$, resulta

$$\Theta_q(\omega_1) = -\arg \frac{\sigma_q - j\omega_1}{\sigma_q + j\omega_1},$$

mientras que para un par de ceros complejos conjugados $s_0 = q + j\bar{q}$, obtenemos

$$\Theta_q(\omega_1) = -\frac{1}{2} \left[\arg \frac{q - j\omega_1}{q + j\omega_1} + \arg \frac{\bar{q} - j\omega_1}{q + j\omega_1} \right].$$

Podemos interpretar a $\Theta_{s_0}(\omega_1)$ como la longitud del intervalo de frecuencias $[-\omega_1, \omega_1]$ “ponderada” por el cero s_0 de fase no mínima. Las ecuaciones de arriba nos dicen entonces que la longitud ponderada de dicho intervalo es igual a menos la fase adicional introducida en el extremo superior del intervalo por un cero real positivo, o menos la mitad de la fase adicional introducida por un par de ceros complejos conjugados con parte real positiva.

Esta interpretación de la longitud ponderada de un intervalo de frecuencias es útil para cuantificar mediante las integrales de Poisson el efecto de la ubicación relativa del cero de fase no mínima (o del polo inestable) con respecto a dicho intervalo. Por ejemplo, podemos caracterizar el efecto cama de agua mediante la integral de Poisson de S dada en (27), como veremos a continuación.

Supongamos, como se discutió en la Sección 1.1 [ver (5)], que el sistema de control se ha diseñado para satisfacer la siguiente especificación:

$$|S(j\omega)| \leq \alpha_1 < 1, \quad \forall \omega \in \Omega_1 \triangleq [-\omega_1, \omega_1]. \quad (30)$$

⁵ Entendemos por fase adicional introducida por un cero (o polo) con parte real positiva la diferencia entre la fase del sistema con dicho cero (o polo) y la fase de un sistema donde el cero (o polo) con parte real positiva es reemplazado por su reflexión con respecto al eje imaginario.

Si el sistema en lazo abierto tiene un cero de fase no mínima, entonces la norma infinito de la función de sensibilidad

$$\|S\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} |S(j\omega)|,$$

es decir, el pico mayor de la magnitud de su respuesta en frecuencia, tiene la cota inferior que se muestra en el siguiente resultado.

Corolario 3. (Ceros de Fase No Mínima y Efecto “Cama de Agua”) Supongamos que el sistema en lazo abierto puede factorizarse como en (24). Entonces, si el sistema en lazo cerrado es estable y satisface la especificación (30), para cada cero de L con parte real positiva, q , la función de sensibilidad satisface

$$\|S\|_\infty \geq \left(\frac{1}{\alpha_1} \right)^{\frac{\Theta_q(\omega_1)}{\pi - \Theta_q(\omega_1)}} |B_S^{-1}(q)|^{\frac{\pi}{\pi - \Theta_q(\omega_1)}}, \quad (31)$$

donde $\Theta_q(\omega_1)$ tiene la forma (29) con $s_0 = q$.

Prueba. Dividiendo el rango de integración en (27) y usando las desigualdades (30) y $|S(j\omega)| \leq \|S\|_\infty$, $\forall \omega$ obtenemos

$$\begin{aligned}\log \alpha_1 \Theta_q(\omega_1) + \log \|S\|_\infty [\pi - \Theta_q(\omega_1)] \\ \geq \pi \log |B_S^{-1}(q)|.\end{aligned}\quad (32)$$

La desigualdad (31) se obtiene aplicando la función exponencial a ambos lados de (32). \square

Es claro de (31) que la cota inferior del pico de la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad es estrictamente mayor que uno ya que $|B_S^{-1}(q)| \geq 1$, $\alpha_1 < 1$ y $\Theta_q(\omega_1) < \pi$. Otra observación importante es que si el sistema en lazo abierto tiene ceros de fase no mínima y polos inestables, entonces el pico de sensibilidad (y de sensibilidad complementaria) es mayor que uno aunque no exista un rango de reducción de sensibilidad. En efecto, supongamos que la planta tiene un cero q y un polo p , ambos reales positivos. Usando las cotas $|S(j\omega)| \leq \|S\|_\infty$, $\forall \omega$ y $|T(j\omega)| \leq \|T\|_\infty$, $\forall \omega$ y las definiciones (23) en (27) y (28) obtenemos

$$\|S\|_\infty \geq \left| \frac{p+q}{p-q} \right|, \quad (33)$$

$$\|T\|_\infty \geq \left| \frac{p+q}{p-q} \right|. \quad (34)$$

El Corolario 3 nos da la siguiente interpretación del efecto cama de agua: si el sistema en lazo abierto es de fase no mínima, el requisito de que $|S(j\omega)|$ sea pequeña sobre un rango de frecuencias necesariamente implicará la presencia de un pico de sensibilidad fuera de ese rango. La cota inferior dada en (31) depende explícitamente de la ubicación del cero de fase no mínima. Recordando nuestra discusión previa acerca de la interpretación de $\Theta_q(\omega_1)$ en términos de la fase adicional introducida por el cero de fase no mínima podemos concluir que si en $\omega = \omega_1$ la fase introducida por dicho cero es significativa (por ejemplo

$\Theta_q(\omega_1)$ es cercana a π el primer término en el lado izquierdo de (32) será grande (y negativo) por lo que se requerirá un valor grande de $\|S\|_\infty$ para satisfacer la cota inferior del lado derecho. Por otro lado, si la fase introducida por el cero en ω_1 es pequeña entonces (31) no implica un compromiso de diseño severo.

Como vimos en la Sección 1.1, además de (30), es importante imponer la condición de que la función de sensibilidad complementaria satisfaga ciertas cotas [ver (6)], por razones de robustez y para atenuar el efecto del ruido de medición. Supongamos entonces que el sistema de control se ha diseñado para satisfacer también la siguiente especificación:

$$|T(j\omega)| \leq \alpha_2 < 1, \quad \forall \omega \in \Omega_2 \triangleq [-\infty, -\omega_2] \cup [\omega_2, \infty]. \quad (35)$$

Notemos que (35) implica $|S(j\omega)| \leq 1 + \alpha_2, \forall \omega \in \Omega_2$. La Figura 7 representa las especificaciones combinadas para $|S(j\omega)|$.

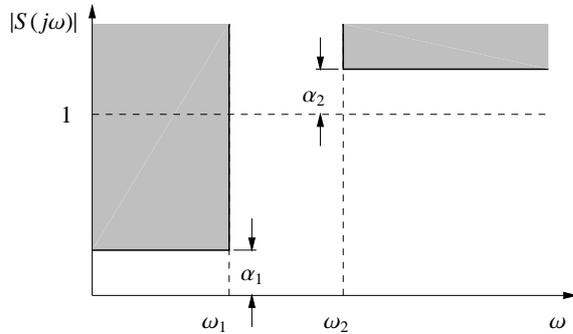


Figura 7. Especificaciones para $|S(j\omega)|$.

Usando esta información adicional de manera similar a la prueba del Corolario 3 obtenemos

$$\|S\|_\infty \geq \left(\frac{1}{\alpha_1} \right)^{\frac{\Theta_q(\omega_1)}{\Theta_q(\omega_2) - \Theta_q(\omega_1)}} \left(\frac{1}{1 + \alpha_2} \right)^{\frac{\pi - \Theta_q(\omega_2)}{\Theta_q(\omega_2) - \Theta_q(\omega_1)}} \times |B_S^{-1}(q)|^{\frac{\pi}{\Theta_q(\omega_2) - \Theta_q(\omega_1)}}. \quad (36)$$

El siguiente ejemplo examina la severidad de la cota (36).

Ejemplo 3. Supongamos que se desea controlar una planta con un cero de fase no mínima $q > 0$. Se desea que el sistema en lazo cerrado tenga una reducción de sensibilidad de al menos α_1 sobre el intervalo de frecuencias $[0, \omega_1]$, donde ω_1 se elige igual a tres cuartos del ancho de banda en lazo cerrado ω_{ab} , es decir, la especificación (30) vale con $\omega_1 = 0,75\omega_{ab}$. Usando la definición de ancho de banda en lazo cerrado⁶ pode-

⁶ La convención usual es definir el ancho de banda del sistema en lazo cerrado como la frecuencia de una senoide que produce una salida atenuada por un factor $1/\sqrt{2}$. De la definición de T en (2) sigue que el ancho de banda ω_{ab} es la frecuencia a la cual $|T(j\omega_{ab})| = 1/\sqrt{2}$.

mos escribir el requisito de ancho de banda tomando $\omega_2 = \omega_{ab}$ y $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$ en (35).

La Figura 8 muestra la cota inferior (36) como función de la posición del cero de fase no mínima relativa al ancho de banda deseado, para distintos valores de reducción de sensibilidad α_1 .

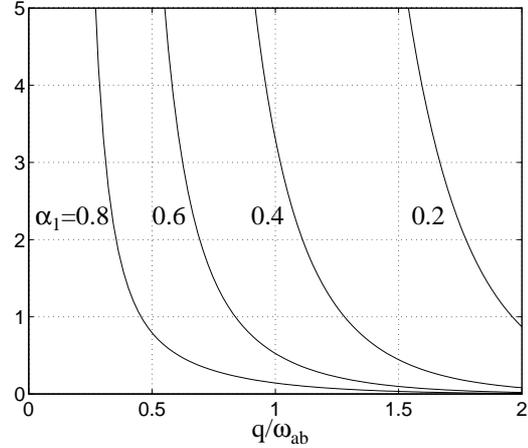


Figura 8. Cota inferior (36).

Como ya habíamos anticipado, la figura muestra que las restricciones impuestas por los ceros de fase no mínima son más severas cuanto mayor sea el ancho de banda en lazo cerrado con respecto a la posición del cero, lo que se manifiesta en picos de sensibilidad mayores. Como estos picos son indeseables desde el punto de vista de sensibilidad a perturbaciones, vemos que los ceros de fase no mínima imponen un compromiso de diseño que limita el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. ◦

4. EJEMPLO: CONFIGURACIONES DE MEDICIÓN EN UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN MAGNÉTICA

Este ejemplo está basado en el trabajo (Morse Thibeault y Smith, 2002) donde se comparan diferentes configuraciones de medición en un sistema de suspensión magnética. El sistema considerado es un sistema de dos electroimanes como se muestra en la Figura 9. Se asume que la barra en suspensión no puede rotar o doblarse y sólo se mueve en la dirección x . El punto en el cual la barra está centrada entre los electroimanes ($x = 0$) es un punto de equilibrio inestable y por lo tanto se requiere control en realimentación para lograr estabilidad alrededor de dicho punto.

Definimos $I = (I_1 + I_2)/2$ y $V = (V_1 + V_2)/2$. La dinámica linealizada alrededor del punto de operación $(x, \dot{x}, I_1, I_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2) = (0, 0, I_0, -I_0, 0, 0)$, donde I_0 es una corriente constante de polarización, es

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= k_x x(t) + k_I I(t), \\ \dot{I}(t) &= -\frac{R}{L} I(t) - \frac{I_0}{G_0} \dot{x}(t) + \frac{1}{L} V(t), \end{aligned}$$

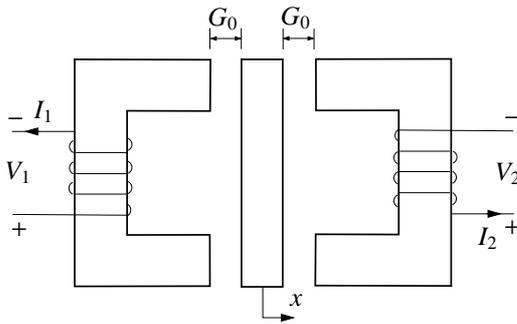


Figura 9. Sistema de suspensión magnética.

donde k_x y k_I son las constantes de fuerza correspondientes a la posición y la corriente, respectivamente, R es la resistencia de cada electroimán, L es la inductancia de los arrollamientos y G_0 es el ancho nominal del entrehierro. Los parámetros k_x , k_I y L dependen en distintas formas de características físicas del sistema como el número de arrollamientos de los electroimanes, el área de la sección del entrehierro, el ancho del entrehierro y la masa de la barra en suspensión.

Para este sistema existen varias posibles configuraciones de medición. Aquí consideraremos la configuración que utiliza como variable de medición la posición x y la que utiliza la corriente I .⁷ Las funciones de transferencia de las plantas correspondientes a cada una de estas configuraciones son

$$P^x(s) \triangleq \frac{x(s)}{V(s)} = \frac{k_I}{d(s)},$$

$$P^I(s) \triangleq \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{L}(s^2 - k_x)}{d(s)},$$

donde el supraíndice x o I indica la configuración correspondiente. Las dos transferencias tienen el mismo denominador $d(s) \triangleq s^3 + \frac{R}{L}s^2 - \frac{R}{L}k_x$, que tiene un polo inestable que llamaremos p . $P^x(s)$ no tiene ceros finitos pero $P^I(s)$ tiene un cero de fase no mínima $q = \sqrt{k_x}$.

El objetivo de control es regular x a cero en presencia de perturbaciones de fuerza f y ruido de medición w . Consideraremos el sistema de realimentación unitaria de la Figura 1 y analizaremos por separado cada configuración de medición.

Medición de Posición. Esta configuración es tal vez la más natural ya que se mide la variable que se desea controlar. Para este caso la planta es $P^x(s)$ y la perturbación de fuerza afecta al sistema como una perturbación de salida

$$d(s) = W_x(s) f(s) = \frac{\frac{1}{m}(s + \frac{R}{L})}{d(s)} f(s). \quad (37)$$

Usando las definiciones (1) y (2) tenemos entonces

$$x = S^x W_x f - T^x w. \quad (38)$$

Como el sistema es inestable, podemos utilizar la integral de Bode para S (11) y la integral de Poisson

para T (28) para deducir que habrá un balance de áreas de amplificación y reducción de sensibilidad y sensibilidad complementaria, con lo cual

$$\|S^x\|_\infty > 1, \quad \|T^x\|_\infty > 1.$$

Vemos de (37) que W_x es una función pasa bajo, lo que implica que las perturbaciones de fuerza tendrán su mayor incidencia en bajas frecuencias. Como el ruido de medición típicamente se concentra a altas frecuencias, las formas deseadas para S y T son como las que se muestran en la Figura 2. De la expresión (38) se deduce que es posible lograr que el pico de $|S|$ mayor que uno no afecte la posición si se reduce la ganancia de W_x (por ejemplo, aumentando la corriente de polarización), pero el pico de $|T|$ mayor que uno implica que esta configuración es sensible a ruido de medición.

Medición de Corriente. Esta configuración se conoce como de “auto sentido” (self-sensing) y es atractiva ya que es más simple de implementar y de más bajo costo. Para este caso la planta es $P^I(s)$ y la perturbación de fuerza afecta al sistema como una perturbación de salida

$$d(s) = W_I(s) f(s) = \frac{I_0}{mG_0} \frac{s}{d(s)} f(s). \quad (39)$$

En este caso, como se realimenta corriente pero la variable de interés sigue siendo la posición, debemos analizar una expresión más complicada que para el caso anterior, a saber

$$x = [W_x - T^I(P^x/P^I)W_I] f - T^I(P^x/P^I)w. \quad (40)$$

Como en este caso la planta es inestable y de fase no mínima se satisfacen las cotas (33) y (34), es decir

$$\|S^I\|_\infty \geq \left| \frac{p+q}{p-q} \right|, \quad \|T^I\|_\infty \geq \left| \frac{p+q}{p-q} \right|.$$

Estas cotas dependen de las posiciones relativas del cero y el polo, que a su vez dependen de los parámetros de la planta. Por ejemplo, para el sistema experimental considerado en (Morse Thibeault y Smith, 2002), si se dejan constantes todos los parámetros excepto el ancho nominal del entrehierro, la cota $\frac{p+q}{p-q}$ crece monótonamente de 4 a 27 (aproximadamente) cuando el ancho del entrehierro se varía linealmente entre 0.2mm y 0.6mm. Esto sugiere que las cotas de arriba pueden usarse para “diseñar” la planta para minimizar los picos y mejorar el desempeño y la robustez del sistema.

Como W_I en (39) tiene un cero en $s = 0$, esta configuración no puede rechazar perturbaciones de fuerza constantes. Más aún, de la expresión (40) puede verse que para que el efecto de f en x sea cercano a cero, T^I tendría que ser cercana a

$$\frac{W_x P^I}{W_I P^x} = \frac{G_0(s + \frac{R}{L})(s^2 - k_x)}{I_0 k_I s}. \quad (41)$$

Como la magnitud de esta función crece a altas frecuencias esta configuración con T^I cercana a (41) tendrá muy poca robustez; recordemos de la Sección 1.1.1 [ver (9) y discusión siguiente] que para

⁷ En (Morse Thibeault y Smith, 2002) se analiza también una configuración donde se miden ambas variables.

asegurar estabilidad robusta frente a perturbaciones multiplicativas es necesario que la magnitud de la sensibilidad complementaria sea pequeña a altas frecuencias.

Del análisis anterior se concluye que la configuración con medición de corriente tiene cotas inferiores más grandes para los picos de sensibilidad y sensibilidad complementaria que la configuración con medición de posición. Por otro lado, en la configuración con medición de corriente sólo puede atenuarse el efecto de perturbaciones de fuerza en la posición a expensas de poca robustez. Para esta última configuración también parece más crítica la elección de los parámetros del sistema para mejorar su desempeño.

Este ejemplo demuestra que es posible utilizar las relaciones que expresan límites fundamentales de desempeño para analizar las ventajas y desventajas de distintas configuraciones de medición para una misma planta, y para elegir los parámetros de la planta antes de su construcción para alivianar los compromisos de diseño que los límites implican.

5. RELACIONES DERIVADAS DEL MÍNIMO VALOR POSIBLE DE UN COSTO CUADRÁTICO SIN PESO EN EL CONTROL

Como ya adelantamos en la Sección 1.2, otra línea de trabajo estudia el mínimo valor posible de un costo cuadrático que pondera el error de seguimiento de referencias típicas (escalones, rampas, senoides) y sin peso en el control. Daremos aquí una breve descripción de este enfoque basada en (Seron *et al.*, 1999).

5.1 Control Óptimo sin Peso en el Control

Consideremos un sistema lineal (estabilizable y detectable) descrito por las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (42)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $y(t) \in \mathbb{R}^m$. El problema de control óptimo con control “barato” (cheap control) para (42) consiste en encontrar el control por realimentación de estados que minimiza el funcional de costo

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^\infty [y^T(t)y(t) + \varepsilon^2 u^T(t)u(t)] dt \quad (43)$$

cuando $\varepsilon > 0$ es pequeño.

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el valor óptimo J_ε^* tiende a J_0^* , el *desempeño ideal*. (Kwakernaak y Sivan, 1972, Teorema 3.14) probaron que $J_0^* = 0$ si y sólo si el sistema (42) es de fase mínima e invertible por derecha. (Qiu y Davison, 1993) derivaron una fórmula explícita en función de los ceros de fase no mínima del sistema. Vamos a derivar la fórmula de Qiu-Davison bajo la

hipótesis de que el sistema tiene grado relativo uno (rango $CB = m$). En este caso, existe un cambio de coordenadas $x \rightarrow (y, z)$ que transforma (42) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_1 y(t) + A_2 z(t) + B_1 u(t), \\ \dot{z}(t) &= B_0 y(t) + A_0 z(t), \end{aligned} \quad (44)$$

donde $B_1 = CB$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ y $z(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Los ceros de $C(sI - A)^{-1}B$ son los autovalores de A_0 , de ahí que $\dot{z}(t) = A_0 z(t)$ recibe el nombre de *dinámica de los ceros*. El subsistema $\dot{z}(t) = B_0 y(t) + A_0 z(t)$ representa la dinámica de los ceros “controlada” por la salida y . Asumiremos para simplificar el análisis que todos los ceros son de fase no mínima, es decir, todos los autovalores de A_0 tienen parte real positiva.

El valor óptimo del funcional de costo (43) para el sistema (44) es sólo función de las condiciones iniciales:

$$J_\varepsilon^* = V(y(0), z(0); \varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}^T P(\varepsilon) \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}, \quad (45)$$

donde $P(\varepsilon)$ es la solución definida positiva de la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_0 & A_0 \end{bmatrix}^T P(\varepsilon) + P(\varepsilon) \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_0 & A_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{\varepsilon^2} P(\varepsilon) \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P(\varepsilon). \end{aligned} \quad (46)$$

Para encontrar el límite de $P(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es necesario resolver la singularidad de (46) en $\varepsilon = 0$. Para ello, proponemos para $P(\varepsilon)$ una forma de serie de potencias en ε :

$$P(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & P_0 + \varepsilon P_3 \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2), \quad (47)$$

donde P_0, P_1, P_2 y P_3 son independientes de ε . Reemplazando (47) en (46) se obtiene

$$I - P_1 B_1 B_1^T P_1 + O(\varepsilon) = 0, \quad (48)$$

$$B_0^T P_0 - P_1 B_1 B_1^T P_2 + O(\varepsilon) = 0, \quad (49)$$

$$A_0^T P_0 + P_0 A_0 - P_2^T B_1 B_1^T P_2 + O(\varepsilon) = 0. \quad (50)$$

Haciendo $\varepsilon = 0$, se obtiene $P_1 = (B_1 B_1^T)^{-1/2}$ de (48), y $P_2 = (B_1 B_1^T)^{-1/2} B_0^T P_0$ de (49), y substituyendo estas expresiones en (50), se obtiene

$$A_0^T P_0 + P_0 A_0 = P_0 B_0 B_0^T P_0. \quad (51)$$

Como el sistema (44) es estabilizable y todos los autovalores de A_0 tienen parte real positiva, existe una única solución P_0 definida positiva de la ecuación de Riccati (51).

Finalmente, el valor óptimo (45) resulta

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^* &= V_0(z(0)) + \varepsilon V_1(y(0), z(0)) + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} z(0)^T P_0 z(0) + \varepsilon V_1(y(0), z(0)) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (52)$$

donde $V_1(y(0), z(0))$ es independiente de ε . El límite de (52) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$V_0(z(0)) = \frac{1}{2} z(0)^T P_0 z(0) \quad (53)$$

define el *desempeño ideal* del sistema (44).

Este resultado puede interpretarse como el siguiente *problema de mínima energía*: Encontrar $y(t)$ para estabilizar $\dot{z}(t) = A_0 z(t) + B_0 y(t)$ y minimizar

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^T(t)y(t) dt. \quad (54)$$

En este problema la salida del sistema y actúa como la variable de control para la dinámica de los ceros. El valor óptimo es $V_0(z(0))$ dado en (53). Notemos de (43) para $\varepsilon \rightarrow 0$ que el valor óptimo límite para el sistema completo es el mínimo valor posible de la norma L_2 de la salida. Podemos concluir entonces que el mínimo valor posible de la norma L_2 de la salida es igual a la mínima cantidad de energía requerida para estabilizar la dinámica de los ceros inestable.

5.2 Relación con la Integral de Bode para T

Aplicaremos ahora los resultados de la Sección 5.1 al problema de seguimiento de una referencia constante r para la salida y de (44). Agregando al control el término constante $\tilde{u} = -B_1^{-1}(A_1 - A_2 A_0^{-1} B_0)r$ se traslada el equilibrio de (44) a $y = r$. Mediante el cambio de variables $e = y - r$, $\tilde{z} = z + A_0^{-1} B_0 r$, y $\tilde{u} = u - \tilde{u}$, re-escribimos (44) como

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_1 e(t) + A_2 \tilde{z}(t) + B_1 \tilde{u}(t), \\ \dot{\tilde{z}}(t) &= A_0 \tilde{z}(t) + B_0 e(t). \end{aligned} \quad (55)$$

El problema de control barato para (55) es igual al que resolvimos para (44) con (e, \tilde{z}) reemplazando a (y, z) . El desempeño ideal está dado ahora por $V_0(\tilde{z}(0))$. Calcularemos ahora $V_0(\tilde{z}(0))$ para la condición inicial $e(0) = r$, $\tilde{z}(0) = A_0^{-1} B_0 r$, que en el sistema original corresponde a transferir el estado y de 0 a r .

Qiu-Davison Formula El desempeño ideal para (55) con condición inicial $e(0) = r$, $\tilde{z}(0) = A_0^{-1} B_0 r$, está dado por

$$V_0(\tilde{z}(0)) = \frac{1}{2} r^T H r,$$

donde

$$\text{traza } H = 2 \sum_{i=1}^{n_q} \frac{1}{q_i},$$

y q_1, \dots, q_{n_q} son los autovalores inestables de A_0 , es decir, los ceros de fase no mínima del sistema (55). Esta fórmula se obtiene de (53) y (51):

$$\begin{aligned} V_0(\tilde{z}(0)) &= \frac{1}{2} \tilde{z}^T(0) P_0 \tilde{z}(0) \\ &= \frac{1}{2} r^T B_0^T (A_0^T)^{-1} P_0 A_0^{-1} B_0 r \\ &\triangleq \frac{1}{2} r^T H r. \end{aligned}$$

Sigue que

$$\begin{aligned} \text{traza } H &= \text{traza}[P_0^{1/2} A_0^{-1} B_0 B_0^T (A_0^T)^{-1} P_0^{1/2}] \\ &= \text{traza}[P_0^{1/2} A_0^{-1} P_0^{-1/2} \\ &\quad + P_0^{-1/2} (A_0^T)^{-1} P_0^{1/2}] \\ &= 2 \text{traza } A_0^{-1} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n_q} \frac{1}{q_i}. \end{aligned}$$

Notamos que esta expresión es igual a un término de la fórmula de Bode para T en (12). Esto nos dice que los ceros de fase no mínima del sistema afectan de la misma forma a la respuesta en frecuencia de la sensibilidad complementaria que al mínimo valor posible del error de seguimiento de una referencia constante.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo derivamos relaciones que describen límites fundamentales de desempeño en sistemas de control en realimentación. De relaciones integrales en el dominio temporal se deduce, por ejemplo, que una planta inestable (de fase no mínima) tendrá necesariamente sobrevalor (subvalor) en la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado en una configuración de realimentación unitaria. Relaciones integrales en el dominio frecuencial demuestran, por ejemplo, que si la planta tiene ceros de fase no mínima, la magnitud de la respuesta en frecuencia de la función de sensibilidad puede hacerse arbitrariamente pequeña sobre un rango de frecuencias sólo a expensas de alcanzar picos arbitrariamente grandes fuera de ese rango. Hemos derivado cotas para los posibles valores de parámetros característicos de la respuesta al escalón y de los picos de las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria en términos de la ubicación de polos inestables y ceros de fase no mínima de la planta. Estas cotas pueden usarse para determinar especificaciones alcanzables o no alcanzables y para identificar compromisos de diseño en dichos sistemas. Finalmente, utilizando técnicas de control óptimo cuadrático sin peso en el control hemos demostrado que el desempeño ideal de un sistema de fase no mínima, dado por el mínimo valor posible de la norma L_2 de la salida, es igual a la mínima cantidad de energía requerida para estabilizar la dinámica de los ceros inestables. Por lo tanto, la presencia de dinámica de los ceros inestables representa un obstáculo estructural para alcanzar el desempeño ideal.

REFERENCIAS

- Åström, K.J. (2000). Limitations on control system performance. *European Journal of Control* 6(1), 2–20.

- Bode, H.W. (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. van Nostrand, New York.
- Braslavsky, J.H. (2002). Compromisos de Diseño en Respuesta Temporal. Notas de Clase. Control Automático 1, Automatización y Control Industrial Universidad Nacional de Quilmes, Argentina.
- Braslavsky, J.H. (2003). Tutorial 5 – Performance Limitations. ELEC4410 Control Systems Design, School of Electrical Engineering and Computer Science, The University of Newcastle, Australia.
- Braslavsky, J.H., M.M. Seron y P.V. Kokotović (1998). Near-optimal cheap control of nonlinear systems. En: *Proc. of IFAC's NOLCOS'98 (4th Nonlinear Control Systems Design Symposium)*. Twente, The Netherlands.
- Braslavsky, J.H., M.M. Seron, D.Q. Mayne y P.V. Kokotović (1999). Limiting performance of optimal linear filters. *Automatica* **35**(2), 189–199.
- Braslavsky, J.H., R.H. Middleton y J.S. Freudenberg (1995). Sensitivity and robustness of sampled-data control systems: a frequency domain viewpoint. En: *Proceedings of the 1995 American Control Conference*. Seattle, WA.
- Braslavsky, J.H., R.H. Middleton y J.S. Freudenberg (2002). Cheap control performance of a class of nonright-invertible nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* **47**(8), 1314–1319.
- Chen, J. (1995). Sensitivity integral relations and design trade-offs in linear multivariable feedback systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* **40**(10), 1700–1716.
- Chen, J. y C.N. Nett (1995). Sensitivity integrals for multivariable discrete-time systems. *Automatica* **31**(8), 113–1124.
- Chen, J. y R.H. Middleton, Editores invitados (2003). Special issue on new developments and applications in performance limitation of feedback control. *IEEE Trans. on Automatic Control* **48**(8).
- Chen, J., L. Qiu y O. Toker (2000). Limitations on maximal tracking accuracy. *IEEE Trans. on Automatic Control* **45**(2), 326–331.
- Doyle, J.C., B.A. Francis y A.R. Tannenbaum (1992). *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Company, New York.
- Francis, B.A. y G. Zames (1984). On H_∞ -optimal sensitivity theory for SISO feedback systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* **29**(1), pp. 9–16.
- Freudenberg, J.S. y D.P. Looze (1985). Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* **30**(6), 555–565.
- Freudenberg, J.S. y D.P. Looze (1987). A sensitivity tradeoff for plants with time delay. *IEEE Trans. on Automatic Control* **32**(2), 99–104.
- Freudenberg, J.S. y D.P. Looze (1988). *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*. Vol. 104 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer.
- Freudenberg, J.S., R.H. Middleton y J.H. Braslavsky (1994). Inherent design limitations for linear sampled-data feedback systems. En: *Proceedings of the American Control Conference*. Maryland. pp. 3227–3231.
- Glad, T. y L. Ljung (2000). *Control Theory: Multivariable and Nonlinear Methods*. CRC Press.
- Gómez, G.I. y G.C. Goodwin (1996). Integral constraints on sensitivity vectors for multivariable linear systems. *Automatica* **32**(4), 499–518.
- Goodwin, G.C., A.R. Woodyatt, R.H. Middleton y J. Shim (1999). Fundamental limitations due to $j\omega$ -axis zeros in siso systems. *Automatica* **35**(5), 857–863.
- Goodwin, G.C. y M.E. Salgado (1994). Frequency domain sensitivity functions for continuous time systems under sampled data control. *Automatica* **30**(8), 1263–1270.
- Goodwin, G.C. y M.M. Seron (1997). Fundamental design tradeoffs in filtering, prediction, and smoothing. *IEEE Trans. on Automatic Control* **42**(9), 1240–1251.
- Goodwin, G.C., D.Q. Mayne y J. Shim (1995). Trade-offs in linear filter design. *Automatica* **31**(10), 1367–1376.
- Goodwin, G.C., S.F. Graebe y M.E. Salgado (2001). *Principles of Control System Design*. Prentice Hall.
- Havre, K. y S. Skogestad (2001). Achievable performance of multivariable systems with unstable zeros and poles. *Int. J. Control* **74**, 1131–1139.
- Horowitz, I.M. (1963). *Synthesis of feedback systems*. Academic Press, New York.
- Iglesias, P.A. (2001a). An analogue of Bode's integral for stable nonlinear systems: relations to entropy. En: *Proc. of the 40th Conference on Decision and Control*. Vol. 4. Orlando, FL, USA. pp. 3419–3420.
- Iglesias, P.A. (2001b). An analogue of Bode's sensitivity integral for continuous-time, time-varying systems. En: *Proc. of the 2001 American Control Conference*. Vol. 1. Boston, MA, USA. pp. 529–534.
- Jemaa, L. Ben y E.J. Davison (2003). Limiting performance of optimal linear discrete filters. *Automatica* **39**(7), 1221–1226.
- Kwakernaak, H. y R. Sivan (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley.
- Middleton, R.H. y J.H. Braslavsky (2000). On the relationship between logarithmic sensitivity integrals and limiting optimal control problems. En: *Proc. of the 39th Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia.
- Middleton, R.H. (1991). Trade-offs in linear control systems design. *Automatica* **27**(2), 281–292.
- Morse Thibault, N. y R.S. Smith (2002). Magnetic bearing measurement configurations and associated robustness and performance limitations. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* **124**, 589–598.

- O'Young, S.D. y B. Francis (1985). Sensitivity tradeoffs for multivariable plants. *IEEE Trans. on Automatic Control* **30**(7), 625–632.
- Qiu, L. y E.J. Davison (1993). Performance limitations of non-minimum phase systems in the servomechanism problem. *Automatica* **29**(2), 337–349.
- Seron, M.M., J.H. Braslavsky, P.V. Kokotović y D.Q. Mayne (1999). Feedback limitations in nonlinear systems: from Bode integrals to cheap control. *IEEE Trans. on Automatic Control* **44**(4), 829–833.
- Seron, M.M., J.H. Braslavsky y G.C. Goodwin (1997). *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer.
- Skogestad, S. y I. Postlethwaite (1996). *Multivariable feedback control: analysis and design*. Wiley.
- Stein, G. (2003). Respect the unstable. *Control Systems Magazine* **23**(4), 12–25.
- Woodyatt, A.R., J.S. Freudenberg y R.H. Middleton (2001). An integral constraint for single input two output feedback systems. *Automatica* **37**(11), 1717–1726.
- Woodyatt, A.R., M.M. Seron, J.S. Freudenberg y R.H. Middleton. (2002). Cheap control tracking performance for non-right-invertible systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **12**(15), 1253–1273.
- Zhou, K., J.C. Doyle y K. Glover (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall.