

Estudio del efecto de la asimetría en problemas de rutas de vehículos

Alejandro Rodríguez Villalobos

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

CAMPUS D'ALCOI

Estudio del efecto de la asimetría en problemas de rutas de vehículos.

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

D. Alejandro Rodríguez Villalobos

Dirigida por:

Dr. D. Rubén Ruiz García

Alcoy, 20 de enero de 2012



Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional.

© Alejandro Rodríguez Villalobos

Primera edición, 2012

© de la presente edición:

Editorial Universitat Politècnica de València
www.editorial.upv.es

ISBN: 978-84-8363-847-7 (versión impresa)

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Resumen

Esta Tesis Doctoral demuestra que la realidad de las redes de transporte que caracterizan los problemas de rutas reales de las empresas, es muy compleja y asimétrica; y esto queda reflejado en las matrices de distancias (tiempos o costes) entre pares de localizaciones que son la base de todo problema de rutas.

En esta investigación, se cuantifica la medida en la que el grado de asimetría de las matrices de distancias depende de factores como el territorio y la localización de los clientes; y se subraya la importancia de la obtención de las matrices de distancias reales asimétricas y la barrera de entrada que ello supone.

El objetivo principal de esta Tesis Doctoral es cuantificar en qué medida la asimetría tiene un efecto sobre la eficiencia y eficacia de las principales heurísticas y meta-heurísticas reconocidas en la resolución de dos casos fundamentales de los problemas de rutas: el TSP y el CVRP. Adicionalmente, también se estudia el impacto de otros factores (el territorio, la localización, el número de clientes, la demanda y la capacidad máxima) en los resultados (tiempo computacional y bondad de la solución).

Mediante la realización de multitud de experimentos computacionales y análisis estadísticos de los resultados (ANOVA entre otros), se demuestra que todas las técnicas estudiadas se ven afectadas en mayor o menor medida por la asimetría y otros factores; y que las soluciones a los problemas simétricos poco o nada tienen que ver con las soluciones en el contexto asimétrico (ni cuantitativa, ni cualitativamente).

Con todo ello, se puede inferir que la asimetría tiene un efecto muy importante sobre todos los problemas de rutas de vehículos, y por tanto debe ser considerada como un factor clave de cualquier desarrollo e investigación de aplicación en el contexto real de las empresas.

Palabras clave: *asimetría, problemas de rutas de vehículos, TSP, CVRP, SIG, matrices*

Resum

Esta Tesi Doctoral demostra que la realitat de les xarxes de transport que caracteritzen els problemes de rutes reals de les empreses, és molt complexa i asimètrica; i açò queda reflectit en les matrius de distàncies (temps i cost) entre parells de localitzacions que són la base de tot problema de rutes.

En esta investigació, es quantifica la mesura en què el grau d'asimetria de les matrius de distàncies depèn de factors com el territori i la localització dels clients; i se subratlla la importància de l'obtenció de les matrius de distàncies reals asimètriques i la barrera d'entrada que això suposa.

L'objectiu principal d'esta Tesi Doctoral és quantificar en quina mesura la asimetria té un efecte sobre l'eficiència i eficàcia de les principals heurístiques i meta-heurístiques reconegudes en la resolució de dos casos fonamentals dels problemes de rutes: el TSP i el CVRP. Addicionalment, també s'estudia l'impacte d'altres factors (el territori, la localització, el nombre de clients, la demanda i la capacitat màxima) en els resultats (temps computacional i bondat de la solució).

Per mitjà de la realització de multitud d'experiments computacionals i anàlisis estadístiques dels resultats (ANOVA entre altres), es demostra que totes les tècniques estudiades es veuen afectades en major o menor mesura per la asimetria i altres factors; i que les solucions als problemes simètrics poc o res tenen a veure amb les solucions en el context asimètric (ni quantitativa, ni qualitativament).

Amb tot això, es pot inferir que la asimetria té un efecte molt important sobre tots els problemes de rutes de vehicles, i per tant ha de ser considerada com un factor clau de qualsevol desenrotllament i investigació d'aplicació en el context real de les empreses

Paraules clau: *asimetria, problemes de rutes de vehicles, TSP, CVRP, SIG, matrius*

Abstract

This PhD thesis shows that the reality of the vehicle routing problems that characterize real-world business is very complex and asymmetric, and this is reflected in the distance matrix (time or cost) between pairs of locations that are basis for all routing problems.

This research quantifies the relationship between the asymmetry degree of the distance matrix and factors such as territory and the customers location. It also underscores the importance of obtaining the real and asymmetric distance matrix.

The main objective of this thesis is to quantify the extent to which the asymmetry has an effect on the efficiency and effectiveness of the main heuristics and meta-heuristics in solving recognized two fundamental cases of routing problems: the TSP and CVRP. Additionally, it also examines the impact of other factors (territory, the location, number of customers, demand and capacity) in the results (computational time and goodness of the solution).

By performing many computational experiments and statistical analysis of results (ANOVA among others) is demonstrated that all the techniques studied are affected by the asymmetry and other factors. The solution to symmetric problems differs from asymmetric ones (either quantitatively or qualitatively).

Therefore we can infer that the asymmetry has a major impact on all vehicle routing problems, and it must be considered as a key factor in any research and development application in the real business context.

Keywords: asymmetry, vehicle routing problems, TSP, CVRP, GIS, matrix

Agradecimientos

Quiero mostrar mi sincero agradecimiento a todas aquellas personas y entidades que han colaborado o me han ayudado en alguna medida en la realización de esta Tesis, y sin las cuales, las cosas hubieran sido mucho más complicadas o simplemente imposibles.

A mi director de Tesis el profesor Dr. D. Rubén Ruiz García. Gracias por confiar en mí, y darme la oportunidad de compartir el apasionante proyecto *RoutingMaps* con un grupo fantástico de profesionales y amigos; por la lectura de este texto, por tantos y tan valiosos consejos. Gracias por tu amistad.

Al Instituto Tecnológico de Informática (ITI) y a la Universitat Politècnica de València por la mejor y más moderna infraestructura de comunicaciones y computación; y a todos sus técnicos, profesionales sin los cuales nada funcionaría.

A los investigadores: Matteo Fischetti, Boris Goldengorin y Gerold Jager, Keld Helsgaun, Yuichi Nagata, David Pisinger y Stefan Røpke por facilitar el código ejecutable de sus fantásticos algoritmos.

A los miembros del grupo de investigación Sistemas de Optimización Aplicada (SOA): Michele Ciavotta, Javier Contell, Gema Escrivá, Luis Fanjul, Carlos Fernández, Pablo Froján, Ketrina Katragjini, Kostanca Katragjini, Gerardo Minella, Catalin Placinta, Thijs Urlings y Eva Vallada. Gracias por vuestra amistad, ayuda y consejo a cualquier hora del día (o de la noche). En especial a Kostanca, Carlos, Catalin y Javier por compartir el entusiasmo y el compromiso por el trabajo bien hecho en el proyecto *RoutingMaps*.

A la profesora Francisca Sempere, mi compañera de trabajo y gran amiga; con quien seguiré compartiendo muchos proyectos y éxitos. Gracias por tu apoyo incondicional, tu paciencia, tus consejos y esa chispa que nos conecta.

Al profesor Adolfo Hilario por resolverme las dudas sobre LaTeX en la redacción y formato de esta Tesis.

A “La Pascuala” por sus excelentes almuerzos y comidas, y por ser ese lugar de encuentro, taller de grandes ideas, y cocina de tantas risas y amistad.

A mis padres Juan y Antonia, que con tanto amor, trabajo
y sacrificio consiguieron darnos a mis hermanos y a mí:
una educación, unos buenos valores y una vida llena.

A mis hermanos Vivi y Hector, y al resto de mi familia
por su gran apoyo y paciencia.

A mis yayos Mercedes y Pepe, siempre en mi recuerdo.
“aquest xiquet quin cabot que té”
Pepe (un zapatero con ingenio)

Y en especial a Mari Jose. Estuvo en el lugar adecuado en
el momento justo, y desde entonces nuestros caminos se
hicieron uno sólo; mi amor y mi vida.

*La asimetría tiene la belleza
de lo inacabado.*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	4
1.3. Estructura	5
2. Los problemas de rutas de vehículos	9
2.1. Descripción de los problemas de rutas	10
2.1.1. La red de transporte	10
2.1.2. Los clientes y su servicio	12
2.1.3. Los almacenes o depósitos	14
2.1.4. La flota de vehículos	15
2.1.5. Las rutas	15
2.2. Importancia y aplicación práctica de los problemas de rutas	16
2.3. Antecedentes e interés científico	23
2.4. Aspectos y variantes de los problemas de rutas	28
2.5. Problemas básicos en la literatura	34
2.6. Conclusiones	37
3. Modelos básicos de problemas de rutas	39
3.1. Problemas de rutas de vehículos (VRP)	40
3.1.1. Notación	42
3.2. El viajante de comercio (TSP)	43
3.3. Múltiples viajantes de comercio (m-TSP)	47
3.4. El problema clásico de rutas de vehículos	51
3.5. Vehículos capacitados (CVRP)	54
3.5.1. Extensiones al CVRP	58

3.6. Ventanas horarias (VRPTW)	60
3.6.1. Extensiones al VRPTW	64
3.7. Recogida y entrega (VRPPD)	65
3.8. Conclusiones	70
4. Asimetría: El caso del TSP	71
4.1. Justificación y objetivos	72
4.2. Algoritmos para el TSP.	74
4.2.1. NN - <i>nearest neighbor algorithm</i> (1956)	75
4.2.2. <i>2-Opt heuristic</i> (1958)	76
4.2.3. Lin y Kernighan (1973).	80
4.2.4. <i>Concorde TSP solver</i> (2003)	82
4.2.5. LK de Keld Helsgaun - LKH (1998).	85
4.3. Transformación de ATSP en TSP	86
4.3.1. Matriz asimétrica	87
4.3.2. Transformación de la matriz asimétrica	87
4.4. El mundo real es asimétrico	89
4.4.1. Los sistemas de información geográfica	89
4.4.2. Localización y medición de distancias entre puntos	94
4.4.3. Estimación de las distancias por carretera	97
4.4.4. La asimetría y los GIS	101
4.4.5. La desigualdad triangular	109
4.4.6. Medición del grado de asimetría	113
4.5. Cuestiones e hipótesis para la investigación.	120
4.6. Experimentos.	121
4.6.1. Caracterización de las instancias	122
4.6.2. Estudio detallado de la caracterización de las instancias	125
4.6.3. Estudio de las variables respuesta	135
4.6.4. Análisis de la varianza - ANOVA.	141
4.6.5. Diseño factorial	142
4.6.6. Diseño experimental - DOE	143
4.6.7. Resolución.	145
4.6.7.1. Generación de localizaciones	148
4.6.7.2. Cálculo de matrices	148
4.6.7.3. Algoritmos y cálculos de resolución	150
4.6.7.4. Procesado post-resolución	152
4.6.8. Análisis de los resultados	153
4.7. Conclusiones	153

5. Matrices asimétricas	155
5.1. El coste de la asimetría	156
5.1.1. Tiempo total de cálculo de las matrices asimétricas	158
5.1.2. Tiempo total de cálculo y tamaño de la matriz asimétrica	160
5.1.3. Tiempo total de cálculo y localización	161
5.1.4. Tiempo total de cálculo y territorio	163
5.1.5. Tiempo promedio de cálculo de las matrices asimétricas	166
5.1.6. Tiempo promedio de cálculo y tamaño de la matriz asimétrica	168
5.1.7. Tiempo promedio de cálculo y territorio	169
5.1.8. Tiempo promedio de cálculo y localización	171
5.2. La asimetría en las matrices de distancias	174
5.2.1. Asimetría y territorio	175
5.2.2. Asimetría y localización	183
5.2.3. Asimetría, territorio y localización	190
5.3. Conclusiones	196
6. Análisis de las soluciones al caso del TSP	199
6.1. Tiempos de resolución de los algoritmos	200
6.1.1. Análisis de la varianza del tiempo ($A \leftrightarrow CO$ y $M \leftrightarrow A$)	202
6.1.2. Análisis de la varianza del tiempo ($M \leftrightarrow A$ y $M \leftrightarrow T$)	208
6.1.3. Análisis de la varianza del tiempo ($M \leftrightarrow T$, $A \leftrightarrow CO$ y $A \leftrightarrow LK$)	212
6.1.4. Análisis de la varianza del tiempo ($M \leftrightarrow A$, $A = CO$ y $A = HE$)	216
6.1.5. Conclusiones a los análisis de varianza para el tiempo	219
6.2. Bondad de las soluciones de los algoritmos	225
6.2.1. Análisis de la varianza de la bondad ($A = CO$, $A = LK$, $A = HE$ y $M \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow T$)	227
6.2.2. Análisis de la varianza de la bondad ($A = CO$, $A = LK$, $A = HE$ y $M = T$)	231
6.2.3. Conclusiones a los análisis de varianza de la bondad	233
6.3. Comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP)	236
6.3.1. Análisis cuantitativo	238
6.3.2. Análisis cualitativo	247
6.3.3. Análisis gráfico	253
6.4. Conclusiones	260
7. Contraste e inferencia del TSP asimétrico	263
7.1. Algoritmos para el ATSP	263
7.1.1. Algoritmo de ramificación y poda de Fischetti et al. (2003)	264
7.1.2. Heurística mejorada GKS/TBCOP de Goldengorin et al. (2006)	265

7.2. Ampliación de los experimentos	265
7.3. Tiempos de resolución de los algoritmos	266
7.4. Bondad de las soluciones	270
7.5. Evaluación cuantitativa y cualitativa	273
7.6. Conclusiones	275
8. Asimetría: El caso del CVRP	277
8.1. Justificación y objetivos	277
8.2. Algoritmos para el CVRP	278
8.2.1. Algoritmo de Clarke y Wright (1964)	282
8.2.2. Algoritmo de barrido - <i>sweep algorithm</i> (1974)	286
8.2.3. <i>General Heuristic</i> de Pisinger y Røpke (2007)	289
8.2.4. EAX (<i>edge assembly crossover</i>) de Nagata (2007)	292
8.2.5. Heurísticas de mejora - <i>improvement heuristics</i>	294
8.3. Cuestiones e hipótesis para la investigación.	296
8.4. Experimentos.	297
8.4.1. Caracterización de las instancias	297
8.4.2. Estudio detallado de la capacidad máxima	300
8.4.3. Estudio de las variables respuesta	302
8.4.4. Diseño factorial	303
8.4.5. Diseño experimental y resolución	304
8.4.5.1. Algoritmos y cálculos de resolución	306
8.5. Conclusiones	307
9. Análisis de las soluciones en el caso del CVRP	309
9.1. Tiempos de resolución de los algoritmos.	309
9.1.1. Análisis de la varianza del tiempo (PO=1)	311
9.1.2. Tiempo de post-optimización	320
9.1.3. Tiempo de post-optimización (A<->CW)	325
9.1.4. Conclusiones a los análisis de varianza para el tiempo	327
9.2. Bondad de la solución de los algoritmos	334
9.2.1. Efecto de la post-optimización	336
9.2.2. Análisis de la varianza de la bondad (PO=1)	339
9.2.3. Análisis de la varianza de la bondad (PO=1, A=CW y A=SW)	340
9.2.4. Análisis de la varianza de la bondad (PO=1, A=NA y A=RO)	343
9.2.5. Conclusiones a los análisis de varianza de la bondad	347

9.3. Análisis de Nagata con parada a tiempo	348
9.4. Comparación cuantitativa y cualitativa de las soluciones CVRP y ACVRP	352
9.4.1. Análisis cuantitativo	354
9.4.2. Análisis gráfico	361
9.5. Conclusiones	368
10. Conclusiones	369
10.1. Aspectos relevantes de la investigación	371
10.2. Publicaciones	375
10.3. Líneas futuras de investigación	377
Referencias	383

Índice de figuras

2.1. Calles de una ciudad y sentido de circulación (Google Maps).	11
2.2. Creación del grafo que representa una red real.	11
2.3. Grafo dirigido.	12
2.4. Localización de clientes sobre una red (Google Maps).	13
2.5. Muelle de un centro de consolidación logística.	14
2.6. Flota heterogénea de un operador logístico (Logista).	16
2.7. Ejemplo de la solución a un problema básico VRP.	17
2.8. Puentes de Königsberg y grafo (a partir de Wikipedia).	24
2.9. Ejemplo de la solución óptima a un TSP pequeño.	26
2.10. Evolución en el tamaño de TSP resueltos (a partir de tsp.gatech.edu).	27
2.11. Características de los problemas de rutas (parte 1).	29
2.12. Características de los problemas de rutas (parte 2).	30
3.1. Problemas VRP básicos y sus relaciones.	41
3.2. Ejemplo de soluciones al TSP con subrutas y sin ellas.	45
3.3. Localizaciones para un problema TSP.	46
3.4. Solución óptima al TSP con distancias euclidianas.	47
3.5. Solución óptima al m-TSP con distancias euclidianas ($m = 3$ $n = 41$).	50
3.6. Detalle de la solución con 3 rutas que parten del depósito (nodo 4).	51
3.7. Solución óptima al CVRP con distancias euclidianas ($k = 3$ $n = 9$).	57
3.8. Solución óptima al OVRP con distancias euclidianas y sin envío directo ($k = 3$, $n = 9$).	60
3.9. Solución óptima al VRPTW con distancias euclidianas ($k = 3$, $n = 8$).	63
3.10. Cronograma de la solución óptima al VRPTW con distancias euclidianas ($k = 3$, $n = 8$).	64
3.11. Esquema de un VRPPD con servicios de recogida y entrega para 1 vehículo.	66
3.12. Solución óptima al VRPPD con distancias euclidianas ($k = 2$, $n = 10$).	70

4.1. Evolución del algoritmo NN en el espacio de búsqueda TSP.	76
4.2. Movimiento 2-Opt en un TSP.	78
4.3. Movimiento 3-Opt en un TSP.	80
4.4. Ejemplo de un δ -path.	81
4.5. Cartografía antigua (diversas fuentes).	91
4.6. Capas de información en un GIS.	92
4.7. Cartografía actual (Google).	93
4.8. Proyección WGS84 (elaboración a partir de Google Earth).	95
4.9. Distancia ortodrómica (elaboración a partir de Wikipedia).	96
4.10. Distancia ortodrómica entre dos localizaciones.	102
4.11. Camino mínimo entre dos localizaciones.	103
4.12. Distancia ortodrómica entre dos localizaciones	104
4.13. Camino mínimo entre dos localizaciones.	105
4.14. Triángulo ortodrómico.	106
4.15. Triángulación real.	107
4.16. Triángulo ortodrómico.	108
4.17. Triángulación real.	109
4.18. Desigualdad triángular.	110
4.19. Posibles desigualdades triangulares.	111
4.20. Cumplimiento de la desigualdad triangular.	112
4.21. Grafo completo de itinerarios (ejemplo Valencia).	119
4.22. Grafo completo de itinerarios (ejemplo Madrid).	119
4.23. Regiones de territorio de la Península Ibérica.	127
4.24. Localizaciones en distribución aleatoria.	128
4.25. Localizaciones en distribución de rejilla.	129
4.26. Localizaciones en distribución radial.	129
4.27. Territorio definido por dos localizaciones.	130
4.28. Localización radial en el geoide.	131
4.29. Ejemplo de instancia con localizaciones en distribución radial y territorio de largas distancias.	131
4.30. Ejemplo de instancia con localizaciones en distribución aleatoria y territorio de largas distancias.	132
4.31. Software para la generación y el cálculo de experimentos en el caso del TSP.	146
4.32. Cluster de computación de 30 blade servers (ITI).	147
5.1. Superficie equivalente de las matrices asimétricas.	157
5.2. Histograma de tiempos totales de obtención de matrices asimétricas.	159

5.3. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre tiempo total h y n .	161
5.4. Gráfico de dispersión: relación entre tiempo total h y n .	162
5.5. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre tiempo total h y localización.	162
5.6. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción de la localización y n en el tiempo total h .	163
5.7. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre tiempo total h y el territorio.	164
5.8. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción del territorio y n en el tiempo total h .	164
5.9. Relación entre el factor territorio, la localización, n y el tiempo total de cálculo de las matrices.	165
5.10. Histograma de tiempos promedio de obtención de arcos asimétricos.	167
5.11. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre tiempo promedio p y n .	168
5.12. Gráfico de dispersión: relación entre tiempo promedio p y n .	169
5.13. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre tiempo promedio p y el territorio.	170
5.14. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción del territorio y n en el tiempo promedio p .	170
5.15. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre tiempo promedio p y localización.	171
5.16. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción de la localización y n en el tiempo promedio p .	172
5.17. Relación entre el factor territorio, la localización, n y el tiempo promedio de cálculo de los arcos.	173
5.18. Gráfico de cajas: relación entre δ y el territorio.	180
5.19. Gráfico de dispersión: relación entre peso promedio, δ y el territorio.	182
5.20. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre peso promedio, δ y la localización.	187
5.21. Gráfico de cajas: relación entre δ y la localización.	188
5.22. Gráfico de dispersión: relación entre peso promedio, δ y la localización.	189
5.23. Relación entre el factor territorio, la localización y el grado de asimetría δ .	192
5.24. Relación entre el factor territorio, la localización, el grado de asimetría δ y el peso promedio.	193

5.25. Relación entre el factor territorio, el grado de asimetría δ y el peso promedio para todas las matrices.	194
5.26. Relación 3D entre las matrices asimétricas y las ortodrómicas.	195
6.1. Dispersión de tiempo por variantes de algoritmo.	201
6.2. Dispersión de tiempo por niveles de matriz.	202
6.3. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y los algoritmos (A \leftrightarrow CO y M \leftrightarrow A).	204
6.4. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tipo de matriz (A \leftrightarrow CO y M \leftrightarrow A).	204
6.5. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo (A \leftrightarrow CO y M \leftrightarrow A).	205
6.6. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tamaño de la matriz (A \leftrightarrow CO y M \leftrightarrow A).	206
6.7. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo (A \leftrightarrow CO y M \leftrightarrow A).	206
6.8. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el tipo de matriz en el tiempo (A \leftrightarrow CO y M \leftrightarrow A).	207
6.9. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y los algoritmos (M \leftrightarrow A y M \leftrightarrow T).	209
6.10. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tamaño de la matriz (M \leftrightarrow A y M \leftrightarrow T).	210
6.11. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo (M \leftrightarrow A y M \leftrightarrow T).	210
6.12. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el territorio (M \leftrightarrow A y M \leftrightarrow T).	211
6.13. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el territorio y el algoritmo en el tiempo (M \leftrightarrow A y M \leftrightarrow T).	212
6.14. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo (M \leftrightarrow T, A \leftrightarrow CO y A \leftrightarrow LK).	214
6.15. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo (A=CO, A=HE, M \leftrightarrow A).	214
6.16. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo (M \leftrightarrow T, A \leftrightarrow CO y A \leftrightarrow LK).	215
6.17. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tipo de matriz (M \leftrightarrow T, A \leftrightarrow CO y A \leftrightarrow LK).	215
6.18. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo (M \leftrightarrow A, A=CO y A=HE).	217

6.19. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo ($M \leftrightarrow A$, $A=CO$ y $A=HE$).	218
6.20. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el territorio y el algoritmo en el tiempo ($M \leftrightarrow A$, $A=CO$ y $A=HE$).	218
6.21. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tiempo, la localización y el algoritmo ($M \leftrightarrow A$, $A=CO$ y $A=HE$).	219
6.22. Tiempos de computación según n para todos los algoritmos y tipos de matriz.	221
6.23. Comparativa para todos los algoritmos y tipos de matriz.	222
6.24. Tiempos de computación según n de Helsgaun vs. Concorde y tipos de matriz.	223
6.25. Tiempos de computación según n para heurísticas sencillas y tipos de matriz.	224
6.26. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la bondad y los algoritmos ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow T$).	229
6.27. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la bondad y el tamaño ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow T$).	229
6.28. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la bondad y la localización ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow T$).	230
6.29. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-tamaño y la bondad ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow T$).	230
6.30. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-localización y la bondad ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow T$).	231
6.31. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la bondad y el territorio ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M=T$).	233
6.32. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la bondad y el algoritmo ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M=T$).	233
6.33. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la bondad y el tamaño de la matriz ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M=T$).	234
6.34. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción territorio-tamaño de la matriz y la bondad ($A=CO$, $A=LK$, $A=HE$ y $M=T$).	234
6.35. Histograma del incremento del indicador $\Delta ATSP$	240
6.36. Histograma del incremento del indicador $\Delta TSPA$	241
6.37. Histograma del incremento del indicador $\Delta ATSP_O$	242
6.38. Relación entre el factor territorio, la localización, el tamaño n y el indicador $\Delta ATSP$	244
6.39. Relación entre el factor territorio, el algoritmo, el tamaño n y el indicador $\Delta ATSP$	245
6.40. Histograma del incremento de la distancia Hamming ΔdH (arriba), e histograma del incremento de la distancia de adyacencia ΔdA (abajo).	248

6.41. Relación entre el factor territorio, la localización, el tamaño n y el incremento de la distancia de adyacencia ΔdA	250
6.42. Relación entre el factor territorio, el algoritmo, el tamaño n y el incremento de la distancia de adyacencia ΔdA	251
6.43. Comparación de soluciones para la instancia CC-0503 con Helsgaun.	254
6.44. Detalle del mapa para la instancia CC-0503 con Helsgaun.	255
6.45. Detalle del mapa para la instancia CC-0503 con Helsgaun.	255
6.46. Comparación de soluciones para la instancia MR-0504 con Concorde.	256
6.47. Detalle del mapa para la instancia MR-0504 con Concorde.	257
6.48. Solución de la instancia CAO4005 con Concorde.	258
6.49. Solución de la instancia CAT4005 con Concorde.	258
6.50. Comparación de soluciones para la instancia CA-4005 con Concorde.	259
7.1. Comportamiento en tiempo CPU para los algoritmos (CO, LK, HE, NA, FI, GO), según tipos y tamaño de matriz.	267
7.2. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la localización y algoritmos en el tiempo ($M=A$).	268
7.3. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el territorio y el algoritmo en el tiempo ($M=A$).	269
7.4. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tipo de matriz y el tiempo ($M \neq T$, $A \neq CO$ y $A \neq LK$).	270
7.5. Medias de ΔS_i^* según el tamaño n , algoritmos (CO, LK, HE, NA, FI, GO) y factor asimetría.	274
7.6. Histogramas para $\Delta ATSP$ (izquierda) y ΔTSP_A (derecha).	275
7.7. Histogramas para ΔdH (izquierda) y ΔdA (derecha).	276
8.1. Solución del SCVRP con distancias euclidianas ($k = 4$ $n = 14$).	279
8.2. Solución del ACVRP con distancias mínimas e itinerarios reales ($k = 4$ $n = 14$).	280
8.3. Concepto original de ahorro s_{ij} en Clarke y Wright (e.p).	283
8.4. Ejemplo de barrido en coordenadas polares (e.p).	288
8.5. Ejemplo de rutas con forma de pétalos (e.p).	289
8.6. Ejemplo de cruce EAX para el TSP (e.p).	293
8.7. Ejemplo de cruce EAX para el CVRP (e.p).	294
8.8. Distribución de probabilidad triangular para los territorios corta, media y larga distancia.	301
9.1. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el algoritmo ($PO=1$).	313

9.2. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo- n en el tiempo (PO=1).	314
9.3. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-demcap en el tiempo (PO=1).	315
9.4. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción n -demcap en el tiempo (PO=1).	315
9.5. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción localización del depósito-algoritmo en el tiempo (PO=1).	316
9.6. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción localización del depósito-algoritmo en el tiempo (A=NA, PO=1).	317
9.7. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tipo de matriz (PO=1).	318
9.8. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción asimetría-algoritmo en el tiempo (PO=1).	318
9.9. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción territorio-algoritmo en el tiempo (PO=1).	319
9.10. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción localización-algoritmo en el tiempo (PO=1).	320
9.11. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el factor post-optimización (A \leftrightarrow SW).	321
9.12. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el ΔtPO_i y los algoritmos.	325
9.13. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tamaño y los algoritmos en ΔtPO_i .	325
9.14. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tamaño y los algoritmos en ΔtPO_i .	326
9.15. Comparativa de tiempos para todos los algoritmos-tipos de matriz con el factor demcap.	329
9.16. Comparativa de tiempos para todos los algoritmos-localizaciones con el factor localización del depósito.	330
9.17. Relación 3D entre el tiempo, la demanda, el depot y los algoritmos.	331
9.18. Comparativa de tiempos para todos los algoritmos-demanda con el factor localización del depósito.	332
9.19. Relación 3D entre el tiempo, la demanda, el número de nodos y los algoritmos.	333
9.20. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre ΔS_i^* y la post-optimización.	338

9.21. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre los algoritmos y la post-optimización en ΔS_i^*	338
9.22. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-territorio en ΔS_i^* (PO=1, A=CW y A=SW).	341
9.23. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-localización del depósito en ΔS_i^* (PO=1, A=CW y A=SW).	342
9.24. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-tipo de matriz en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).	344
9.25. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-tamaño del problema en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).	345
9.26. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-localización en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).	346
9.27. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-territorio en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).	346
9.28. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre ΔS_i^* y la interacción algoritmo-demanda y capacidad máxima (PO=1, A=NA y A=RO).	347
9.29. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre ΔS_i^* y la interacción algoritmo-localización del depósito (PO=1, A=NA y A=RO).	347
9.30. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el número de nodos n y el tiempo de cómputo en el empeoramiento de la solución (NA).	350
9.31. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la asimetría y el empeoramiento de la solución (NA).	351
9.32. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el territorio y el empeoramiento de la solución (NA).	351
9.33. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la demanda-capacidad máxima y el empeoramiento de la solución (NA).	352
9.34. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la parada a tiempo, la localización y el empeoramiento de la solución.	352
9.35. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la localización del depósito y el empeoramiento de la solución.	353
9.36. Histograma del indicador $\Delta ACV RP$	355
9.37. Histograma del indicador $\Delta CV RP_A$	356
9.38. Histograma del indicador $\Delta ACV RP_O$	357
9.39. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el indicador $\Delta ACV RP$ y el territorio.	358
9.40. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el algoritmo-territorio en el indicador $\Delta ACV RP$	358

9.41. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la localización del depósito en el indicador $\Delta ACVRP$	359
9.42. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el algoritmo y la localización del depósito en el indicador $\Delta ACVRP$	359
9.43. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el territorio y la localización del depósito en el indicador $\Delta ACVRP$	360
9.44. Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el indicador $\Delta ACVRP$ y la localización de los clientes.	361
9.45. Comparación de soluciones para la instancia G-C-LC-0501 con Nagata.	362
9.46. Detalle del mapa para la instancia G-C-LC-0501 con Nagata..	363
9.47. Detalle del mapa para la instancia G-C-LC-0501 con Nagata..	363
9.48. Comparación de soluciones para la instancia G-C-MR-1001 con Røpke.	364
9.49. Detalle del mapa para la instancia G-C-MR-1001 con Røpke.	365
9.50. Detalle del mapa para la instancia G-C-MR-1001 con Røpke.	365
9.51. Comparación de soluciones para la instancia P-P-LR-4505 con Nagata.	366
9.52. Comparación de soluciones para la instancia P-A-CA-3502 con Nagata.	367
10.1. RoutingMaps - ejemplo de un TSP..	380
10.2. RoutingMaps - simulación de rutas calculadas.	380
10.3. RoutingMaps - ejemplo de un CVRP..	381
10.4. RoutingMaps - funciones avanzadas SCM.	381

Índice de tablas

2.1. Algunas aplicaciones de los problemas VRP..	23
2.2. Taxonomía y clasificación de los VRP. (1)	32
2.3. Taxonomía y clasificación de los VRP. (y 2)	33
2.4. Principales tipos de problemas VRP.	37
3.1. Notación matemática para los modelos VRP.	43
4.1. Cálculo de la ratio c_{ij}/c_{ji} .	114
4.2. Cálculo de indicadores para la ratio c_{ij}/c_{ji} .	115
4.3. Cálculo del indicador α .	116
4.4. Cálculo del indicador incremento.	117
4.5. Cálculo del indicador δ .	117
4.6. Cálculo del peso de la matriz.	118
4.7. Factor territorio y sus variantes.	127
4.8. Factores y sus variantes o niveles para el caso del TSP.	142
4.9. Siglas para los factores y sus variantes o niveles en el caso del TSP.	144
4.10. Ejemplos de nomenclatura de instancias.	144
4.11. Recursos en la generación de instancias.	150
4.12. Relación entre asimetría y heurísticas.	151
4.13. Recursos en la resolución de instancias TSP.	152
5.1. Análisis de tiempo total para la obtención de las matrices asimétricas.	158
5.2. Análisis de varianza para h - Suma de Cuadrados Tipo III.	160
5.3. Análisis de tiempo total para la obtención de arcos asimétricos.	166
5.4. Análisis de varianza para p - Suma de Cuadrados Tipo III.	167
5.5. Análisis multivariado indicadores de asimetría de las matrices.	174
5.6. Análisis de asimetría de las matrices (T=C,M=A).	175

5.7. Análisis de asimetría de las matrices (T=C, M=O).	176
5.8. Análisis de asimetría de las matrices (T=M, M=A).	177
5.9. Análisis de asimetría de las matrices (T=M, M=O).	177
5.10. Análisis de asimetría de las matrices (T=L, M=A).	178
5.11. Análisis de asimetría de las matrices (T=L, M=O).	178
5.12. Análisis de asimetría de las matrices (T=C, M, L M=A).	179
5.13. Análisis ANOVA simple - Delta por T (M = A).	179
5.14. Análisis de asimetría de las matrices (L=A, M=A).	183
5.15. Análisis de asimetría de las matrices (L=A, M=O).	183
5.16. Análisis de asimetría de las matrices (L=C, M=A).	184
5.17. Análisis de asimetría de las matrices (L=C, M=O).	184
5.18. Análisis de asimetría de las matrices (L=R, M=A).	185
5.19. Análisis de asimetría de las matrices (L=R, M=O).	185
5.20. Análisis de asimetría de las matrices (L=A..R, M=A).	186
5.21. Análisis ANOVA simple - Delta por L (M = A).	186
5.22. Análisis de varianza para Delta - Suma de Cuadrados Tipo III.	190
6.1. Análisis de varianza para tiempo - Suma de Cuadrados Tipo III.	200
6.2. Diversos análisis de varianza para tiempo.	202
6.3. Análisis de varianza para tiempo (A<->CO y M<->A) - Suma de Cuadrados Tipo III.	203
6.4. Análisis de varianza para tiempo (M<->A y M<->T) - Suma de Cuadrados Tipo III.	208
6.5. Análisis de varianza para tiempo (M<->T, A<->CO y A<->LK) - Suma de Cuadrados Tipo III.	213
6.6. Análisis de varianza para tiempo (M<->A, A=CO y A=HE) - Suma de Cuadrados Tipo III.	217
6.7. Diversos análisis de varianza para ΔS_i^* .	226
6.8. Clasificación de algoritmos TSP según su mejor solución.	226
6.9. Clasificación de algoritmos TSP según su mejor solución y el tipo de matriz.	227
6.10. Análisis de varianza para ΔS_i^* - Suma de Cuadrados Tipo III.	228
6.11. Análisis de varianza para ΔS_i^* (M=T) - Suma de Cuadrados Tipo III.	232
6.12. Análisis cuantitativo de las secuencias.	239
6.13. Análisis de varianza para $\Delta ATSP$ - Suma de Cuadrados Tipo III.	243
6.14. Análisis cualitativo de las secuencias.	247
6.15. Análisis de varianza para ΔdA - Suma de Cuadrados Tipo III.	249
7.1. Análisis de varianza para tiempo y algoritmos ATSP (M≠T, A≠CO y A≠LK).	266
7.2. Número de mejores soluciones y tasa de éxito para los algoritmos estudiados según el tipo de matriz.	271

7.3. Medias de ΔS_i^* según los factores algoritmo y tipo de matriz.	272
7.4. Medias de ΔS_i^* según los factores algoritmo y territorio.. . . .	272
7.5. Medias de ΔS_i^* según los factores algoritmo y localización.	273
8.1. Número de paradas según el territorio y una distribución triangular.	302
8.2. Factores y sus variantes o niveles para el caso del CVRP.	304
8.3. Recursos en la adaptación de instancias.	305
8.4. Relación entre asimetría, heurísticas, réplicas y post-optimización.	306
8.5. Recursos en la resolución de instancias CVRP.	307
9.1. Análisis de tiempo total de computación.	310
9.2. Análisis de varianza del tiempo con post-optimización - Suma de Cuadrados Tipo III.	312
9.3. Análisis de varianza del tiempo y del factor post-optimización (A<->SW) - Suma de Cuadrados Tipo III.. . . .	321
9.4. Análisis del incremento de tiempo con post-optimización	323
9.5. Análisis de varianza para el incremento de tiempo con post-optimización - Suma de Cuadrados Tipo III.	324
9.6. Clasificación de algoritmos CVRP según su mejor solución (única)..	334
9.7. Clasificación de algoritmos CVRP según su mejor solución y la post-optimización.. . . .	335
9.8. Clasificación de algoritmos CVRP según su mejor solución y el tipo de matriz.	336
9.9. Análisis de ΔS_i^* según la post-optimización (A<->SW)..	336
9.10. Análisis de varianza de ΔS_i^* y del factor post-optimización (A<->SW) - Suma de Cuadrados Tipo III.. . . .	337
9.11. Análisis de varianza de ΔS_i^* con post-optimización (A=CW y A=SW) - Suma de Cuadrados Tipo III.	341
9.12. Análisis de varianza de ΔS_i^* con post-optimización (A=NA y A=RO) - Suma de Cuadrados Tipo III.. . . .	344
9.13. Análisis cuantitativo de las soluciones CVRP.	354

Índice de algoritmos

4.1	Nearest Neighbor (NN)	77
4.2	Heurística de búsqueda local (2-Opt)	79
4.3	Heurística de Lin y Kernighan	83
4.4	Distancia Hamming	138
4.5	Distancia de adyacencia	140
8.1	Clarke y Wright (CW) - en paralelo	284
8.2	Algoritmo de barrido - (fase 1: <i>clustering</i>)	286
8.3	Algoritmo de barrido - (fase 2: <i>routing</i>)	287
8.4	Algoritmo ALNS	291

1 | Introducción

En este primer capítulo, se introduce y describe la estructura de los contenidos que se pueden encontrar en esta Tesis Doctoral; y se realiza una exposición de las motivaciones que han impulsado este trabajo, así como de las principales cuestiones y objetivos que se pretenden resolver y alcanzar con esta investigación.

1.1 Motivación

Los problemas de rutas de vehículos (*Vehicle Routing Problems*), de distribución física o aprovisionamiento de mercancías entre almacenes y clientes, siguen siendo en la actualidad un foco de atención y una necesidad cotidiana para la mejora de la competitividad de las empresas. La logística en general, y los problemas de rutas en particular, son una una necesidad pero también una oportunidad de mejora para muchas empresas de diversos sectores industriales y de servicios.

En la medida en la que una empresa sea capaz de tomar las correctas decisiones estratégicas, tácticas y operativas en múltiples áreas de su organización y de la cadena de valor (cadena de aprovisionamiento y distribución), será capaz de adaptarse y de mejorar en la actual coyuntura feroz de los mercados nacionales e internacionales. Una empresa que sea capaz de tomar las decisiones adecuadas en este campo, verá reflejados los resultados directamente en forma de: reducción de costes fijos y variables, mayor rentabilidad

sado este trabajo de investigación, es que al leer y analizar el estado del arte y con conocimiento de las soluciones informáticas existentes, se descubre una carencia y una aparente contradicción: La mayor parte de la literatura y de los científicos reconocen y justifican su trabajo en la aplicación práctica y real por y para las empresas, el software del mercado también tiene ese objetivo; sin embargo, al profundizar en ellos se descubre que la mayor parte de la ciencia y desarrollos hasta la fecha se basan y se validan a partir de instancias teóricas, de relativo pequeño tamaño, y con matrices de distancias entre pares de localizaciones simétricas. Esto, poco o nada tiene que ver con la realidad compleja y asimétrica de la red de transporte en la que las empresas realizan sus operaciones logísticas, ¿no es esto una contradicción?

Este trabajo de investigación pretende aportar conocimiento útil a la comunidad científica, a los desarrolladores tecnológicos y a las empresas que ayude a cubrir este diferencial existente. Se pretende demostrar la importancia de la realidad compleja que caracteriza los problemas de rutas de las empresas. Devolver el foco de atención a dicha realidad, y desvincularlo en cierta medida de las mismas y reconocidas instancias de laboratorio. En este sentido, la idea que subyace tras este trabajo es la de reorientar la ciencia de los problemas de rutas y ponerlo de nuevo al servicio de las empresas, reafrentar la compleja realidad asimétrica de las redes de transporte.

Desde el punto de vista personal, esta Tesis Doctoral supone la consolidación de una trayectoria de investigación y desarrollo que comenzó en el año 2000 y que se ha ido intensificando y centrando en la logística y los problemas de rutas desde el año 2006 hasta la actualidad; y que se espera continuar en el futuro.

1.2 Objetivos

Esta Tesis Doctoral trata de demostrar que la realidad de las redes de transporte que caracterizan los problemas de rutas reales de las empresas, poco o nada tienen que ver con las reconocidas instancias de referencia científica. La realidad es muy compleja y asimétrica, y esto queda reflejado en las matrices de distancias (tiempos o costes) entre pares de localizaciones que son la base de todo problema de rutas.

Se pretende cuantificar la medida en la que el grado de asimetría de las matrices de distancias depende de factores como el territorio y la localización de los clientes. Se subrayará la importancia de la obtención de las matrices de distancias reales asimétricas, y se valorará la barrera de entrada que ello supone para las empresas, y las soluciones informáticas desarrolladas.

Un objetivo fundamental de esta Tesis Doctoral, es averiguar y cuantificar en qué medida la asimetría tiene un efecto sobre la eficiencia y eficacia de las principales heurísticas y meta-heurísticas reconocidas en la resolución de dos casos fundamentales de los problemas de rutas: el *Travelling Salesman Problem* (TSP) y el *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP). También se estudiará la relación y el impacto de otros factores (el territorio, la localización, el número de clientes, la demanda y la capacidad máxima) en los resultados (tiempo computacional, bondad de la solución). Se quiere responder a cuestiones como: ¿Qué técnicas de resolución son las más indicadas según el caso? ¿Es posible usar técnicas de transformación de matrices asimétricas en simétricas para abordar con éxito la complejidad de la asimetría? ¿Una solución al escenario simétrico es extrapolable o válida para el escenario asimétrico análogo?

Se pretende cotejar si la asimetría de la red de transporte tiene o no un efecto particular sobre aquellos métodos basados en la geometría planar euclidiana. En el contexto de los CVRP, ¿la asimetría condicionará el coste total de las rutas de la solución y el uso de los recursos de computación?

Con todo ello se pretende inferir que la asimetría tiene un efecto muy

importante sobre todos los problemas de rutas de vehículos. Y de este modo, alentar a la comunidad científica a no pasar por alto este factor, y a considerar la asimetría (y otros factores) como claves de futuros desarrollos e investigaciones que aspiren a ser aplicados con éxito en el contexto real de las empresas.

1.3 Estructura

Esta Tesis Doctoral se estructura en cuatro grandes partes, que a su vez están divididas en un conjunto de capítulos:

Introducción y estado del arte: en esta primera parte de la Tesis Doctoral, se realiza una extensa introducción a los problemas de rutas de vehículos, así como un recorrido por su estado del arte. Se justifica desde el punto de vista práctico y científico el interés por este tipo de problemas. Se describe la tipología y los elementos que constituyen los problemas de rutas de vehículos, y su complejidad y particularidades desde el punto de vista matemático.

Capítulo 2. Los problemas de rutas de vehículos: donde se realiza una descripción general de los problemas de rutas de vehículos identificando sus elementos principales: la red de transporte, los clientes y el servicio, los almacenes o depósitos, la flota de vehículos y sus rutas. En este capítulo se justifica desde el punto de vista práctico la importancia de este tipo de problemas en diversas áreas o sectores económicos de nuestra sociedad. En este texto se describen y ordenan las características que hacen que los problemas de rutas de vehículos sean en realidad una amplia familia de problemas diferentes. Así mismo, en este capítulo se hace un recorrido histórico sobre los antecedentes de este tipo de problemas: desde las primeras referencias científicas encontradas en la literaturas hasta las variantes de los problemas estudiados en la actualidad. También se presenta una justificación del interés que la comunidad científica tiene en este tipo de problemas; todavía activo por su gran complejidad computacional y el reto que supone su resolución.

Capítulo 3. Modelos básicos de problemas de rutas: en este capítulo se presenta una tipología de los problemas y seguidamente se

describen detalladamente los modelos matemáticos para la resolución de los problemas de rutas de vehículos más conocidos; prestando atención a las diferencias existentes y extensiones desde el punto de vista matemático (formulación de objetivos y restricciones). El capítulo trata desde el problema del viajante de comercio (TSP), hasta los problemas más complejos con restricciones de ventanas de tiempo, capacidad y número de vehículos, y secuencia de entrega y recogida.

La asimetría y su efecto en el TSP: la segunda parte de la Tesis Doctoral se centra en estudiar la relación entre la asimetría de las matrices de distancias propias de las redes de transporte por carretera del mundo real (y otros factores), y su efecto en la resolución de los problemas TSP. Para ello, se utilizará un sistema de información geográfica como medio para la localización de puntos de interés, y el cálculo de distancias mínimas entre pares de localizaciones; y todo un proceso de caracterización, diseño de experimentos y análisis estadístico de las variables respuesta.

Capítulo 4. Asimetría: El caso del TSP. Aquí se completa la justificación desde el punto de vista científico y práctico, y se introducen las principales cuestiones a resolver y a analizar. En el capítulo se describen detalladamente los algoritmos y heurísticas seleccionados para la resolución del TSP. En este capítulo se tratan detalladamente conceptos básicos importantes (la localización, la distancia ortodrómica, la desigualdad triangular), así como la definición de asimetría y diferentes indicadores para su medición que serán utilizados en los análisis de los experimentos. Se plantean las primeras hipótesis, y se describe el proceso de experimentación llevado a cabo. En la parte final del presente capítulo, se introducen brevemente los análisis realizados y que se describen con más detalle en los próximos capítulos.

Capítulo 5. Matrices asimétricas: en este capítulo no se trata el resultado de los experimentos, sino que se pretende analizar algunas características de las instancias generadas y utilizadas en los experimentos. El objetivo de este capítulo es doble: por un lado, valorar el alto coste en tiempo computacional de la obtención de datos de distancias reales, esto es, de las matrices asimétricas. Por otro lado, se cuantificará el

grado de asimetría de las matrices de distancias y se analizará si existe una relación entre dicho grado de asimetría y los factores territorio y localización. Con estos análisis se pretende aportar un conocimiento útil a la comunidad científica y a las empresas, que les ayude a romper la barrera computacional que en la actualidad existe.

Capítulo 6. Análisis de las soluciones al caso del TSP: donde se realiza un conjunto de análisis de las soluciones al caso del TSP. Se estructura en tres grandes análisis, cada uno de los cuales pretende ayudar a resolver las cuestiones e hipótesis planteadas: tiempos de resolución de los algoritmos, bondad de las soluciones de los algoritmos, junto con una comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP). También, y a modo de análisis gráfico comparativo, se han incluido un conjunto de ejemplos de instancias resueltas cuidadosamente ilustrados.

Capítulo 7. Contraste e inferencia del TSP asimétrico: donde se profundiza en el estudio de la asimetría en el caso del TSP. Con la ayuda de algunos algoritmos especialmente diseñados para la resolución del ATSP, se contrastan los resultados y conclusiones alcanzados hasta este punto; y se está en disposición de inferir y generalizar las conclusiones al conjunto de algoritmos TSP y ATSP.

La asimetría y su efecto en el CVRP: en esta tercera parte de la Tesis Doctoral, nuevamente se analizará la relación entre el factor de asimetría (y otros factores), ahora en el contexto de los problemas CVRP. Gracias al estudio de ambos casos, se tratará de probar o refutar las hipótesis planteadas, y estar de disposición de generalizar las conclusiones al todo el ámbito de los problemas de rutas.

Capítulo 8. Asimetría: El caso del CVRP. Este capítulo supone la continuidad y una extensión del trabajo de investigación llevado a cabo hasta este punto. En el texto, se justifica la extensión del estudio desde un punto de vista práctico y científico, y se describen las heurísticas seleccionadas para la resolución del CVRP. Se presentarán las hipótesis del nuevo caso y se describirá el nuevo proceso de experimentación, ex-

plicando con detalle aquellos factores que son novedosos en esta parte del estudio.

Capítulo 9. Análisis de las soluciones al caso del CVRP: Se estructura en dos grandes análisis: tiempos de resolución de los algoritmos, y bondad de las soluciones de los mismos. También se incluyen algunos gráficos y mapas que ayudan a comprender las diferencias entre las soluciones de algunos ejemplos CVRP según diferentes factores. En una segunda fase del estudio se centra la atención sobre el algoritmo de Nagata y sus resultados en diferentes condiciones de tiempo límite de computación.

Capítulo 10. Conclusiones. Se resumen los aspectos más relevantes de esta investigación, las principales aportaciones y las líneas futuras de investigación. Finalmente se muestra el conjunto de publicaciones en revistas y congresos de la presente Tesis Doctoral y de la línea de investigación.

2 | Los problemas de rutas de vehículos

Este capítulo pretende introducir los problemas de rutas de vehículos. En primer lugar se describirá el problema desde un punto de vista general, identificando los elementos principales que forman parte de él: la red de transporte, los clientes y el servicio, los almacenes o depósitos, la flota de vehículos y sus rutas.

A continuación, en este capítulo se justificará la importancia y la aplicación práctica que este tipo de problemas tiene hoy en día en diversas áreas o sectores económicos de nuestra sociedad.

Se ha realizado un recorrido sobre los antecedentes históricos de este tipo de problemas. En el texto se podrán encontrar las primeras referencias científicas de la literatura, y una justificación del interés que este tipo de problemas despertó en la comunidad científica. Este interés todavía sigue activo, debido en gran parte a la complejidad computacional de los problemas y el reto que supone su resolución.

Para terminar el capítulo, se expondrá una clasificación de las principales variantes de problemas estudiados en la literatura científica hasta la fecha.

2.1 Descripción de los problemas de rutas

Los problemas de rutas de vehículos o de distribución física de mercancías desde almacenes a clientes aparecen en la literatura científica como *Vehicle Routing Problems*, más comúnmente como VRP. También se puede encontrar, aunque en menor medida, referencias como *Vehicle Scheduling Problems*.

En términos generales, un problema de rutas de vehículos consiste en determinar las rutas de un conjunto (o flota) de vehículos que deben iniciar un recorrido (y finalizarlo) en los almacenes (o depósitos) para atender la demanda de servicio de un conjunto disperso de clientes sobre una red. Como se verá más adelante, las diferentes características de los clientes, la demanda, los almacenes y los vehículos, así como de las restricciones operativas sobre las rutas, horarios, etc. dan lugar a gran número de variantes del problema.

2.1.1 La red de transporte

La red de carreteras utilizada para el transporte de bienes, se describe generalmente como un grafo donde los arcos representan los segmentos o secciones de las vías, y los vértices corresponden a las uniones o nodos de la red. En algunos casos los clientes o los depósitos pueden estar situados en dichos nodos, mientras que en otros casos pueden estar localizados en un arco del grafo. Los arcos (y por consiguiente el grafo) pueden ser dirigidos o no dirigidos, dependiendo de si pueden ser circulados en un único sentido o en ambos (por ejemplo, calles de una única dirección o de ambos sentidos de circulación). La siguiente Figura 2.1 muestra a modo de ejemplo un plano de una sección de una ciudad con sus calles y su sentido de circulación.

En la siguiente Figura 2.2 (en adelante, todas las figuras son de elaboración propia si no se cita la fuente) se puede observar como a partir de la red real antes presentada, se puede modelar su grafo. Por último, la Figura 2.3 muestra el grafo dirigido resultante.

Cada arco puede tener asociado un coste que puede representar su longitud en distancia, el tiempo de viaje, o el coste monetario del mismo. Alguno



Figura 2.1: Calles de una ciudad y sentido de circulación (Google Maps).

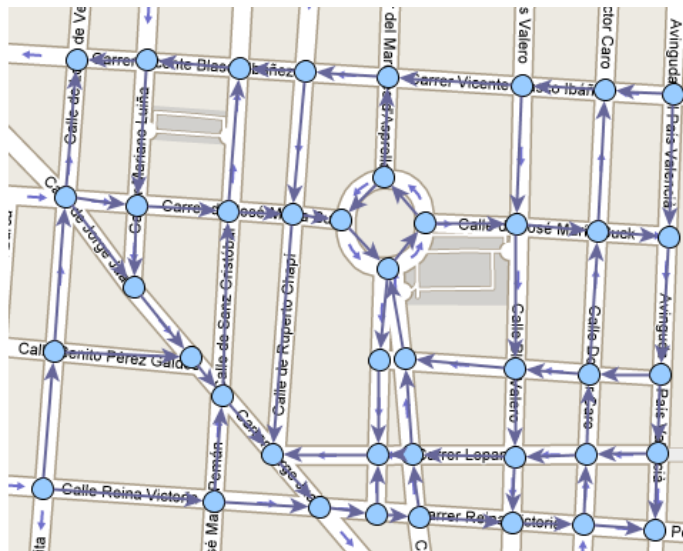


Figura 2.2: Creación del grafo que representa una red real.

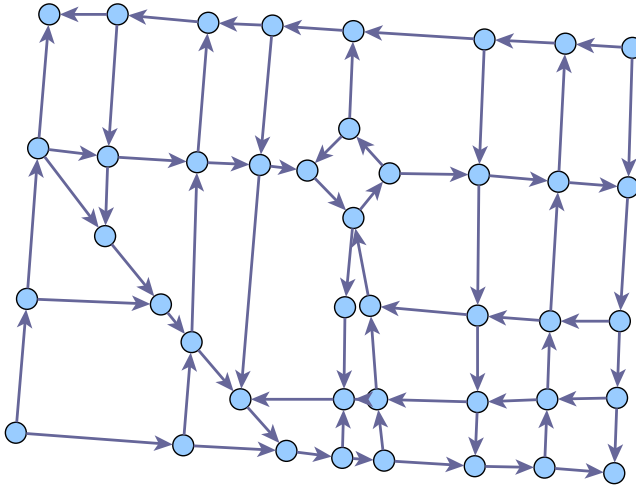


Figura 2.3: Grafo dirigido.

de estos parámetros pueden a su vez depender del tipo de vehículo o del momento en el que se recorra este arco (por ejemplo, las condiciones del tráfico en un momento dado).

2.1.2 Los clientes y su servicio

Cada cliente tendrá cierta necesidad de servicio o demanda que deberá ser atendida por algún vehículo. Es común que la demanda sea la necesidad de un conjunto de productos que ocupan volumen y peso en los vehículos, y como la capacidad de transporte del vehículo es limitada, es usual que un mismo vehículo no pueda satisfacer la demanda de todos los clientes. El servicio a los clientes no siempre implica distribuir producto desde el almacén hacia ellos, también puede entenderse que los clientes son proveedores, y por tanto se trataría de recoger mercancía para aprovisionar un almacén. En el caso de tratarse de una necesidad de servicio, el cliente simplemente debe ser visitado por el vehículo. Un mismo vehículo podría (en teoría) visitar a todos los clientes.

El servicio requerido por el cliente podría ser también el de ser transportado hacia otra ubicación (servicio de transporte). En muchas ocasiones se trata de visitar al cliente exactamente una vez, sin embargo, en otros casos puede aceptarse que su demanda pueda ser atendida de manera fragmentada o por vehículos diferentes. Los clientes podrían tener restricciones de horario, en forma de intervalos o ventanas de tiempo dentro de las cuales se debe atender su servicio. También podría tenerse en cuenta no sólo el tiempo de recorrido por la red, sino el tiempo de servicio al cliente (carga y descarga). También podrían existir restricciones de asociación entre vehículos y clientes, de manera que determinados clientes sólo puedan ser atendidos por determinados vehículos (por ejemplo, vehículos grandes y pesados que no pueden circular por calles estrechas o el centro urbano). La siguiente Figura 2.4 muestra un ejemplo de localización de clientes sobre una red.

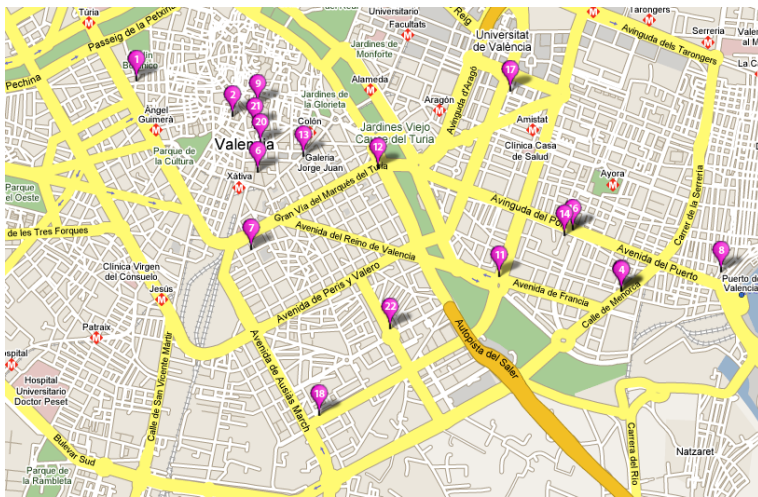


Figura 2.4: Localización de clientes sobre una red (Google Maps).

Nótese que el grafo completo de la red de transporte podría simplificarse en un grafo reducido que sólo incluyera la información (nodos y arcos) de la parte de la red que constituye el problema a tratar. Otra transformación (simplificación) del grafo consiste en identificar a los nodos del mismo como

los puntos de paso o parada de las rutas (clientes, depósitos, almacenes, etc.), y a cada arco como el itinerario o camino mínimo entre un par de nodos.

2.1.3 Los almacenes o depósitos

Tanto los productos a transportar (si los hubiera) como los vehículos, suelen estar localizados en los depósitos (almacenes, centros de tránsito, muelles o cocheras). Es habitual que las rutas den comienzo y/o finalicen en dichos depósitos. Aunque en algunos casos es diferente (por ejemplo, el viaje debe finalizar donde pernocta o finaliza la jornada el conductor). Pueden existir varios almacenes o depósitos con localización y otras características diferenciadoras (capacidad máxima de servicio o producción, horario, flota en origen, etc.). Debido al tiempo y espacio necesario para preparar y gestionar los vehículos, podría darse el caso de limitar el número de vehículos que operan a la vez en un mismo depósito (congestión de muelles). La Figura 2.5 muestra a modo de ejemplo un muelle de un centro de consolidación logística.



Figura 2.5: Muelle de un centro de consolidación logística.

2.1.4 La flota de vehículos

Los vehículos se definen por un conjunto de atributos, como su capacidad de carga en peso, en volumen, sus costes asociados, etc. En un vehículo se pueden transportar diferentes tipos de productos o uno sólo, asimismo su contenedor podría estar compartimentado o no. En la utilización de un vehículo se incurre en unos costes fijos por uso, y variables en función del tiempo, distancia u otros parámetros. Cuando los vehículos comparten unas mismas características se dice que la flota es homogénea, y si son diferentes flota heterogénea. El número de vehículos disponibles de una flota puede ser un dato conocido o una variable de decisión. Es común que el objetivo sea intentar utilizar la menor cantidad de vehículos y en segundo lugar minimizar la distancia o tiempo empleado de su ruta.

La legislación o los convenios laborales pueden imponer restricciones sobre el tiempo máximo que un vehículo debe estar en circulación (descanso o relevo de conductores), su velocidad y carga máxima, e incluso el paso por determinadas zonas de la red. Es interesante en ocasiones intentar equilibrar las cargas de trabajo de los conductores, el tiempo o carga de los vehículos. La Figura 2.6 muestra a modo de ejemplo una parte de la flota de vehículos del operador Logista.

2.1.5 Las rutas

Los problemas de rutas de vehículos tratan por tanto de determinar la ruta o rutas para cada uno de los vehículos de la flota cumpliendo con todo el conjunto de restricciones y optimizando la función objetivo; que puede ser por ejemplo: minimizar los costes fijos, minimizar los costes totales, minimizar el número de vehículos requeridos, minimizar el tiempo total de transporte y/o la distancia total recorrida, minimizar las esperas, maximizar el beneficio de la operación, maximizar la función de utilidad del cliente, o su beneficio y satisfacción, entre muchas otras.

En general, en la literatura se asume que un vehículo sólo recorrerá una



Figura 2.6: Flota heterogénea de un operador logístico (Logista).

ruta en el período de planificación, pero también se pueden encontrar modelos en los que un mismo vehículo podría participar de más de una ruta. La Figura 2.7 (aportada a Wikipedia) representa un ejemplo típico de solución a un problema de rutas. En la figura se pueden observar 4 rutas diferentes con origen y destino final en el depósito central. Los arcos de la ruta solución deben ser necesariamente arcos de la red de transporte.

2.2 Importancia y aplicación práctica de los problemas de rutas

Todos los años, diferentes organismos oficiales, agrupaciones de empresarios y otros institutos y centros para la promoción de la logística realizan y publican estudios sobre la importancia del transporte por carretera en nuestro país. Como se verá a continuación, en ellos el transporte por carretera aparece subrayado como un sector económico de vital importancia para España, tanto en términos de Valor Añadido Bruto Nacional como en cuanto al flujo de mercancías y pasajeros.

Sin embargo, como se describe más adelante, la estructura organizativa, los medios y técnicas de gestión de las empresas que forman este sector,

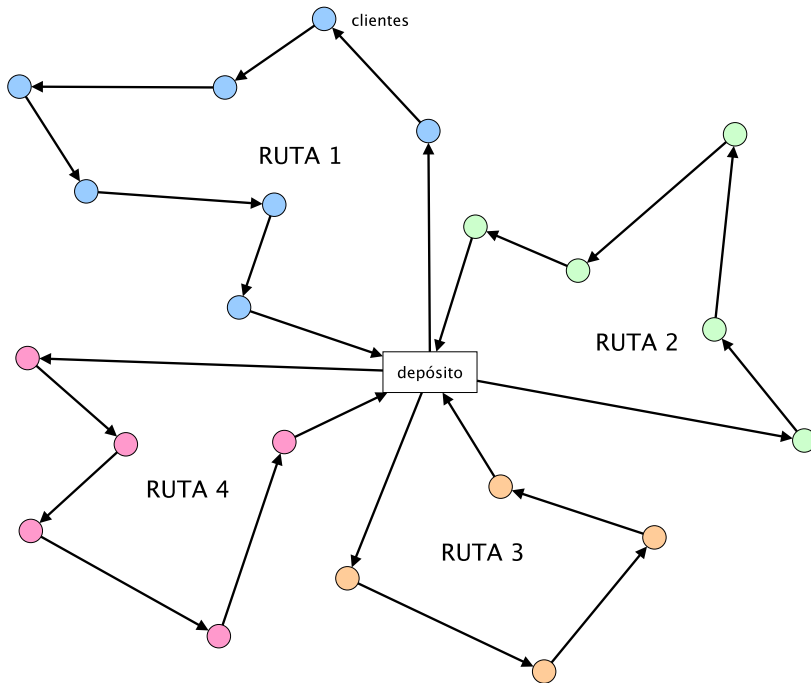


Figura 2.7: Ejemplo de la solución a un problema básico VRP.

parecen no estar en concordancia con dicha importancia. En esta sección se justifica la aplicación práctica de los problemas de rutas y las técnicas de investigación operativa en las empresas de nuestro entorno económico.

Según un estudio realizado por [Fomento y Consultrans \(2001\)](#):

“ El transporte es uno de los sectores que más aporta a la generación de riqueza (aprox. 5,8 % del Valor Añadido Bruto Nacional de España). La estabilidad en términos de crecimiento del PIB que presenta el transporte por carretera parece ajena a oscilaciones cíclicas de la actividad económica general; con unas tasas de crecimiento sensiblemente superiores a las de las ramas de actividad en las que se encuadra. El transporte por carretera muestra un

comportamiento netamente superior al resto de los modos y actividades de transporte (ferroviario, marítimo y aéreo) en cuanto a generación de valor por parte de los operadores españoles. Por el contrario, el sector del transporte está integrado en su mayoría por pequeñas empresas, con desigual situación frente a la formación de sus trabajadores. Una gran parte del tejido empresarial se mantiene con estructuras anticuadas en su funcionamiento y la formación no forma parte de su cultura.”

Además, en ese mismo estudio, se afirma que el equipamiento informático del sector es escaso y su hábito de uso mínimo. Según el estudio de [de Frias \(2006\)](#):

“ El transporte por carretera es el modo de transporte con mayor producción ($334\,081 \cdot 10^6$ toneladas-km) en el transporte interior de mercancías con un 84,2 % de las toneladas-kilómetro producidas en el año 2004. Este peso del transporte por carretera ha ido aumentando a lo largo de los últimos años (1995-2004) a costa del transporte marítimo y por ferrocarril. En el transporte internacional de mercancías el transporte de mercancías por carretera tiene un peso importante en las exportaciones. En cuanto al transporte de pasajeros ($410\,163 \cdot 10^6$ viajeros-km), el transporte por carretera representa en España el 90,5 % del total de viajeros-kilómetro en el año 2004. Sin embargo su tasa de crecimiento desde 1995-2004 es de un 38,16 % superada por el transporte aéreo que crece a un ritmo del 103,9 % en el mismo período.”

En el estudio de [Fomento y Consultora Spim \(2004\)](#), se refuerza la idea de que este tipo de problemas juega sin duda un papel primordial en la gestión de algunos sistemas y en la adecuada dirección y competitividad de sus operaciones logísticas. En dicho estudio, una de las conclusiones a las que se llega, es la

de que es necesario reforzar la competitividad de las empresas de transporte. Para ello, se sugiere un mayor grado de especialización de las empresas de transporte (por tipo de servicio, área geográfica, y tipo de mercancía); y una mayor capacitación de las mismas. Sobre este último aspecto, se establece como línea estratégica de actuación, y entre otras medidas, el fomento de la inversión en nuevas tecnologías:

“... la adquisición de sistemas de gestión de flotas (equipos y aplicaciones), integración de los sistemas de información de los clientes en las empresas de transporte ...”

Las técnicas de investigación operativa relativas a la de gestión de flotas y el uso de tecnologías de la información pueden ayudar a contrarrestar los desequilibrios existentes entre la importancia del sector y su capacidad-calidad de servicio.

En el informe de [Fomento y Consultora Spim \(2008\)](#), se presenta un reciente estudio de los costes del transporte de mercancías por carretera. El objetivo de dicho estudio es actualizar los datos e indicadores que se muestran en el “Observatorio de Costes del Transporte de Mercancías por Carretera”, y cuyo origen data de un anterior estudio realizado en 1998 por la Dirección General de Ferrocarriles y Transportes por Carretera. El “Observatorio de Costes” pretende constituirse en punto de referencia para todas aquellas empresas que, ya sea por su reducido tamaño o por su insuficiente posicionamiento estratégico, encuentran dificultades para establecer los criterios de gestión a seguir para asegurarse una adecuada política comercial y económica de explotación.

Si bien en dicho estudio se calculan unos costes de transporte que tratan de ser de referencia o estándar del sector, los autores subrayan la gran diversidad de empresas de transporte, especialidades y escenarios de explotación que existen, y que deben ser considerados. No obstante, los datos recogidos en el estudio para los distintos tipos de vehículos y especialidades seleccionados se aproximan lo máximo posible a la realidad.

De este informe hay que subrayar que en todos los casos estudiados, el gasto de combustible es el concepto de mayor importancia con un 30 % - 40 % sobre el total de costes directos del transporte. Le sigue el coste de personal, con un 20 % - 30 % del total de costes directos de transporte. Por tanto, parece ser importante centrar el foco de estudio en la parcela (combustible y personal de transporte) que significa alrededor del 50 % de los costes directos del transporte.

Los datos facilitados anteriormente, han sido actualizados recientemente en un estudio realizado por [Fomento y CNTC \(2010\)](#):

“ El transporte de mercancías por carretera es el modo más utilizado en el transporte interior interurbano de mercancías, realizando en el año 2008 el 83 % de las toneladas-kilómetro producidas. La actividad en el transporte público intermunicipal de mercancías por carretera en vehículos pesados creció del año 1999 al 2007 un 96,3 % en las toneladas-km, en 2008 y 2009 decreció un 5,2 % y un 12,1 % respectivamente, observándose un crecimiento del 2 % en el primer trimestre de 2010 respecto al mismo trimestre del 2009. El precio medio por kilómetro del total del transporte de mercancías en el primer trimestre de 2010 ha sido un 2,8 % superior al correspondiente al mismo periodo del año anterior y de un 4 % superior en el caso del transporte a distancias mayores de 300 km. Según la encuesta de población activa, en el año 2008 el sector transporte ocupó el 4,2 % de la población ocupada nacional, correspondiendo el 68,5 % al transporte por carretera. En la explotación de un vehículo el coste por kilómetro puede suponer hasta un 48 % de su estructura de costes directos, sigue en importancia el coste del personal de conducción y las dietas. ”

Tal y como define la ITSA (*Intelligent Transportation Society of America*) y [US Federal Highway Administration y ITE \(2000\)](#):

“ Los sistemas ITS (del inglés *Intelligent Transportation Systems*), facilitan las tecnologías de la información y las comunicaciones en favor de la infraestructura y los vehículos de transporte, procurando la gestión coordinada de factores para mejorar la gestión de los vehículos, sus rutas y sus cargas de transporte, aumentar la seguridad, y reducir los tiempos de transporte, sus costes y los consumos de combustible. ”

Además, como se dice en [Toth y Vigo \(2001a\)](#), diversos autores coinciden en afirmar que a pesar del interés científico de esta disciplina, todavía es un área virgen en muchas empresas, donde con la aplicación de estas técnicas se podrían lograr ahorros considerables. Estos ahorros alcanzables estarían en el orden del 5 % al 20 %, en un área (el transporte) que representa entre el 10 % y el 20 % (en términos generales) del coste total de los productos. Según [Ballou \(1999\)](#), la distribución es la actividad logística clave que contribuye en mayor medida en el total de costes logísticos. En el trabajo de [Min, Jayaraman y Srivastava \(1998\)](#), se afirma que los distribuidores tienen la compleja tarea de: Determinar el número óptimo, capacidad y localización de sus recursos para servir a más de un cliente; encontrar la planificación óptima de rutas de vehículos. No es por tanto de extrañar el interés creciente en las últimas cuatro décadas por este tipo de problemas en las empresas que justifica la utilización de técnicas de investigación operativa.

Los modelos y algoritmos propuestos en la literatura para la resolución de este tipo de problemas, son aplicables a la distribución (entrega) o aprovisionamiento (recogida) de un amplio tipo de bienes. Sus aplicaciones reales cubren un amplio espectro de sectores, servicios e industrias. La siguiente [Tabla 2.1](#), elaboración propia a partir de diversas fuentes y de [Yepes \(2002\)](#), muestra algunas de las aplicaciones de las herramientas y técnicas VRP en diversos sectores económicos o áreas de interés.

2 | Los problemas de rutas de vehículos

Área	Aplicación
Agrícola	Recogida de ganado, leche, cereales, etc. Vigilancia y control de plagas.
Agua	Redes de riego o distribución de agua potable.
Alimentación	Grandes superficies y pequeños comercios. Comida a domicilio. Máquinas de café, comida y aperitivos (<i>vending</i>).
Automóvil	Distribución de vehículos. Distribución de piezas de repuesto.
Banca	Reparto y recogida de dinero en efectivo (valijas).
Comercial	Visitadores de venta o agentes comerciales.
Construcción	Movimiento de tierras. Transporte de elementos singulares de construcción. Ascensores y puentes-grúa.
Defensa	Logística militar. Movimiento de tropas. Ayuda humanitaria. Rutas de aviones espía.
Educación	Rutas de autobuses escolares.
Energía	Redes de distribución de energía (gas o electricidad).
Industria	Suministro o aprovisionamiento de piezas o mercancías entre almacenes y centros de producción.
Logística interna	Rutas de vehículos automatizados. Almacenes automatizados. Rutas entre centros auxiliares o talleres externos. Rutas de preparación de pedidos en un almacén.
Materias primas	Recogida de materiales desde explotaciones mineras: minerales para la producción de acero, áridos para la producción de hormigón, canteras, etc. Redes y canalizaciones para la extracción y tratamiento de combustible, gas natural, etc.
ONGs	Reparto de ayuda humanitaria en situaciones de crisis o catástrofes naturales (medicinas y material sanitario, alimentos, equipos de rescate, etc.).
Prensa	Distribución de revistas, periódicos y otros artículos de quiosco o tabaco.
Producción	Los problemas de programación de actividades de producción (<i>scheduling</i>) son similares en muchos aspectos a los VRP.
Salud	Reparto de medicamentos a farmacias. Servicios de urgencia. Atención a personas mayores.
Servicios	Reparación a domicilio. Transporte o reparto a domicilio. Transporte urgente. Asistencia en carretera.

Algunas aplicaciones de los problemas VRP. ▷

Área	Aplicación
Social	Recogida de basuras, mantenimiento y limpieza de calles, reparto de correo. Transporte de personas discapacitadas. Servicios móviles de seguridad ciudadana (vigilancia y rescate).
Telecomunicaciones	Diseño y gestión de redes de telecomunicaciones. Flujos de información y gestión de paquetes de datos en telefonía, e internet.
Transporte	Planificación de flotas de autobuses, aviones, camiones, trenes, etc. Transportes especiales o peligrosos. Gestión y simulación del tráfico. Operadores logísticos. Flujo de personas en ciudades o grandes eventos.
Turismo	Definición de rutas turísticas e itinerarios.

Tabla 2.1: Algunas aplicaciones de los problemas VRP.

2.3 Antecedentes e interés científico

Los problemas de rutas de vehículos han existido siempre. La humanidad siempre se ha planteado la cuestión de encontrar el camino más corto para desplazarse de un sitio a otro: cazar, recolectar, comerciar con sus excedentes, trasladar sus mercancías por la ruta más segura o rápida, aprovisionar a sus metrópolis con víveres y agua, enviar mensajes y establecer redes de comunicaciones, la intendencia de sus tropas, etc. Por citar sólo algunos ejemplos antiguos, podemos recordar: el transporte por el río Nilo en el antiguo Egipto (2700 - 2250 a.C.), la gran muralla china (221 a.C. - 1368 d.C.), la ruta de la seda (138 a.C. - s. XV d.C.), calzadas romanas (133 - 117 d.C.), caminos mayas (600 - 800 d.C.), comercio y colonización de las Américas (1492 d.C. - s. XVII), etc. Aunque en la mayoría de los casos desconocidos, en aquellos tiempos habría personas expertas encargadas de planificar y dirigir las operaciones logísticas y militares.

Es curioso recordar también, que otros animales además del hombre se enfrentan al problema de rutas: las aves en su migración, las ballenas, las tortugas marinas, y las hormigas por ejemplo. Estas últimas, han servido de inspiración para nuevas heurísticas y técnicas de resolución de precisamente los problemas de rutas [Dorigo y Gambardella \(1997\)](#).

Sin embargo, el antecedente científico documentado que parece más remoto (y comúnmente aceptado) es del siglo XVIII Euler (1736), cuando el matemático Leonhard Euler demostró que el esquema gráfico de los 7 puentes de Königsberg (Figura 2.8) no podía recorrerse partiendo de un punto cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida. Euler demostró que no era posible puesto que el número de líneas que inciden en cada punto no es par (condición necesaria para entrar y salir de cada punto, y para regresar al punto de partida, por caminos distintos en todo momento). Este problema y su trabajo pudo haber sido la primera aplicación en teoría de grafos o en topología, por lo que en teoría de grafos (y en su nombre), a esta idea se le denomina ciclo o circuito Euleriano de un grafo.

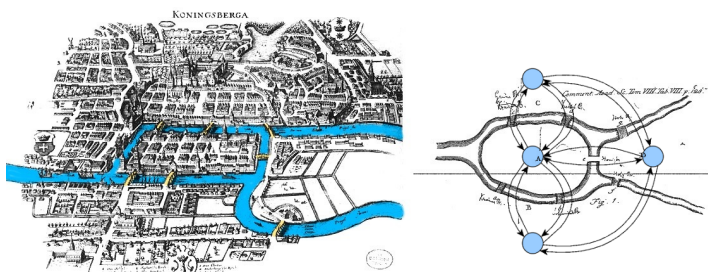


Figura 2.8: Puentes de Königsberg y grafo (a partir de Wikipedia).

El problema del cartero chino (*Chinese Postman Problem* -- CPP) trata de encontrar la ruta cerrada más corta (circuito) visitando cada arista (al menos una vez) de un grafo conexo no dirigido Edmons y Johnson (1973). Alan Goldman del NIST (*National Institute of Standards and Technology*) fue el primero en acuñar el problema como del conocido y anónimo cartero chino, ya que originalmente fue estudiado por el matemático chino Mei Ko Kwan en 1962 Kwan (1962). Cuando el grafo tiene un ciclo o circuito Euleriano Bollobás (1979), este circuito es la solución óptima. El problema clásico donde los arcos no están orientados puede resolverse mediante algoritmos polinomiales.

El problema del viajante de comercio (*Travelling Salesman Problem* - TSP) es uno de los más famosos problemas (y también de los mejores estudiados),

que se inscribe en el campo de la optimización combinatoria. A pesar de la aparente sencillez de su enunciado y planteamiento, el TSP es uno de los problemas más complejos [Dantzig, Fulkerson y Johnson \(1954\)](#) de resolver (existen demostraciones que equiparan la complejidad de su solución a la de otros problemas aparentemente mucho más complejos que han retado a los matemáticos desde hace siglos). Se trata de un vendedor o viajante de comercio que debe visitar n ciudades para vender u ofertar sus productos. Cada par de ciudades puede estar comunicado o no, y la distancia que las separa se mide mediante c_{ij} . El problema es el de decidir el recorrido que comenzando por una determinada ciudad pase por todas las demás una sola vez y vuelva finalmente a la primera, de manera que se minimice la distancia total recorrida. El TSP es intensivo en términos de cálculo. Para n ciudades, hay que considerar $n!$ posibles rutas diferentes.

El método más directo es intentar probar con todas las posibles combinaciones y ver cuál es la óptima. A este método se le denomina búsqueda mediante fuerza bruta, pero dado el gran número de posibles soluciones ($n!$), este método resulta poco práctico. Tiene una complejidad computacional orden factorial $O(n!)$. El TSP es un problema de tipo NP-completo [Karp, Miller y Thatcher \(1972\)](#). No se conoce un algoritmo que resuelva el problema en un tiempo polinomial. Aunque utilizando técnicas de programación dinámica, se puede resolver el problema en un orden exponencial $O(2^n)$, que es mucho mejor que factorial $O(n!)$. En [Lawler et al. \(1985\)](#), se proporciona un excelente resumen del problema del viajante de comercio.

Dada la explosión combinatoria de las posibles soluciones, los algoritmos exactos no son capaces de resolver el problema en un tiempo razonable. Esto ha despertado gran interés entre la comunidad científica que ha investigado y sigue desarrollando y perfeccionando distintas técnicas computacionales que permiten simplificar el problema para casos concretos o proporcionar reducciones de tiempo de computación. Gracias a este tipo de problemas, se han desarrollado nuevas técnicas heurísticas, meta-heurísticas o evolutivas,

2 | Los problemas de rutas de vehículos

redes neuronales o técnicas de inteligencia artificial, técnicas basadas en agentes, etc. Sin embargo, dada la enorme complejidad del problema, en muchas ocasiones estas aproximaciones no suponen una resolución del TSP y sólo ofrecen soluciones aproximadas suficientemente aceptables para casos concretos. La siguiente Figura 2.9 muestra un ejemplo de la solución óptima a un TSP pequeño con un valor de distancia igual a 231 unidades.

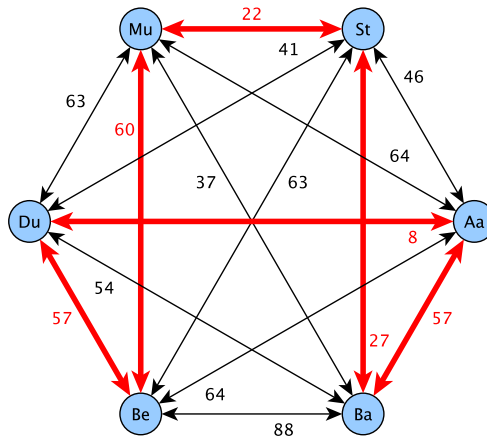


Figura 2.9: Ejemplo de la solución óptima a un TSP pequeño.

En la actualidad el TSP sigue siendo motivo de estudio e interés. Por ejemplo, algunos algoritmos de ramificación y poda se pueden utilizar para resolver problemas de n entre 40 a 60 ciudades. Otros han mejorado a éstos con técnicas originarias de la programación lineal que permiten resolver el TSP para valores de n entre 120 y 200 ciudades.

La siguiente Figura 2.10 muestra el progreso científico en la resolución de instancias de problemas cada vez más grandes que en los últimos años se ha ido consiguiendo. La figura comienza con el artículo clásico de [Dantzig, Fulkerson y Johnson \(1954\)](#) donde se resolvía el problema de 49 ciudades (una para cada estado de los entonces Estados Unidos, en la actualidad son 50 estados y un distrito federal).

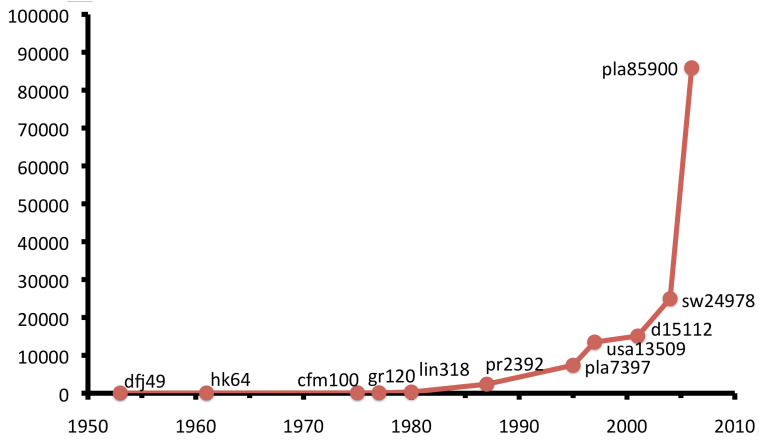


Figura 2.10: Evolución en el tamaño de TSP resueltos (a partir de tsp.gatech.edu).

En el año 2001 se utilizó una red de 110 ordenadores para resolver el TSP para las 15 112 poblaciones de Alemania. Para ello fue necesario utilizar el equivalente computacional a 22,5 años de cálculo de un ordenador personal. En mayo del 2004 se aplicaron algunas de estas técnicas para la resolución del problema aplicado a las 24 978 poblaciones suecas en un recorrido de unos 72 500 km (probándose además que no se podía encontrar un ciclo más corto). La mayor instancia de problema de viajante de comercio resuelta hasta el momento, consiste en una aplicación VLSI (método para la producción de chips personalizados mediante conexiones realizadas por láser) de 85 900 localizaciones que surgió en los *Bell Laboratories* a finales de 1980. Mediante Concorde se encontró la ruta más corta posible con una longitud de 142 382 261 unidades. A esta instancia se le conoce como *pla85900* y está publicada en el repositorio de TSPLIB de Gerd Reinelt y en [Applegate et al. \(2006\)](#). En este problema, los costes fueron modelados como distancias euclidianas redondeadas al valor entero superior más cercano.

La Figura 2.10 muestra una evolución prometedora en la resolución del TSP. Se estima que podrían resolverse problemas con varios millones de ciu-

dades en los próximos 30 años. Esto es sólo una especulación que requerirá de grandes avances y mejoras computacionales. En la actualidad se está atacando un problema de 1 904 711 ciudades (1,9 millones) repartidas por todo el planeta. El 9 de agosto de 2006, Keld Helsgaun usando una variante de su algoritmo heurístico LKH, consiguió encontrar una buena solución (próximo al óptimo) con un resultado de la función objetivo igual a 7 516 043 230. Recientemente, en noviembre de 2008 volvió a mejorar su marca con una distancia de 7 515 947 511. Para más información sobre este reto computacional se puede visitar la web: tsp.gatech.edu/world.

En próximos capítulos se describirán con más detalle los modelos básicos de rutas de vehículos VRP, y su origen y desarrollo a partir del *Traveling Salesmen Problem* (TSP).

2.4 Aspectos y variantes de los problemas de rutas

Como se ha visto anteriormente, los problemas de rutas son en realidad un amplio y complejo abanico de casos. En la literatura, algunos autores han intentado clasificar y simplificar la gran variedad de posibles problemas con el objetivo de poder abordar adecuadamente su tratamiento y su resolución.

Las siguientes Figura 2.11 y Figura 2.12 recopilan los criterios propuestos Bodin y Golden (1981) y Desrochers, Lenstra y Savelsbergh (1990) y los representan en un mapa mental que está dividido en dos partes para una mejor lectura. Dicha figura intenta reflejar y ordenar las principales características en aspectos como: el almacén o depósito, la flota, la demanda, el servicio y el objetivo a alcanzar. Mediante la identificación y marcación de aquellos factores que forman parte de una problemática real, se facilita la identificación del problema en sí mismo.

Al clasificar los problemas y las características que lo definen, se facilita tanto el desarrollo de los modelos matemáticos y las estrategias de resolución más adecuadas, como la toma de decisiones por parte de las empresas (estrategias, tácticas y dirección de operaciones).

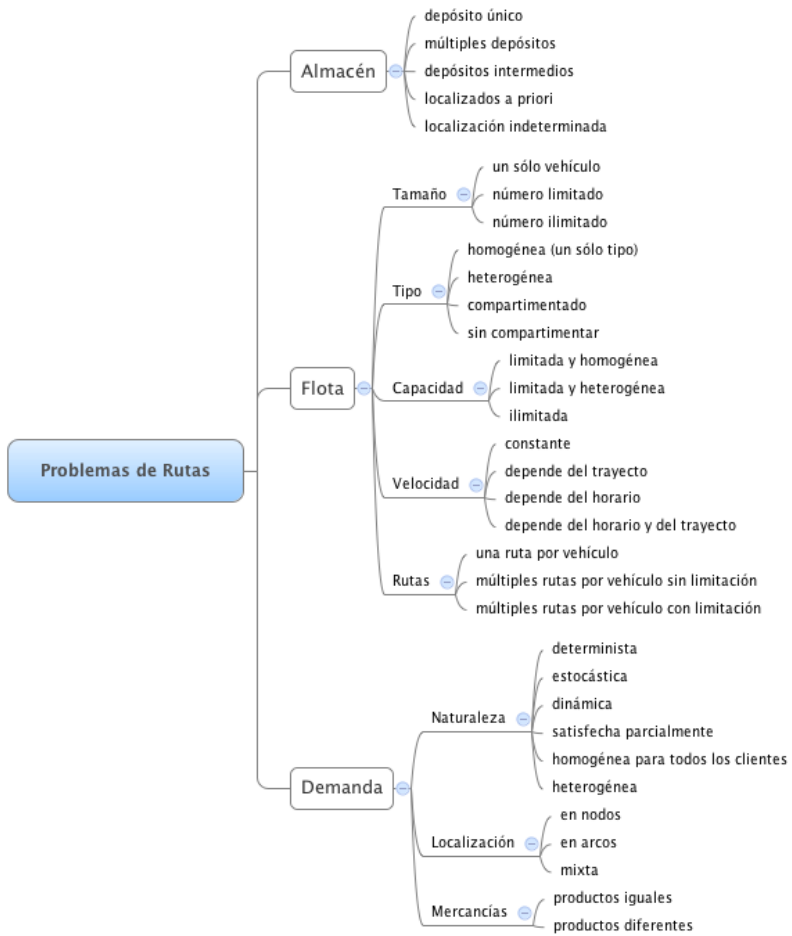


Figura 2.11: Características de los problemas de rutas (parte 1).

2 | Los problemas de rutas de vehículos

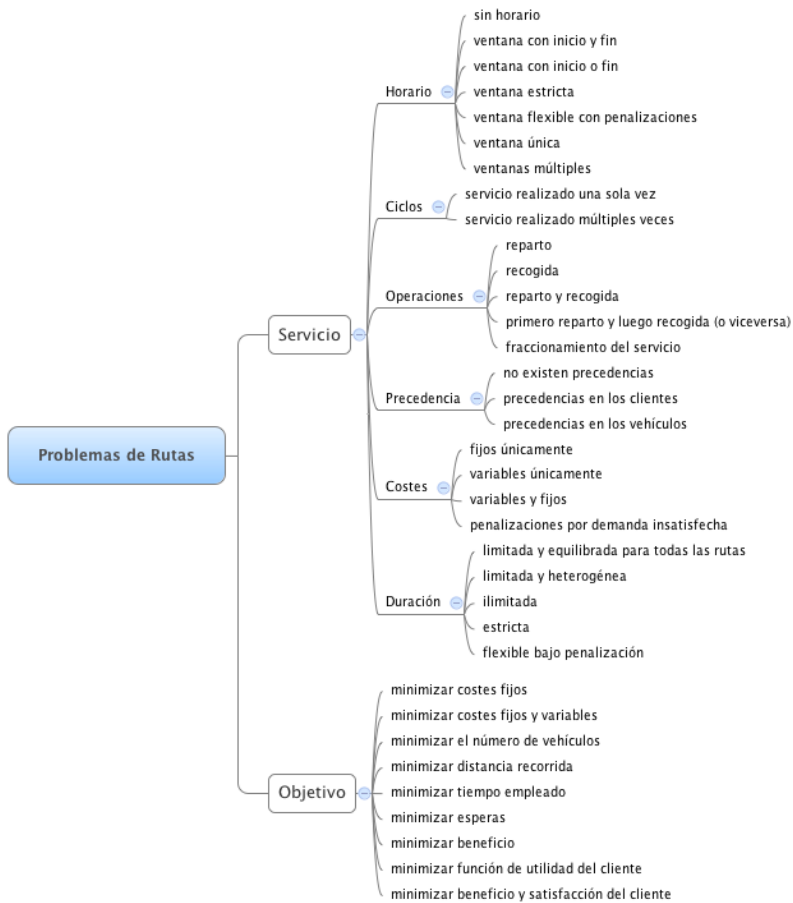


Figura 2.12: Características de los problemas de rutas (parte 2).

Otra muestra de ello, es la clasificación realizada por [Giaglis et al. \(2004\)](#), que se puede observar en la Tabla 2.2 y en la Tabla 2.3. En dicha clasificación se dividen los VRP según 9 aspectos principales: servicio, demanda, flota, capacidad, horizonte, ventanas, objetivos, y datos. Tal y como se observa en la leyenda al pie de las tablas, a su vez, cada aspecto principal se divide en algunos aspectos secundarios. Cada combinación de aspectos da lugar a un problema VRP específico con sus propias características.

Además, en la Tabla 2.2 y en la Tabla 2.3, se ha incluido una revisión de los artículos más relevantes de la literatura científica, indicando el caso específico al que se refiere. Esta recopilación y revisión puede ayudar a saber más sobre el tipo de problema y la estrategia de resolución propuesta por los más relevantes científicos.

Se puede observar que no todos los casos parecen haber recibido la misma atención por parte de los investigadores; nótese por ejemplo las columnas $J=n$ períodos (dinámico), O=multi-objetivo, Q=real, comparativamente con el resto. Parece, por tanto, que algunos problemas que incorporan una serie mayor de complejidades (como múltiples horizontes de planificación, de tiempo, múltiples objetivos y datos reales), aún no se han abordado lo suficiente en la literatura; a pesar de poder ser importantes casos prácticos con un potencial significativo de ahorro. Por otro lado, y tal y como subraya [Yepes \(2002\)](#), un caso real se define como resultado de la combinación de varias de estas características complejas.

2 | Los problemas de rutas de vehículos

	servicio		demanda		flota		capacidad		horizonte		ventanas			objetivos		datos		técnica	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
Ashour, Vega y Parker (1972)	✓		✓		✓		✓		✓		✓			✓		✓			✓
Gillett y Miller (1974)	✓		✓			✓		✓	✓		✓			✓		✓			✓
Robuste, Daganzo y Souleyrette (1990)	✓			✓		✓					✓			✓		✓			✓
Vanvliet, Boender y Kan (1992)	✓		✓			✓		✓	✓			✓					✓		✓
Fisher (1994)	✓		✓			✓		✓	✓					✓				✓	
Koksalan, Sural y Kirca (1995)	✓		✓			✓		✓	✓					✓		✓			✓
Savelsbergh y Sol (1998)		✓	✓			✓		✓		✓				✓		✓			✓
Bowers, Noon y Thomas (1996)	✓		✓			✓		✓	✓					✓		✓			✓
Beasley y Christofides (1997)	✓		✓			✓			✓					✓		✓			✓
Modesti y Sciomachen (1998)	✓			✓				✓	✓					✓				✓	
Barbarosoglu y Ozgur (1999)	✓		✓			✓		✓	✓					✓		✓			✓
Van der Poort et al. (1999)	✓		✓			✓		✓	✓					✓		✓			✓
Coy, Golden y Wasil (2000)	✓		✓			✓		✓	✓					✓		✓			✓

A=entrega; B=entrega y recogida; C=determinista; D= estocástica; E=1 vehículo; F=K vehículos; G=ilimitada; H=capacitado; I=1 período (estático); J=n períodos (dinámico); K=sin ventanas; L=ventanas elásticas; M=ventanas rígidas; N=objetivo único; O=multi-objetivo; P=hipotéticos; Q=real; R=método exacto; S=heurística

Tabla 2.2: Taxonomía y clasificación de los VRP. (1)

	servicio		demanda		flota		capacidad		horizonte		ventanas			objetivos		datos		técnica	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
Larsen (1999)	✓		✓		✓	✓	✓		✓				✓	✓		✓			✓
Secomandi (2000)	✓			✓	✓		✓		✓		✓			✓		✓			✓
Renaud, Boctor y Ouenniche (2000)	✓		✓		✓		✓		✓		✓			✓		✓			✓
Narry y Barnes (2000)	✓		✓		✓		✓		✓			✓		✓		✓			✓
Yang, Jaillet y Mahmassani (2004)		✓		✓	✓		✓			✓				✓		✓			✓
Rego (2001)	✓		✓		✓		✓		✓		✓			✓		✓			✓
Fagerholt (2001)	✓		✓		✓		✓		✓			✓		✓			✓		✓
Glover et al. (2001)	✓		✓			✓	✓		✓		✓			✓		✓			✓
Toth y Vigo (2002)	✓		✓			✓	✓		✓		✓			✓		✓			✓
Tarantilis y Kiranoudis (2002)	✓		✓		✓		✓		✓		✓			✓			✓		✓
Tarantilis, Diakoulaki y Kiranoudis (2004)	✓		✓		✓		✓		✓		✓			✓		✓			✓
Ho y Haugland (2004)	✓		✓		✓		✓		✓				✓	✓		✓			✓
Ioannou, Kritikos y Prastacos (2003)	✓		✓		✓		✓		✓					✓		✓			✓

A=entrega; B=entrega y recogida; C=determinista; D= estocástica; E=I vehículo; F=K vehículos; G=ilimitada; H=capacitado; I=1 período (estático); J=n períodos (dinámico); K=sin ventanas; L=ventanas elásticas; M=ventanas rígidas; N=objetivo único; O=multi-objetivo; P=hipotéticos; Q=real; R=método exacto; S=heurística

Tabla 2.3: Taxonomía y clasificación de los VRP. (y 2)

2.5 Problemas básicos en la literatura

Hay que indicar que los problemas reales y cotidianos contienen restricciones (laborales y de seguridad, legislación sectorial, condiciones atmosféricas y del tráfico, dinámica e incertidumbre, etc.) y objetivos (en ocasiones muy particulares a la empresa) que los hacen alejarse de los simples esquemas y clasificaciones teóricas estudiados por los investigadores. Cierta distanciamiento de la realidad y la simplificación de los modelos, ha permitido el diseño y desarrollo de técnicas y estrategias de resolución y análisis. Con el tiempo, los modelos más básicos han dado lugar a la aparición de otros cada vez más complejos que permiten el estudio de casos más similares a los reales.

La siguiente Tabla 2.4 enumera los principales problemas de rutas de vehículos (por su singularidad e importancia en la literatura) según [Toth y Vigo \(2001a\)](#) y otros textos. En orden alfabético se pueden ver las siglas y el nombre en el inglés, así como la particularidad que describe el tipo de problema.

La gran atención histórica recibida en la literatura científica a este tipo de problemas ha facilitado cierto acuerdo tácito sobre la nomenclatura (y siglas) de cada uno [Desrochers et al. \(1999\)](#). Si bien, en la actualidad pueden encontrarse artículos científicos que no se ajustan a esta clasificación, o donde los autores proponen nuevas (e imaginativas) siglas para su variante de problema estudiado.

Sigla	Nombre	Particularidad
AVRP	<i>Asymmetric Vehicle Routing Problem</i>	La distancia recorrida en el viaje o el tiempo necesario entre un par de puntos depende del sentido del trayecto.
CVRP	<i>Capacitated Vehicle Routing Problem</i>	El vehículo tiene una capacidad de carga o transporte limitada, que supone una restricción que no debe ser superada.

Principales tipos de problemas VRP. ▷

Sigla	Nombre	Particularidad
DCVRP	<i>Distance Constrained Vehicle Routing Problem</i>	VRP con limitación en la distancia total recorrida o en el número de clientes visitados.
DVRP	<i>Dynamic Vehicle Routing Problem</i>	Problemas en los cuales algunos parámetros dependen del tiempo, o cambian dinámicamente en el tiempo.
FRP	<i>Fixed Routes Problem</i>	Una vez determinadas las rutas, éstas no deben variar durante un periodo de tiempo, aunque así lo haga la demanda.
FSMVRP	<i>Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem</i>	Flota de vehículos ilimitados, con costes fijos según el tipo de vehículo y costes variables homogéneos.
LVR	<i>Location Routing Problem</i>	En este problema se intenta determinar la localización del depósito que no es conocida a priori.
MCVRP	<i>Multi Compartment Vehicle Routing Problem</i>	Los vehículos están configurados mediante compartimentos. Su carga es mixta y las mercancías deben permanecer separadas durante el viaje.
MDVRP	<i>Multiple Depot Vehicle Routing Problem</i>	No sólo hay un único depósito, sino que existen varios (origen y destino final de sus vehículos asignados).
min-max VRP	<i>Min-max Vehicle Routing Problem</i>	La función objetivo es minimizar la distancia del trayecto más largo.
OVRP	<i>Open Vehicle Routing Problem</i>	Algunos vehículos no tienen porqué volver al depósito (transporte subcontratado).
PVRP	<i>Period Vehicle Routing Problem</i>	Cada cliente requiere un número determinado de servicios en un periodo de tiempo.
RTDVRP	<i>Real Time Dynamic Vehicle Routing Problem</i>	Conjunto de problemas donde las condiciones dinámicas obligan a la reprogramación de servicios en tiempo de ejecución de la ruta.

Principales tipos de problemas VRP.



2 | Los problemas de rutas de vehículos

Sigla	Nombre	Particularidad
SVRP	<i>Stochastic Vehicle Routing Problem</i>	Conjunto de problemas donde algunos parámetros tienen cierto grado de incertidumbre. Dentro de este conjunto destacan los dos siguientes:
VRPSD	<i>Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands</i>	Los clientes pueden presentar demandas aleatorias.
VRPSDC	<i>Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands and Customers</i>	Tanto la presencia de clientes como su demanda son aleatorias.
VFMVRC	<i>Vehicle Fleet Mix with Variable Unit Running Costs</i>	Costes fijos y variables dependientes del tipo de vehículo. Número de vehículos ilimitados.
VRPB	<i>Vehicle Routing Problem with Backhauls</i>	Existen puntos de entrega desde el almacén y otros de recogida hacia el almacén. No se recoge hasta que no finalicen las entregas.
VRPDB	<i>Vehicle Routing Problem with Deliveries and Backhauls</i>	Existen puntos de entrega y otros de recogida hacia el almacén, pudiendo coincidir en ambos. Se permite la entrega y recogida mientras no se viole la capacidad del vehículo.
VRPHE	<i>Vehicle Routing Problem with Heterogeneous Fleet</i>	Costes fijos y variables que dependen del tipo de vehículo. Número limitado de vehículos de cada tipo.
VRPLC	<i>Vehicle Routing Problem with Length Constraint</i>	La longitud de cada ruta no debe superar una magnitud determinada. Alternativamente se puede limitar el tiempo o el número de clientes visitados. Mismo significado que DCVRP.
VRPM	<i>Vehicle Routing Problem with Multiple Use of Vehicles</i>	Cada vehículo puede emprender más de una ruta en un periodo de tiempo.
VRPPC	<i>Vehicle Routing Problem with Precedente Constraints</i>	Existen relaciones de precedencia entre clientes, por lo que antes de visitar a un cliente, el vehículo debe visitar previamente a un conjunto de ellos.

Principales tipos de problemas VRP.



Sigla	Nombre	Particularidad
VRPPD	<i>Pickup and Delivery Problem</i>	Un vehículo debe recoger la mercancía en un sitio y llevarla a otro de la red.
VRPSD	<i>Vehicle Routing Problem with Split Delivery</i>	La demanda de un cliente puede ser cubierta por varios vehículos. El servicio se fragmenta entre varios vehículos o rutas. También se conoce como SDVRP.
VRPSF	<i>Vehicle Routing Problem with Satellite Facilities</i>	Existen depósitos intermedios donde pueden reabastecerse los vehículos sin necesidad de volver al depósito central.
VRPST	<i>Vehicle Routing Problem with Stochastic Travel Times</i>	La duración de los viajes tiene un carácter aleatorio.
VRPSTW	<i>Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows</i>	VRP con ventanas horarias donde se permite cierta trasgresión del horario de entrega de cada cliente e incluso del depósito mediante penalizaciones.
VRPTD	<i>Vehicle Routing Problem with Time Deadlines</i>	Las ventanas de horario de entrega sólo tienen su limitación final.
VRPTW	<i>Vehicle Routing Problem with Time Windows</i>	Cada cliente presenta una (o varias VRPMTW) ventana horaria de reparto o entrega. El depósito también tiene un horario de disponibilidad.
VRPVADT	<i>Vehicle Routing Problem with Variable Access Time</i>	La duración del acceso al cliente y la salida dependen del cliente.
VRPVRT	<i>Vehicle Routing Problem with Variable Travel Times</i>	La duración de los viajes es variable, y depende del horario en el que se realicen.

Tabla 2.4: Principales tipos de problemas VRP.

2.6 Conclusiones

Como se ha podido observar, los problemas de rutas de vehículos han acompañado siempre a la humanidad. En la actualidad, sin duda es su gran aplicación práctica y oportunidades de ahorro, lo que justifica su estudio y desarrollo en multitud de áreas y sectores económicos de nuestra sociedad.

La identificación y descripción de los principales elementos aportada, sienta las bases para comprender y valorar la gran variedad de problemas de rutas de vehículos. La exploración documental que el autor resume en este texto, ha permitido realizar un recorrido desde los primeros trabajos científicos hasta el reto computacional que todavía hoy en día sigue vigente, y que mantiene despierto el interés de los científicos.

Además, en este capítulo se aporta una clasificación revisada de las principales variantes de problemas estudiados en la literatura científica hasta la fecha. En próximos capítulos se describirán con más detalle los modelos básicos de problemas de rutas de vehículos.

3 | Modelos básicos de problemas de rutas

En este capítulo se detallan los modelos matemáticos para la resolución de los problemas de rutas de vehículos más conocidos. El objetivo es conocer con detalle las diferencias existentes entre los principales problemas de rutas desde un punto de vista matemático (formulación de objetivos y restricciones).

Tras una introducción a la tipología de los problemas, se expondrá la notación matemática utilizada en este capítulo. A continuación, se explican cada uno de los modelos matemáticos: desde el problema más básico del viajante de comercio, hasta los problemas más genéricos y complejos donde se imponen restricciones de ventanas de tiempo, capacidad y número de vehículos, y secuencia de entrega y recogida.

En cada uno de los apartados, además del modelo matemático y su explicación, se enumeran las referencias científicas más significativas, algunas extensiones al problema tratado y un ejemplo de problema resuelto. De este modo, se pretenden diferenciar claramente las características de cada modelo expuesto y su aplicación práctica, a la vez que se expone la gran complejidad de resolución matemática de este tipo de problemas.

3.1 Problemas de rutas de vehículos (VRP)

Tal y como se explica en el Capítulo 2, los problemas de rutas de vehículos (VRP - *Vehicle Routing Problems*) son en realidad una familia cada vez más amplia de tipos de problemas. En el apartado 2.5 se hace una introducción a los principales problemas que en la actualidad están comúnmente aceptados entre la comunidad científica, aunque tal y como se menciona, siguen apareciendo nuevas variantes, cada una de las cuales tiene sus propias características particulares. Vale la pena recordar que todos los problemas mencionados se inscriben en el campo de la optimización combinatoria y son del tipo de complejidad NP-completo.

Por razones históricas, por la complejidad creciente (cada vez más parecida a la realidad), y por la difusión y la expansión del desarrollo científico; podríamos decir que los problemas de rutas se pueden ordenar en una especie de árbol genealógico. A partir de los problemas originales se derivan otros más complejos. A cada generación se sucede otra, que es el resultado de la combinación de las características previas y de la incorporación de nuevos requerimientos y restricciones, y que dan lugar a nuevas variantes de problemas más complejas y específicas.

En la siguiente Figura 3.1 (e.p. a partir de la figura original de [Toth y Vigo \(2001a\)](#) y de otros textos), se pone de manifiesto esta afirmación.

Tal y como se puede observar, la tipología de problemas evoluciona desde los problemas “más sencillos” (en la parte superior de la figura), hasta aquellos más complejos y más parecidos a la realidad (en la parte inferior y laterales de la figura). Las variantes aparecen por las diferencias de los elementos que definen el problema (véase la Figura 2.11 y la Figura 2.12) tal y como se describe en el apartado 2.1.

La figura aquí presentada se podría ampliar y desplegar incluyendo nuevas (y más particulares) variantes, añadiendo propiedades inciertas como las que aparecen en los *Stochastic Vehicle Routing Problem*, o dinámicas *Real Time Dynamic Vehicle Routing Problem* entre otras.

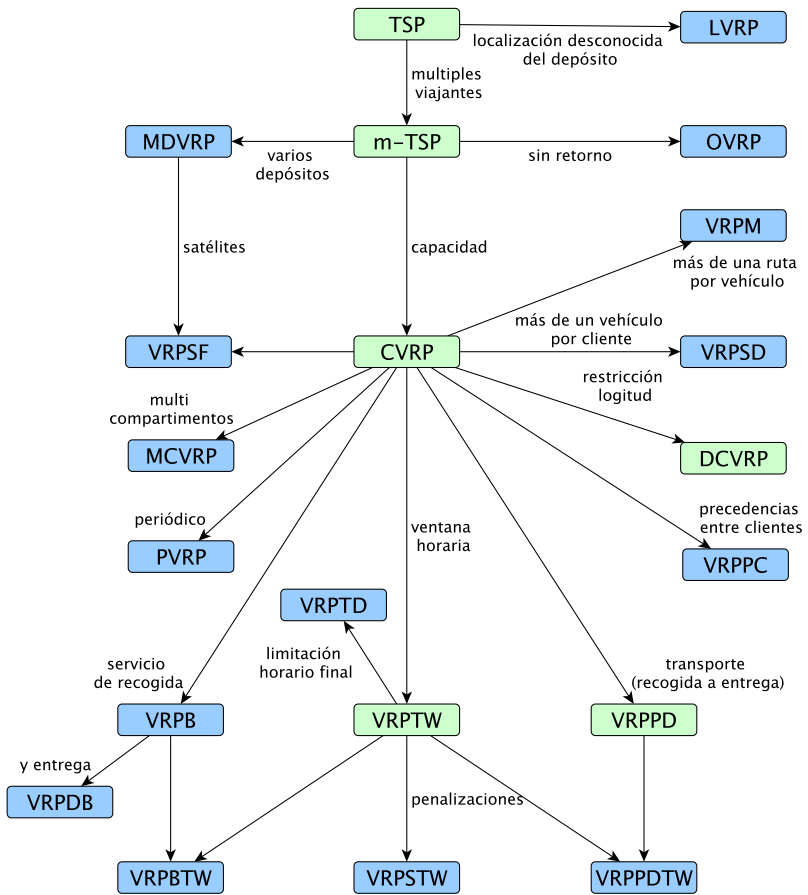


Figura 3.1: Problemas VRP básicos y sus relaciones.

3.1.1 Notación

La lectura de la descripción de los modelos matemáticos propios de los problemas de rutas de vehículos, requiere de conocimientos de investigación operativa y de la utilización de la siguiente notación matemática básica, que se usa frecuentemente en la literatura científica referente a este tema:

Notación	Descripción
$G = (V, A)$	grafo dirigido y completo donde $V = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices (nodos o localizaciones) y A es el conjunto de arcos.
c_{ij}	distancia, tiempo o coste asignado a cada arco $(i, j) \in A$.
n	número total de localizaciones o nodos en V .
m	número total de rutas.
u_i	variable real para las restricciones de Miller-Tucker.
K	flota de vehículos k ($k = 1, \dots, K$).
C_k	capacidad del vehículo k de una flota heterogénea $k = 1, \dots, K$.
d_i y p_i	representan la demanda de productos homogéneos que deben ser entregados y recogidos respectivamente en el cliente $i \in V$.
$\Delta^+(i)$	representa el conjunto de nodos adyacentes cuyos arcos son salientes al nodo i .
$\Delta^-(i)$	representa el conjunto de nodos adyacentes cuyos arcos son entrantes al nodo i .
$[e_i, l_i]$	ventana de tiempo asociada al cliente i .
t_i	instante de tiempo de llegada al cliente i .
t_{ij}	tiempo de viaje desde el nodo i al nodo j .

Notación matemática para los modelos VRP. ▷

Notación	Descripción
w_{ik}	el instante de tiempo en el que el vehículo k llega al cliente i .
s_i	tiempo de servicio en el cliente i .
M	una constante lo suficientemente grande.
$o(k)$	origen del vehículo k .
$d(k)$	destino del vehículo k .
x_{ijk}	variable binaria de flujo igual a 1 si el arco $(i,j) \in A$ es recorrido por el vehículo k , y 0 en caso contrario.
Z_{ik}	muestran la carga del vehículo k tras el servicio al nodo $i \in V$.

Tabla 3.1: Notación matemática para los modelos VRP.

3.2 El viajante de comercio (TSP)

Tal y como se comenta en el apartado 2.3, nuestro recorrido por los problemas de rutas básicos comienza con el conocido problema del viajante de comercio (*Travelling Salesman Problem* - TSP). El problema consiste en encontrar la ruta óptima (menor distancia total) que un vendedor o viajante de comercio debería recorrer para visitar un conjunto de $n - 1$ localizaciones (sólo una vez) partiendo desde una localización inicial adicional a la que debe regresar tras su recorrido circular.

Este es el problema más sencillo de plantear de todos los problemas de rutas de vehículos, ya que a diferencia de otros que se explicarán más adelante, en el caso del viajante de comercio, no existen más restricciones que la de visitar cada localización sólo una vez. En este problema no se consideran las demandas o servicios de cada localización a visitar, no se consideran restricciones de capacidad de carga del vehículo (como si no hubiera vehículo realmente), no se consideran preferencias de secuencia en las visitas y tampoco se consideran ventanas horarias ni otras restricciones. A pesar de esta aparente simplicidad del enunciado el TSP abre el camino de la complejidad

no polinomial; véase [Dantzig, Fulkerson y Johnson \(1954\)](#), [Karp, Miller y Thatcher \(1972\)](#). Para aquellos que quieran profundizar más en las características de este problema, en [Lawler et al. \(1985\)](#) encontrarán un excelente resumen de la literatura.

El problema se puede formular como un modelo matemático del siguiente modo: sea un grafo completo y dirigido $G = (V, A)$, donde $V = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices (nodos o localizaciones) y A es el conjunto de arcos. Para cada arco $(i, j) \in A$ se asigna una distancia, tiempo o coste c_{ij} . También se definen las variables binarias de decisión x_{ij} que tomarán un valor de 1 y sólo si el arco (i, j) es utilizado en la ruta solución. El modelo de programación matemática queda del siguiente modo:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V \setminus \{i\}} c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V \quad (3.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.5)$$

La función objetivo (3.1) minimiza la suma total de coste de los arcos utilizados. Las ecuaciones de continuidad (3.2) y (3.3) aseguran que los nodos sean visitados todos sólo una vez, ya que en la solución será marcado sólo un arco entrante y uno saliente de cada nodo. Por tanto, cada localización es un nodo intermedio de una ruta.

Sin embargo, con estas restricciones y la condición binaria de las variables x_{ij} , no es suficiente para garantizar que las soluciones factibles son recorridos completos (o una única ruta); ya que puede que aparezca una solución formada por subrutas (no conectadas entre sí) y que cumplan las restricciones anteriormente comentadas (Figura 3.2). Es por ello, por lo que es necesario añadir más restricciones (3.4) que eviten la formación de estas subrutas. Una de las posibles formas de hacer esto (ya que existen varias), es la propuesta por Miller, Tucker y Zemlin (1960) y que se muestra en las ecuaciones (3.6) que son más conocidas como condiciones de Miller - Tucker:

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \quad 2 \leq i \neq j \leq n \quad (3.6)$$

Las variables de decisión introducidas por las condiciones de Miller - Tucker son reales y no tienen límites ni superior ni inferior. La propuesta de Tucker genera n^2 restricciones, mientras que otras en la literatura pueden llegar a generar 2^n . Sin embargo, desde un punto de vista computacional, este modelo aunque más compacto, es menos eficiente.

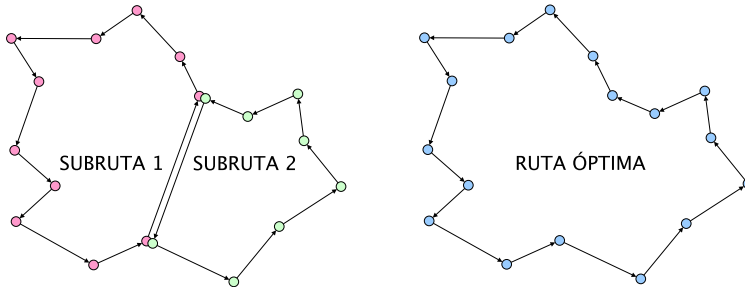


Figura 3.2: Ejemplo de soluciones al TSP con subrutas y sin ellas.

La ruta de la solución óptima podría variar según se mida la función objetivo, ya sea en términos de distancia del recorrido, tiempo empleado o coste del desplazamiento (entre otras), y por supuesto según sea la estructura de la matriz de distancias $c_{ij} \in A$. Si la distancia c_{ij} es igual a la distancia c_{ji} se

3 | Modelos básicos de problemas de rutas

dice que el problema es simétrico (*symmetric TSP*), si no es así, entonces se le llama asimétrico (*Asymmetric Travelling Salesman Problem - ATSP*). El problema se dice que es euclidiano (*Euclidean*) si los vértices están localizados en \mathbb{R}^d y las distancias entre ellos son las distancias euclidianas (*Euclidean distance*), simétrico. Más adelante se tratará ampliamente el tema de la asimetría en las matrices de distancias y su impacto sobre las soluciones al TSP.

La Figura 3.3 y la Figura 3.4 muestran un ejemplo de problema TSP de 41 nodos y su solución óptima para una matriz de distancias euclidianas (TSP simétrico).

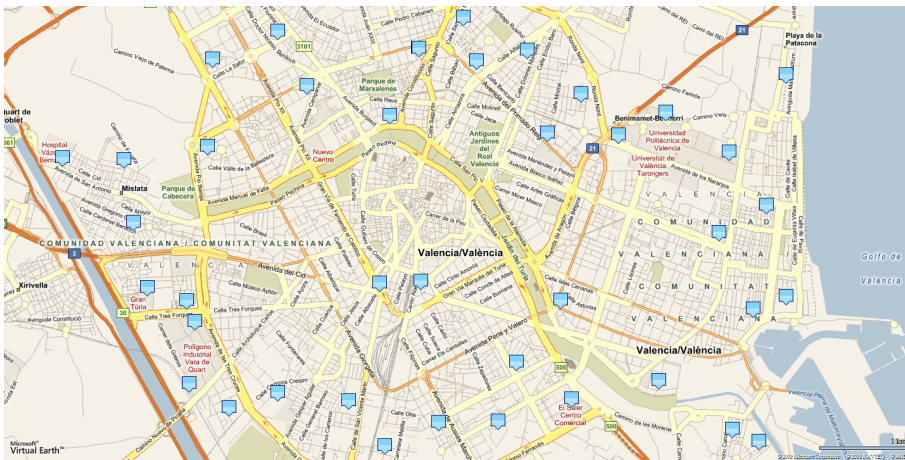


Figura 3.3: Localizaciones para un problema TSP.

Como muestra de la alta complejidad matemática de problemas relativamente sencillos, hay que decir que en el caso del ejemplo de la Figura 3.4, el modelo de programación lineal entera-mixta (MILP - *Mixed-Integer Linear Programming*) resultante tendría: 5 044 restricciones, 1 640 variables de decisión binarias, 41 variables de decisión reales (propias de Miller - Tucker) y un espacio de búsqueda de $41! = 3,34525266131638 \cdot 10^{49}$ posibles soluciones (esto es más de 33 billones de trillones de trillones de posibles soluciones).



Figura 3.4: Solución óptima al TSP con distancias euclidianas.

La solución óptima a este ejemplo es una ruta de 33,21 km de distancia total recorrida.

La cantidad de literatura sobre TSP es abrumadora. Un buen punto de partida para saber más es [Rinnooy Kan et al. \(1985\)](#) y el volumen de [Gutin y Punnen \(2006\)](#). Los orígenes de este problema se discuten en [Schrijver \(2005\)](#).

3.3 Múltiples viajantes de comercio (m-TSP)

El problema de los múltiples viajantes de comercio (*m-TSP* *m-Traveling Salesman Problem*) es una generalización del TSP en el que se introduce más de un viajante (o vehículo). En este problema, al igual que en el TSP, se trata de visitar $n - 1$ localizaciones exactamente una vez, partiendo de un nodo central $i = 0$ (*depot*) desde el que partirán m rutas y al que tendrán que regresar tras visitar sus correspondientes localizaciones. No se permiten rutas vacías donde no se visite ninguna localización.

El problema se puede formular como un modelo matemático del siguiente modo. Sea un grafo completo y dirigido $G = (V, A)$, donde $V = \{0 \dots, n\}$ es el conjunto de vértices (nodos o localizaciones) y A es el conjunto de arcos.

3 | Modelos básicos de problemas de rutas

El nodo $i = 0$ será el depósito central. Al igual que en el TSP, para cada arco $(i, j) \in A$ se asigna una distancia, tiempo o coste c_{ij} . De igual modo se definen las variables binarias de decisión x_{ij} que tomarán un valor de 1 si y sólo si el arco (i, j) es utilizado en la ruta solución. El modelo queda del siguiente modo:

$$\min \sum_{i,j \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (3.7)$$

sujeto a:

$$\sum_{j \in \Delta^+(0)} x_{0j} = m \quad (3.8)$$

$$\sum_{j \in \Delta^-(0)} x_{j0} = m \quad (3.9)$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3.10)$$

$$\sum_{j \in \Delta^-(j)} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (3.11)$$

$$u_i - u_j + p \cdot x_{ij} \leq p - 1 \quad \forall i, j \in V \quad i \neq 0 \quad j \neq 0 \quad (3.12)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V \quad (3.13)$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3.14)$$

El modelo es muy similar al del TSP. La función objetivo (3.7) minimiza la suma total de coste de los arcos utilizados por todas las m rutas. El primer conjunto de restricciones (3.8) y (3.9) aseguran m vehículos saldrán y volverán al depósito. A continuación, el siguiente conjunto de restricciones (3.10) y (3.11) son las ecuaciones de continuidad, que aseguran que sólo debe haber un arco de llegada a una ciudad o nodo, y que igualmente tan sólo debe haber

un arco de salida. Por tanto, cada localización es un nodo intermedio de una ruta. En estas ecuaciones, $\Delta^+(i)$ y $\Delta^-(i)$ representa el conjunto de nodos adyacentes cuyos arcos son salientes y entrantes al nodo i , esto es:

$$\Delta^+(i) = \{j \in V \mid (i,j) \in A\} \quad (3.15)$$

$$\Delta^-(i) = \{j \in V \mid (j,i) \in A\} \quad (3.16)$$

Sin embargo, con estas restricciones y la condición binaria (3.13) de las variables x_{ij} , no es suficiente para garantizar que en las soluciones factibles no aparezca una solución formada por subrutas (no conectadas entre sí) y que cumplan las restricciones anteriormente comentadas. Por ello, es necesario añadir más restricciones (3.12) que eviten la formación de subrutas. Las variables de decisión introducidas por las condiciones de [Miller, Tucker y Zemlin \(1960\)](#) son reales (3.14), siendo p el máximo número de localizaciones a visitar.

Si la matriz de distancias satisface la desigualdad triangular, esto es $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$ para todo $(i,j,k) \in V$, entonces se puede decir que la distancia del TSP óptimo para n localizaciones más el depósito siempre es menor o igual que la distancia del m -TSP óptimo para cualquier valor de m .

Cualquier problema m -TSP con n localizaciones puede ser formulado como un TSP con $m+n$ ciudades [Bellmore y Hong \(1974\)](#). Para ello, habrá que crear m copias del nodo depósito. Las distancias entre los m nodos depósitos tienen que ser lo suficientemente grandes, mientras que las distancias entre el depósito y las otras localizaciones tienen una distancia proveniente de la matriz A . Hay que tener en cuenta que el TSP resultante no obedece a la desigualdad triangular. En la Figura 3.5 se muestra un ejemplo de m -TSP con distancias euclidianas ($m = 3, n = 41$).

En el caso del ejemplo de Figura 3.5, el modelo de programación lineal entera-mixta (MILP - *Mixed-Integer Linear Programming*) resultante tendría: 5 044 restricciones y 1 721 variables de decisión (1 681 variables binarias y 40

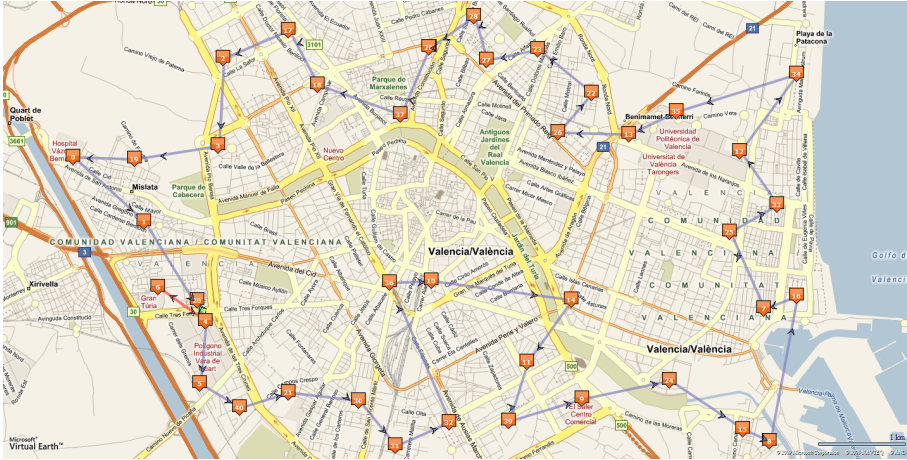


Figura 3.5: Solución óptima al m -TSP con distancias euclidianas ($m = 3$, $n = 41$).

variables reales). Se puede observar en la Figura 3.6 el detalle de la solución con las 3 rutas resultantes que parten del depósito (nodo 4). En este ejemplo, la distancia total recorrida de las tres rutas resultantes es igual a 35 km, frente a los 33,21 km de la solución TSP del ejemplo de la Figura 3.4.

El problema m -TSP no está tan estudiado en la literatura como el TSP (tal vez por su gran parecido). En [Bektas \(2006\)](#) se presenta un recorrido sobre la literatura de las heurísticas y los modelos exactos del m -TSP.

Una variante interesante de este problema es el min-max m -TSP cuyo objetivo es minimizar la distancia resultante de la ruta más larga. Este problema fue estudiado por [França et al. \(1995\)](#) quien propuso una heurística y un método exacto para su resolución. Más recientemente [Applegate et al. \(2002\)](#) resolvió de manera óptima una instancia Whizzkids96 (creada por Aarts, E. y Lenstra, J. K.) de m -TSP que formaba parte de un reto desde 1996 (esponsorizado por CMG y *De Telegraaf*) y que no había sido resuelta antes. En dicha instancia el problema a resolver consistía en 120 clientes que debían ser atendidos por 4 viajantes. Para ello fue necesaria una red de 188 procesadores trabajando en paralelo durante 10 días.

rollo científico se debe al trabajo de [Dantzig y Ramser \(1959\)](#), que analizaron un problema real de reparto de combustible para abastecer con una flota de camiones cisterna a un conjunto de estaciones de servicio (gasolineras):

“The paper is concerned with the optimum routing of a fleet of gasoline delivery trucks between a bulk terminal and a large number of service stations supplied by the terminal. The shortest routes between any two points in the system are given and a demand for one or several products is specified for a number of stations within the distribution system. It is desired to find a way to assign stations to trucks in such a manner that station demands are satisfied and total mileage covered by the fleet is a minimum. A procedure based on a linear programming formulation is given for obtaining a near optimal solution. The calculations may be readily performed by hand or by an automatic digital computing machine.”

Curiosamente, después de todos estos años, este problema sigue presente hoy en día y cobra mayor relevancia, si cabe, en momentos o coyunturas de precios altos para el combustible.

Pocos años después, este primer trabajo aplicado fue revisado por [Clarke y Wright \(1964\)](#), quienes propusieron un método voraz de resolución (*greedy*):

“The optimum routing of a fleet of trucks of varying capacities from a central depot to a number of delivery points may require a selection from a very large number of possible routes, if the number of delivery points is also large. This paper, after considering certain theoretical aspects of the problem, develops an iterative procedure that enables the rapid selection of an optimum or near-optimum route. It has been programmed for a digital computer but is also suitable for hand computation.”

Estos primeros trabajos sentaron las bases del desarrollo práctico, y desde entonces es un foco atractivo y fructífero para los investigadores de diversos campos, véase [Gaskell \(1967\)](#).

Sin embargo, en este primer trabajo de [Dantzig y Ramser \(1959\)](#), ya se trataba las restricciones de capacidad de los vehículos:

“...imposing the condition that specified deliveries q_i , be made at every point ... without exceeding the truck capacity”

por lo que realmente se estaría hablando de un CVRP - *Capacitated Vehicle Routing Problem*, tal y como se explicará en el apartado 3.5.

Ahora bien, existe una variante del problema m -TSP que se encuentra a medio camino del CVRP. Este problema al que podemos llamar VRP clásico se formula igual que el modelo presentado en el apartado 3.3, pero con la particularidad de que el número de rutas m es una variable de decisión y no un parámetro determinado. Al igual que en el m -TSP, se trata de visitar n localizaciones exactamente una vez, partiendo de un nodo central $i + 1$ (*depot*) desde el que partirán las m rutas necesarias (por determinar) y al que tendrán que regresar tras visitar sus correspondientes localizaciones. Así pues, en este problema todavía no se contempla la demanda de servicio por parte de los clientes, ni tampoco la capacidad de carga de los vehículos, y se centra en determinar el número de vehículos m necesarios (o de rutas). El modelo matemático intentará encontrar el número de rutas aconsejadas de modo que se minimice el total de las distancias o de los costes incurridos, aunque para ello se tenga que volver al depósito, hacer un servicio directo a un sólo cliente, o movilizar otro vehículo más. Este problema se puede acotar añadiendo alguna restricción de mínimo o máximo en el número de vehículos o rutas:

$$K_{\min} \leq m \leq K_{\max} \quad (3.17)$$

donde K_{\min} y K_{\max} denotan el límite inferior y superior del número de vehículos o rutas.

3.5 Vehículos capacitados (CVRP)

Como se ha citado anteriormente, el CVRP - *Capacited VRP* introduce información adicional al problema clásico VRP. En el CVRP para cada cliente o localización i se asocia una demanda de servicio d_i (suministro o recogida) que es determinista y conocida de antemano, no negativa y que deberá ser atendida sin fraccionar. En el depósito central, se dispone de una flota de vehículos K cuya capacidad homogénea de servicio C es conocida y debe ser superior a la demanda d_i de cualquier cliente $\forall i \in V$. El depósito (normalmente el nodo $i = 0$) tendrá una demanda $d_0 = 0$. En este problema no se introducen más restricciones además de la capacidad.

El objetivo es minimizar el coste total de operación de servicio (medida como la suma de la distancia total recorrida por todos los vehículos, los tiempos totales necesarios para todas las rutas, o su coste en unidades monetarias por ejemplo). Para ello, se dispone de una matriz de costes o distancias, donde a cada arco $(i, j) \in A$ se asocia un coste c_{ij} que normalmente no es negativo y que representa el coste, la distancia o el tiempo de viaje necesario para recorrer el arco desde el cliente i hasta el cliente j .

Esta matriz de coste se dice que es simétrica y por tanto se habla de SCVRP si $c_{ij} = c_{ji}, \forall (i, j) \in A$. Generalmente el CVRP se sobreentiende que es SCVRP ya que las distancias entre nodos (i, j) se suelen entender como distancias euclidianas, lo cual satisface la desigualdad triangular. Si por el contrario no se cumple la condición anterior, entonces la matriz es asimétrica y se habla de ACVRP. En cualquier caso, no se permiten lazos sobre un mismo nodo (i, i) y por ello se debe penalizar al máximo el coste $c_{ii} = +\infty \forall i \in V$.

El CVRP es un problema que contiene y resuelve dos problemas a la vez:

1. El BPP - *Bin Packing Problem*, que tratará de determinar el número mínimo de vehículos K con capacidad C necesarios para satisfacer la demanda total d_i . Este problema de partición (*partition problem*) o mochila (*knapsack problem*), es también NP-completo [Martello y Toth \(1990\)](#). Re-

cuérdese que para asegurar la factibilidad, se asume que $d_i \leq C$ para todo $i = 1, \dots, n$.

2. El TSP - *Travelling Salesman Problem* que en realidad es un problema de secuenciación (*scheduling*) de las visitas. Que como se explica en el apartado (3.2), trata de determinar para cada ruta K la secuencia óptima del recorrido en términos de distancia, tiempo o coste.

Se podría decir que mientras el BPP aborda el aspecto táctico de dimensionamiento de la flota y asignación de clientes a vehículos, el TSP se encarga de la operativa del diseño de la ruta. Lo interesante del CVRP es que aborda ambos aspectos conjuntamente.

Existen diferentes formulaciones para el CVRP, tal y como se describe en [Toth y Vigo \(2001a\)](#), donde se pueden ver las diferencias entre el modelo matemático de uno, dos, y de tres sub-índices. El modelo de flujo de dos sub-índices se utiliza generalmente para variantes básicas del CVRP (tanto simétrico como asimétrico), sin embargo, para problemas más complejos y con más restricciones esta formulación no es adecuada; por ello, en este texto se utilizará la formulación de tres sub-índices. En el llamado *three-index vehicle flow formulation* se explicita el vehículo que recorrerá cada arco (a diferencia del de uno y dos sub-índices). Sea un grafo completo y dirigido $G = (V, A)$, donde $V = \{0, \dots, n\}$ es el conjunto de vértices (nodos o localizaciones) y A es el conjunto de arcos. El nodo $i = 0$ será el depósito central. En esta formulación, tanto para problemas simétricos como asimétricos, se utilizan $O(n^2K)$ variables binarias x . La variable x_{ijk} indica si el arco $(i, j) \in A$ será utilizado o recorrido por el vehículo k ($k = 1, \dots, K$) en la solución óptima (3.26). Además, existen $O(nK)$ variables binarias y . La variable y_{ik} tal que $i \in V, k = 1, \dots, K$ tomará el valor 1 si el cliente i es servido por el vehículo k en la solución óptima, y 0 en caso contrario (3.25). El modelo de tres sub-

3 | Modelos básicos de problemas de rutas

índices, se formula como:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \sum_{k=1}^K x_{ijk} \quad (3.18)$$

sujeto a:

$$\sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^K y_{0k} = K \quad (3.20)$$

$$\sum_{j \in V} x_{jik} = y_{ik} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, k = 1, \dots, K \quad (3.21)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} d_i y_{ik} \leq C \quad k = 1, \dots, K \quad (3.22)$$

$$u_{ik} - u_{jk} + C x_{ijk} \leq C - d_j \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\}, i \neq j, d_i + d_j \leq C, k = 1, \dots, K \quad (3.23)$$

$$d_i \leq u_{ik} \leq C \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, k = 1, \dots, K \quad (3.24)$$

$$y_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i \in V, k = 1, \dots, K \quad (3.25)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in V, k = 1, \dots, K \quad (3.26)$$

Como se puede observar, el modelo se basa en los anteriormente explicados. La función objetivo (3.18) minimiza la suma total de coste de los arcos utilizados por todas las K rutas generadas. Las restricciones (3.19) - (3.21) exigen que cada cliente sea visitado exactamente una vez, que K vehículos

salgan y regresen al depósito, y que el mismo vehículo k llegue y salga de la localización de cada cliente i respectivamente. El conjunto de restricciones (3.22) garantizan que el total de demanda d_i atendida por cada vehículo k no supere la capacidad de servicio C . Cada vehículo puede a lo sumo recorrer una ruta. Las restricciones (3.23) y (3.24) son una adaptación de las condiciones de Miller-Tucker para la formulación de tres sub-índices para evitar la formación de sub-rutas. El resultado de este problema es un conjunto de K rutas (cada una corresponde con un vehículo) con un coste total mínimo y que satisface todas las restricciones anteriores y por supuesto la de capacidad.

Esta formulación de tres sub-índices tiene una gran flexibilidad para incorporar nuevas restricciones y características, y por ello suele ser utilizada para variantes más complejas del VRP, como el VRPTW -*Vehicle Routing Problem with Time Windows* que se verá más adelante. El principal inconveniente de este tipo de formulación es el gran y creciente número de variables necesarias; sobre el impacto de la formulación en los tiempos de computación es interesante la lectura de [Ordoñez, Sungur y Dessouky \(2005\)](#).

En la siguiente Figura 3.7 se muestra un ejemplo de CVRP con distancias euclidianas ($k = 3, n = 9$).

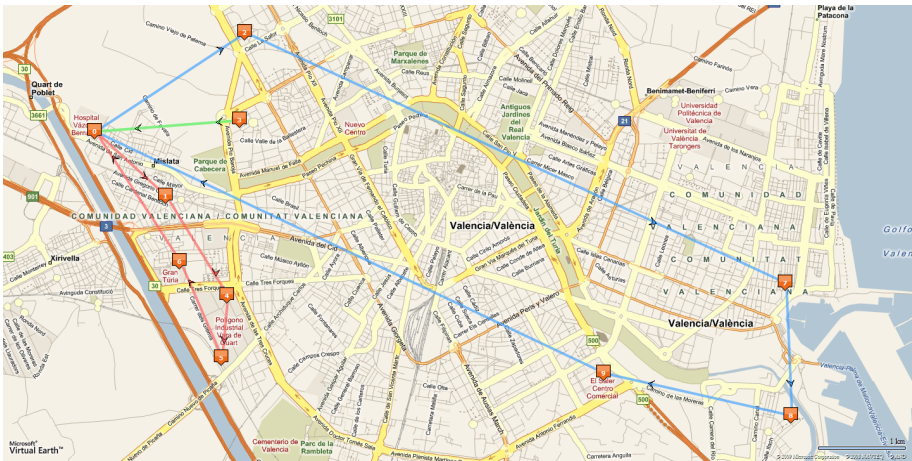


Figura 3.7: Solución óptima al CVRP con distancias euclidianas ($k = 3, n = 9$).

En el caso de este ejemplo, el modelo de programación lineal entera-mixta (MILP - *Mixed-Integer Linear Programming*) resultante tiene: 1 813 restricciones y 357 variables de decisión (294 variables binarias y 63 variables reales). En esta solución la distancia total recorrida de las tres rutas es igual a 28,945 km (nótese el envío directo de una de las rutas).

3.5.1 Extensiones al CVRP

En la literatura aparecen algunas consideraciones interesantes a modo de extensión del CVRP. A continuación se comentarán brevemente para una mejor comprensión del ámbito de trabajo de este problema:

1. Cuando el número de vehículos disponibles K es superior al número mínimo de vehículos necesarios para cubrir la demanda K_{min} (que se puede determinar a través de la resolución del BPP); entonces, es posible dejar algunos vehículos sin utilizar en el depósito. La restricción (3.20) se podría sustituir por:

$$\sum_{k=1}^K y_{0k} \leq K \quad (3.27)$$

En este caso, se podría asociar a cada vehículo un coste fijo por utilización, y añadir a la función objetivo la minimización del coste de uso de vehículos (además del coste total de las rutas). Otra forma de intentar minimizar el uso de los recursos (vehículos), sería asociar un coste muy alto M a los arcos que salen del depósito $c_{0j} = M$ para todo $j \in V$. En este caso, la función objetivo trataría de minimizar el número de arcos que salen del depósito, y a continuación minimizar el total de la distancia o coste de las rutas resultantes.

2. Otra consideración muy interesante es la de la flota heterogénea cuyos vehículos tienen diferente capacidad C_k , $k = 1, \dots, K$. Esto es tan

sencillo como reemplazar C por C_k en las restricciones de capacidad (3.22).

3. El CVRP se puede transformar fácilmente en el OVRP - *Open Vehicle Routing Problem*. En realidad es el mismo problema de rutas con vehículos capacitados pero con la restricción de que los vehículos no deben volver a la central de origen tras su servicio. El resultado son K rutas abiertas (sin retorno final al depósito).
4. También puede ser interesante penalizar los envíos directos a un único cliente, y forzar que cada vehículo al menos visite a un par de clientes.
5. La consideración anterior puede transformarse en una restricción de máximo en el DCVRP - *Distance Constrained Vehicle Routing Problem*. En esta variante para cada ruta se añaden restricciones de máximo tiempo, número de clientes o distancia de servicio por vehículo, de modo que no se permite que un determinado vehículo visite a más de T_k clientes, distancia o tiempo.
6. Por último, cuando la matriz de coste se mide en unidades de tiempo, y si se desea considerar el tiempo de servicio s_i de cada cliente propiamente dicho (además del tiempo de viaje); los tiempos de servicio pueden ser añadidos a los tiempos de viaje de cada arco: $c_{ij} = c'_{ij} + s_i/2 + s_j/2$, donde c'_{ij} es el tiempo original de viaje en el arco (i,j) .

La siguiente Figura 3.8 es una transformación del ejemplo de la Figura 3.7 donde se han eliminado las restricciones que posibilitan un OVRP y se han incluido las restricciones para evitar envíos directos.

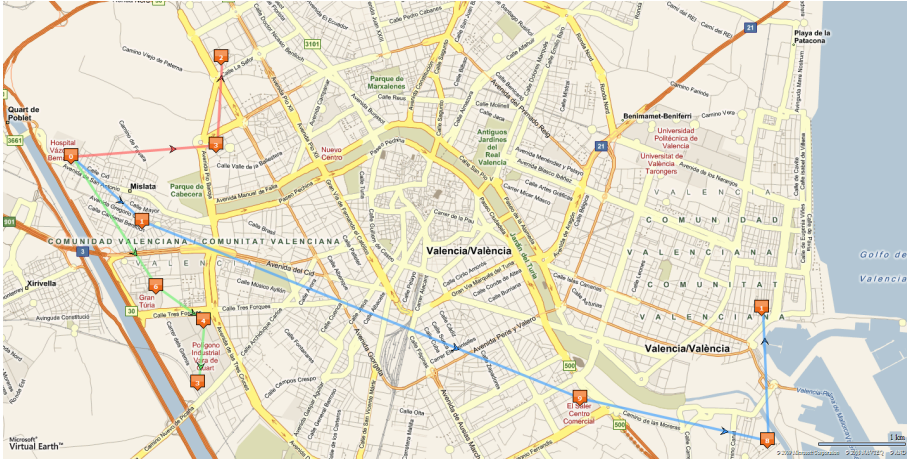


Figura 3.8: Solución óptima al OVRP con distancias euclidianas y sin envío directo ($k = 3, n = 9$).

3.6 Ventanas horarias (VRPTW)

El problema VRPTW - *Vehicle Routing Problem with Time Windows* es una extensión al problema CVRP (véase apartado 3.5) donde además de unas demandas de servicio d_i (suministro o recogida) deterministas y asociadas a los clientes o localizaciones i , se asocia una ventana de tiempo $[e_i, l_i]$ que define un horario de servicio permitido para que un vehículo k atienda la demanda del nodo i . Uno de los primeros casos de estudio que aparecieron en la literatura puede encontrarse en Knight y Hofer (1968) y en Pullen y Webb (1967).

El vehículo k por tanto debe de llegar al nodo i con suficiente antelación para poder atenderle durante cierto período de tiempo s_i (tiempo de carga, descarga, servicio, etc.) dentro de la ventana de tiempo Sexton y Bodin (1985). Sea (i, j) un arco $\in A$ de la solución, entonces t_i y t_j son los instantes de tiempo de llegada a los clientes i y j . La restricción de ventana horaria obliga a que $t_i \leq l_i$ y $t_j \leq l_j$. Si el vehículo k llegara antes que e_i , esto es $t_i < e_i$ entonces el vehículo debería esperar hasta que el cliente le pueda atender (a

que abra la ventana temporal), lo que a su vez implica que $t_j = e_i + s_i + t_{ij}$. El vehículo nunca podrá hacer el servicio si no llega a tiempo (tras el cierre de la ventana temporal). El depósito también tendrá asociada una ventana temporal $[e_0, l_0]$ que define los límites de comienzo de la jornada de reparto o recogida y de retorno de los vehículos a la base de operaciones. Se puede asumir que el problema comienza en el instante de tiempo $e_0 = 0$. Los tiempos de desplazamiento o transporte entre nodos t_{ij} son conocidos y positivos [Baker \(1982\)](#).

En el modelo matemático se utilizarán los nodos 0 y $n + 1$ para el depósito (se duplica dicho nodo), y al igual que en el CVRP se dispone de un conjunto de K vehículos con capacidad de servicio C_k . El modelo matemático se puede expresar del siguiente modo:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \sum_{k \in K} x_{ijk} \quad (3.28)$$

sujeto a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0, n + 1\} \quad (3.29)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3.30)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ihk} - \sum_{j \in V} x_{hjk} = 0 \quad \forall h \in V \setminus \{0, n + 1\} \quad \forall k \in K \quad (3.31)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,n+1,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3.32)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0, n+1\}} d_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq C_k \quad \forall k \in K \quad (3.33)$$

$$x_{ijk}(w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk}) \leq 0 \quad \forall i, j \in V \quad \forall k \in K \quad (3.34)$$

$$e_i \leq w_{ik} \leq l_i \quad \forall i \in V \quad \forall k \in K \quad (3.35)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad \forall k \in K \quad (3.36)$$

$$w_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in V \quad \forall k \in K \quad (3.37)$$

Al igual que en el CVRP, la función objetivo (3.28) minimizará la suma total de coste de los arcos utilizados por todas las K rutas generadas. Las restricciones (3.29) obligan a que todos los clientes sean visitados una vez.

Las restricciones (3.30) - (3.32) se encargan de garantizar que cada vehículo $k \in K$ realizará una ruta partiendo del depósito 0 y volviendo a él ($n + 1$) tras el recorrido x_{ijk} . La relación entre demanda de los clientes d_i y la restricción de capacidad de los vehículos C_k es atendida en (3.33). La restricción de ventanas horarias es impuesta en (3.35), siendo w_{ik} el instante de tiempo en el que el vehículo k llega al cliente i .

Por otro lado, las restricciones (3.34) aseguran que si el vehículo k viaja de i a j , no llegará a j antes que $w_i + s_i + t_{ij}$; además estas restricciones ayudan en la eliminación de soluciones formadas por sub-rutas Miller, Tucker y Zemlin (1960). Estas ecuaciones no lineales se pueden adaptar al modelo MILP - *Mixed-Integer Linear Programming* del siguiente modo:

$$w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk} \leq M - x_{ijk} \cdot M \quad (3.38)$$

siendo M una constante lo suficientemente grande. Finalmente, en (3.36) se declaran las variables de decisión binarias x_{ijk} que indican si el arco (i,j) es utilizado por el vehículo k . Las variables w_{ik} en (3.37) no tienen significado si el cliente i no es visitado por el vehículo k . Nótese que w_{0k} señalará el instante de partida del vehículo desde el depósito, y de manera análoga $w_{n+1,k}$ el momento de retorno.

La Figura 3.9 muestra la solución óptima a un ejemplo de problema VRPTW con 3 vehículos y 8 clientes.

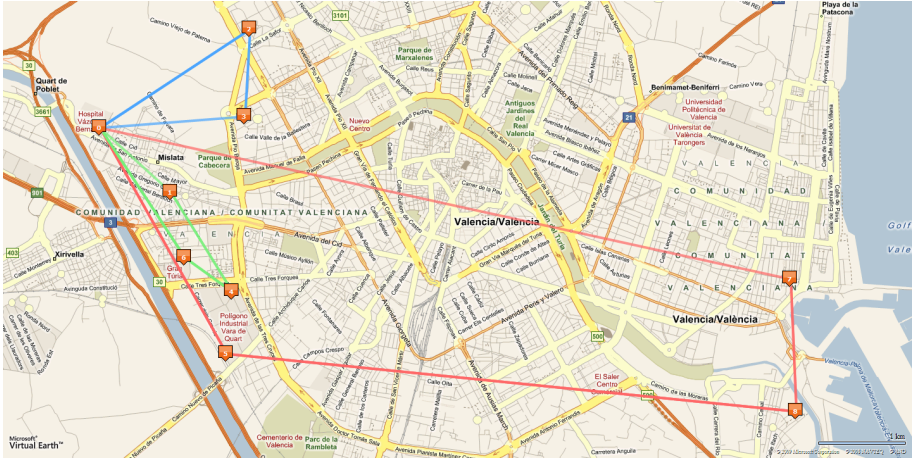


Figura 3.9: Solución óptima al VRPTW con distancias euclidianas ($k = 3$, $n = 8$).

Como es sabido, este problema también pertenece al tipo NP-completo [Solomon \(1987\)](#), así que, este pequeño problema genera un modelo MILP con 911 restricciones y 300 variables de decisión (192 variables binarias y 108 variables reales). En esta solución la distancia total recorrida de las tres rutas es igual a 29,19 km.

También se puede observar la Figura 3.10 donde se representa el cronograma de la solución del ejemplo anterior. En el cronograma se muestran las tres rutas: sobre cada una de ellas los tiempos de transporte t_{ij} y los de servicio s_i , debajo se puede ver las ventanas de tiempo para cada cliente y el depósito $[e_i, l_i]$. También se indican los instantes de tiempo de llegada a cada nodo w_{ik} . Nótese que en la Ruta 1, el vehículo llega antes de tiempo al cliente 2 y debe esperarse $w_{2,1}$, esto mismo ocurre también en la Ruta 3.

3 | Modelos básicos de problemas de rutas

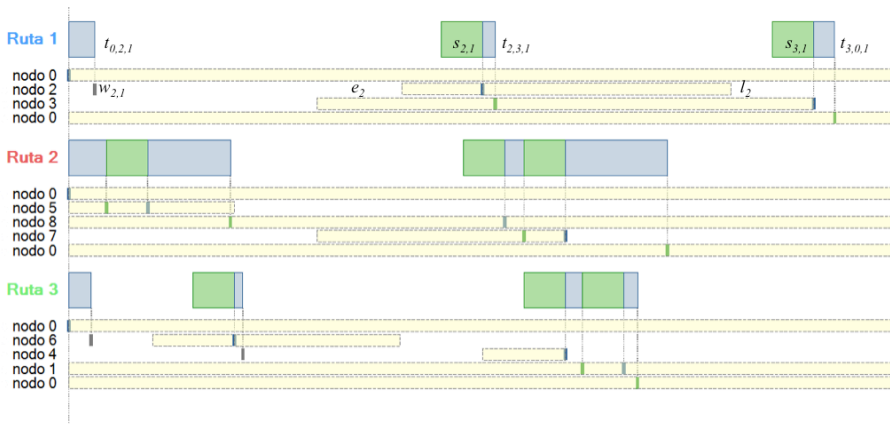


Figura 3.10: Cronograma de la solución óptima al VRPTW con distancias euclidianas ($k = 3$, $n = 8$).

3.6.1 Extensiones al VRPTW

En este apartado se presentan algunas extensiones al VRPTW que aparecen en la literatura. A continuación se comentarán brevemente las más interesantes, para una revisión más amplia de la literatura véase [Haouari, Dejax y Desrochers \(1990\)](#).

1. El número de vehículos utilizados se puede minimizar incluyendo un coste fijo por utilización de vehículo lo suficientemente alto M a todos los arcos salientes del depósito $(0, j)$, $j \in V$. Entonces, la función objetivo trataría de minimizar el número de arcos que salen del depósito, y a continuación minimizar el total de la distancia o coste de las rutas resultantes.
2. Para cada cliente, se puede extender la definición de ventana de tiempo a múltiples ventanas de tiempo. En ese caso se habla de un VRPMTW - *Vehicle Routing Problem with Multiple Time Windows*. Esto requiere necesariamente cambiar la función para tener en cuenta las preferencias horarias del servicio. Este problema es muy similar al llamado PVRP -

Period Vehicle Routing Problem donde cada cliente requiere un número determinado de servicios en un periodo de tiempo, y por tanto, es visitado por los clientes múltiples veces en un horizonte de planificación. Sobre este problema, es interesante la lectura de [Solomon y Desrosiers \(1988\)](#).

3. En ocasiones es posible que el vehículo pueda atender a un cliente un poco antes de la apertura o después del cierre de la ventana de tiempo. Existe por tanto, cierta flexibilidad de tiempo de servicio que se denomina *VRPSTW soft time window*. Esta flexibilidad sin embargo tiene un coste adicional.
4. Por último, se podría mencionar la extensión referente a los costes dependientes de la carga y el tiempo (*time and load dependent costs*). Y también a la restricción de máximo número de horas realizadas por el conductor asignado a una ruta. Esta última es especialmente útil para grandes recorridos, donde los conductores se ven obligados a realizar paradas y a tomarse un período de descanso [Toth y Vigo \(2001b\)](#).

3.7 Recogida y entrega (VRPPD)

El VRPPD - *VRP with Pickup and Delivery* es un VRP donde un conjunto de vehículos heterogéneos deben satisfacer un conjunto de servicios de recogida y entrega (*pickup and delivery*). Cada servicio se define con una localización de recogida (de donde debe recoger cierta mercancía o persona) y otra localización de entrega (a donde debe entregar lo anteriormente recogido). Por tanto, se trata de planificar servicios de transporte a través de la red con el menor coste de operaciones [Savelsbergh \(1995\)](#).

En el problema VRPPD básico, cada cliente i tiene asociadas dos cantidades d_i y p_i , que representan la demanda de productos homogéneos que deben ser recogidos (*picked*) y entregados (*delivered*) respectivamente en el cliente i . Se asume además que las recogidas se realizan antes que las entregas, y que

Problem with Backhauls, los orígenes y destinos de los servicios son comunes, y por consiguiente no es necesario explicitarlos. En ese caso, el problema es conocido como VRSPD - *with Simultaneous Pickup and Delivery*. El CVRP es un VRPPD donde $O_i = D_i = 0$ y $p_i = 0$ para todo $i \in V$. Al caso particular VRSPD con $K = 1$ se le denomina TSP con recogida y entrega (TSPPD). Una lectura interesante es [Parragh, Doerner y Hartl \(2008\)](#), donde se hace un repaso a las principales variantes y modelos del VRPPD.

Una variante muy interesante por sus aplicaciones prácticas y muy estudiada en la literatura [Solomon y Desrosiers \(1988\)](#) es el VRPPDTW - *VRP with Pickup and Deliveries and Time Windows*. El VRPPDTW es una generalización del VRPTW tratado en el apartado 3.6. En este tipo de problemas, las ventanas de tiempo establecen los intervalos en los cuales debe tener lugar el servicio para cada cliente (que son especialmente importantes para el caso del transporte de pasajeros *dial-a-ride problem*). Además, se siguen manteniendo las restricciones de visita una sola vez para la recogida y entrega, la secuencia de recogida y entrega para cada vehículo, y su capacidad antes del retorno al depósito.

Para la formulación matemática del VRPPDTW se duplicarán las localizaciones de servicio i , siendo i el nodo de recogida y $n + i$ el de entrega. Se denota como $P = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de nodos de recogida *Pickup*, y $D = \{n + 1, \dots, 2n\}$ el conjunto de nodos de entrega *Delivery*, de modo que el conjunto $N = P \cup D$. Si el servicio i consiste en transportar d_i desde i hasta $n + i$, entonces $z_i = d_i$ y $z_{n+i} = -d_i$. Sea K la flota de vehículos y $N_k = P_k \cup D_k$ el conjunto de nodos asociados a cada vehículo. La capacidad de carga del vehículo k es C_k , y el tiempo de viaje y el coste de transporte entre los nodos $i, j \in V_k$ son t_{ijk} y c_{ijk} respectivamente.

En la siguiente formulación matemática, se utilizan las variables binarias de flujo x_{ijk} que son iguales a 1 si el arco $(i, j) \in A_k$ es recorrido por el vehículo k , y 0 en caso contrario como se indica en (3.52). Las variables T_{ik} indican el instante temporal en el cual el vehículo k comienza el servicio en el

3 | Modelos básicos de problemas de rutas

cliente $i \in V_k$, mientras que las variables Z_{ik} muestran la carga del vehículo k tras el servicio al nodo $i \in V_k$. El modelo matemático se expresa del siguiente modo:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k} c_{ijk} x_{ijk} \quad (3.39)$$

sujeto a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N_k \cup \{d(k)\}} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in P \quad (3.40)$$

$$\sum_{j \in N_k} x_{ijk} - \sum_{j \in N_k} x_{j,n+i,k} = 0 \quad \forall k \in K, i \in P_k \quad (3.41)$$

$$\sum_{j \in P_k \cup \{d(k)\}} x_{o(k),j,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3.42)$$

$$\sum_{i \in N_k \cup \{o(k)\}} x_{ijk} - \sum_{i \in N_k \cup \{d(k)\}} x_{jik} = 0 \quad \forall k \in K, j \in N_k \quad (3.43)$$

$$\sum_{i \in D_k \cup \{o(k)\}} x_{i,d(k),k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3.44)$$

$$x_{ijk}(T_{ik} + s_i + t_{ijk} - T_{jk}) \leq 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \quad (3.45)$$

$$a_i \leq T_{ik} \leq b_i \quad \forall k \in K, i \in V_k \quad (3.46)$$

$$T_{ik} + t_{i,n+i,k} \leq T_{n+i,k} \quad \forall k \in K, i \in P_k \quad (3.47)$$

$$x_{ijk}(Z_{ik} + z_j - Z_{jk}) = 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \quad (3.48)$$

$$z_i \leq Z_{ik} \leq C_k \quad \forall k \in K, i \in P_k \quad (3.49)$$

$$0 \leq Z_{n+i,k} \leq C_k - z_i \quad \forall k \in K, n+i \in D_k \quad (3.50)$$

$$Z_{o(k),k} = 0 \quad \forall k \in K \quad (3.51)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A_k \quad (3.52)$$

La función objetivo (3.39) trata de minimizar el coste total de las rutas. En el conjunto de restricciones (3.40) y (3.41) se fuerza a que cada cliente (y su servicio de recogida y entrega) sea visitado exactamente una vez por el mismo vehículo. A continuación, las restricciones multi-producto (3.42) a (3.44) aseguran que cada vehículo k comenzará su ruta en el origen $o(k)$ y acabará en el destino $d(k)$. Seguidamente, en (3.45) - (3.46) se expresan las restricciones referentes a las ventanas de tiempo. En (3.47) y (3.48) se vigila que el vehículo visite el nodo de recogida antes que el de entrega. Las restricciones (3.49)-(3.50) relacionan los nodos de recogida y entrega con la capacidad del vehículo, siendo (3.51) la carga inicial de los vehículos.

La Figura 3.12 muestra la solución óptima a un ejemplo de problema VRPPD con 2 vehículos y 10 clientes (8 de recogida en azul y con flecha hacia abajo, y 2 de entrega en verde y con flecha hacia arriba). La distancia total de las dos rutas es igual a 25,86 km.

Al igual que ocurre con otras variantes del VRP, el VRPPD tiene multitud de extensiones (algunas de las cuales siguen siendo hoy tema de investigación). El modelo anteriormente expuesto, por ejemplo, se podría extender para minimizar el número de vehículos utilizados, flexibilizar las ventanas temporales e incluir funciones de penalización por demora o anticipación, o incluso incluir una función no lineal de coste según la carga transportada por el vehículo a lo largo de su ruta [Dumas, Desrosiers y Soumis \(1991\)](#). Es interesante también la transformación de la función objetivo de minimización de coste en una función objetivo de maximización de la calidad de servicio en los

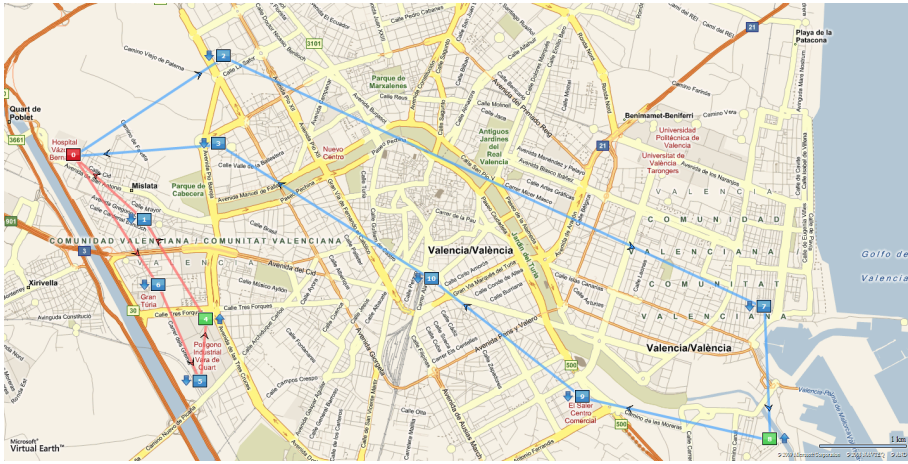


Figura 3.12: Solución óptima al VRPPD con distancias euclidianas ($k = 2$, $n = 10$).

problemas de transporte de personas, donde los clientes valoran el servicio en función de las ventanas horarias y el tiempo del transporte.

3.8 Conclusiones

En este capítulo, se ha presentado una clasificación de los problemas de rutas de vehículos y se han expuesto los modelos matemáticos para los problemas más significativos (TSP, m -TSP, VRP, CVRP, DCVRP, OVRP, VRPTW, VRPSTW, VRPPD, VRPB, VRPPDTW). A partir de un problema básico rápidamente surgen nuevas variantes con características cada vez más particulares (extensiones al problema). Se ha podido apreciar que los problemas de rutas de vehículos están íntimamente relacionados, y es por ello que un modelo más genérico puede servir para resolver un conjunto de problemas de rango inferior. En cada apartado se ha incluido un ejemplo práctico de problema resuelto (sobre un sistema de información geográfica y con distancias euclidianas) que ayuda a comprender el modelo matemático, sus diferentes características y su gran complejidad matemática.

4 | Asimetría: El caso del TSP

En este capítulo en primer lugar se introducen algunas de las principales cuestiones a resolver y a analizar. A continuación se describen detalladamente los algoritmos y heurísticas seleccionados para la resolución del TSP. Algunas de las técnicas utilizadas para la resolución del TSP no están diseñadas para resolver problemas asimétricos, es por ello por lo que se presenta un método de transformación de matrices asimétricas en matrices simétricas que será utilizado en el proceso de experimentación.

Seguidamente se estudia la relación entre el concepto de asimetría en las matrices de distancias y las redes de transporte por carretera propias del mundo real. Para ello, se presenta a los sistemas de información geográfica como herramientas útiles para la localización de puntos de interés y el cálculo de distancias mínimas entre pares de localizaciones. Tras una revisión bibliográfica, se proponen diferentes indicadores para la medición del grado de asimetría que serán utilizados posteriormente en los análisis de los experimentos.

A continuación se describe el proceso de caracterización de las instancias, el diseño factorial y el diseño de experimentos (DOE). En la parte final del presente capítulo, se introducen brevemente los análisis realizados que se describen con más detalle en los próximos capítulos.

4.1 Justificación y objetivos

Como es sabido, el clásico problema del viajante de comercio (TSP – *Traveling Salesman Problem*) ha sido ampliamente estudiado en la literatura científica. Esto se debe a varios motivos:

1. Por un lado, su gran complejidad de resolución incluso para problemas aparentemente sencillos y de pequeñas dimensiones (la versión de decisión es un problema NP-Completo). El TSP es un gran reto para los investigadores. Desde hace décadas se ha dedicado un gran esfuerzo para desarrollar técnicas de resolución, procurando a cada paso mejorar los resultados obtenidos por técnicas anteriores: ya sea en términos de proximidad al óptimo, como en calidad de la solución frente a tiempos de computación necesarios.
2. Por otro lado, es visible y de gran importancia la aplicación práctica del TSP en la resolución de problemas reales de dirección de operaciones y logística: secuenciación de operaciones, problemas de rutas, entre otros.

Sin embargo, al revisar la literatura científica y los algoritmos desarrollados, se detecta cierta contradicción entre ambos objetivos. Si bien muchos autores justifican la importancia de sus desarrollos en la aplicación práctica de los mismos, son pocos los que realmente tienen en consideración la particular complejidad y asimetría de la realidad, que en cambio, obvian y simplifican para testear sus heurísticas. Dicho de otro modo, la gran mayoría de los problemas reales de secuenciación y de rutas (por citar sólo estos dos tipos) requieren de estructuras de datos en forma de grafos dirigidos y asimétricos (ATSP – *Asymmetric Traveling Salesman Problem*), mientras que por el contrario, una abrumadora parte del esfuerzo y de la literatura se centra en el desarrollo de técnicas para la resolución del problema en entornos de grafos no dirigidos y simétricos (*symmetric TSP*).

El objetivo principal de este trabajo es precisamente analizar y cuantificar la importancia de la asimetría (propia de las redes de distribución reales) frente a los resultados obtenidos por las mejores técnicas y heurísticas de resolución conocidas para los problemas TSP y ATSP. ¿Son válidas las técnicas y heurísticas TSP en entornos asimétricos? ¿Cuál es el impacto en términos de calidad de la solución (proximidad al óptimo) y tiempos de computación?. Profundizando en el análisis de las siguientes cuestiones: ¿cómo se comportan los diferentes algoritmos frente al tamaño del problema? ¿y respecto a la simetría de la matriz? ¿si se transforma una matriz asimétrica en simétrica mediante su reformulación, se observa algún cambio en el comportamiento?.

Otro objetivo derivado de este trabajo, es el de proporcionar a la comunidad científica un conjunto de instancias que podría ser útil y de posible referencia para futuros trabajos científicos, y que sería complementario al conocido conjunto de datos TSPLIB¹ de Reinelt (1991). Actualmente en el conjunto de datos TSPLIB, sólo existen 19 instancias ATSP con matrices de distancias basadas en números enteros y cuyos tamaños oscilan entre $n = 17$ a $n = 443$ localizaciones (*br17 - rbq443*). A diferencia del TSPLIB, este nuevo conjunto de datos está diseñado de forma que proporcione un conjunto integrado de 2250 matrices de distintos tamaños ($n = 50, 100, 150, \dots, 500$), varios grados de asimetría (distancias ortodrómicas y distancias reales según el camino mínimo) y que están basados en localizaciones reales que forman diferentes patrones de distribución geográfica sobre territorios de varios tamaños.

Por último, la metodología utilizada, el proceso de experimentación descrito y el software desarrollado de generación y resolución de experimentos puede resultar especialmente útil para futuras líneas y trabajos de investigación.

En la actualidad, tras revisar la literatura científica y consultar a reconocidos expertos en la materia, no se conocen estudios de esta índole. Si bien,

¹<http://www.iwr.uni-heidelberg.de>

existen multitud de estudios donde se comparan diferentes técnicas heurísticas y meta-heurísticas para la resolución óptima del TSP; destacando diversos trabajos de [Johnson y McGeoch \(2002\)](#), y los de [Gutin y Punnen \(2002\)](#) entre muchos otros. Respecto a la literatura sobre ATSP, es de destacar trabajos como los de [Padberg y Sung \(1991\)](#) y los de [Oncan, Altinel y Laporte \(2009\)](#), no siendo de menor importancia que los anteriormente citados.

La justificación práctica de este tipo de estudio ha sido tratada en capítulos anteriores, y estará presente nuevamente en próximos apartados. Cabe recordar que en el mundo real multitud de gestores logísticos de empresas de diferentes sectores todavía aspiran a la posibilidad de poder ver resueltos problemas relativamente sencillos (TSP/ATSP) para conjuntos más o menos grandes de localizaciones. En este sentido, el trabajo aquí desarrollado pretende facilitar nuevo conocimiento para el desarrollo de nuevas herramientas de cálculo y optimización eficientes frente a la problemática real de las empresas.

4.2 Algoritmos para el TSP

Los algoritmos y heurísticas para la resolución del TSP se pueden dividir en dos categorías: las heurísticas de construcción que generan posibles rutas partiendo de cero, y las heurísticas que utilizan procesos de búsqueda local para la mejora de rutas ya existentes. Para una mejor comprensión de multitud de heurísticas se puede leer el capítulo del libro de [Johnson y McGeoch \(2002\)](#).

En este apartado se describen brevemente los algoritmos seleccionados para realizar este estudio comparativo. Para realizar esta selección, fue necesaria una revisión bibliográfica y del estado del arte. De la ingente cantidad de algoritmos que aparecen en la literatura se han seleccionado aquellos con:

1. Mayor reconocimiento científico según el número de citas.
2. Mejor posición en *benchmarks* anteriores como por ejemplo el de [Johnson y McGeoch \(1997\)](#), y más recientemente en el reconocido reto

*DIMACS Implementation Challenge*² y cuyos resultados se describen en [Johnson y McGeoch \(2002\)](#).

3. Mayor bondad de las soluciones obtenidas en instancias científicamente reconocidas (especialmente si han conseguido el óptimo en problemas de grandes dimensiones).

También se ha procurado recoger en la selección (de heurísticas) un espectro desde las técnicas más simples y clásicas hasta las más actuales y avanzadas: [Rosenkrantz y Stearns \(1977\)](#). Este estudio no pretende hacer una comparativa exhaustiva de todas las técnicas existentes, sino más bien cuantificar y validar las soluciones de los algoritmos más reconocidos frente a la asimetría de la matriz de distancias.

4.2.1 NN - *nearest neighbor algorithm* (1956)

En [Flood \(1956\)](#) se describen algunos métodos heurísticos para la obtención de rutas, entre las que se encuentra el algoritmo del vecino más próximo. El algoritmo del vecino más próximo (*nearest neighbor*) es una heurística voraz (*greedy*) sencilla. Esta heurística voraz construye la solución al problema en un procedimiento paso a paso. En cada uno de los pasos de la heurística se toma una decisión con el propósito de maximizar la mejora según la medida de la función objetivo. El algoritmo busca a cada paso lo mejor en la solución presente, sin mirar hacia adelante o medir las consecuencias futuras, tal y como se ilustra en la Figura 4.1, para una secuencia de solución igual a $a-d-f-e-c-b$. En dicha figura los nodos rojos simbolizan ramas del espacio de búsqueda que no son siquiera exploradas. Durante este proceso de optimización, no se dispone de información sobre el tiempo restante de computación máximo, o la desviación de la solución actual sobre el óptimo global u otro óptimo local. Como es sabido, este proceso de optimización puede quedar atrapado en óptimos locales del espacio de búsqueda y no alcanzar nunca el óptimo global.

²<http://www.research.att.com/dsj/chtsp/index.html>

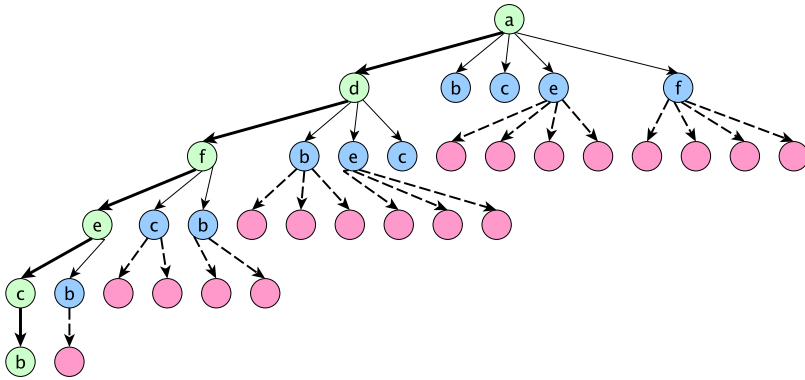


Figura 4.1: Evolución del algoritmo NN en el espacio de búsqueda TSP.

Tal y como se describe en el pseudocódigo 4.1, el algoritmo comienza a construir la secuencia a partir de un nodo elegido aleatoriamente, a continuación añade al último nodo de la ruta el nodo más cercano no incluido todavía. El algoritmo se detiene al completar todo el conjunto de nodos. Una extensión a este algoritmo consiste en repetir el proceso tomando como nodo inicial cada uno de los nodos de la matriz y devolver la mejor de las n rutas generadas (*repetitive nearest neighbor*). Esta heurística constructiva es realmente rápida y fácil de implementar. Podríamos decir que se trata de la heurística más sencilla de todas.

4.2.2 2-Opt heuristic (1958)

Tal y como se describe en Croes (1958) y en Rego y Glover (2002), esta técnica pertenece a un conjunto de técnicas sencillas de búsqueda local, cuyo objetivo es mejorar una solución inicialmente generada.

La idea que hay detrás de esta heurística es la de definir una estructura de vecindad para el conjunto de todas las rutas admisibles. Una ruta t' es vecina de otra ruta t si t' puede ser obtenida a partir de t mediante la sustitución de k arcos (borrado y reemplazo de k arcos, en lo que se denomina movimiento k -Opt, o en este caso 2-Opt. Así que el vecindario de t es el conjunto de todas las

Algoritmo 4.1 Nearest Neighbor (NN)**Entrada:** matriz de distancias**Salida:** $SecuenciaTSP, distanciaTSP$

- 1: $NodoActual = NodoInicial(aleatorio)$
- 2: $SecuenciaTSP \leftarrow NodoActual$
- 3: $TotalNodosElegidos = 1$
- 4: $NodosVisitados \leftarrow NodoActual$
- 5: **mientras** $TotalNodosElegidos \leq TotalNodos$ **hacer**
- 6: Buscar nodo no visitado más cercano($NodoActual$)
 $NodoElegido = \text{Nodo} / \min(c_{NodoElegido,k})$
donde $k \in NodosNoVisitados$
- 7: $NodoActual = NodoElegido$
- 8: $NodosVisitados \leftarrow NodoActual$
- 9: $SecuenciaTSP \leftarrow NodoActual$
- 10: $TotalNodosElegidos = TotalNodosElegidos + 1$
- 11: **fin mientras**

posibles rutas t' que pueden obtenerse gracias a un movimiento 2-Opt desde t , cuyo tamaño de vecindario es $n(n-3)/2$. En la práctica además del 2-Opt desarrollada por Croes (1958) y 3-Opt de Lin (1965), existen muchas otras variantes.

El primer paso de la heurística 2-Opt consiste en la construcción de una ruta t arbitrariamente o mediante la utilización de una heurística constructiva. A continuación, se rompen dos arcos de la solución y se unen de manera alterna, por ejemplo, los arcos (a,b) y (d,e) serán sustituidos por los arcos (a,d) y (b,e) , garantizando en el intercambio una nueva ruta t' completa y cerrada. La longitud de la nueva ruta se comparada con la anterior, y si la nueva es mejor, se sustituye por la anterior. En caso contrario, se prueba otro intercambio. Nótese, que en el caso de utilizar el procedimiento de *first improvement*, la ruta t se reemplaza por la primera ruta t' encontrada que mejore la solución, terminando así la búsqueda de vecindad para t , y siguiendo con una nueva búsqueda para t' . La Figura 4.2 representa un movimiento de búsqueda 2-Opt que da lugar a la solución óptima (a la derecha) en un TSP.

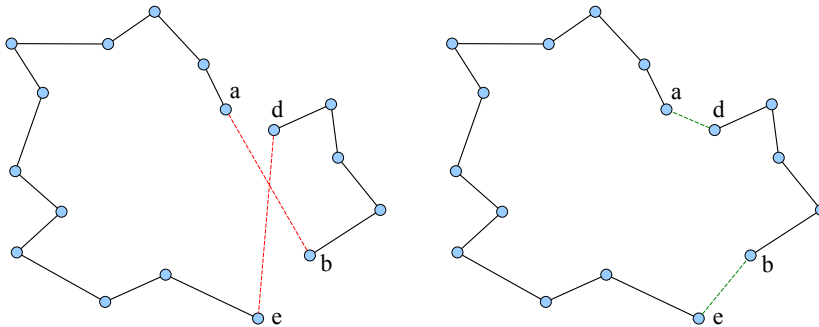


Figura 4.2: Movimiento 2-Opt en un TSP.

En este algoritmo, la ruta puede ser mejorada iterativamente desde su solución inicial hasta la mejor solución vecina, repitiendo el proceso hasta que ya no sea posible mejorar más, como se describe en el pseudocódigo 4.2. El resultado es una ruta óptima local llamada *k-optimal*. En el pseudocódigo 4.2 se denota como a_i al nodo o elemento i de la secuencia t del TSP.

3-Opt heuristic (1958)

Como se ha comentado anteriormente, la heurística 3-Opt es en realidad una variante de la 2-Opt donde se realizan $k = 3$ intercambios, en lugar de $k = 2$ a cada paso. De este modo, el vecindario de t queda definido como el conjunto de todas las posibles rutas t' que pueden obtenerse gracias a un movimiento 3-Opt, tal y como se describe en Bock (1958) y en Lin (1965). La complejidad computacional de evaluar todo el vecindario es $O(n^3)$.

La Figura 4.3 representa un movimiento de búsqueda 3-Opt que proporciona la solución óptima (a la derecha) en un TSP de 17 nodos.

Hay que mencionar, que la relación entre el tamaño del vecindario y la eficiencia de la búsqueda es relevante. Si k es pequeña, el tamaño del vecindario también lo es, y aunque la búsqueda se realiza rápidamente, aumenta la probabilidad de obtener un resultado sub-óptimo. Por otro lado, para valores grandes de k el número de posibles soluciones del espacio de vecindad crece

Algoritmo 4.2 Heurística de búsqueda local (2-Opt)

Entrada: *matriz***Salida:** *SecuenciaTSP, distanciaTSP*

- 1: Crear solución inicial t
 - 2: Valorar $t = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_1)$
 $D_t =$ longitud de la ruta t
 $i = 1$
 - 3: $j = i + 2$
 - 4: **mientras** $i \leq n - 2$ **hacer**
 - 5: **mientras** $j \leq n$ **hacer**
 - 6: **mientras** $D_{t'} \leq D_t$ **hacer**
 - 7: Romper los arcos (a_i, a_{i+1}) y (a_j, a_{j+1})
 Crear una nueva ruta t'
 $t' = (a_1, a_2, \dots, a_i, a_j, \dots, a_{i+1}, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_1)$
 Valorar t'
 - 8: **si** $D_{t'} \leq D_t$ **entonces**
 - 9: $t \leftarrow t'$
 - 10: Valorar $t = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_1)$
 $D_t =$ longitud de la ruta t
 $i = 1$
 - 11: $j = i + 2$
 - 12: **fin si**
 - 13: **fin mientras**
 - 14: **fin mientras**
 - 15: $i = i + 1$
 $j = i + 2$
 - 16: **fin mientras**
 - 17: **devolver** t
-

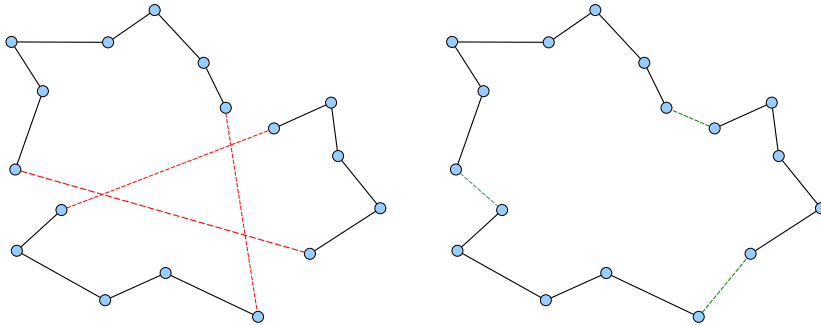


Figura 4.3: Movimiento 3-Opt en un TSP.

enormemente (exponencialmente con k), y también el tiempo necesario para su exploración; que es precio a pagar por soluciones de calidad muy próximas al óptimo global. Por esta razón, el algoritmo k -Opt rara vez es utilizado para $k > 3$.

Una descripción detallada sobre las principales heurísticas constructivas (NN, 2-Opt, 3-Opt) y una comparativa de su rendimiento en base a la realización de experimentos puede encontrarse en [Johnson y McGeoch \(1997\)](#).

4.2.3 Lin y Kernighan (1973)

A diferencia de la técnica anterior, la heurística [Lin y Kernighan \(1973\)](#) no siempre usa el mismo valor de k , sino que lo cambia de un paso de iteración a otro. Además, en lugar de quedarse con la primera mejora encontrada, como se hace en k -Opt, en esta técnica se intenta favorecer futuros avances no reemplazando de inmediato la ruta t cuando se encuentra otra mejor.

Existen varias versiones del algoritmo básico LK. La que se describe aquí brevemente, está basada en el concepto de lazo delta (δ -path). Como muestra la Figura 4.4, un lazo delta se define como un itinerario donde el número de nodos es mayor que el de arcos, y todos los nodos aparecen una sola vez en la secuencia excepto el último que aparece también anteriormente. La Figura 4.4 ilustra la secuencia de ejemplo:

$$a - b - c - d - e - f - g - h - i - j - e$$

que en este caso tiene 10 arcos y 11 nodos, y todos aparecen una sola vez excepto el nodo e . Cualquier itinerario delta puede ser transformado en una ruta cerrada válida cambiando sólo un arco, el último. En este caso, por ejemplo, si se reemplaza el arco (j,e) por el (j,a) se obtiene una ruta válida. Si se reemplaza el último arco (j,e) por cualquier otro que comience en j se obtendrá un nuevo lazo delta, por ejemplo, cambiando (j,e) por (j,f) ; lo que se denomina intercambio (e,f) o simplemente intercambio. Si c_{if} es la distancia asignada al arco $(i,f) \in A$, el coste del nuevo lazo delta se incrementa en $c_{if} - c_{je}$, pudiendo ser este incremento negativo. Nótese que el lazo delta tiene dos posibles arcos finales que pueden ser tratados, en este caso el (f,e) también podría dar lugar a una ruta cerrada o generar un nuevo lazo delta.

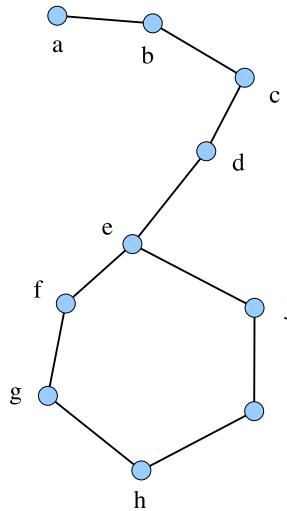


Figura 4.4: Ejemplo de un δ -path.

La heurística descrita en 4.3, irá construyendo una secuencia de 2-Opt movimientos comprobando a cada paso donde detenerse. Entonces se tomará

la secuencia que mayor mejora proporcione (equivalente a un movimiento k -Opt con k variable).

El óptimo local se alcanzará a medida que se realicen más movimientos. Si además se utiliza una técnica de marcha atrás o *backtracking*, se puede encontrar el óptimo, aunque para ello se requiere mucho tiempo de computación. Es por ello, por lo que sólo se permite cierto retroceso en el proceso de optimización que finalmente puede dar lugar a un óptimo local o a un óptimo global. Nótese que el proceso de generar un lazo delta se basa en la idea de quitar y añadir arcos, y que un mismo arco (i, k) para un nodo k no puede quitarse y añadirse a la vez; por ello, en este algoritmo es necesario mantener dos listas de arcos añadidos y quitados, donde cada arco sólo puede estar presente en una de las dos listas y limitando así sus movimientos de intercambio factibles.

Según escribieron en el artículo original [Lin y Kernighan \(1973\)](#):

“... the probability of obtaining optimal solutions in a single trial is close to 1 for small-to-medium problems, say up to the 42-city problem.”

También se puede leer en el borrador de [Johnson et al. \(2003\)](#), que la heurística LK obtiene rápidamente soluciones próximas al óptimo global (dentro de un 2 % de desviación) para TSP de grandes dimensiones. Y lo cierto, es que en los últimos 30 años han sido numerosas las mejoras realizadas en el algoritmo LK por otros científicos, como por ejemplo, las aportaciones de [Martin, Otto y Felten \(1992\)](#) y de [Helsgaun \(2000\)](#), entre otros.

4.2.4 Concorde TSP solver (2003)

Concorde³ es un *solver* para resolver el TSP. Fue desarrollado por [Applegate et al. \(2002\)](#). Está especialmente concebido para la resolución de problemas TSP simétricos. Concorde ha demostrado en multitud de instancias su capacidad para la resolución proporcionando el óptimo del problema. En mayo del 2004, por ejemplo, Concorde se utilizó para resolver óptimamente un problema TSP de 24 978 ciudades de Suecia.

³<http://www.tsp.gatech.edu/concorde.html>

Algoritmo 4.3 Heurística de Lin y Kernighan

Entrada: *matriz***Salida:** *SecuenciaTSP, distanciaTSP*

- 1: Crear solución inicial t
 - 2: Valorar t , $D_t =$ longitud de la ruta t
 - 3: Mejor $D_t = D_t$
 - 4: **para todo** nodo $k \in t$ **hacer**
 - 5: **para todo** arco $(i,k) \in t$ **hacer**
 - 6: **mientras** quedan combinaciones de arcos, nodos sin probar **hacer**
 - 7: **si** $\exists j \neq k$ tal que $c_{ij} \leq c_{ik}$ **entonces**
 - 8: Crear una δ -path p
quitando (i,k) y añadiendo (i,j)
 - 9: **mientras** \exists intercambio de p que resulte en p' tal que $D_{p'} < D_t$ **hacer**
 - 10: Construir ruta t a partir de p
 - 11: **si** $D_t \leq$ Mejor D_t **entonces**
 - 12: Mejor $D_t = D_t$
guardar t
 - 13: **fin si**
 - 14: Hacer intercambio para tener nuevo p
 - 15: **fin mientras**
 - 16: **si no**
 - 17: **si** $D_t \leq$ Mejor D_t **entonces**
 - 18: Mejor $D_t = D_t$
guardar t
 - 19: **fin si**
 - 20: **fin si**
 - 21: **fin mientras**
 - 22: **fin para**
 - 23: **fin para**
 - 24: **devolver** t
-

Como se ha descrito anteriormente, la mayor instancia de problema de viajante de comercio resuelta hasta el momento, consiste en una aplicación VLSI de 85 900 localizaciones. Mediante Concorde se optimizó la ruta con una longitud de 142 382 261 unidades (instancia pla85900⁴).

El *solver* Concorde utiliza el método de planos de corte (*cutting-plane method*) para resolver de manera iterativa relajaciones del problema TSP mediante la programación lineal. A este proceso se le conoce con el nombre de método de *branch-and-cut* (ramificación y poda). *Branch-and-cut* es un método de resolución de problemas de optimización combinatoria especialmente pensado para problemas de programación lineal entera, donde todas o algunas de las incógnitas están sujetas a valores enteros. Este método es un híbrido entre el método de los planos de corte y el *branch-and-bound* (ramificación y acotación).

En primer lugar se resuelve el problema LP relajado hasta que se encuentre una solución entera (que se sabe que es óptima). En la parte del algoritmo de ramificación y poda, el proceso se divide en función de las restricciones adicionales (mayor o igual, menor o igual) que el siguiente valor entero. Introduciendo nuevas variables y restricciones que se mantienen hasta ser satisfechas. Los planos de corte introducidos pueden ser globales o válidos para todas las soluciones enteras factibles, o locales; lo que se llama una faceta del politopo entero. En este último caso, se producirá la poda de una parte de la ramificación actual.

El tiempo de computación requerido por Concorde puede variar considerablemente de una instancia a otra, dependiendo del tamaño del problema y de su complejidad. Concorde requiere por tanto de la utilización de un *solver* de programación lineal (LP), como el conocido CPLEX u otros. En <http://plato.asu.edu/> se muestran los resultados de una comparativa (*benchmark*) del uso de Concorde con diferentes *LP solvers*: CPLEX-11.2.1, QSOPT-1.0, GLPK-4.11, y MOSEK-5.0.0.93.

⁴<http://www.tsp.gatech.edu/pla85900/>

Concorde está diseñado para poder ser usado en entornos de computación en paralelo (*clusters* de computación o cálculo en granjas de ordenadores).

4.2.5 LK de Keld Helsgaun - LKH (1998)

LKH es una aplicación de la heurística [Lin y Kernighan \(1973\)](#) creada por Keld Helsgaun para resolver el problema de viajante de comercio. Diversos experimentos computacionales han demostrado que LKH es muy eficaz. Aunque el algoritmo LKH es heurístico, las soluciones óptimas se producen con una impresionante alta frecuencia, tal y como se describe en [Helsgaun \(2000\)](#). LKH ha producido soluciones óptimas para todos los problemas que sus investigadores han podido obtener, incluyendo la instancia pla85900, tal y como se demuestra en [Applegate et al. \(2009\)](#).

Como se comentó anteriormente, se sigue intentando solucionar el reto de 1 904 711 ciudades del planeta. Keld Helsgaun en agosto de 2006 encontró una buena solución (próxima al óptimo) con una variante de su algoritmo heurístico LKH, y un resultado igual a 7 516 043 230. Posteriormente, en noviembre de 2008 volvió a mejorar su marca con una distancia de 7 515 947 511⁵. LKH consiguió además el récord de las instancias de problemas con óptimos desconocidos (DIMACS TSP *Challenge* 2002) cuyos tamaños van desde los 1 000 a los 10 000 000 nodos.

Cabe mencionar que los investigadores Rodríguez, A. y Ruiz, R. durante el desarrollo de los experimentos que se presentarán más adelante, detectaron y ayudaron a Keld Helsgaun a resolver algunos *bugs* (pequeños fallos de programación) en la última versión disponible de su algoritmo.

⁵Reto computacional en <http://www.tsp.gatech.edu/world>

4.3 Transformación de ATSP en TSP

En el apartado 3.2 se describía el clásico problema (*Travelling Salesman Problem* - TSP); a su vez, se mostraba y explicaba la formulación del modelo matemático, y la resolución e ilustración de un ejemplo sencillo. En la literatura científica (Langevin, Soumis y Desrosiers, 1990), el enfoque y tratamiento de este problema básico se divide en dos vertientes que se deben considerar como diferentes: TSP y ATSP.

1. TSP - *symmetric Travelling Salesman Problem*: Dada una matriz de distancias $c_{ij} \in A$, si la distancia c_{ij} es igual a la distancia c_{ji} el problema es simétrico. El problema se dice que es euclidiano (*Euclidean*) si los vértices están localizados en \mathbb{R}^d y las distancias entre ellos es la distancia euclidiana (*Euclidean distance*), que por definición es también un problema simétrico. Los orígenes de este problema se discuten en Schrijver (2005), y para saber más sobre el problema es interesante la lectura de Rinnooy Kan et al. (1985) y la del volumen Gutin y Punnen (2006).
2. ATSP - *Asymmetric Travelling Salesman Problem*: Si c_{ij} no es igual a la distancia c_{ji} , entonces se le llama asimétrico (*Asymmetric Travelling Salesman Problem* - ATSP). Los orígenes y primera formulación del problema pueden encontrarse en Miller, Tucker y Zemlin (1960). Más recientemente, es relevante el enfoque del problema desde la geometría poliédrica que se describe en Fischetti (1991). También la reformulación del problema en Gouveia y Pires (1999). Para terminar, y tener una visión comparativa de las diferentes formulaciones del problema que aparecen en la literatura, es interesante la lectura de Padberg y Sung (1991), y la de Oncan, Altinel y Laporte (2009), donde se presenta una clasificación de 24 formulaciones del ATSP y un análisis comparativo. Tampoco se debe olvidar el enfoque realista de Fischetti, Lodi y Toth (2003).

4.3.1 Matriz asimétrica

Como es sabido, se define como matriz asimétrica aquella matriz en la que no se cumple la igualdad $c_{ij} = c_{ji}$. La simetría de un objeto, en este caso una matriz, generalmente se describe como una medición binaria; una matriz es simétrica o no lo es. En el caso en el que un sólo arco $c_{ij} \neq c_{ji}$, entonces la matriz no es simétrica.

Sin embargo, parece lógico pensar que la simetría puede ser tratada y medida en una escala continua, y que algunas matrices pueden ser “más simétricas” que otras. Más adelante, en el apartado 4.4.6, se tratará este asunto con mayor detalle.

Nótese que las distancias $c_{ij} \geq 0 \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, y que $c_{ii} = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ya que no implica ningún desplazamiento. Sin embargo, normalmente se fuerza que $c_{ii} = +\infty \forall i \in \{1, \dots, n\}$ para que los arcos (i, i) no aparezcan en la solución del TSP.

4.3.2 Transformación de la matriz asimétrica

Es útil en ocasiones, transformar la matriz de distancias de un TSP en otra matriz diferente pero que proporciona la misma solución óptima. Esta transformación se puede realizar, por ejemplo, mediante el empleo de constantes multiplicativas y aditivas a los elementos de la matriz c_{ij} . Esto requiere que para cualquier ciclo Hamiltoniano H de un grafo representado por su matriz de distancias A , se cumpla la igualdad (4.1) para valores $\alpha \geq 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i,j \in H} c_{ij} = \alpha \sum_{i,j \in H} c'_{ij} + \beta \quad (4.1)$$

Esta propiedad es útil para reescalar las distancias. Por ejemplo, en muchos solvers las distancias deben ser convertidas de valores reales a enteros en el intervalo desde 1 a un valor máximo.

Una transformación diferente consiste en la reformulación de una matriz asimétrica a una matriz simétrica. Esto se puede lograr duplicando el número

de nodos, tal y como se describe en [Jonker y Volgenant \(1983\)](#). Los autores posteriormente presentaron una corrección a su trabajo original en [Jonker y Volgenant \(1986\)](#): señalando que sólo se obtiene un límite inferior en el coste óptimo y que los problemas asimétricos de n nodos pueden resolverse como problemas simétricos de $2n-1$ nodos. Como se puede observar en la expresión (4.2), para cada nodo existente es necesario añadir otro nodo virtual.

$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & -\infty & c_{21} & c_{31} \\ \infty & 0 & \infty & c_{12} & -\infty & c_{32} \\ \infty & \infty & 0 & c_{13} & c_{23} & -\infty \\ -\infty & c_{12} & c_{13} & 0 & \infty & \infty \\ c_{21} & -\infty & c_{23} & \infty & 0 & \infty \\ c_{31} & c_{32} & -\infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

La distancia entre cada nodo y su correspondiente nodo virtual debe ser un valor muy pequeño ($-\infty$). Esto hará que en la ruta solución, aparezcan pares de nodos reales y virtuales. Las distancias reales se usarán entre los nodos reales, y entre los nodos virtuales (distancias de ida al nodo, y de vuelta desde el nodo respectivamente). El resto de distancias se penalizan utilizando un valor lo suficientemente grande ($+\infty$). En la expresión (4.2) se puede observar una matriz asimétrica (a la izquierda) y una matriz simétrica equivalente (a la derecha). De este modo se puede resolver con técnicas TSP (por ejemplo Concorde) diseñadas pensando en matrices simétricas, problemas ATSP que en realidad tienen matrices asimétricas. Una vez resuelto el TSP, se deben eliminar de la ruta solución TSP los nodos virtuales para tener la verdadera solución al ATSP. Se debe tener en cuenta que en ocasiones la solución óptima ATSP es la ruta inversa al TSP (si los nodos virtuales aparecen antes que su correspondiente nodo real).

Más adelante, en este trabajo se utiliza esta técnica de reformulación matricial para comparar en los mismos términos (de simetría) el comporta-

miento de las diferentes heurísticas, enfrentándolas a escenarios de matrices de distancias simétricas y asimétricas.

4.4 El mundo real es asimétrico

Los problemas reales son asimétricos. Esto es, aquellos problemas cuyas matrices de distancias están calculadas a partir de itinerarios en el mundo real (según una base de datos cartográfica) son asimétricos y cumplirán con la desigualdad triangular.

En primer lugar se hará una breve introducción a los sistemas de información geográfica explicando cómo se localizan los puntos sobre la superficie terrestre, y cómo se miden las distancias ortodrómicas que los separan. A continuación, se expondrán diferentes ejemplos para describir las diferencias existentes entre una medición de distancias ortodrómicas y una medición en base a los itinerarios reales entre localizaciones y la utilización de un GIS.

Con estos ejemplos, se describirán la propiedad de asimetría y la desigualdad triangular de las matrices de distancias.

Por último, se propondrán algunos indicadores que serán de utilidad para medir el grado de asimetría de una matriz de distancias.

4.4.1 Los sistemas de información geográfica

Desde las primeras civilizaciones hasta la actualidad, el ser humano ha tenido la necesidad de conocer y poder situarse y moverse con precisión en el entorno que le rodea. Por ello, los antiguos navegantes, comerciantes y exploradores, los geógrafos y los agrimensores recopilaban y almacenaban en forma de código o representación gráfica (pictórica en ocasiones) los datos de la geografía con el objetivo de construir un modelo del territorio que les ayudara a comprender su entorno, en sus construcciones, en la navegación y rutas comerciales, y en la estrategia y logística militar entre otras.

Como se ilustra en Figura 4.5 existen numerosos ejemplos de la antigüedad occidental [Martín \(2002\)](#): desde la tablilla de arcilla cocida de origen

Babilónico del siglo VI a.C. que conserva en el Museo Británico, Anaximandro (611-545 a.C.), Parménides (514-450 a.C.), Dicearco de Mesina (350-290 a.C.), Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.), la perdida *Geographia* de Ptolomeo (90), los agrimensores del gobierno del imperio romano (27 a.C. — 476), Albi (s. VIII), Ambrosio Macrobio (s. IX), las hermosas perspectivas aéreas del Renacimiento y el mapa de Toscanelli (1474), las antiguas cartas de navegación, los primeros mapas y atlas geográficos modernos (Gerardo Mercator 1570), hasta la creación de la *Geographical Information Society* en el s. XVIII.

Es durante los últimos 200 años cuando realmente se desarrolla el estudio científico terrestre (estudio de la Tierra y sus recursos naturales) por parte de geógrafos, geofísicos, geólogos, geodésicos, geomorfológicos, edafológicos, ecológicos, etc. En este período poco a poco se pasa de modelos de representación individuales a la aparición de estándares para el manejo y representación de datos geográficos.

En el s. XX se aceleró la demanda de mapas topográficos y el desarrollo de técnicas para su elaboración y tratamiento, hasta que en las décadas de 1960 - 1970 empezaron a utilizarse los primeros ordenadores con este propósito. Empezaba entonces a hablarse de los sistemas de información geográfica. Según se define en [Goodchild y Kemp \(1990\)](#):

“Los Sistemas de Información Geográfica (SIG) o GIS del inglés *Geographical Information Systems* son sistemas que integran de manera ordenada *hardware*, *software*, datos geográficos y procedimientos para la captura, el almacenaje, la manipulación, el análisis y la presentación de datos geográficos referenciados espacialmente con el objetivo de resolver problemas complejos de planificación y gestión.”

Se podría decir que un GIS es un modelo de la realidad construido en base a un sistema de coordenadas terrestres (latitud, longitud y altitud) con el objetivo de proporcionar un conjunto de información para unas necesidades

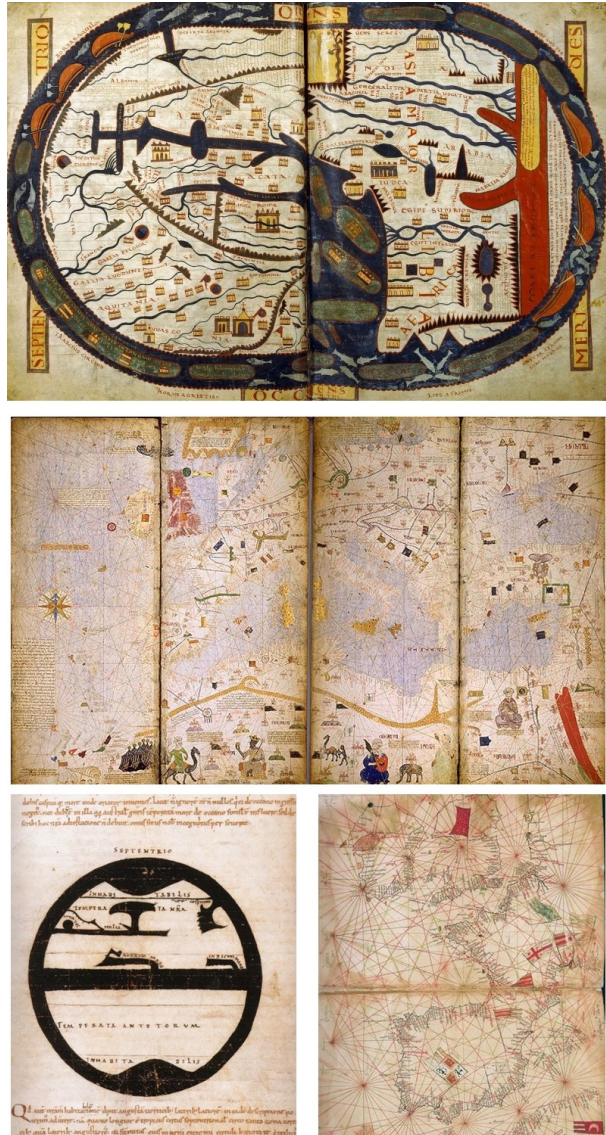


Figura 4.5: Cartografía antigua (diversas fuentes).

específicas. Por tanto, la información gestionada debe estar geográficamente referenciada (geo-referenciada). De cara al usuario, los GIS son herramientas útiles que le permiten crear consultas y analizar las diferentes capas de información (de la base de datos) desde una perspectiva espacial (representación y edición sobre un mapa). En la Figura 4.6 se muestra un ejemplo del uso de las capas en una aplicación GIS. Se puede observar cómo las diferentes capas de información geo-referenciada se superponen (localización de clientes, grafo dirigido o red de transporte, mapa, ruta calculada). Sería posible añadir más capas de información como por ejemplo: densidad del tráfico o incidencias en la circulación, restricciones de paso según el tipo de vehículo, puntos de interés, entre otras. En los GIS el orden de superposición de las diferentes capas de información es importante para construir una visualización correcta del mapa completo.

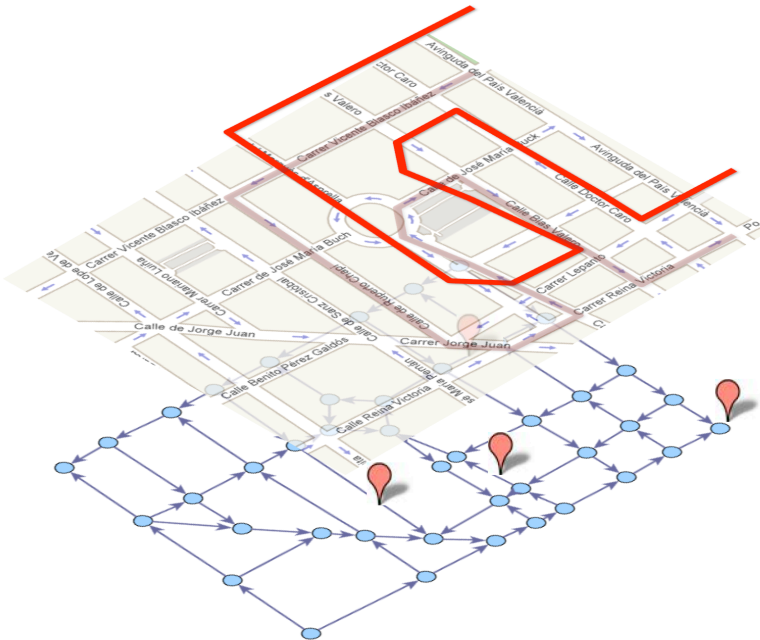


Figura 4.6: Capas de información en un GIS.

La tecnología de los sistemas de información geográfica es útil en multitud de campos de investigación científica: gestión de recursos y medioambiente, planificación urbana y estudios sociológicos, geo-marketing, localización industrial, y logística por citar sólo unos pocos. Tal y como se muestra en la Figura 4.7, los GIS propios de la cartografía actual, distan mucho de los primeros intentos del ser humano por conocer y comprender el entorno en el que vivían. En la actualidad la utilización de las imágenes provenientes de los satélites, las redes informáticas, y la localización gracias a los sistemas de posicionamiento global han propiciado innumerables ventajas: rapidez, bajo coste, precisión, personalización, estadística, recreación en tres dimensiones, revisión y actualización, etc. Hoy en día los GIS están presentes en multitud de facetas de nuestra vida cotidiana.

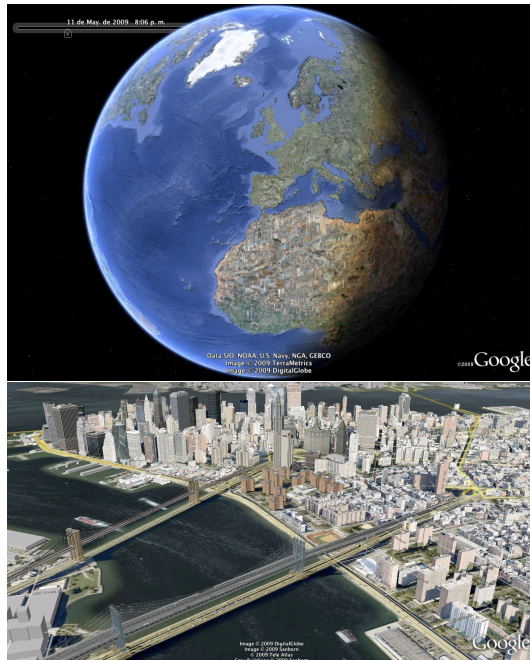


Figura 4.7: Cartografía actual (Google).

Una interesante introducción a los sistemas de información geográfica se

puede encontrar en [Burrough y McDonnell \(1998\)](#). Más adelante, se describirán más aspectos interesantes de los GIS como el cálculo y la representación de distancias e itinerarios entre pares de localizaciones, entre otras cuestiones.

4.4.2 Localización y medición de distancias entre puntos

Los mapas y el resto de información contenida en los GIS son de especial utilidad en la resolución, representación y análisis de problemas VRP. Algunas de las utilidades básicas se refieren a la geo-localización de elementos (clientes, vehículos, empresas, lugares de paso o parada) sobre un punto del mapa, y el cálculo de distancias entre diferentes localizaciones.

Para la geo-localización de puntos se utiliza el actual sistema de coordenadas mundiales WGS84 (*World Geodetic System 1984*) y que es la base para los actuales sistemas de posicionamiento global como el GPS. Este sistema usa como elipsoide de referencia (*datum*) el WGS 84. Se trata de una superficie equipotencial o geoide definido por la superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre que coincide con el nivel medio del mar. El geoide es la forma teórica, determinada geodésicamente de nuestro planeta Tierra. El estándar WGS84 fue revisado en el año 2004 y seguirá siendo revisado en el futuro. Existen otros sistemas geodésicos como el intercambiable sistema de referencia europeo ETRS 89, o el Universal Transversal de Mercator (UTM), en inglés *Universal Transverse Mercator*. Este último está basado en la proyección geográfica transversa de Gerardus Mercator (1659), está construido como una proyección de Mercator normal, pero tangente a un meridiano en lugar de tangente al Ecuador. En la actualidad *Google Earth*, *Ms Virtual Earth* y otros GIS actuales utilizan una proyección cilíndrica simple con un *datum* WGS84 para su base de mapas e imágenes, tal y como se muestra en la Figura 4.8. De este modo, y tras los cálculos matemáticos necesarios (según el *datum* y la proyección de que se trate), se puede trasladar un punto de la superficie terrestre a

su correspondiente punto sobre el plano (o viceversa) y que vendrá definido por dos coordenadas principales: la latitud y la longitud terrestre.

La latitud es la distancia angular entre el Ecuador y un punto del planeta. Se mide en grados, entre 0° y 90° : indicando a qué hemisferio pertenece la coordenada o con valores positivos (Norte) y negativos (Sur).

La longitud expresa la distancia angular entre un punto del planeta y el meridiano de referencia (0°); en la actualidad el meridiano de Greenwich (observatorio de Greenwich). Se expresa entre 0° y 180° indicando a qué hemisferio pertenece; o entre 0° y 180° positivos (Este) y negativos (Oeste).

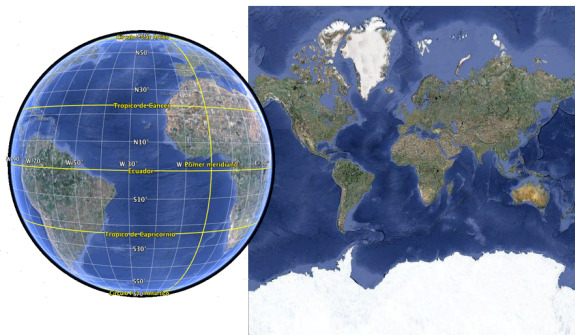


Figura 4.8: Proyección WGS84 (elaboración a partir de Google Earth).

Los GIS actuales disponen de enormes bases de datos con todo un conjunto de lugares previamente geo-localizados o geo-codificados. De este modo, el usuario puede preguntar al sistema dónde (coordenadas latitud y longitud) se encuentra una determinada dirección postal o población. A esta función de búsqueda en la base de datos de una dirección y devolución de coordenadas se le conoce con el nombre de *geo-coding*. A partir de la geo-localización y gracias a la geometría euclidiana (Euclides 300 a.C) se puede calcular la distancia entre un par de puntos (distancia euclidiana). Por todos es conocida la

ecuación (4.3) para el cálculo de la distancia entre dos puntos $P = (p_x, p_y)$ y $Q = (q_x, q_y)$ situados en un plano deducida a partir del Teorema de Pitágoras.

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2} \quad (4.3)$$

Tal y como se muestra en la Figura 4.8, la distancia ortodrómica es el resultado del camino más corto (ortodroma) entre dos puntos de la superficie terrestre, es el arco del círculo máximo (*great-circle distance*) que los une menor de 180 grados. Los círculos máximos que pasan por los polos determinan las líneas de longitud (meridianos). En cambio, en la latitud sólo existe un círculo máximo (el ecuador terrestre). El resto de latitudes están determinadas por círculos menores paralelos al ecuador (paralelos).

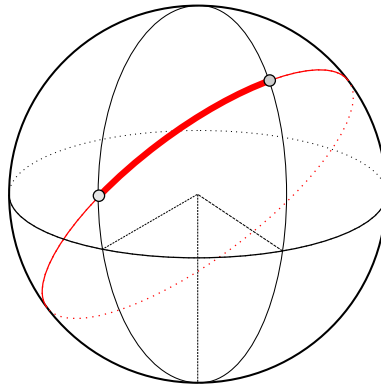


Figura 4.9: Distancia ortodrómica (elaboración a partir de Wikipedia).

Para calcular la distancia ortodrómica entre dos puntos de la Tierra es necesario recurrir a la trigonometría esférica tal y como se muestra en la ecuación (4.4). Sea ϕ_1, λ_1 y ϕ_2, λ_2 las coordenadas en latitud y longitud de los dos puntos respectivamente, y $\Delta\phi, \Delta\lambda$ las diferencias entre ambos. Siendo r el radio de la esfera terrestre (cuya dimensión promedio en WGS84 se estima en 6 371,01 km, aunque oscila entre los 6 378,137 en el ecuador a los

6 356,752 km en los polos). Se denota como $\Delta\hat{\sigma}$ a la diferencia o distancia angular (en radianes). Entonces la distancia ortodrómica es:

$$d = r\Delta\hat{\sigma} \quad (4.4)$$

donde $\Delta\hat{\sigma}$ se calcula con la fórmula (4.5) de [Vincenty \(1976\)](#) que es un método general válido para calcular distancias con un error menor en elipsoides:

$$\Delta\hat{\sigma} = \arctan \left(\frac{\sqrt{(\cos\phi_2 \operatorname{sen}\Delta\lambda)^2 + (\cos\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2 - \operatorname{sen}\phi_1 \cos\phi_2 \cos\Delta\lambda)^2}}{\operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2 + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos\Delta\lambda} \right) \quad (4.5)$$

Este cálculo, si bien es muy preciso en relación al tamaño del planeta Tierra, no es exacto con la realidad. Recordemos que según [Mandelbrot \(1997\)](#) el mundo real tiene una superficie fractal dinámica, que cambia constantemente debido a la erosión y a la acción del ser humano. Desde ese punto de vista la distancia entre dos puntos situados en un espacio finito puede llegar a ser infinita e imposible de calcular con total precisión, así que es necesario establecer una medida reconocida como la anterior.

4.4.3 Estimación de las distancias por carretera

En el ámbito de la logística, y más concretamente en los problemas de rutas de vehículos, es imprescindible contar con una matriz de distancias c_{ij} entre pares de localizaciones. Esta matriz también podría estar valorada en tiempo, velocidad, y/o coste necesario para comunicar cada par de localizaciones $i - j$. El tiempo, la velocidad y el coste suelen estar calculados en función de la distancia, siendo por tanto imprescindible la obtención de dicha matriz de distancias.

En la literatura científica, la necesidad de contar con dicha matriz de distancias ha sido patente desde los primeros trabajos sobre problemas de rutas, [Clarke y Wright \(1964\)](#). Una posibilidad, como se ha comentado anteriormen-

te, consiste en calcular la distancia euclidiana u ortodrómica entre cada par de localizaciones. Pero desde hace ya muchos años, los investigadores han sido conscientes de que dicha distancia no se corresponde con la distancia real entre dos localizaciones que están comunicados por una red de transporte o carretera. Dicho de otro modo, la distancia real del camino mínimo (más corto) que comunica dos puntos de una red de carreteras será siempre igual o superior a la distancia euclidiana u ortodrómica. Por ese motivo, algunos investigadores propusieron hace años estimar dicha distancia real mediante la ponderación o multiplicación de la distancia ortodrómica por un factor. Tal fue el caso de [Christofides y Eilon \(1969\)](#) en su estudio sobre problemas de localización.

Pero, ¿existen otros métodos o funciones que permitan estimar la distancia real de una manera más precisa? Esta fue la pregunta que se formularon [Love y Morris \(1972\)](#). En su trabajo original proponen 7 funciones para calcular la distancia entre dos puntos. Cada una de las funciones tiene a su vez un conjunto de parámetros k , p y s . Tomando los datos de distancias entre 12 ciudades de Estados Unidos del *Rand McNally Road Atlas* de 1970 y otras 12 de Wisconsin, hicieron el ajuste de los parámetros de las diferentes funciones de distancia, con el objeto de intentar encontrar aquella función que mejor se adaptara a las características de la red de transporte entre dichas ciudades. Es importante señalar que los autores no encontraron diferencias de rendimiento de las funciones según el tipo de territorio, si bien observaron que según la distancia era mejor una función que otra.

Posteriormente, en [Love y Morris \(1979\)](#), intentaron averiguar qué tipo de curvatura debería tener la función de distancia para estimar del modo más adecuado la distancia real entre un par de localizaciones. En su nuevo estudio, tomaron 7 conjuntos de localizaciones generadas aleatoriamente en diferentes territorios de corta distancia cerca de Ohio. Tras comparar resultados de las localizaciones urbanas y rurales, observaron que la distancia

rectangular no siempre es la más acertada en entornos urbanos, donde la euclidiana ofrecía mejores resultados.

A continuación, [Berens y Korling \(1985\)](#) aplicaron la misma metodología para datos de Alemania y obtuvieron resultados diferentes a los de [Love y Morris \(1979\)](#). Por ello, [Love y Morris \(1988\)](#) replicaron sus estudios para 15 ciudades de Alemania. De ambos estudios, se concluye lo siguiente: Las funciones de distancia propuestas no tienen sesgo direccional, o las características de distintas partes del territorio (zonas pobladas, zonas rurales, accidentes geográficos); se suponen apropiadas para territorios con redes de transporte muy desarrolladas. Sin un estudio en detalle para cada región o territorio es difícil decidirse por una función u otra, y por supuesto hace falta un proceso de optimización para ajustar sus parámetros. En dicho ajuste, a su vez existe la disyuntiva entre precisión versus balanceo de la solución. Como los autores de ambos estudios reconocen:

“The probability of obtaining substantially more accurate results is thus dependent on the region being modelled. For this reason, generalizing from any data set is potentially misleading. Users should carry out their own studies using goodness-of-fit criteria appropriate to their application.”

En nuestros días, muchos investigadores se decantan todavía por la utilización de la distancia euclidiana en los problemas de rutas, como [Cooper \(1983\)](#). Otros en cambio, persiguen el *Santo Grial* del modelado de una función que permita aproximarse a la distancia real, como los trabajos cada vez más elaborados de [Brimberg y Love \(1991\)](#), o de [Dubois y Semet \(1995\)](#). Este último trabajo, propone el modelado de los obstáculos naturales en una red de carreteras para mejorar la aplicación común de la distancia euclidiana, ya que como el propio autor afirma:

“In general Euclidean distances are good estimates of real distances but they may be very bad lower bounds when the network contains natural

obstacles. For instance, the Euclidean distance between two towns, located on opposite sides of a long and narrow lake, is much shorter than the real distance. As many networks contains natural obstacles, for instance rivers in towns or mountains and lakes in countries, it is worthwhile to develop methods that solve the shortest path problem taking into account all or at least part of the obstacles.”

A partir de estas ideas, algunos autores van más allá e intentan encontrar funciones no sólo que estimen la distancia entre pares de localizaciones según la zona en la que se ubican, sino la distancia total recorrida en una ruta.

Un trabajo importante en este sentido es el de [Daganzo \(1984\)](#). En él se demuestra cómo la distancia total de una ruta depende de la forma o zona en la que ubican las localizaciones. Para ello, se propone un método de aproximación (sub-óptimo) cuyas soluciones se parecen a las que obtendrían por métodos manuales. Dada una región de área A donde se ubican n puntos, la distancia del TSP es proporcional a \sqrt{An} cuando la región es compacta y convexa. Esta afirmación parece que es válida también para los problemas CVRP. Según el autor, su enfoque es útil para el diseño de redes de distribución. En [Stokx y Tilanus \(1991\)](#) también se justifica este tipo de estimaciones o aproximaciones para estudios estratégicos o tácticos.

En [Hindle y Worthington \(2004\)](#) se investiga cómo la distancia promedio de rutas TSP se puede ver influenciada por el patrón de localización y el número de nodos a visitar. Se proponen dos funciones para intentar estimar esta distancia, una para localizaciones ubicadas aleatoriamente y otra para localizaciones que se ubican alrededor de zonas de atracción (superficies de demanda). Los autores de este estudio coinciden en la afirmación de que las estimaciones de la distancia de las rutas pueden ser una herramienta útil para el análisis estratégico de problemas de distribución.

Desde la década de los 70, los investigadores han intentado atenuar la barrera de entrada que supone la obtención de la matriz de distancias reales c_{ij} . Para ello, han ponderado la distancia euclidiana o desarrollado funciones

de estimación de la distancia. Dichas funciones deben ser ajustadas matemáticamente, y esto implica por un lado disponer de la matriz de distancias reales que se pretende suplir, y por otro un proceso de optimización y ajuste. Dicho ajuste puede ser diferente según la función objetivo a minimizar y el criterio (precisión o balanceo). Además, se ha demostrado que dicho ajuste es dependiente del territorio, y de otras características (la propia red de transporte, la geometría de la zona, accidentes geográficos, obstáculos naturales). Por tanto, no se puede disponer de una única función válida para estimar las distancias, ni seleccionarla a priori sin un estudio detallado, una optimización y un ajuste de sus parámetros.

Estas estimaciones pueden ser útiles para las decisiones logísticas de carácter estratégico, donde la información se maneja de manera agregada y se puede asumir cierto error o aproximación de los datos. Sin embargo, en los artículos revisados, subyace la idea de que dichas aproximaciones (errores) no son asumibles en entornos operativos (empresariales reales).

Es importante señalar, que en ninguno de los artículos revisados se ha abordado la asimetría de la red de transporte ni su efecto sobre las distancias o los problemas de rutas de vehículos. En esta Tesis Doctoral, se defiende la idea de que es necesario abordar con toda su complejidad la realidad asimétrica de las redes de transporte. Para ello, como se verá en los próximos apartados, es necesaria la utilización de los más modernos sistemas de información geográfica GIS, y una comprensión del efecto que la asimetría y otros factores tienen sobre el cálculo de las matrices de distancias y la resolución de los problemas TSP y CVRP (tiempos de computación y bondad de las soluciones).

4.4.4 La asimetría y los GIS

Para la resolución de problemas VRP en el mundo real se debe contar con la ayuda de los GIS. En primer lugar, como se ha comentado en el apartado 4.4.1, los GIS facilitan la geo-localización de los actores logísticos (clientes, almacenes, vehículos, puntos de parada o paso, etc.). Una vez geo-localizados

4 | Asimetría: El caso del TSP

que $c_{ij} \neq c_{ji}$, para algún par (i,j) . Existe una diferencia de 0,008 km entre el camino de ida y el de vuelta.

En la matriz A las distancias $c_{ij} = c_{ji}$, y por tanto A es una matriz simétrica. La matriz B es asimétrica ya que $c_{ij} \neq c_{ji}$. Además como cabe esperar, las distancias en B son mayores que en A , y que $A \neq B$. Visualmente el ejemplo queda muy claro comparando su representación sobre el GIS en la Figura 4.10 y la Figura 4.11.

Sólo en el caso en el que la geometría de las carreteras lo facilitara, y el sentido de circulación lo permitiera, se podría obtener simetría en el segundo caso. Como se pretende defender más adelante, el mundo real es asimétrico y además las distancias entre dos puntos son generalmente bastante mayores a las distancias ortodrómicas.

Veamos otro ejemplo de dos localizaciones ahora situadas en Valencia. Del mismo modo que en el caso anterior, se calcula y representa la distancia ortodrómica entre los dos puntos (véase la Figura 4.12), y la distancia a partir del camino mínimo entre los dos puntos (véase la Figura 4.13), para la ida y la vuelta en ambos casos.

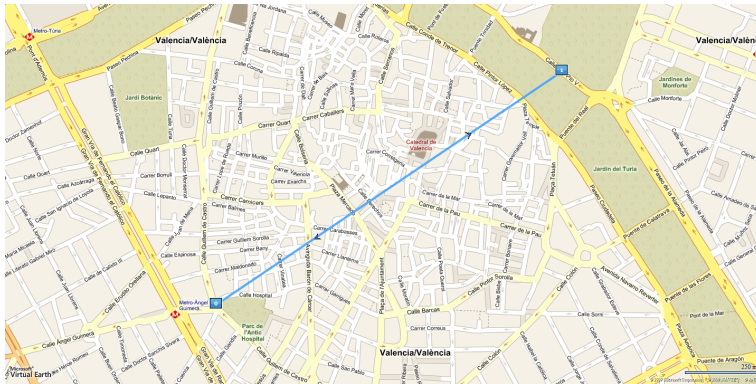


Figura 4.12: Distancia ortodrómica entre dos localizaciones .

La matriz de distancias $c_{ij} \in A$ es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1,454 \\ 1,454 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

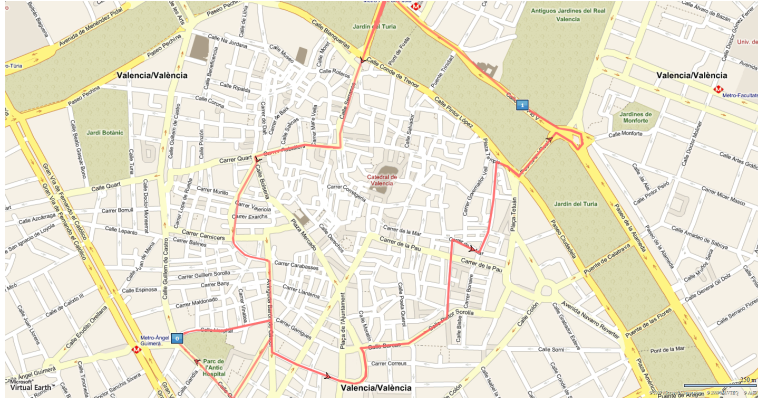


Figura 4.13: Camino mínimo entre dos localizaciones.

Del mismo modo, la matriz de distancias $c_{ij} \in B$ resulta

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2,665 \\ 2,831 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Al igual que en el primer ejemplo de Madrid, aquí la matriz A es simétrica, mientras que la matriz B no lo es. En B existe una diferencia de 0,166 km entre el camino de ida y el de vuelta. También se observa que las distancias $c_{ij} \in A \leq c_{ij} \in B$, siendo $c_{ij} \in B$ distancias casi el doble que $c_{ij} \in A$; y que por supuesto $A \neq B$. Esto es debido a la existencia entre ambos puntos de Valencia de un casco histórico con calles de geometría irregular, y a la necesidad de cruzar el cauce del río por los puentes, todo ello circulando siguiendo el sentido de cada tramo.

Ejemplos para tres localizaciones

Siguiendo con los ejemplos, a continuación se repetirán los cálculos anteriores (para Madrid y Valencia) pero añadiendo un tercer nodo en ambos casos. Así pues, las matrices ahora serán de dimensión 3×3 . En primer lugar tal y como muestra la Figura 4.14, se ha añadido una localización más al ejemplo de la Figura 4.10 pasando a tener 3 localizaciones en la ciudad de Madrid. Los 3 arcos formados entre cada par de localizaciones forman un triángulo en el plano. Nótese que cada arco en realidad es doble (uno de ida y otro de vuelta), pero con idénticas distancias ortodrómicas (el camino de ida es igual al camino de vuelta).

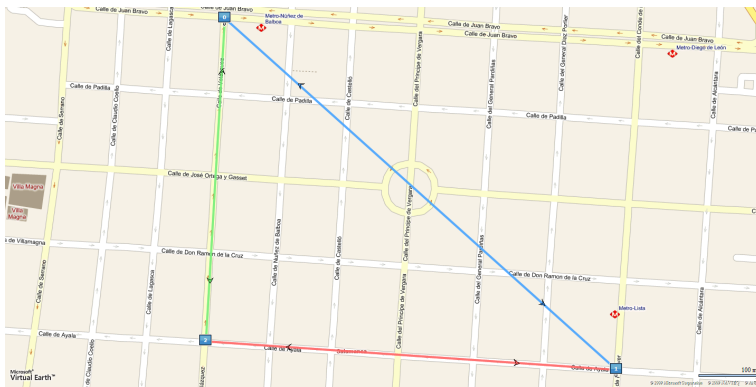


Figura 4.14: Triángulo ortodrómico.

Para este caso de Madrid, la matriz de distancias $c_{ij} \in A$ de dimensión 3×3 sería igual a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,904 & 0,556 \\ 0,904 & 0 & 0,707 \\ 0,556 & 0,707 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

De igual modo que en el caso para dos localizaciones, en la matriz A las distancias $c_{ij} = c_{ji}$, y por tanto A es una matriz simétrica. Veamos ahora qué ocurre si cada arco se calcula con ayuda del GIS y respetando

la realidad física de la red de carreteras (calles y sentidos de dirección). La Figura 4.15 muestra la triangulación resultante. Obsérvese las diferencias con la Figura 4.14. Ahora, el grafo resultante se aleja de la geometría triangular. Además como en este ejemplo no hay en la solución calles de doble sentido, los 3 arcos se ven forzados a desdoblarse.

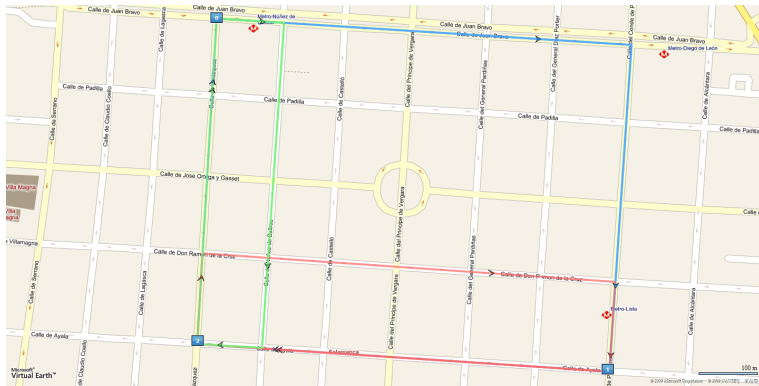


Figura 4.15: Triangulación real.

Si expresamos en forma matricial las distancias de cada arco, la matriz de distancias $c_{ij} \in B$ sería para este caso:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1,291 & 0,796 \\ 1,283 & 0 & 0,718 \\ 0,565 & 1,032 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Tal y como era de esperar, la matriz B es asimétrica ya que $c_{ij} \neq c_{ji}, \forall i \neq j$. Las distancias en B son mayores que en A , y que $A \neq B$. De manera análoga, a continuación se añade una tercera localización al ejemplo de Valencia. En la Figura 4.16 se han representado los arcos ortodrómicos, formando un grafo triangular sobre el plano. Observese que como en el primer ejemplo, los arcos son simétricos (ida y vuelta) para cada par de localizaciones.

4 | Asimetría: El caso del TSP

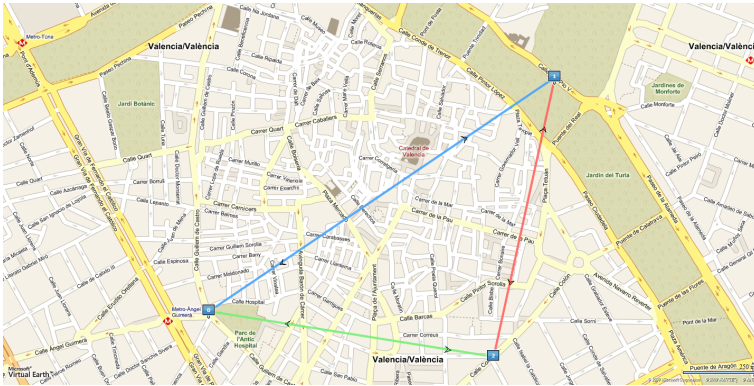


Figura 4.16: Triángulo ortodrómico.

La matriz simétrica de distancias ortodrómicas $c_{ij} \in A$ es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1,454 & 1,004 \\ 1,454 & 0 & 0,994 \\ 1,004 & 0,994 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Por último, se volverá a calcular y representar los arcos para cada par de localizaciones pero con la ayuda del GIS. Es importante recordar que cada arco es el resultado del camino mínimo para ir desde una localización a la siguiente dentro de la red de carreteras. El resultado se observa en la Figura 4.17 y se puede comparar con la Figura 4.16.

Quedan patentes las diferencias con el grafo triangular de la Figura 4.16. Como se comentaba anteriormente, en el ejemplo de Valencia los caminos mínimos se ven condicionados por la geografía de la ciudad (centro histórico, cauce del río y puentes) y por la distribución y sentido de las calles. La matriz de distancias reales $c_{ij} \in B$ sería

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2,665 & 1,775 \\ 2,831 & 0 & 2,423 \\ 1,214 & 2,019 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

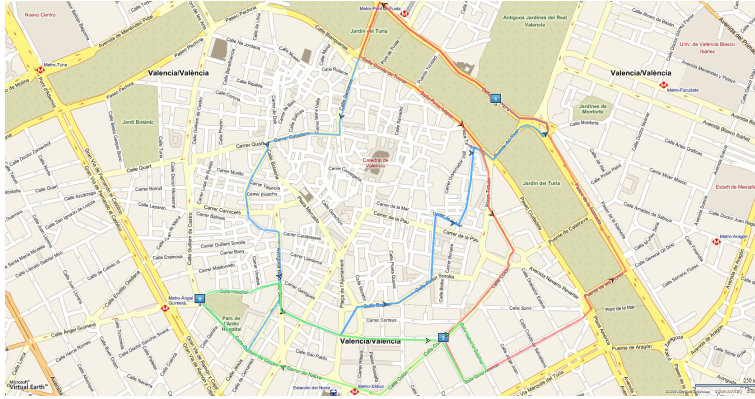


Figura 4.17: Triángulación real.

La matriz B es asimétrica ya que $c_{ij} \neq c_{ji}, \forall i \neq j$. Y al comparar las matrices, o los mapas visualmente, se observa que las distancias c_{ij} en B serán siempre igual o mayores que en A , y que $A \neq B$.

4.4.5 La desigualdad triangular

La desigualdad triangular es un teorema matemático que afirma que: para todo triángulo, la longitud de uno de sus lados no puede superar a la suma de las longitudes de los otros dos lados, tal y como se representa en la expresión (4.14) y en la Figura 4.18.

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (4.14)$$

El teorema de la desigualdad triangular es obra de Euclides, y forma parte de la geometría euclidiana. La geometría euclidiana, en principio, estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. Euclides, reconocido como “el padre de la geometría”, fue un matemático y geómetra de la antigua Grecia (alrededor del año 300 a.C.). Una edición moderna de sus tratados puede encontrarse en [Euclides \(1996\)](#).

En otras palabras, lo que nos dice el teorema de la desigualdad triangular,

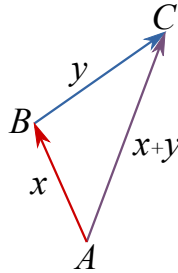


Figura 4.18: Desigualdad triangular.

es que para ir del punto A al punto C lo mejor es la línea recta (camino más corto), y no pasar por un punto intermedio B alejado de la recta \overrightarrow{AC} .

Obsérvese que para los ejemplos anteriores de Madrid en la Figura 4.14 y de Valencia en la Figura 4.16, y tomando sus correspondientes matrices de distancias euclidianas (4.10) y (4.12) respectivamente, siempre se cumple la desigualdad triangular, tal y como se ve en el conjunto de expresiones (4.15).

$$\begin{array}{l|l}
 \textit{Madrid} & \textit{Valencia} \\
 0,904 \leq 0,556 + 0,707 & 1,454 \leq 1,004 + 0,994 \\
 0,556 \leq 0,904 + 0,707 & 1,004 \leq 1,454 + 0,994 \\
 0,707 \leq 0,904 + 0,556 & 0,994 \leq 1,454 + 1,004
 \end{array} \quad (4.15)$$

Veamos ahora qué ocurre en algunos casos reales, donde las distancias entre localizaciones corresponden al camino mínimo calculado mediante un GIS y atendiendo a la red de carreteras. Se vuelve nuevamente a los casos de Madrid y Valencia, pero utilizando el GIS tal y como se mostraba en la Figura 4.15 y en la Figura 4.17, y tomando sus correspondientes matrices de distancias reales (4.11) y (4.13) respectivamente. Tal y como muestra la Figura 4.19, existen 6 posibles desigualdades triangulares, o lo que es lo mismo 6 posibles sumas de vectores para el caso en el que los tres arcos de la triangulación sean asimétricos.

Si se realizan los cálculos para los ejemplos de Madrid y Valencia ante-

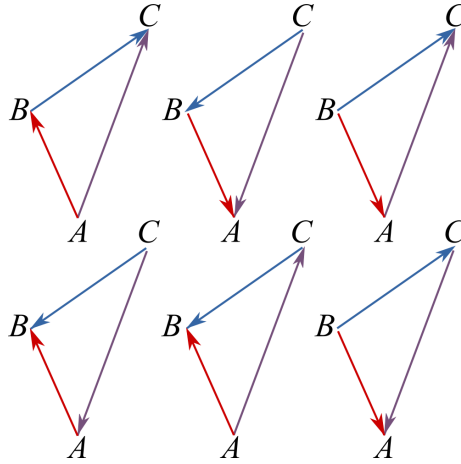


Figura 4.19: Posibles desigualdades triangulares.

riormente expuestos, se observará en (4.16) que en esos 12 casos se vuelve a cumplir la desigualdad triangular a pesar de la asimetría de la matriz.

<i>Desigualdad</i>	<i>Madrid</i>	<i>Valencia</i>
$\vec{AB} + \vec{BC} \geq \vec{AC}$	$2,009 \geq 0,796$	$5,088 \geq 1,775$
$\vec{CB} + \vec{BA} \geq \vec{CA}$	$2,315 \geq 0,565$	$4,850 \geq 1,214$
$\vec{BA} + \vec{AC} \geq \vec{BC}$	$2,079 \geq 0,718$	$4,606 \geq 2,423$
$\vec{CA} + \vec{AB} \geq \vec{CB}$	$1,856 \geq 1,032$	$3,879 \geq 2,019$
$\vec{AC} + \vec{CB} \geq \vec{AB}$	$1,828 \geq 1,291$	$3,794 \geq 2,665$
$\vec{BC} + \vec{CA} \geq \vec{BA}$	$1,283 \geq 1,283$	$3,637 \geq 2,831$

(4.16)

¿Pero es esto siempre así? ¿se cumple el teorema a pesar de no utilizar distancias euclidianas?, o dicho de otro modo ¿se cumple el teorema en el mundo real con itinerarios a través de la red de carreteras?. La respuesta es sí, siempre se cumple el teorema de la desigualdad triangular en grafos reducidos con distancias reales calculadas según los itinerarios más cortos y la información GIS.

Para ilustrar esta afirmación, se utilizará el ejemplo de la Figura 4.20. Supóngase un grafo reducido formado por tres únicos posibles arcos que comunican tres localizaciones (parte izquierda de la figura). Debido a un accidente geográfico el arco \overrightarrow{AC} es un camino más largo que la suma de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, esto en principio contradice al teorema de la desigualdad triangular. Pero, lo que ocurre en realidad, es que al calcular la matriz de distancias entre pares de nodos con ayuda de un GIS y la utilización de un algoritmo de cálculo como el conocido algoritmo de [Dijkstra \(1959\)](#); el arco \overrightarrow{AC} es sustituido por el itinerario $\overrightarrow{AC'}$. El algoritmo del camino mínimo siempre elegirá el itinerario $\overrightarrow{AC'}$ frente al arco \overrightarrow{AC} como modo de conectar A con C , esto hace que en la matriz de distancias c_{ij} se vuelva a cumplir la desigualdad triangular ($\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$), tal y como muestra la parte derecha de la Figura 4.20.

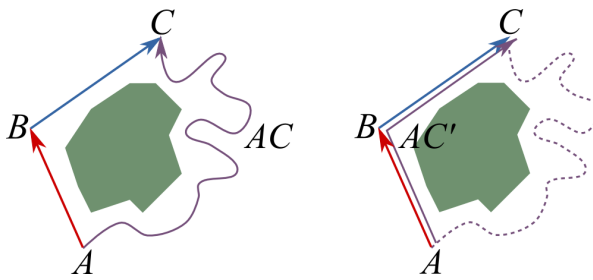


Figura 4.20: Cumplimiento de la desigualdad triangular.

La conclusión que se obtiene, es que el teorema de la desigualdad triangular es una afirmación fuerte, que incluso se cumple con matrices de distancias reales c_{ij} calculadas con ayuda de un GIS y a partir de los itinerarios (caminos más cortos) entre pares de nodos. Por otro lado, no es tan común encontrar ejemplos como el anterior en la realidad; la ordenación urbana construida por el ser humano siempre procura facilitar la comunicación entre dos puntos procurando el camino más corto en el plano, lo que también refuerza el teorema de la desigualdad triangular.

Nótese que esta conclusión es igualmente válida tanto si la matriz c_{ij} está valorada en distancias (itinerarios más cortos), como si está valorada en

tiempos de tránsito (itinerarios más rápidos), o en otras unidades como los itinerarios menos costosos, de menor consumo de combustible, etc.

El cumplimiento del teorema incluso bajo estas condiciones reales es una buena noticia, ya que como se afirma en [Toth y Vigo \(2001a\)](#), “la presencia de la desigualdad triangular es requerida por algunos algoritmos en la resolución de problemas VRP”.

4.4.6 Medición del grado de asimetría

En el apartado [4.3.1](#) se hizo una definición de la simetría. Efectivamente, tal y como se adelantaba, la simetría (o asimetría según se mire) puede ser medida en una escala continua (de completamente asimétrica a completamente simétrica) y no únicamente como una condición binaria. Se puede identificar el grado de simetría de las matrices de datos mediante la utilización de algún tipo de indicador matemático.

De hecho, el análisis de las estructuras de datos asimétricas y la medición del grado de asimetría forma parte de la investigación en gran variedad de disciplinas desde los primeros estudios de [Kruskal \(1964\)](#) en psicología, pasando por la sociología, la investigación de mercados, la política, las ciencias del comportamiento, la ecología, la estadística y en cualquier otro campo y situación actual donde sea necesario analizar los datos para comprender el comportamiento o la relación observada entre pares de objetos. El análisis de la asimetría ha sido tratado desde múltiples enfoques: el análisis multivariable, las técnicas de representación gráfica, el escalado multidimensional (*multidimensional scaling - MDS*), el análisis de *clusters*, el análisis de la redundancia, los testeos de apareado (*pairwise comparison*), el análisis de redes, etc. En [Saito y Yadohisa \(2004\)](#) se trata el análisis de estructuras de datos asimétricos con profundidad (modelos, teorías y aplicaciones prácticas).

Una aplicación interesante del análisis de la asimetría se encuentra en el proceso de elaboración de mapas de accesibilidad, [Muller \(1982\)](#). La accesibilidad según [Cauvin \(2005\)](#) se puede definir como:

“Accessibility is the measurable quantity of spatial distance between the place where one wishes to go and the place where one is, depending on the chosen means of transport. It is the minimal time distance necessary to link together two places thanks to a means of transport, via a given itinerary, and taking into account the notion of comfort.”

En el mismo texto, más adelante se confirma que las matrices de distancias con itinerarios reales son asimétricas, y se propone una medida de la asimetría:

*“The accessibility matrices can be symmetrical or not, ... roadways are rarely symmetrical... due to one-way streets or traffic circles.
... one must first verify the strength of the asymmetry by calculating, for example, an asymmetry index (c_{ij}/c_{ji}) and studying the statistical variation of this index.”*

En la siguiente Tabla 4.1 se muestran los resultados para el cálculo de la ratio c_{ij}/c_{ji} . Además, dicha ratio está calculada para la matriz ortodrómica A y para la matriz de distancias reales B . Téngase en cuenta que esta ratio c_{ij}/c_{ji} no se calcula para los pares de arcos de la diagonal de la matriz, donde $i = j$ y $c_{ij} = c_{ji}$. El número de posibles ratios viene determinado por la expresión: $(n^2 - n)/2$, siendo n el número total de nodos de la matriz.

c_{ij}/c_{ji}	A Madrid	B Madrid	A Valencia	B Valencia
r_1	1,000	0,994	1,000	1,062
r_2	1,000	0,710	1,000	0,684
r_3	1,000	1,437	1,000	0,833

Tabla 4.1: Cálculo de la ratio c_{ij}/c_{ji}

Como es evidente, dicha ratio toma un valor de 1 si el par de distancias $c_{ij} = c_{ji}$, y un valor diferente a 1 en caso contrario. En el caso de que

todas las ratios sean igual a 1, la matriz es completamente simétrica. En estos ejemplos, las matrices A son completamente simétricas, y las matrices B son completamente asimétricas. Según [Cauvin \(2005\)](#) se puede además calcular la variación estadística y otros indicadores para estas ratios para analizar el grado de asimetría. En la [Tabla 4.2](#) se han calculado los principales indicadores para todos los casos: el promedio de la ratio $r = c_{ij}/c_{ji}$, la desviación típica poblacional σ y la varianza σ^2 .

indicador	A Madrid	B Madrid	A Valencia	B Valencia
\bar{r}	1,000	1,047	1,000	0,860
σ	0,000	0,367	0,000	0,191
σ^2	0,000	0,134	0,000	0,036

Tabla 4.2: Cálculo de indicadores para la ratio c_{ij}/c_{ji}

En el caso de que la matriz sea completamente simétrica: $\bar{r} = 1, \sigma = 0$, y $\sigma^2 = 0$. En caso contrario, aún siendo una matriz asimétrica, podría ocurrir que se compensaran las ratios y el promedio $\bar{r} = 1$; así pues, \bar{r} no parece un buen indicador para medir la asimetría de una matriz. También podría ocurrir que $\bar{r} \neq 1$ y $\sigma = 0$ en el caso en el que todos los pares de distancias fueran asimétricos pero cumplieran con el mismo grado de proporción.

Otro posible indicador del grado de asimetría es el porcentaje de pares asimétricos sobre el total de pares de arcos, calculado según la expresión (4.17). Téngase en cuenta que al igual que con la ratio c_{ij}/c_{ji} los pares de la diagonal de la matriz no se contabilizan, donde $i = j$ y $c_{ij} = c_{ji}$.

$$x_a(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } c_{ij} = c_{ji} \\ 1 & \text{si } c_{ij} \neq c_{ji} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2 \sum_{a=1}^n (x_a)}{n^2 - n} \cdot 100 \quad \forall i, j \in A \quad i \neq j \quad (4.17)$$

Este indicador α podría tomar valores en el intervalo [0 %, 100 %], desde una matriz completamente simétrica (0 %), a una matriz completamente asimétrica (100 %). Los resultados para los ejemplos de Madrid y Valencia se pueden ver en la siguiente Tabla 4.3. Tal y como se afirmaba anteriormente, nótese que las matrices A son completamente simétricas, y las matrices B completamente asimétricas.

indicador	A Madrid	B Madrid	A Valencia	B Valencia
α (%)	0 %	100 %	0 %	100 %

Tabla 4.3: Cálculo del indicador α

Si bien el indicador anterior informa del grado de asimetría de la matriz, no aporta información sobre el grado de asimetría de cada par de arcos. Dicho de otro modo, se puede saber si la matriz tiene arcos asimétricos, pero el indicador anterior no mide el incremento de distancias debido a la diferencia existente en los arcos de pares asimétricos. Por ello, se propone la expresión (4.18) que proporciona un indicador del incremento de distancias para cada par de arcos.

$$\Delta_a = \frac{|c_{ij} - c_{ji}|}{\min(c_{ij}, c_{ji})} \cdot 100 \quad \forall i, j \in n, \quad i \neq j \quad (4.18)$$

Si se calcula para los ejemplos en curso se obtiene la Tabla 4.4. El incremento tomará valores iguales o superiores al 100 %. Siendo 100 % el valor que indica que el par de arcos es simétrico, mientras que cualquier otro valor señala la diferencia (incremento) de distancias del arco mayor sobre el menor del par asimétrico.

indicador	A Madrid	B Madrid	A Valencia	B Valencia
Δ_1	100 %	100,62 %	100 %	106,23 %
Δ_2	100 %	140,88 %	100 %	146,21 %

Cálculo del indicador incremento

▷

indicador	A Madrid	B Madrid	A Valencia	B Valencia
Δ_3	100 %	143,73 %	100 %	120,01 %
$\bar{\Delta}$	100 %	128,41 %	100 %	124,15 %
σ	0 %	24,11 %	0 %	20,31 %

Tabla 4.4: Cálculo del indicador incremento

Ahora sí se observa con mayor claridad, no sólo la asimetría de la matriz, sino el grado de asimetría de cada arco. Valores próximos al 100 % indicarán que los pares de arcos o la matriz es relativamente simétrica, o completamente simétrica si es igual a 100 %; mientras que valores alejados del 100 % subrayarán un mayor grado de asimetría en cada par de arcos y en la matriz. Nótese que en los ejemplos anteriores se llega a alcanzar un incremento mayor del 140 % en algunos pares de arcos, que es una diferencia notable entre el itinerario de ida y el de vuelta.

Si no se desea ver los resultados en forma de incremento, se puede utilizar la siguiente expresión (4.19).

$$\delta_a = \frac{|c_{ij} - c_{ji}| + \min(c_{ij}, c_{ji})}{\min(c_{ij}, c_{ji})} \cdot 100 - 100 \quad \forall i, j \in A \quad i \neq j \quad (4.19)$$

Si se calcula, los valores de la Tabla 4.4 se transforman en los de la Tabla 4.5.

indicador	A Madrid	B Madrid	A Valencia	B Valencia
δ_1	0 %	0,62 %	0 %	6,23 %
δ_2	0 %	40,88 %	0 %	46,21 %
δ_3	0 %	43,73 %	0 %	20,01 %
$\bar{\delta}$	0 %	28,41 %	0 %	24,15 %
σ	0 %	24,11 %	0 %	20,31 %

Tabla 4.5: Cálculo del indicador δ

De forma análoga, los valores próximos al 0 % indicarán que los pares de arcos o la matriz es relativamente simétrica, o completamente simétrica si es igual a 0 %; mientras que valores alejados del 0 % subrayarán un mayor grado de asimetría en cada par de arcos y en la matriz.

La mejor manera de analizar la asimetría gráficamente es comparando su representación sobre el GIS, tal y como se observa en la Figura 4.10 y la Figura 4.11 para el ejemplo de Madrid, y en la Figura 4.12 y la Figura 4.12 para el ejemplo de Valencia.

Es interesante también el cálculo del peso total de la matriz, o suma de todas las distancias c_{ij} de la matriz, tal y como se expresa en (4.20). Este indicador por sí sólo no muestra el grado de asimetría, pero si se compara el peso de una matriz B (asimétrica y real) con el de una matriz A (simétrica y ortodrómica), se puede observar el incremento de distancias de los itinerarios reales y asimétricos frente a los euclidianos.

$$peso = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \quad (4.20)$$

En la Tabla 4.6 se muestran los resultados de este cálculo de pesos y su comparativa.

indicador	A Madrid	B Madrid	A Valencia	B Valencia
peso	4,334	5,685	6,904	12,927
Δ	0 %	31,17 %	0 %	87,24 %

Tabla 4.6: Cálculo del peso de la matriz

El peso de la matriz B será siempre igual o superior al peso de la matriz A , en estos ejemplos el incremento de peso llega a alcanzar el 87,24 % para el caso de Valencia, esto es casi el doble que si se utilizaran distancias ortodrómicas. Esto mismo se puede apreciar gráficamente si se compara el grafo completo de A con el de B , tal y como muestra la Figura 4.21. Y de igual modo en la Figura 4.22 para el ejemplo de Madrid.

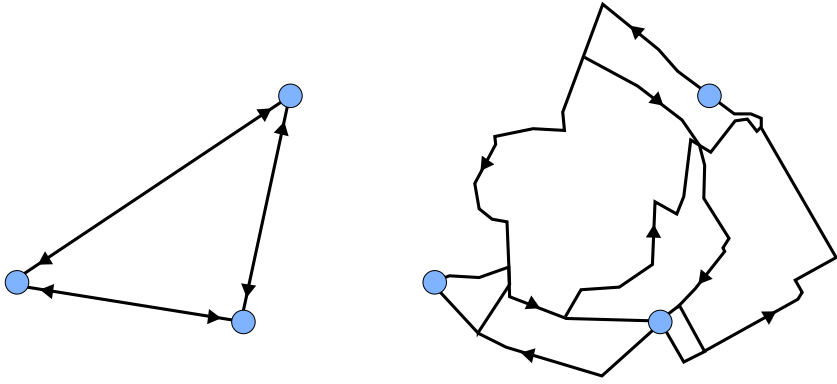


Figura 4.21: Grafo completo de itinerarios (ejemplo Valencia).

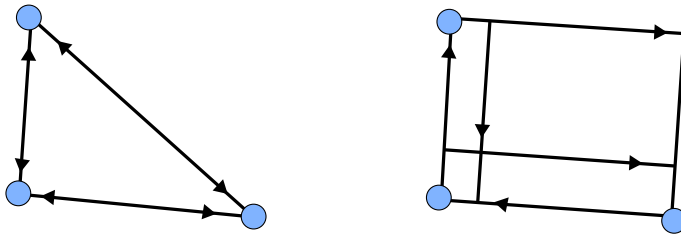


Figura 4.22: Grafo completo de itinerarios (ejemplo Madrid).

En esta sección se ha podido observar que para la obtención de las matrices de distancias reales en base a itinerarios sobre la red real de transporte, es muy aconsejable la utilización de un sistema de información geográfica, que facilitará la localización de los puntos de interés, y el cálculo y representación de los caminos mínimos entre pares de nodos.

Se ha podido constatar que los problemas reales son asimétricos, y que además cumplen con la propiedad de la desigualdad triangular, que cabe recordar es imprescindible en algunas heurísticas modernas de resolución del TSP y del VRP.

También se ha expuesto que la simetría puede verse como una propiedad continua, y no sólo binaria, y que existen diferentes indicadores para la medición del grado de simetría (o asimetría, según se defina). La repre-

sentación gráfica del grafo completo es una manera especialmente útil de observar dicha asimetría, y si se realiza sobre un mapa, de comprender mejor su naturaleza en base a la red real de transporte.

4.5 Cuestiones e hipótesis para la investigación

Alcanzado este punto en el desarrollo de la presente Tesis Doctoral, y basándose en todo lo anteriormente expuesto, se plantean algunas cuestiones que dan lugar a la investigación.

Cuestiones:

1. ¿En qué medida la asimetría afecta a la eficacia en la solución aportada por las principales heurísticas de TSP?
2. ¿En qué medida la asimetría afecta a la eficiencia de las principales heurísticas en la resolución de TSP?
3. ¿Es factible utilizar técnicas de transformación ATSP \rightarrow TSP para resolver exitosamente problemas ATSP con heurísticas TSP?
4. ¿Cómo evolucionan los aspectos anteriores en función del tamaño del problema a resolver?
5. ¿Qué técnicas de resolución son las más indicadas según el caso?

Por todo ello, se establecen provisionalmente como base de la investigación las siguientes hipótesis que se pretenden confirmar o refutar.

Hipótesis de la investigación:

1. La asimetría condiciona a la eficacia de la solución proporcionada por las heurísticas de TSP.
2. La asimetría condiciona a la eficiencia de las heurísticas en la resolución del TSP.

3. La localización de los nodos en el mundo real, esto es, el ámbito geográfico del problema, representa diferente grado de asimetría y por tanto condiciona la eficiencia y/o eficacia de los métodos.
4. No siempre será factible utilizar técnicas de transformación ATSP → TSP para resolver con éxito y mediante heurísticas TSP los problemas reales.
5. El tamaño del problema condiciona notablemente y resta eficiencia y/o eficacia a las técnicas usadas en el estudio.

En el siguiente apartado 4.6 de este capítulo, se aborda el proceso de experimentación: diseño de experimentos (*Design Of Experiments - DOE*), generación de instancias, cálculo de las matrices de distancias. En el Capítulo 6 se presentarán los principales resultados y el análisis de los mismos con el objetivo de resolver las cuestiones aquí planteadas y confirmar o refutar las hipótesis de esta investigación.

4.6 Experimentos

En esta sección se describe el proceso científico llevado a cabo para resolver las cuestiones y probar o refutar las hipótesis anteriores. Este proceso ha sido diseñado con el objeto de garantizar los principios fundamentales de una investigación científica: medible, reproducibilidad, generalidad y aplicabilidad, tal y como se recomienda entre otros, en [Eco, Baranda y Clavería \(2001\)](#).

A continuación se aborda el proceso de caracterización y descripción detallada de las instancias hasta llegar al diseño experimental. De este modo, en los siguientes apartados se irá profundizando en la caracterización y definición detallada de todos los factores que definen el conjunto de experiencias llevado a cabo. Este proceso de caracterización y el diseño experimental se ha realizado siguiendo las recomendaciones de [Montgomery \(2009\)](#).

4.6.1 Caracterización de las instancias

Se considera como instancia (*instance*) a cada uno de los casos o problemas que se utilizarán en esta experimentación. Cada instancia, caso o experiencia está definido por una serie de propiedades o características diferenciadas que habrá que estudiar con detalle para poder comprender mejor su comportamiento de manera comparativa, y probar o refutar las hipótesis planteadas. El estudio de las características ayudará en la definición del diseño experimental.

En primer lugar se presenta una clasificación de las características de las instancias. Dentro de cada dimensión o factor se identifican diferentes tipos, tal y como se muestra en la siguiente enumeración:

Territorio

Es la región geográfica del planeta donde se sitúa la instancia. El territorio se acota con un cuadrante que a su vez estará definido en situación y tamaño por dos pares de coordenadas geográficas de latitud y longitud (esquinas opuestas del cuadrante). Se distinguen las siguientes variantes:

1. Corta distancia: las localizaciones estarán ubicadas dentro del ámbito geográfico de una ciudad, es decir, intramuros (*intra-city*). La comunicación o itinerarios estarán sujetos a la ordenación urbana (calles, rotondas, circunvalación, centro urbano, etc.).
2. Media distancia: las localizaciones se extienden a una región mayor, provincial por ejemplo. Están sujetas a la comunicación disponible entre diferentes ciudades (*inter-city*), caminos, carreteras, autovías y también a las redes intramuros.
3. Larga distancia: la región abarca el territorio nacional o internacional. La comunicación está condicionada por el diseño de la red de transporte nacional, las grandes vías de comunicación y todo lo anteriormente expuesto (*national and international transport*). La comunicación dentro

de un país grande y con buena infraestructura se podría considerar equivalente al transporte internacional de un país pequeño. Por ejemplo, el transporte por carretera dentro de España podría ser equivalente al transporte por carretera entre Holanda, Bélgica y Alemania.

Localización

Se refiere a la posición que tomarán los nodos de la instancia dentro del territorio anteriormente definido. Como se verá más adelante, la localización de los nodos puede ser completamente aleatoria o formando algún tipo de patrón ordenado (*clusters*). Se distinguen las variantes siguientes:

1. Aleatoria: la localización de los nodos dentro del territorio es completamente fortuita o al azar (*random*), y no responde a ningún criterio ordenado.
2. No aleatoria: la localización de los nodos se decide a partir de un criterio, dando lugar a un patrón de ubicaciones ordenado, por ejemplo formando algún tipo de agrupación (*clusters*) o estructura.
 - a) Cuadrícula o rejilla (*grid*): los nodos están localizados formando un patrón de cuadrícula o conjunto de cuadrados. El objetivo es simular una distribución sobre un plano o trazado hipodámico, intentando adecuarse al planteamiento urbanístico que aparece en las ciudades mediante el diseño de calles en ángulo recto y manzanas (cuadras) rectangulares. Hipodámico proviene del nombre del arquitecto griego Hipodamo de Mileto (en griego: *Hippodamos*), considerado uno de los padres del urbanismo actual basado en planos ortogonales, en cuadrícula o en damero.
 - b) Radial (*radial*): en este otro planteamiento los nodos están distribuidos de manera radial a una localización central. De este modo se intenta simular una distribución más propia de los VRP, donde desde una localización central se intenta servir a un conjunto de

nodos de la región distribuidos radialmente a lo largo del perímetro del central.

Simetría

Es el factor clave de esta investigación y fue definida en el apartado 4.3.1. Cada instancia generada a partir de un territorio y un conjunto de nodos geolocalizados se transformará en una matriz de distancias c_{ij} . Según el territorio, la localización, el modo de medir la distancia entre nodos, y otras transformaciones dicha matriz tendrá un grado de simetría. En el apartado 4.4.6 se explica cómo medir el grado de simetría (o asimetría) de una matriz.

1. Simétrica: la matriz de distancias c_{ij} es completamente simétrica. Dicha matriz se calculará en principio en base a las distancias ortodrómicas entre pares de nodos, pero se tendrán en consideración otras variantes en cuanto a la construcción de las matrices simétricas.
 - a) Distancias ortodrómicas (simétrica): es la matriz cuyas distancias $c_{ij} = c_{ji}$ y que han sido calculadas mediante la fórmula descrita en el apartado 4.4.2.
 - b) Menor arco real de cada par (simétrica): en primer lugar se calculará la matriz de distancias reales con ayuda de un GIS tomando los itinerarios reales entre pares de nodos, como es sabido, esta matriz es asimétrica. A continuación se realizará una transformación a partir de esta matriz asimétrica para transformarla en simétrica, de modo que cada elemento de la nueva matriz simétrica será igual al arco de menor distancia c de cada par de arcos ij de la asimétrica, esto es, se tomará el $\min(c_{ij}, c_{ji})$ de la asimétrica.
 - c) Mayor arco real de cada par (simétrica): de modo similar al caso anterior, pero al contrario, tomando como elemento de la matriz simétrica el arco de mayor distancia c de cada par de arcos ij de

la matriz asimétrica real, esto es, se tomará el $\max(c_{ij}, c_{ji})$ de la asimétrica.

d) Transformada (simétrica por transformación de la asimétrica): por último, se construirá una matriz simétrica a partir de la matriz asimétrica GIS realizando una transformación tal y como se describe en el apartado 4.3. Nótese que esta transformación de la matriz afecta al siguiente factor, ya que multiplica por 4 el tamaño de la matriz de distancias c_{ij} .

2. Asimétrica: si la matriz de distancias c_{ij} no es completamente simétrica. En este caso se tomará la matriz calculada con ayuda de un GIS y tomando los itinerarios reales entre pares de nodos, y sin ningún tipo de transformación posterior.

Tamaño de la matriz

En relación con el número de nodos n de la instancia la matriz tendrá un tamaño $n \times n$, o si es transformada como simétrica de $2n \times 2n$ (véase el apartado 4.3). Un mayor número de nodos n o un mayor tamaño de la matriz de distancias c_{ij} implica una mayor complejidad de cálculo, que como es sabido crece exponencialmente según el tamaño de la instancia.

1. Número de nodos: el tamaño de la matriz varía en función de n . Se establecerá un rango y un intervalo según el número de localizaciones para poder analizar este factor.

4.6.2 Estudio detallado de la caracterización de las instancias

En este apartado, se profundiza en el análisis de las características antes presentadas. Se identificarán los factores y su tipo (cuantitativo o cualitativo). Así mismo, se identificarán los posibles niveles o variantes de cada factor. Esto último define los rangos, que son la variación permitida en los valores y otras características entre unos límites definidos. Nótese que factores, niveles y

variantes se irán combinando para dar lugar a una instancia de características o propiedades concretas.

Tal y como se describe en el apartado 4.6.6, la combinación de las diferentes propiedades, sus rangos, y el número total de instancias de la muestra define el espectro o ámbito de la experimentación. Más adelante, en el apartado 4.6.5 se justificará el número total de instancias y réplicas necesarias para llevar a cabo los experimentos con suficiente nivel de confianza.

Territorio

Es un factor cualitativo, y en realidad se trata de un factor continuo; pero en este caso se va a discretizar a través de la elección de diferentes regiones de distinto tamaño, convirtiéndose en un factor cualitativo ordinal. Las variantes seleccionadas son:

1. Corta distancia
2. Media distancia
3. Larga distancia

En este trabajo de investigación se ha elegido la Península Ibérica como territorio del estudio, tal y como muestra la Figura 4.23. Sobre él se han identificado las tres regiones o variantes antes expuestas.

Nótese que se ha utilizado la más moderna y actualizada cartografía disponible en el momento del estudio; el territorio y su infraestructura es algo dinámico, y esto podría afectar en cierto grado a futuros experimentos similares sobre el mismo territorio.

En la Tabla 4.7 se muestran los valores de latitud y longitud seleccionados para cada región. El punto definido por (Latitud-1, Longitud-1) es la esquina superior-izquierda de la región; mientras que el punto definido por (Latitud-2, Longitud-2) es la esquina inferior derecha de la región.

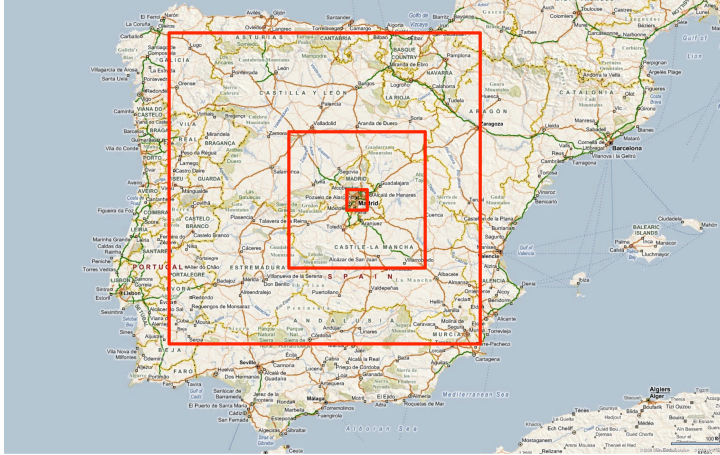


Figura 4.23: Regiones de territorio de la Península Ibérica.

Territorio	Latitud-1	Longitud-1	Latitud-2	Longitud-2
Corta distancia	40,51928	-3,88504	40,20486	-3,47143
Media distancia	41,56819	-5,38879	39,14269	-2,14839
Larga distancia	43,16111	-7,87719	38,15184	-0,96954

Tabla 4.7: Factor territorio y sus variantes.

Localización

Es un factor cualitativo nominal. Se pretende analizar el comportamiento de los algoritmos en función de la naturaleza u ordenación de las localizaciones dentro del territorio. Por ello se han definido tres variantes que como se ha comentado antes se pueden dividir entre estructuras ordenadas y estructuras caóticas:

1. Aleatoria
2. Cuadrícula o rejilla (*grid*)
3. Radial (*radial*)

La siguiente Figura 4.24 muestra un ejemplo de distribución aleatoria de las n localizaciones sobre un territorio. En este caso cada localización

tomará unas coordenadas de latitud y longitud generadas aleatoriamente y pertenecientes a la región objeto de estudio, representada en la figura por el cuadrado exterior. Cada instancia generada tendrá una distribución completamente diferente y atendiendo a un patrón caótico.

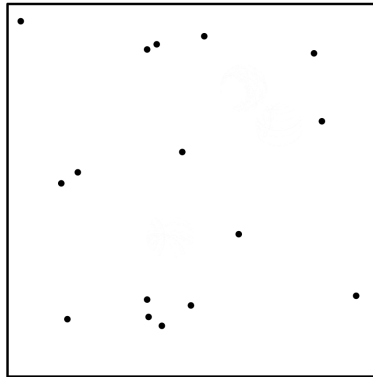


Figura 4.24: Localizaciones en distribución aleatoria.

A continuación, en la Figura 4.25 se ilustra un ejemplo de distribución en rejilla o cuadrícula. En este caso, el territorio objeto de estudio (representado por el cuadrado exterior) se divide en tantas zonas cuadradas como sea necesario. En el centro de dichas zonas será ubicada una localización, aunque estará desplazada ligeramente del centro por un vector aleatorio. Gracias a la utilización de este vector de desplazamiento, cada instancia generada será diferente a la anterior, aunque conservando una distribución con un patrón de damero. Nótese que en el caso de que $n > \text{entero}(\sqrt{n}) \cdot \text{entero}(\sqrt{n})$, las $n - \text{entero}(\sqrt{n}) \cdot \text{entero}(\sqrt{n})$ localizaciones que no quepan en la cuadrícula $\text{entero}(\sqrt{n}) \cdot \text{entero}(\sqrt{n})$ serán colocadas aleatoriamente en el espacio disponible.

Por último, la Figura 4.26 muestra la distribución de $n - 1$ localizaciones de manera radial alrededor de una localización central del territorio. Como se observa en la figura, el territorio se divide por dos fronteras circulares que forman una corona circular. Dentro de esta corona circular se localizan $n - 1$

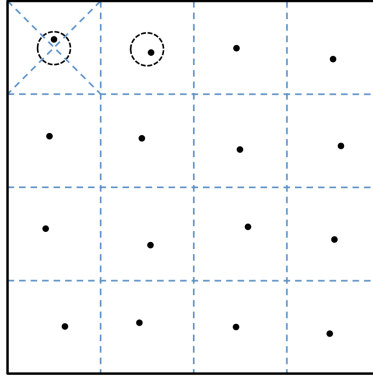


Figura 4.25: Localizaciones en distribución de rejilla.

radios a una equidistancia angular $\alpha = 2\pi/(n - 1)$. Finalmente, en cada radio y dentro de la corona circular se situará una localización a una distancia aleatoria del centro. En el centro de toda la región siempre estará situado una localización.

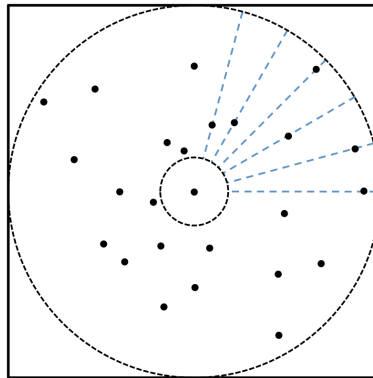


Figura 4.26: Localizaciones en distribución radial.

Nótese, observando la Figura 4.27, que una región definida por dos localizaciones opuestas (Latitud-1, Longitud-1 y Latitud-2, Longitud-2), no es una región exactamente cuadrada. Mientras que las líneas trazadas a partir de las

latitudes son paralelas, las líneas trazadas por las longitudes son convergentes en los polos terrestres.

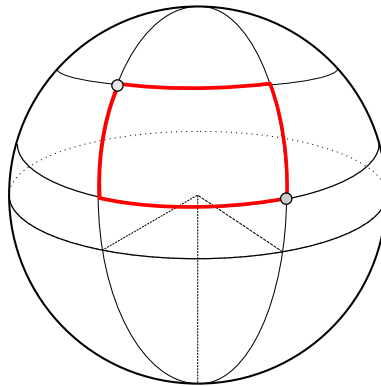


Figura 4.27: Territorio definido por dos localizaciones.

A la hora de definir el territorio y calcular sobre él las localizaciones anteriormente expuestas se debe, por tanto, tener en consideración este factor y otros, como: la forma del geoide, la localización de la región sobre la superficie terrestre, la diferente distancia ortodrómica entre un grado de latitud y un grado de longitud, etc. Tal y como se muestra en la Figura 4.28, se debe procurar un territorio lo más cuadrado posible y adaptar la proyección de las localizaciones a la geometría del mismo. Por ejemplo, en la proyección radial, de debe considerar que el radio de las coronas circulares no es una constante y debe ser calculado a partir de un radio horizontal r_x y otro vertical r_y .

En la Figura 4.29 se muestra la proyección sobre un mapa de 500 localizaciones formando una distribución radial en un territorio de largas distancias. A continuación, en la Figura 4.30 aparece el detalle de un mapa de otras 500 localizaciones formando esta vez una distribución aleatoria en un territorio de largas distancias.

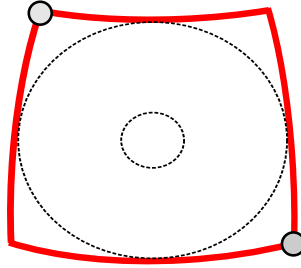


Figura 4.28: Localización radial en el geoide.

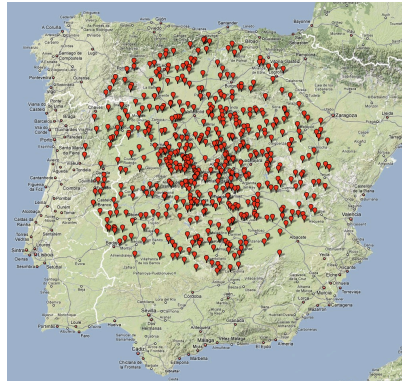


Figura 4.29: Ejemplo de instancia con localizaciones en distribución radial y territorio de largas distancias.

Simetría

En cierto modo se trata de un factor cuantitativo, ya que el grado de simetría de una matriz puede variar en un rango de valores, desde completamente simétrica a completamente asimétrica, y en tantos intervalos o niveles como pares de nodos dependiendo del tamaño de la matriz. Por otro lado, al utilizar matrices de distancias basadas en localizaciones reales, el grado de simetría resultante de la matriz es en cierto modo incontrolable, ya que dependerá del territorio elegido y de la red de carreteras existentes, así como de las localizaciones. Es por ello, por lo que se ha decidido transformar la simetría en un factor cualitativo ordinal; cada tipo de matriz construida tendrá un

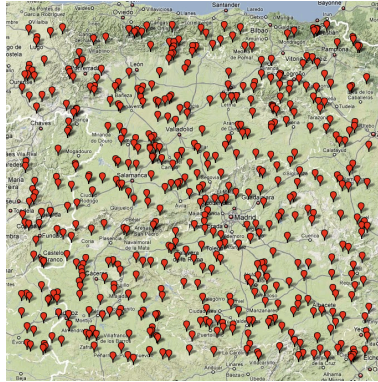


Figura 4.30: Ejemplo de instancia con localizaciones en distribución aleatoria y territorio de largas distancias.

grado de asimetría diferente. De este modo se pretende controlar en cierto modo su comportamiento, y establecer un número de variantes suficientes y relevantes que permita observar una posible no linealidad en los resultados.

1. Distancias ortodrómicas (simétrica)
2. Menor arco real de cada par (simétrica)
3. Mayor arco real de cada par (simétrica)
4. Transformada (simétrica por transformación de la asimétrica)
5. Asimétrica

Para ilustrar mejor las diferencias entre cada uno de las posibles métodos de construcción de matrices, tomemos el ejemplo de 3 localizaciones de Madrid; ilustrado en la Figura 4.14 para el caso de distancias ortodrómicas y en la Figura 4.15 para las distancias según itinerarios reales.

En primer lugar, en la expresión (4.21) se muestra para este ejemplo, la matriz de distancias ortodrómicas $c_{ij} \in A$ simétrica y de dimensión 3×3 .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,904 & 0,556 \\ 0,904 & 0 & 0,707 \\ 0,556 & 0,707 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Si se calcula la matriz en base a itinerarios reales con ayuda de un GIS, la matriz de distancias $c_{ij} \in B$ es asimétrica, tal y como se muestra en la expresión (4.22).

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1,291 & 0,796 \\ 1,283 & 0 & 0,718 \\ 0,565 & 1,032 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Se podría generar una matriz simétrica E a partir de B tomando el arco de menor distancia c de cada par de arcos ij , esto es $\min(c_{ij}, c_{ji})$, tal y como se muestra en la expresión (4.23).

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1,283 & 0,565 \\ 1,283 & 0 & 0,718 \\ 0,565 & 0,718 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

De forma análoga, se genera una matriz simétrica C a partir de B pero en este caso tomando el arco de mayor distancia c de cada par de arcos ij , esto es $\max(c_{ij}, c_{ji})$, tal y como se muestra en la expresión (4.24).

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1,291 & 0,796 \\ 1,291 & 0 & 1,032 \\ 0,796 & 1,032 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Por último, y aplicando a la matriz asimétrica B la conocida transformación explicada en el apartado 4.3, se puede obtener la matriz simétrica D de

tamaño $2n \times 2n$, tal y como se muestra en (4.25).

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & -\infty & 1,283 & 0,565 \\ \infty & 0 & \infty & 1,291 & -\infty & 1,032 \\ \infty & \infty & 0 & 0,796 & 0,718 & -\infty \\ -\infty & 1,291 & 0,796 & 0 & \infty & \infty \\ 1,283 & -\infty & 0,718 & \infty & 0 & \infty \\ 0,565 & 1,032 & -\infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Número de nodos

Claramente es un factor cuantitativo, dependiendo del número de nodos o localizaciones cambiará el tamaño de la matriz de distancias resultantes y la complejidad del problema a tratar. El conjunto de tratamientos totales en la experimentación viene condicionado en gran medida por los siguientes factores relativos al número de nodos:

1. Rango: debe ser relevante, del mismo orden de magnitud que la mayoría de los problemas de reparto que aparecen en la industria y en los servicios, y que alcance cierto nivel de complejidad para poder observar el comportamiento de los algoritmos en dicho nivel.
2. Intervalo: estará definido de modo equiespaciado, lo que permitirá observar una posible no linealidad en los resultados.

Quedan clarificados todos los aspectos relativos a la caracterización de las instancias. A continuación se estudiarán las variables respuesta que serán medidas durante el proceso experimental.

4.6.3 Estudio de las variables respuesta

En esta sección se describen las variables a estudiar como resultado de las experiencias computacionales. Estas variables respuesta han sido seleccionadas para contrastar la validez de las hipótesis planteadas; sus resultados serán analizados estadísticamente para concluir si existen diferencias estadísticamente significativas entre los diferentes niveles y variantes de los factores, posibles interacciones o patrones de comportamiento en función del algoritmo utilizado; y en definitiva para obtener las conclusiones de la investigación.

Calidad de la solución

Es la bondad de la solución medida en unos determinados términos o unidades. En el caso del TSP, tal y como se describe en el apartado 3.2, el problema consiste en encontrar la ruta óptima (menor distancia total) para visitar un conjunto de n localizaciones (sólo una vez) y regresando a la primera localización de la ruta. Así pues, como es sabido, se trata de minimizar la suma total de coste de los arcos utilizados en la ruta; véase la función objetivo expresada en (3.1).

La calidad de la solución se medirá en términos de distancia total requerida en la ruta. Se utilizarán unidades de distancia (por ejemplo, kilómetros). A menor distancia, mejor será el resultado alcanzado, siendo el óptimo el menor de todos los resultados posibles.

En el apartado 4.2.4 se describe el método híbrido entre el método de los planos de corte y el *branch-and-bound* (ramificación y acotación) utilizado por el *solver* Concorde. Nótese que, si se le permite el tiempo de computación necesario, Concorde es capaz de encontrar el óptimo; por ello, y con esta salvedad, los resultados óptimos de Concorde serán la mejor referencia posible para la comparación de la calidad de la solución de los otros algoritmos estudiados.

El análisis de la solución se puede realizar desde un punto de vista cuan-

titativo, como por ejemplo medir el valor de la función objetivo, y también desde un punto de vista cualitativo, en el caso en el que se quisiera analizar la naturaleza de la secuencia u ordenación de las localizaciones en la ruta solución. Como se verá a continuación, existe un modo de traducir ese análisis cualitativo a un indicador cuantitativo. De este modo, todos los indicadores o variables respuesta serían cuantitativos y podrían ser tratados estadísticamente con mayor facilidad.

1. Diferencia o desviación cuantitativa respecto de la mejor solución encontrada: una vez obtenido el mejor valor v^* para una determinada instancia o experiencia e , esto es v_e^* ; se puede calcular la desviación en términos relativos de cualquier otra solución s como el porcentaje (4.26).

$$\frac{v_e^s - v_e^*}{v_e^*} \cdot 100 \quad (4.26)$$

Esta ratio será igual a cero si la solución s también es la mejor, y mayor que cero en caso contrario indicando su desviación en términos relativos a v^* . Cuanto mayor sea el valor de esta ratio y más alejado de cero, peor será la solución s obtenida.

2. Similitud (*similarity*): es una variable resultado difícil de definir que pretende indicar el grado de parecido o semejanza de dos objetos, en este caso de una secuencia solución s respecto de otra s' . Esta definición puede ser diferente en función de la escala de medida y del tipo de datos o información a comparar. Se intenta medir con variables cuantitativas aspectos que sin duda son cualitativos. En la literatura científica existen multitud de artículos que proponen diferentes indicadores para medir la similitud entre diferentes tipos de objetos, en este caso, se trata de comparar la similitud de datos ordinales (las secuencias de visitas de varias rutas). Así pues, dadas dos secuencias solución s y s' , se definirá

una distancia $d(s, s')$ como el número mínimo de pasos o aplicaciones de un operador básico, con el objeto de transformar una solución en la otra.

Distancia Hamming: es uno de los indicadores más conocidos para medir el grado de diferencia o desacuerdo entre dos vectores o secuencias. Este indicador proporciona una medida del grado de desorden de un vector o secuencia respecto de otro, tal y como se describe en el trabajo original de [Hamming \(1950\)](#).

La distancia Hamming también puede utilizarse con datos ordinales para medir el grado de desorden de un vector s respecto de otro s' . Tal y como se describe en el pseudocódigo 4.4, el algoritmo para calcular la distancia de Hamming consta de dos pasos: en primer lugar se elimina de la secuencia comparada s los dígitos o elementos que no coinciden con la secuencia a comparar (o patrón s'), a continuación se vuelven a colocar en la secuencia comparada s cada dígito o elemento en el lugar en el que se encuentran en el patrón s' , contando cada paso necesario. La distancia Hamming será por tanto, el número de pasos o elementos re-colocados que son necesarios para dejar la secuencia comparada s idéntica a la secuencia patrón s' . Dicho de otro modo, la distancia Hamming es igual al número de dígitos diferentes o que no coinciden con los de la secuencia patrón s' . No hace falta decir que si las dos soluciones son completamente iguales, la distancia será cero. La distancia Hamming puede ser calculada en un tiempo lineal a n .

Por ejemplo, sean dos secuencias s' y s de $n = 6$ localizaciones: $s' = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ y $s = [2, 5, 3, 1, 4, 6]$, la distancia Hamming será igual a 4, ya que son necesarios 4 pasos o colocar 4 elementos en diferente orden para dejar a s idéntica a s' . La distancia Hamming sin embargo tiene un problema cuando dos secuencias son prácticamente idénticas pero se encuentran desplazadas ligeramente. Supóngase ahora las dos secuencias: $s' = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ y $s = [1, 6, 2, 3, 4, 5]$, la distancia

resultante será igual a 5, cuando claramente se observa que la ruta TSP sólo habrían dos arcos diferentes. Este indicador es sencillo, y si bien proporciona información sobre la similitud ordinal de las secuencias, no facilita el grado de similitud en términos de arcos y en contextos del TSP.

Algoritmo 4.4 Distancia Hamming

Entrada: secuencias s y s'

Salida: $distanciaH$

- 1: $distanciaH = 0$
 - 2: **para** $i = 1$ **a** n **hacer**
 - 3: **si** $s_i \neq s'_i$ **entonces**
 - 4: $distanciaH = distanciaH + 1$
 - 5: **fin si**
 - 6: **fin para**
-

Distancia de adyacencia: otra posibilidad es medir el número de elementos adyacentes (arcos entre localizaciones) que se presentan diferentes en las dos soluciones s y s' . Tal y como se muestra en el pseudocódigo 4.5, se trata de comprobar si el arco $s'(i, i + 1)$ que une el elemento de la secuencia s'_i con el siguiente elemento s'_{i+1} existe en algún lugar de la secuencia s . Nótese que en el algoritmo se hace en primer lugar una equivalencia entre $A() \leftarrow s$ y entre $B() \leftarrow s'$. A continuación se utiliza una matriz auxiliar $B'()$. Esta matriz auxiliar guardará la posición del elemento $B(i)$ en s' . De este modo, se puede comparar las posiciones de dos elementos correlativos de $A(i, i + 1)$ en $B()$ (usando la matriz auxiliar $B'()$). Téngase en cuenta que se incluirán en las secuencias los arcos de retorno al origen o primer nodo de la secuencia, esto es el arco $s(n, 1)$. La distancia de adyacencia será por tanto el número de arcos de s no coincidentes. De modo similar al caso anterior, si las dos soluciones son completamente iguales la distancia será cero; en el caso contrario la distancia máxima posible es $n + 1$.

Por ejemplo, sean dos secuencias s' y s de $n = 6$ localizaciones: $s' = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ y $s = [1, 6, 2, 3, 4, 5]$, la distancia de adyacencia será igual a 3, ya que en s' no existen los arcos $(1,6)$ $(6,2)$ $(5,1)$ de s . Sean ahora, otras dos secuencias s' y s de $n = 6$ localizaciones: $s' = [2, 3, 4, 5, 6, 1]$ y $s = [4, 5, 2, 3, 6, 1]$, la distancia de adyacencia será igual a 3, debido a la inexistencia en s' de los arcos $(5,2)$ $(3,6)$ y $(1,4)$.

Este indicador proporciona una mejor información sobre la similitud de las secuencias en el contexto del TSP. El cálculo de esta distancia se puede realizar en un tiempo lineal de n .

Como se comentaba, existen multitud de otros indicadores, algunos de los cuales miden la similitud según el número de movimientos de intercambio $k - opt$ y que en algunos casos requieren un tiempo de computación no polinomial de n . Una revisión y una comparativa sobre diferentes indicadores se puede encontrar en [Schiavinotto y Stützle \(2007\)](#).

Tiempo computacional

También llamado tiempo de CPU (*Central Processing Unit*) o de procesador, es el tiempo que realmente se utiliza en la ejecución de las instrucciones de un algoritmo, excluyendo todo tiempo necesario para la entrada/salida de datos y cualquier otra operación del sistema, tal y como se define en [Alba \(2006\)](#).

Este indicador se utiliza para medir el comportamiento de un determinado algoritmo para la resolución de un problema de tamaño n , ya que un menor tiempo computacional posibilita al usuario la obtención de soluciones más rápidamente. Por tanto, se utilizará también para comparar la bondad de diferentes algoritmos o para contrastar el tiempo de computación necesario frente a la calidad de la solución obtenida. El tiempo de computación requerido suele ser función del tamaño del problema $f(n)$ y de la complejidad del mismo. Para una comprensión más profunda sobre la complejidad compu-

Algoritmo 4.5 Distancia de adyacencia

Entrada: secuencias s y s'

Salida: $distanciaA$

```
1:  $distanciaA = 0$ 
2:  $A() \leftarrow s$ 
3:  $B() \leftarrow s'$ 
4: para  $i = 1$  a  $n$  hacer
5:    $B'(B(i)) \leftarrow i$ 
6: fin para
7:  $A(n + 1) = A(1)$ 
8: para  $i = 1$  a  $n - 1$  hacer
9:    $r = B'(A(i + 1)) - B'(A(i))$ 
10:  si  $r \neq 1$  entonces
11:     $distanciaA = distanciaA + 1$ 
12:  fin si
13: fin para
14:  $r = B'(A(n + 1)) - B'(A(n))$ 
15:  $r = r + n$ 
16: si  $r \neq 1$  entonces
17:    $distanciaA = distanciaA + 1$ 
18: fin si
```

tacional (*computational complexity*) y su relación con el tiempo de computacional es interesante la lectura de [Rudich y Wigderson \(2004\)](#).

4.6.4 Análisis de la varianza - ANOVA

Una característica muy importante en este proceso experimental es la utilización del análisis de la varianza (*analysis of variance* - ANOVA). El análisis de la varianza es un conjunto de procedimientos y modelos estadísticos que permite analizar el comportamiento y la relación e interacción entre factores que afectan a las variables de un proceso.

El análisis de la varianza sirve para comparar diferentes conjuntos de datos según la varianza global observada, y de este modo asociar una probabilidad que explique el comportamiento de un conjunto de datos en base a uno o más factores. Esta técnica, por tanto, permite a los investigadores inferir sobre las poblaciones cuando éstas se ven afectadas por varios factores.

Un aspecto muy importante del ANOVA a tener presente, es que la veracidad de sus resultados depende del cumplimiento de tres hipótesis básicas que afectan a los datos: normalidad, homocedasticidad (igualdad de varianza) e independencia del residuo.

El ANOVA fue desarrollado inicialmente por el estadístico [Fisher \(1926\)](#), quien lo aplicó a gran número de estudios agrícolas y genéticos. Es por ello, por lo que esta técnica también es conocida como análisis de la varianza de Fisher, o ANOVA de Fisher; debido a la utilización de la distribución F de Fisher-Snedecor en el contraste de las hipótesis. Desde su desarrollo, el ANOVA se ha aplicado en múltiples áreas y entornos de investigación para analizar la relación entre uno, dos o múltiples factores; y puede decirse que es probable que sea la técnica estadística usada más ampliamente.

4.6.5 Diseño factorial

El diseño factorial se utiliza en experimentos que incluyen k factores y cuando es necesario estudiar el efecto de los factores y sus niveles sobre las variables respuesta. La siguiente Tabla 4.8 enumera para cada uno de los 4 factores seleccionados (columnas) sus diferentes variantes o niveles (filas). En la fila inferior de la tabla se contabiliza el número de niveles o variantes totales de cada factor.

En el ANOVA se denomina tratamiento a cada combinación posible de niveles y/o variantes de cada factor. Así pues, es fácil determinar que existen (para este caso) $3 \times 3 \times 5 \times 10 = 450$ tratamientos o posibles combinaciones de estos factores y sus niveles y/o variantes.

Territorio	Localización	Simetría	Tamaño (n)
Corta distancia	Aleatoria	Ortodrómica	50
Media distancia	Cuadrícula	Menor arco real (P)	100
Larga distancia	Radial	Mayor arco real (G)	150
		Transformada	200
		Asimétrica	...
			500
3	3	5	10

Tabla 4.8: Factores y sus variantes o niveles para el caso del TSP.

El diseño factorial completo (*full factorial*) contempla todas las posibles combinaciones de factores y niveles experimentales; son probados todos los posibles tratamientos en una estructura completa. Estos experimentos permiten el estudio de los efectos que cada factor puede producir sobre las variables respuesta, y las posibles interacciones entre los factores y con las variables respuesta.

En los tratamientos aparece un factor aleatorio, la localización, donde los nodos son ubicados siguiendo algún patrón pero de forma aleatoria. Para estudiar mejor este factor y su relación con otros, es necesario replicar los tratamientos, a esto se le denomina replicación. La replicación implica que cada tratamiento será estudiado en varias ejecuciones independientes.

El número de réplicas requeridas para un experimento se determina en base al grado de precisión deseado, los recursos disponibles (personal, equipo experimental, coste) y la variabilidad del material experimental. Si la variabilidad del material experimental es pequeña se requerirán menos réplicas por tratamiento, y al contrario. En [Bowman y Kastenbaum \(1975\)](#) se puede encontrar un conjunto de tablas que ayudan a determinar el número de réplicas necesarias.

Como se describe en el apartado [4.6.6](#), en este proceso experimental se construirán un amplio número de instancias donde se contemplan múltiples tratamientos y varias réplicas, que serán resueltos con los algoritmos seleccionados, y cuyo amplio conjunto de resultados será analizado cuidadosamente.

4.6.6 Diseño experimental - DOE

Tras las actividades previas de planificación de los experimentos (enunciado e hipótesis, caracterización, selección de los factores y niveles o rangos, identificación de las variables respuesta y diseño factorial) se procede con el diseño experimental. Cabe mencionar que tanto en pasos anteriores como especialmente en el presente, se han seguido las recomendaciones de [Montgomery y Runger \(2006\)](#) y de [Ruiz \(2006\)](#) para el diseño de experimentos (*Design Of Experiments - DOE*).

Este diseño experimental se ha realizado con la intención de proporcionar la máxima cantidad de información sobre el problema y ser lo más eficiente posible en el uso de los recursos experimentales. Cabe mencionar el esfuerzo realizado al documentar con detalle todo el proceso y el diseño

experimental facilitándose así la posible reproducción por parte de otros investigadores.

La siguiente Tabla 4.9 muestra las siglas elegidas para cada una de las variantes y niveles de cada uno de los 4 factores y se corresponde con la Tabla 4.8 anterior. El tamaño será expresado por el número n de nodos, y nótese que se ha añadido el número de réplica r al final.

Territorio	Localización	Simetría	Tamaño	Réplica
C	A	O	n	r
M	C	P		
L	R	G		
		T		
		A		

Tabla 4.9: Siglas para los factores y sus variantes o niveles en el caso del TSP.

Será necesario construir tantas instancias de problemas a resolver como tratamientos por réplicas, en este caso: 450 tratamientos \times 5 réplicas = 2250 instancias. Para identificar cada una de las posibles instancias se utilizarán las siglas anteriores de modo concatenado, tal y como se muestra en los ejemplos de la Tabla 4.10.

Instancia	Características
CAO0501	Territorio de corta distancia. Localización aleatoria. Matriz simétrica de distancias ortodrómicas. Tamaño de 50 nodos. Réplica primera.
LRP2505	Territorio de larga distancia. Localización radial. Matriz simétrica con la distancia pequeña de cada par. Tamaño de 250 nodos. Réplica quinta.

Tabla 4.10: Ejemplos de nomenclatura de instancias.

De este modo, cada instancia será identificada de una manera única e inequívoca con un código significativo que además proporciona información sobre sus características (factores, variantes, niveles, réplica).

Tal y como se describe en el apartado 4.6.7 a cada una de las 2250 posibles instancias se le asignará una secuencia de ejecución aleatoria en el proceso de experimentación. La aleatorización, o asignación al azar de la secuencia de las instancias, validará la suposición de que los errores observados en los tratamientos están distribuidos independientemente.

Con esto acaba el diseño de experimentos. En el siguiente apartado se describe el proceso y los recursos utilizados en la resolución de las instancias.

4.6.7 Resolución

En este apartado se describe el proceso seguido para la generación y resolución de las instancias que forman parte del diseño de experimentos, así como algunas características del software y del hardware utilizado. El proceso está dividido en una serie de etapas que se realizan de forma secuencial y que serán descritas a continuación:

1. Generación de localizaciones
2. Cálculo de matrices
3. Algoritmos y resolución
4. Post-resolución
5. Análisis estadístico

Software

Para llevar a cabo este proceso con precisión, tal y como se describe en el diseño de experimentos, y facilitar la labor de investigación, fue necesario desarrollar un software propio. El software se programó en la plataforma de desarrollo *Ms Visual Studio .net* y es compatible con el sistema operativo *Ms Windows 7* o similares. Este software será el encargado de realizar los

4 | Asimetría: El caso del TSP

cálculos necesarios automáticamente, de manera repetitiva, con precisión y reduciendo el tiempo total de la investigación. El software incorpora todo un conjunto de funciones y algoritmos (cálculos geográficos, consultas al sistema GIS, cálculo y transformación de matrices, entre otros), así como rutinas que comprueban la integridad de los datos y previenen y/o alertan de posibles errores en los datos. El objetivo: generar y calcular del modo más automático posible todos los tratamientos del diseño de experimentos garantizando la integridad de los datos, la fiabilidad de los resultados y siguiendo las recomendaciones del método científico. La siguiente Figura 4.31 muestran el aspecto del software en la pantalla de diseño de experimentos.

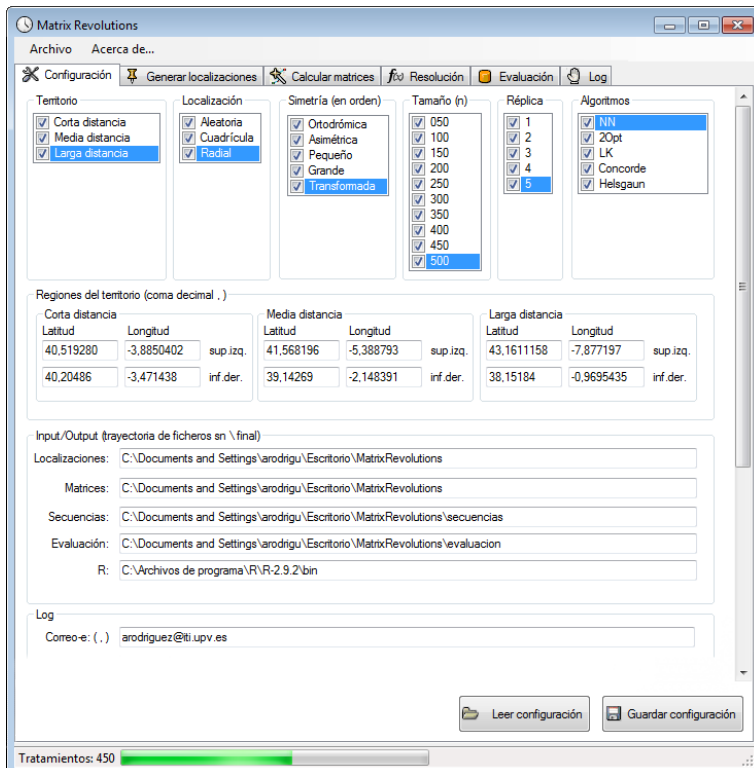


Figura 4.31: Software para la generación y el cálculo de experimentos en el caso del TSP.

Hardware

Este proceso de generación y resolución de instancias es realmente exigente y costoso en términos de tiempos de computación; es por ello, por lo que fue requerida la utilización de una infraestructura de computación en paralelo de altas prestaciones. Esta investigación se ha llevado a cabo gracias a la más moderna y potente infraestructura⁶ informática (redes, comunicaciones y computación) del grupo de investigación y desarrollo SOA (Sistemas de Optimización Aplicada) del ITI (Instituto Tecnológico de Informática). El grupo de sistemas del ITI facilita a sus investigadores un centro de computación de altas prestaciones: *Cluster* de computación de 30 *blade servers*, con 16 GB de memoria RAM cada uno y dos procesadores *Intel XEON E5420* corriendo a 2,5 GHz con 4 *cores* cada uno (8 en total); véase la Figura 4.32.



Figura 4.32: *Cluster* de computación de 30 *blade servers* (ITI).

Dentro de esta infraestructura, para la realización de estos experimentos se configuraron e utilizaron hasta 29 máquinas virtuales corriendo Windows XP SP3 con un núcleo a 2,5 GHz y 2 GB de memoria RAM cada una. Más adelante se irán describiendo algunos detalles más sobre la configuración del sistema y los tiempos de computación requeridos.

⁶Financiada gracias a la Unión Europea - Fondo Europeo de Desarrollo Regional y diversos proyectos de investigación, desarrollo e innovación.

4.6.7.1 Generación de localizaciones

Es la primera etapa de la generación de instancias (o tratamientos) que consiste en generar un fichero de datos de latitud y longitud para un conjunto de n localizaciones atendiendo a los factores (territorio, localización y tamaño) y a sus diferentes variantes o niveles. No hay que olvidar que se generarán tantas réplicas como sean necesarias. El resultado de esta etapa es un conjunto de 450 ficheros (3 territorios $\times 3$ localizaciones $\times 10$ tamaños $\times 5$ réplicas = 450) con un total de unos 3 MB de datos. Esta etapa se realizó en un total de 7,03 segundos de computación (sólo 1 *blade*), con un promedio de 0,0156 segundos de computación por cada fichero de localizaciones. Si se consideran los tiempos de tratamiento de ficheros, el tiempo total requerido asciende a 25,8 segundos.

4.6.7.2 Cálculo de matrices

Es la segunda etapa del proceso de generación de instancias, y consiste en el cálculo y construcción de todas las matrices de distancias. A partir de los 450 ficheros de localizaciones anteriores, y en función de los factores y sus variantes o niveles, se calcularán y construirán las matrices de distancias para las 5 variantes del factor simetría, tal y como se describe en el apartado 4.6.2. Esto es, 450 ficheros de localizaciones $\times 5$ variantes de simetría = 2 250 matrices de instancias con un total de unos 3 GB de datos.

Las matrices simétricas de distancias ortodrómicas son calculadas mediante la fórmula descrita en el apartado 4.4.2, son 450 ficheros y unos 385 MB de datos. Estos cálculos se realizaron en un total de 21,03 segundos de computación (sólo 1 *blade*), con un promedio de 0,0468 segundos de computación por cada matriz ortodrómica. Si se consideran los tiempos necesarios de lectura y escritura de datos, el tiempo total de esta etapa asciende a 1 684 segundos (unos 28 minutos).

Las matrices asimétricas de distancias reales son calculadas con ayuda del GIS comercial (*Google Maps*) consultando los caminos mínimos entre pa-

res de nodos. Como se explicó anteriormente, para ofrecer respuesta a cada consulta, el GIS ejecutará el conocido algoritmo de [Dijkstra \(1959\)](#), o alguna variante más reciente y eficiente tal y como se describe en [Maue, Sanders y Matijevic \(2006\)](#). En este caso se generan 450 ficheros y un volumen de datos equivalente al anterior. Nótese que esta parte del proceso es realmente costosa en términos computacionales, ya que es necesario realizar: 3 territorios \times 3 localizaciones \times 5 réplicas \times $(n \times n - 1)$ arcos = 43 188 750 de consultas al sistema GIS, lo que implica un igual número de ejecuciones de alguno de los algoritmos anteriores. El tiempo de respuesta de dicho algoritmo es previsible que dependa de la separación geográfica del par de localizaciones, es decir de su distancia en el grafo completo del territorio. Como éste y otros aspectos relacionados se han considerado muy interesantes y forman parte de la aportación de esta investigación, más adelante en el apartado 5.1 se desarrolla un análisis detallado de esta parte del proceso de experimentación. Es importante señalar que los resultados de este análisis dependen del GIS utilizado, su ámbito de aplicación y el método de consulta de caminos mínimos utilizado.

A partir de las matrices reales asimétricas, es fácil y relativamente rápido generar las matrices simétricas de menor arco real de cada par y mayor arco real de cada par. Por último se toman las matrices reales asimétrica, y tal y como se describe en el apartado 4.3, se realizará una transformación de la matriz que multiplica por 4 el tamaño de la matriz de distancias resultante.

En la siguiente Tabla 4.11 se muestra un resumen de los recursos generados y utilizados en el proceso de generación de tratamientos. Para cada etapa del proceso se indica el número de ficheros generados, la cantidad de datos generados, el tiempo de computación requerido, el tiempo total requerido incluyendo procesamiento de ficheros y el número de *blades* o máquinas utilizadas en dicha tarea. Nótese que tanto el tiempo de computación como el tiempo total requerido están expresados para 1 *blade* equivalente, y que la columna *Blades* indica el número máximo de máquinas utilizadas en cada etapa. En la tabla, se utiliza “s” para las unidades segundos, y “d” para días.

Etapa	Ficheros	Datos	T. Comp.	T. Total	Blades
Localizaciones	450	3 MB	7,03 s	25,8 s	1
Ortodrómica	450	385 MB	21,03 s	1 684 s	1
Asimétrica	450	332 MB	196,18 d	196,5 d	29
Pequeño	450	332 MB	7,03 s	2 350 s	1
Grande	450	332 MB	7,03 s	2 351 s	1
Transformada	450	1,2 GB	49,2 s	6 521 s	3
Total	2 700	2,56 GB	196,2 d	196,65 d	29

Tabla 4.11: Recursos en la generación de instancias.

Los investigadores interesados en este trabajo podrán encontrar todas las instancias generadas en el apartado “Instancias de problemas” de la web del grupo de investigación SOA (Sistemas de Optimización Aplicada)⁷.

4.6.7.3 Algoritmos y cálculos de resolución

Es la tercera etapa en el proceso de experimentación, y una etapa clave, ya que es la responsable de proporcionar los datos necesarios para las variables respuesta. En estos experimentos, cada instancia o tratamiento será resuelto mediante los algoritmos para la resolución del TSP previamente seleccionados:

1. NN - *nearest neighbor algorithm*
2. *2-Opt heuristic*
3. Heurística de Lin y Kernighan
4. *Concorde TSP solver*
5. LK de Keld Helsgaun - LKH

⁷<http://soa.iti.es>

En el software desarrollado para los experimentos se optó por integrar dichos algoritmos mediante una comunicación con otro software llamado R⁸ versión 2.10.0.

Como se describe en el apartado 8.2.5, no todos los algoritmos seleccionados están diseñados para trabajar con matrices asimétricas. Esto quiere decir que es imposible realizar un experimento ortogonal completo si se consideran los 5 posibles tipos de asimetría (Ortogonal, Menor arco real (P), Mayor arco real (G), Asimétrica y Transformada) y los 5 algoritmos seleccionados (NN, 2-Opt, Lin y Kernighan, Concorde, y LK de Helsgaun). Como es sabido, la heurística Lin y Kernighan (1973) y la heurística Concorde de Applegate et al. (2006) están especialmente concebidas para resolver TSP simétricos. En estos dos casos, será necesario utilizar la función de transformación para convertir una matriz asimétrica en una simétrica, véase el apartado 4.3. La siguiente Tabla 4.12 muestra la relación entre el tipo de matriz (o asimetría) y la heurística o algoritmo factible.

	NN	2-Opt	Lin Kernighan	Concorde	LK de Helsgaun
Ortodrómica	✓	✓	✓	✓	✓
Menor arco (P)	✓	✓	✓	✓	✓
Mayor arco (G)	✓	✓	✓	✓	✓
Asimétrica	✓	✓	-	-	✓
Transformada	✓	✓	✓	✓	✓

Tabla 4.12: Relación entre asimetría y heurísticas.

Esto significa que se podrán realizar como máximo: 2 250 matrices \times 5 algoritmos – 450 matrices asimétricas \times 2 heurísticas no ATSP (Lin Kernighan y Concorde) = 10 350 experiencias computacionales. Esto generará un conjunto de 10 350 ficheros de secuencias con un volumen de datos próximo a los 50 MB.

⁸<http://www.r-project.org/>

El proceso de resolución se realizó utilizando 22 *blades*, los cuales resolvieron cada una de las 10 350 experiencias en un orden aleatorio. El tiempo total de computación requerido fue de 2 001 182,324 segundos, o lo que es lo mismo: 555,88 horas o 23,16 días (para 1 *blade* equivalente). Teniendo en cuenta el tiempo necesario de lectura y escritura de datos el tiempo total empleado se incrementa; e incluyendo diversas comprobaciones y repeticiones del proceso, el tiempo real empleado en esta etapa de la investigación fue de unos 7 días. En la siguiente Tabla 4.13 se muestra un resumen de la etapa de resolución. Nótese que tanto el tiempo de computación como el tiempo total requerido están expresados para 1 *blade* equivalente, y que la columna *Blades* indica el número máximo de máquinas utilizadas. En la tabla, se utiliza “h” para las unidades horas.

Etapa	Ficheros Datos	T. Comp.	T. Total	Blades
Resolución	10 350	10,8 MB	555,88 h	586,26 h 22

Tabla 4.13: Recursos en la resolución de instancias TSP.

Más adelante, en el apartado 6.1 y en el apartado 6.2 se analizan con detalle los tiempos de computación requeridos para cada tipo de experiencia computacional y un análisis factorial completo de los experimentos.

4.6.7.4 Procesado post-resolución

Es la cuarta etapa de este proceso previa al análisis final. Como su nombre indica, simplemente es una etapa en la que se procesan los resultados obtenidos con el principal objetivo de facilitar el análisis estadístico. En esta etapa se recopilan los resultados de los experimentos, y se realizan diversas comprobaciones para garantizar la integridad de los mismos, y la inexistencia de errores en los resultados a los experimentos. Esta etapa da como resultado un único fichero, en formato tabular, y con todos los datos para facilitar el tratamiento estadístico; identificando en cada fila la instancia, los valores

de los factores, y las variables respuesta. Llegados a este punto, ya se puede proceder con el análisis de los resultados.

4.6.8 Análisis de los resultados

En esta etapa se engloba todo un conjunto de detallados análisis sobre los resultados de los experimentos que serán descritos en próximos capítulos. Cada uno de los cuales ha sido diseñado con un determinado objetivo. En su conjunto, todos y cada uno de estos análisis aportan información interesante sobre la relación entre los diferentes factores estudiados y las variables resultado, y subrayan las diferencias que los diferentes niveles y variantes originan tanto en el tiempo de resolución como en la calidad de la solución alcanzada. En dichos estudios se hará uso del análisis de la varianza (*analysis of variance* - ANOVA), para analizar el comportamiento y la relación de interacción entre los factores del experimento y las variables respuesta. En general, en los siguientes análisis se utilizará el método de Tukey (HSD - *Honestly Significant Difference*) frente al método de la menor diferencia significativa de Fisher (LSD - *Least Significant Difference*). Si bien para casos de 4 a 6 medias (niveles o variantes) se puede usar LSD, en este estudio se considera que HSD es mejor por su visión más restrictiva. Dicho de otro modo, si con HSD los intervalos son diferentes, seguro que son realmente diferentes. Los análisis ANOVA se realizaron con el software Statgraphics Centurion XVI⁹.

4.7 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado y justificado desde el punto de vista científico y práctico el presente trabajo de investigación: el estudio del impacto de la asimetría y otros factores en el contexto de los problemas TSP.

1. Se prestó especial atención a la descripción detallada de 5 algoritmos seleccionados para la resolución del TSP (NN, 2-Opt, Lin y Kernighan,

⁹<http://www.statgraphics.com/>

Concorde, y LK de Helsgaun), que fueron escogidos por su reconocimiento científico y posición en otros *benchmarks*, así como por la bondad de las soluciones obtenidas en instancias científicamente reconocidas y de gran tamaño. Se ha procurado recoger un pequeño espectro desde las técnicas más simples y clásicas hasta las más actuales y avanzadas.

2. En este capítulo se describe la relación entre el concepto de asimetría en las matrices de distancias y las redes de transporte por carretera propias del mundo real. En la actualidad, los sistemas de información geográfica (GIS) son medios o herramientas imprescindibles.
3. El teorema de la desigualdad triangular es una afirmación fuerte que incluso se cumple con matrices de distancias reales c_{ij} calculadas con ayuda de un GIS y a partir de los itinerarios (camino más cortos) entre pares de nodos. Esta conclusión es igualmente válida tanto si la matriz c_{ij} está valorada en distancias (itinerarios más cortos), como si está valorada en tiempos de tránsito (itinerarios más rápidos), o en otras unidades como menor coste, menor consumo de combustible, etc.
4. Así mismo, se han propuesto diferentes indicadores (α , δ , *Peso*) para la medición del grado de asimetría en las matrices de distancias.
5. En este capítulo se ha realizado y descrito el diseño factorial y el diseño de experimentos (DOE). Se ha propuesto una nomenclatura para la codificación de las instancias, y se ha presentado con detalle el proceso de construcción de las instancias y de resolución llevado a cabo.
6. Una de las aportaciones más importantes de este capítulo ha sido, que gracias a este trabajo, se proporciona a la comunidad científica un conjunto de instancias útil y de posible referencia para futuros trabajos científicos que sería complementario al conocido conjunto de datos TSPLIB95.

5 | Matrices asimétricas

En este capítulo se pretende analizar desde diferentes puntos de vista algunas características de las instancias generadas y utilizadas en los experimentos. El objetivo de este capítulo es doble:

1. Por un lado, valorar el alto coste en tiempo computacional de la obtención de datos de distancias reales. De este modo, se pretende cuantificar la barrera de entrada computacional con la que se encuentran todos aquellos investigadores y empresas que aspiran a resolver problemas en el mundo real asimétrico. Se comparará dicho esfuerzo computacional de la obtención de datos de distancias reales respecto al de los datos de distancias ortodrómicas. En este punto, se analizará si dicho tiempo o coste computacional está condicionado por diversos factores: el territorio, la localización y el tamaño de la matriz. Con estos análisis se pretende aportar una referencia actual sobre dicho coste, que sirva en el futuro para valorar y mejorar las técnicas de cálculo de las matrices asimétricas reales.
2. Por otro lado, se cuantificará el grado de asimetría de las matrices de distancias y se analizará si existe una relación entre dicho grado de asimetría y los factores territorio y localización. Para ello se utilizan los indicadores de grado de asimetría propuestos en el capítulo anterior, y con ello se pretende empezar a dar luz sobre una de las hipótesis del

apartado 4.5: la localización de los nodos en el mundo real (el ámbito geográfico del problema) representa diferente grado de asimetría.

5.1 El coste de la asimetría

En esta sección se realiza una valoración y un análisis sobre el coste computacional de obtener datos reales provenientes de un sistema GIS. El objetivo de este estudio es valorar el coste en tiempo de computación de la obtención de datos de distancias reales respecto a la de datos de distancias ortodrómicas. Por otro lado, se analizará cómo afectan al coste computacional o tiempo requerido diversos factores como el territorio (T), la localización (L), y el tamaño de la matriz (n); y en qué medida afectan estos factores al tiempo.

En el apartado 4.6.7 se realizó una descripción detallada del proceso de experimentación. Es importante recordar que el reto computacional consiste en obtener: 3 territorios \times 3 localizaciones \times 5 réplicas \times ($n \times n - 1$) arcos = 43 188 750 distancias reales mediante la realización de un igual número de consultas al sistema GIS. En cada una de estas consultas el sistema GIS ejecuta el algoritmo para el cálculo del camino mínimo entre dos localizaciones. Para valorar el orden de magnitud del problema imagine que debe calcular una matriz de distancias reales equivalente de 6 572 filas \times 6 572 columnas, que si fuera impresa ocuparía una superficie de $2\,699\text{m}^2$ (medio campo de fútbol americano, o el área de un círculo de radio igual a unos 30 metros), tal y como se ilustra en la Figura 5.1. Vale la pena recordar que esta superficie es sólo para las matrices asimétricas que suponen la octava parte del total de las matrices de distancias.

Durante la etapa de cálculo de las matrices asimétricas se fueron registrando los tiempos empleados en la obtención de cada una de las instancias. En los análisis que siguen se van a emplear dos indicadores:

1. Tiempo total (h): es el coste computacional en horas de la obtención de una matriz asimétrica. Este tiempo se ha calculado sin tener presente los tiempos de lectura de datos de localizaciones y escritura de datos

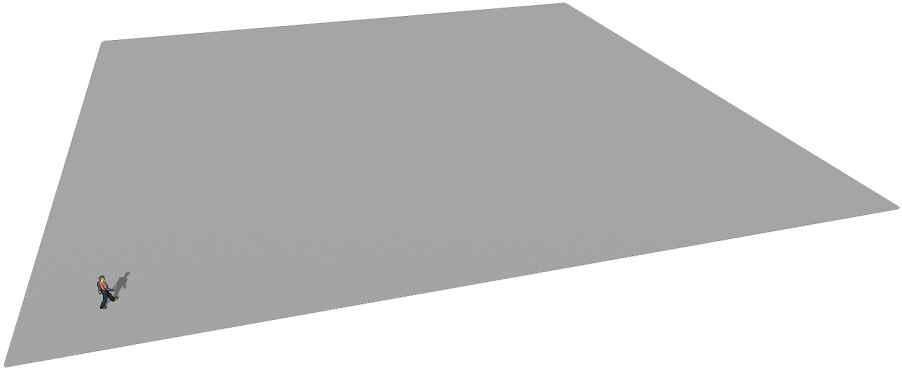


Figura 5.1: Superficie equivalente de las matrices asimétricas.

de distancias. Si bien, incluyen otros tiempos de tráfico de datos por la red.

2. Tiempo promedio (p): es el tiempo total dividido entre el número de arcos (o consultas) al sistema GIS. Por tanto, es el coste computacional promedio en unidades de tiempo de la obtención de un arco de la matriz asimétrica: $p = h / (n \cdot (n - 1))$.

Tal y como se comentaba anteriormente, en los siguiente análisis se pretende encontrar una relación entre el coste computacional (tiempo) y algunos factores clave. Por ejemplo: ¿existe una relación entre el tiempo total de obtención de una matriz y el número de arcos n ?, ¿el tiempo promedio depende de factores como el territorio o la localización?. Nótese que aunque el tiempo promedio incluye pequeños tiempos de tráfico de datos en la red, se supondrá que la mayor parte del tiempo de computación corresponde con la ejecución del algoritmo para el cálculo del camino mínimo entre un par de localizaciones.

5.1.1 Tiempo total de cálculo de las matrices asimétricas

Tal y como se describe en el apartado 4.6.7, el proceso de cálculo de matrices asimétricas es un proceso muy costoso en términos de tiempos de computación. La Tabla 4.11 presentaba un resumen de los recursos utilizados. Sin duda, la fase de cálculo de matrices asimétricas es la fase que más tiempo de computación consume. La primera conclusión que se puede obtener de este estudio, es el altísimo coste computacional que supone obtener datos reales (matrices asimétricas) frente al ínfimo coste computacional del cálculo de las matrices ortodrómicas. La relación observada ha sido de 806 006 a 1, entre el cálculo de las matrices asimétricas y el de las ortodrómicas. La Tabla 5.1 contiene el conjunto de estadísticos que describen el comportamiento para el tiempo total (h en horas) de obtención de las matrices de distancias asimétricas.

	Tiempo total h
Recuento	450
Promedio	10,46
Desviación estándar	9,19
Coef. de variación	87,91 %
Mínimo	0,267
Máximo	46,206

Tabla 5.1: Análisis de tiempo total para la obtención de las matrices asimétricas.

La Figura 5.2 ilustra en forma de histograma la distribución de frecuencias relativas (%) de los tiempos totales de obtención de las matrices asimétricas.

Al analizar la tabla y la figura anterior se observa una gran variación de los datos, como se verá más adelante esto es debido al tamaño de la matriz, esto es, el valor de n oscila entre 50 y 500 localizaciones. Por ello, los tiempos totales de computación oscilan entre 0,27 horas como mínimo y 46,20 horas de máximo.

A continuación, se realizará un primer análisis que pretende encontrar alguna relación entre el tiempo total de computación y los factores tamaño

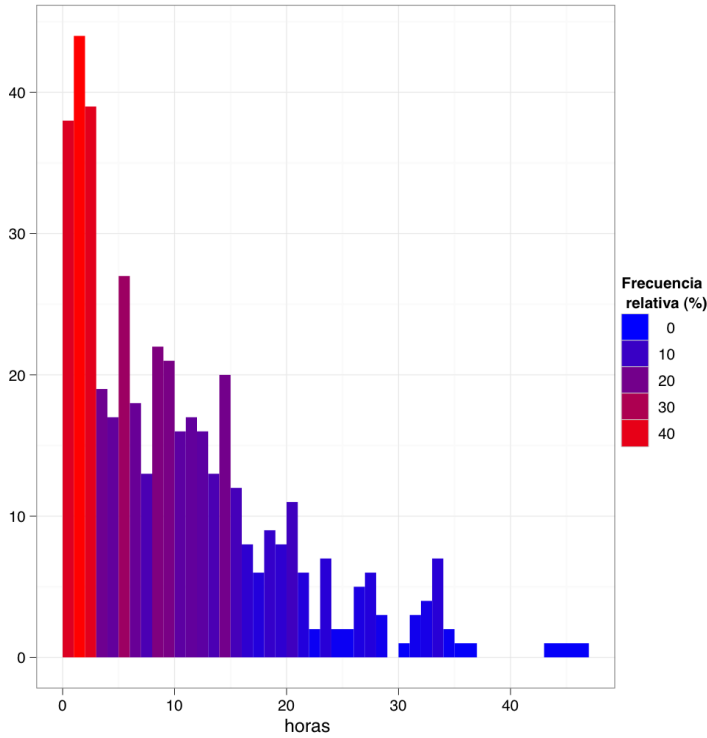


Figura 5.2: Histograma de tiempos totales de obtención de matrices asimétricas.

de la matriz n , territorio (T) y localización (L). Más adelante, en el apartado 5.2 se explica con más detalle, el significado u orden de magnitud de corta, media y larga distancia en estos experimentos. Así mismo, el factor localización se refiere a la posición que toman los nodos de la instancia dentro del territorio anteriormente definido. Dentro de este factor se identificaron tres niveles: aleatoria (A), radial (R) y cuadrícula (C).

Para comprobar estadísticamente cualquier posible relación entre el tiempo total de computación h y los factores antes mencionados, a continuación se muestran en la Tabla 5.2 los resultados de un análisis ANOVA para h .

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	790,96	2	395,48	28,98	0,0000
B:L	1 300,35	2	650,17	47,65	0,0000
C:n	26 535,0	9	2 948,33	216,07	0,0000
Interacciones					
AB	369,71	4	92,43	6,77	0,0000
AC	2 724,89	18	151,38	11,09	0,0000
BC	863,96	18	47,99	3,52	0,0000
Residuos	5 403,61	396	13,65		
Total (corregido)	37 988,5	449			

Tabla 5.2: Análisis de varianza para h - Suma de Cuadrados Tipo III.

Al analizar la tabla de resultados anterior, se puede ver que 6 p -valor de la prueba-F son menores que 0,05, así que existe una diferencia estadísticamente significativa entre los tres factores y el valor de tiempo total de computación h , con un nivel del 95 % de confianza. A continuación se analizan los factores por orden decreciente de Ratio-F.

5.1.2 Tiempo total de cálculo y tamaño de la matriz asimétrica

En primer lugar se encuentra una relación significativa entre el tiempo total h y el tamaño de la matriz (n). La Figura 5.3 muestra las medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la variable respuesta tiempo total h y n .

En la Figura 5.4 se ha representado la relación entre el tiempo total y el tamaño de la matriz. También se representa la función de regresión que responde a $\ln h = -6,45461 + 1,52892 \cdot \ln n$, con un valor de $R^2 = 0,83$. Como se puede observar el tiempo total de computación depende del tamaño del la matriz n .

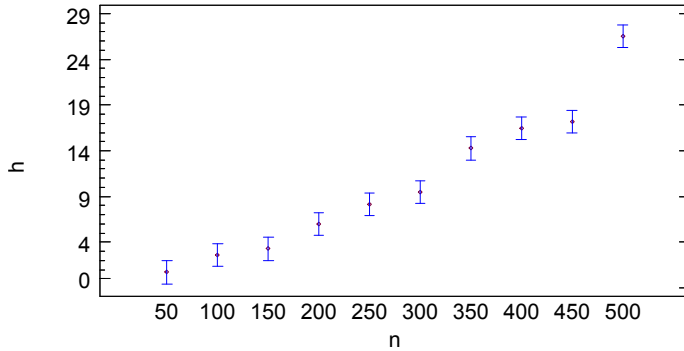


Figura 5.3: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre tiempo total h y n .

5.1.3 Tiempo total de cálculo y localización

Se encuentra un efecto del factor localización (L) con la variable respuesta tiempo total h . La Figura 5.5 muestra las medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para este efecto.

Analizando más en detalle, se observa que además responde al grado de ordenación de las localizaciones. Mientras que para las localizaciones aleatorias los tiempos de computación son altos, para las localizaciones ordenadas en cuadrícula son menores; por último los menores tiempos son para las localizaciones radiales. Es posible que esto sea debido a que el grafo completo está reflejando la infraestructura radial de carreteras de la Península Ibérica centradas en la capital Madrid; y que el algoritmo tal vez sea más rápido cuando existen mejores conexiones entre el par de localizaciones en forma de carreteras de mayor orden. Esto se puede observar en la Figura 5.6 que muestra las medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el factor localización y el tamaño de la matriz con los tiempos totales de computación de las matrices asimétricas.

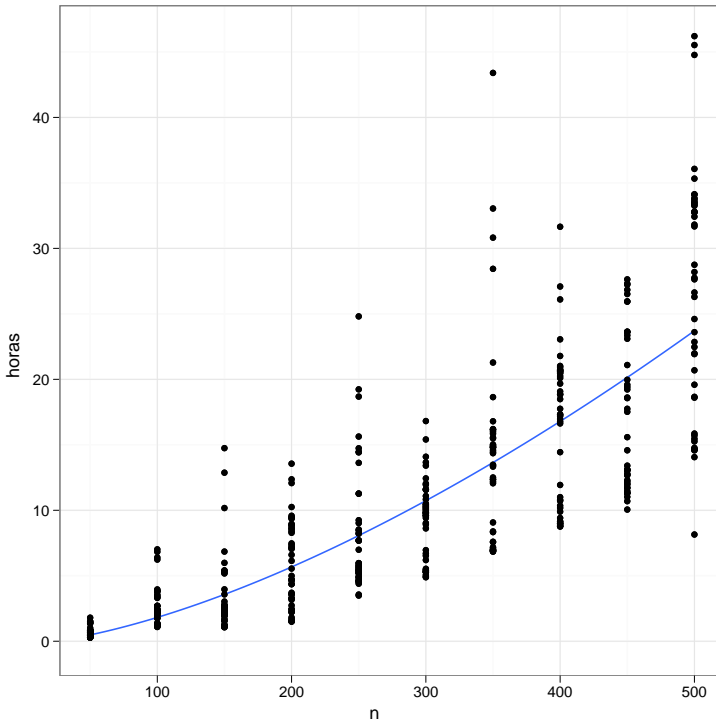


Figura 5.4: Gráfico de dispersión: relación entre tiempo total h y n .

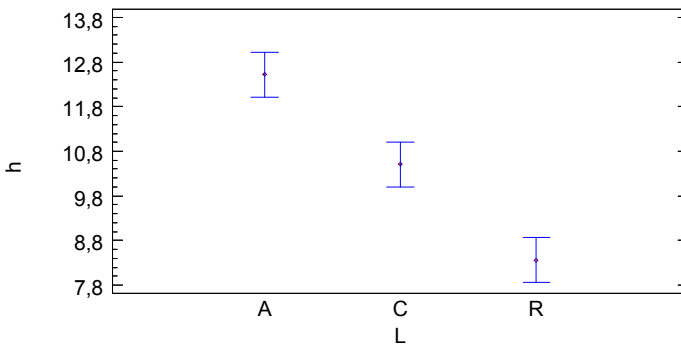


Figura 5.5: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre tiempo total h y localización.

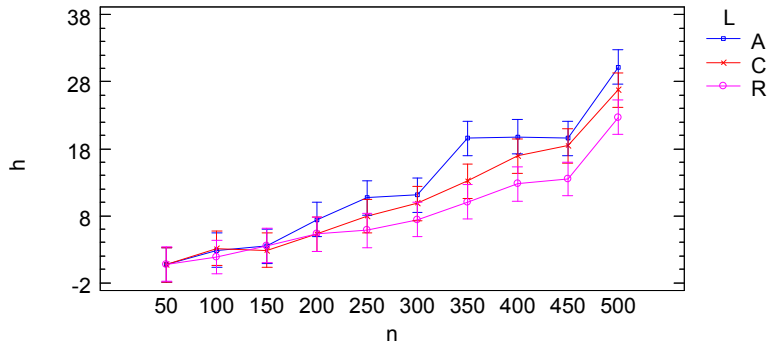


Figura 5.6: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción de la localización y n en el tiempo total h .

5.1.4 Tiempo total de cálculo y territorio

Aparece un efecto del factor territorio (T) en la variable respuesta tiempo total h , tal y como muestra la Figura 5.7. Sorprende la relación de los diferentes niveles del territorio con el tiempo total de computación, mientras que sí que hay una relación directa entre corta distancia y tiempos pequeños, véase como larga y media distancia parecen tener una relación inversa, aunque con tiempos mayores que en el caso de corta distancia. Más adelante, la Figura 5.9 puede que explique esta pequeña anomalía.

Es curioso observar la relación entre el territorio: corta (C), media (M) y larga (L) distancia y el tiempo total de computación en la Figura 5.8 para la interacción entre el factor territorio y el tamaño de la matriz con los tiempos totales de computación de las matrices asimétricas. Los tiempos de computación para los niveles de media y larga distancia crecen de manera exponencial respecto del tamaño de la matriz, mientras que aparentemente, para corta distancia aparece una relación más lineal respecto del tamaño de la matriz.

Por último, la Figura 5.9 muestra la relación de los factores territorio, localización y tamaño de la matriz respecto del tiempo total de computación. En dicha gráfica de dispersión, se ha incluido la línea de suavizado y una franja

que representa su error estándar. Véase cómo el territorio corta distancia (C) muestra una relación de n y h más lineal que en resto de casos, con relaciones más exponenciales. También es curiosa la anomalía del caso (T=C, y L=A) para valores grandes de n y que puede explicar lo anteriormente observado en la Figura 5.8.

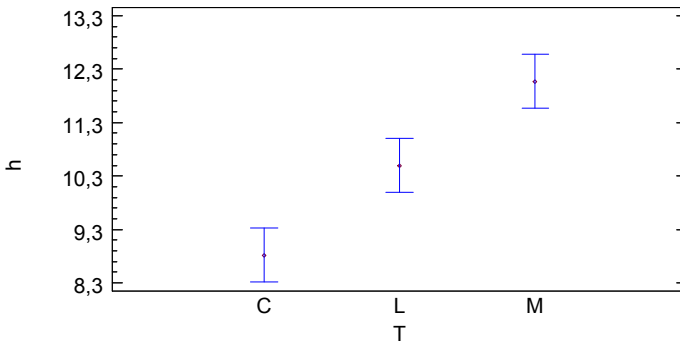


Figura 5.7: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre tiempo total h y el territorio.

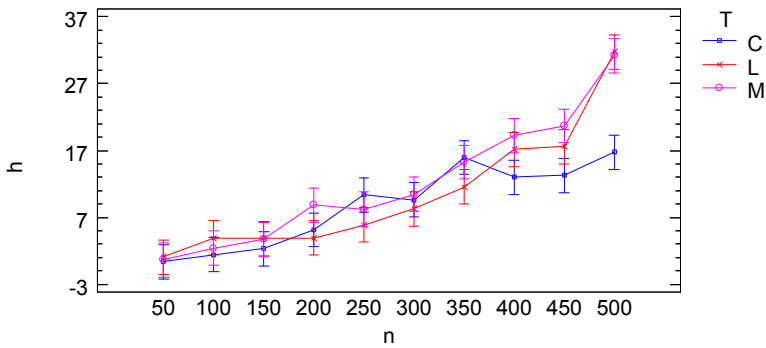


Figura 5.8: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción del territorio y n en el tiempo total h .

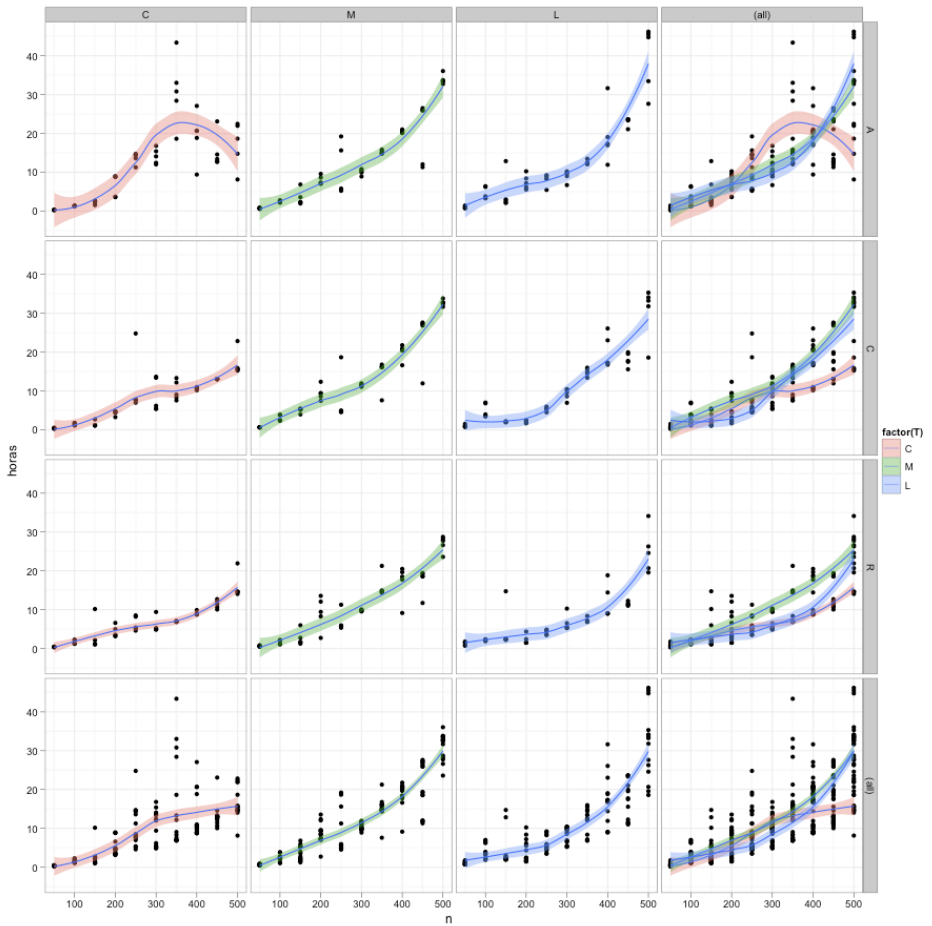


Figura 5.9: Relación entre el factor territorio, la localización, n y el tiempo total de cálculo de las matrices.

5.1.5 Tiempo promedio de cálculo de las matrices asimétricas

En este apartado se realizará un análisis similar al anterior pero con el indicador de tiempo promedio p . En primer lugar se calculan los promedios de tiempo a partir de todo el registro de tiempos totales de computación: $p = h/(n \cdot (n - 1))$ que en las siguientes tablas y figuras estará expresado en segundos/arco. La Tabla 5.3 refleja el conjunto de estadísticas que describen el comportamiento para el tiempo promedio (p en segundos/arcos) de obtención de arcos asimétricos. El tiempo promedio de obtención de un arco asimétrico es de 0,54 segundos. Éste se encuentra sujeto a una gran variación, y sus valores oscilan entre 0,12 segundos/arco como mínimo a 2,64 segundos/arco como máximo. Así pues, se observa nuevamente que el cálculo de un camino mínimo entre un par de localizaciones dista mucho de ser el resultado de un esfuerzo computacional constante, y esto sugiere que deben de existir algunos factores que influyen en sus resultados.

	Tiempo promedio p
Recuento	450
Promedio	0,538
Desviación estándar	0,405
Coef. de variación	75,20 %
Mínimo	0,117
Máximo	2,642

Tabla 5.3: Análisis de tiempo total para la obtención de arcos asimétricos.

La Figura 5.10 ilustra en forma de histograma la distribución de frecuencias de los tiempos promedio de obtención de los arcos asimétricos.

Seguidamente, se realizará un análisis para intentar encontrar alguna relación entre el tiempo promedio por arco y los factores: tamaño de la matriz n , territorio (T) y localización (L). Estadísticamente se comprueba cualquier posible relación entre el tiempo promedio p y los factores antes mencionados en los resultados de un análisis ANOVA de la Tabla 5.4 para p .

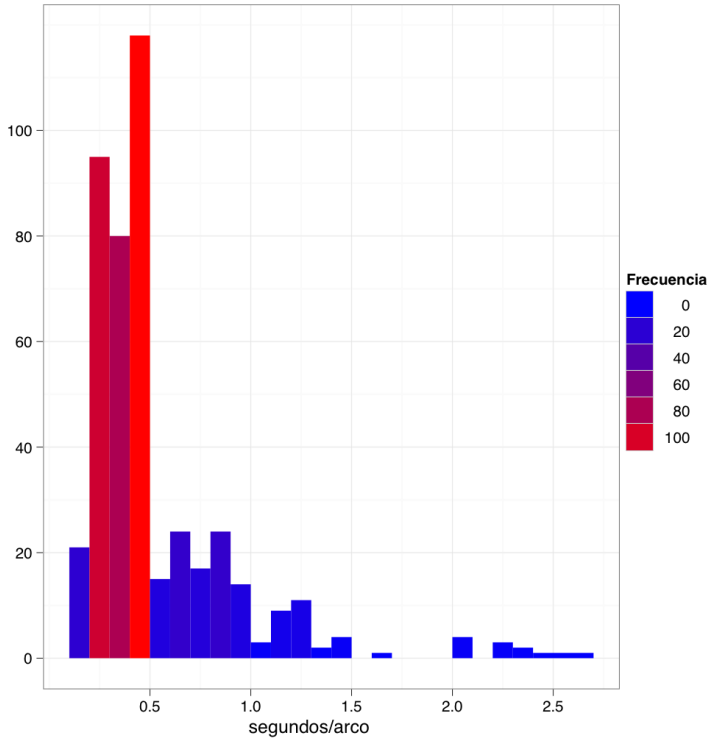


Figura 5.10: Histograma de tiempos promedio de obtención de arcos asimétricos.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	3,58	2	1,79	27,93	0,0000
B:L	1,69	2	0,84	13,17	0,0000
C:m	25,36	9	2,82	43,95	0,0000
Interacciones					
AB	0,52	4	0,13	2,05	0,0870
AC	14,51	18	0,81	12,57	0,0000
BC	2,52	18	0,14	2,19	0,0035
Residuos	25,38	396	0,06		
Total (corregido)	73,56	449			

Tabla 5.4: Análisis de varianza para p - Suma de Cuadrados Tipo III.

Al analizar la tabla de resultados anterior, se puede ver que 5 p -valor de la prueba-F son menores que 0,05, así que existe una diferencia estadísticamente significativa entre los tres factores y el valor de tiempo promedio de computación p , con un nivel del 95 % de confianza. A continuación se analizan los efectos y relaciones observados en orden decreciente de Ratio-F.

5.1.6 Tiempo promedio de cálculo y tamaño de la matriz asimétrica

Al igual que con los tiempos totales de computación, la primera relación significativa que se encuentra es entre el tiempo promedio p y el tamaño de la matriz (n), representado en la Figura 5.11.

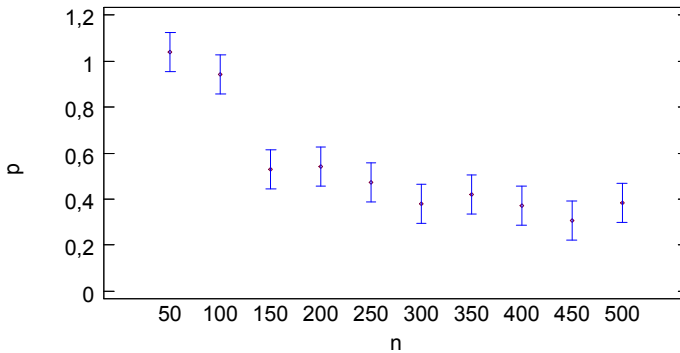


Figura 5.11: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre tiempo promedio p y n .

En el gráfico de dispersión de la Figura 5.12 se ha representado la relación entre el tiempo promedio y el tamaño de la matriz. Se representa también la función de regresión que responde a $p = (1,72475 - 0,18953 \cdot \ln n)^2$, con un valor de $R^2 = 0,332$. Como se puede observar el tiempo promedio de computación decrece en función del tamaño de la matriz n hasta alcanzar un límite inferior que se sitúa en torno a los 0,3 segundos/arco.

Parece lógico pensar que un mayor número de puntos, esto es mayor densidad de puntos, implica una menor distancia promedio entre ellos, lo que se reflejaría en un menor tiempo de cálculo de su camino mínimo. Sin embargo,

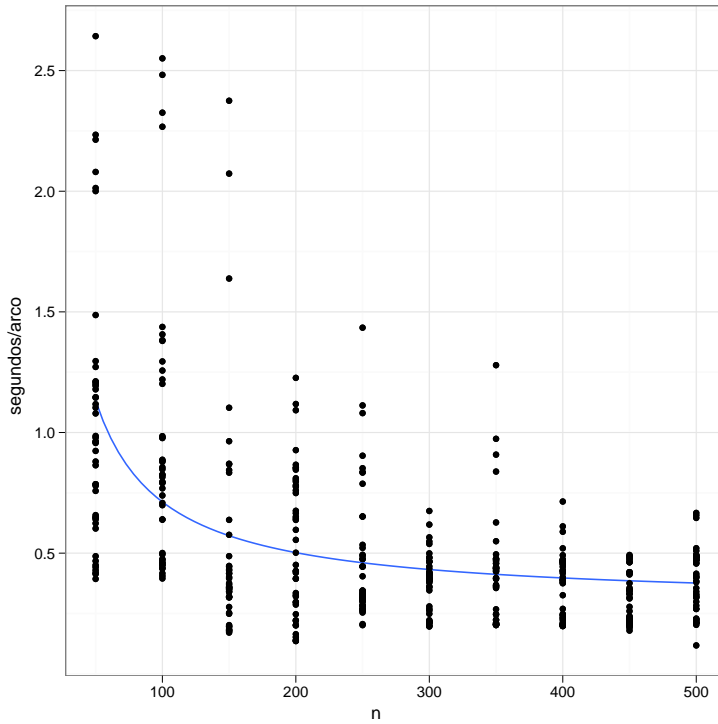


Figura 5.12: Gráfico de dispersión: relación entre tiempo promedio p y n .

parece que existe un límite inferior de tiempo de cálculo que depende de la infraestructura e implementación del algoritmo empleada por el GIS.

5.1.7 Tiempo promedio de cálculo y territorio

La segunda relación significativa aparece entre el tiempo promedio p y el factor territorio (T), en la Figura 5.13. En este caso no se observan grandes diferencias entre el territorio de media y larga distancia, pero sí en comparación a la corta distancia.

Resulta muy interesante observar la interacción del factor territorio y el tamaño de la matriz n con el tiempo de computación promedio p , tal y como se ilustra en la Figura 5.14. Los tiempos de computación promedio para

5 | Matrices asimétricas

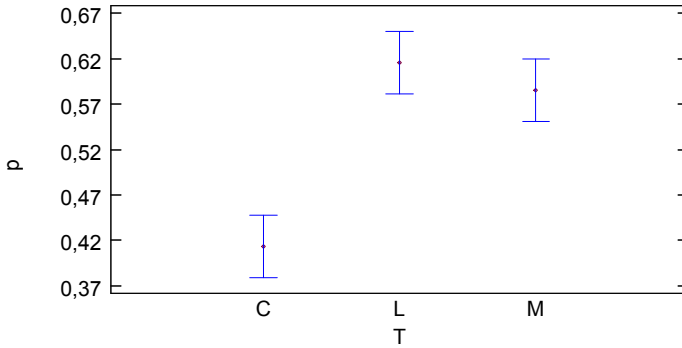


Figura 5.13: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre tiempo promedio p y el territorio.

valores pequeños de n son significativamente diferentes para cada uno de los tres niveles de territorio. En cambio, para mayores tamaños de matriz las tres curvas convergen y es más difícil observar sus diferencias. La explicación a este comportamiento, sigue siendo la hipótesis de la densidad de puntos.

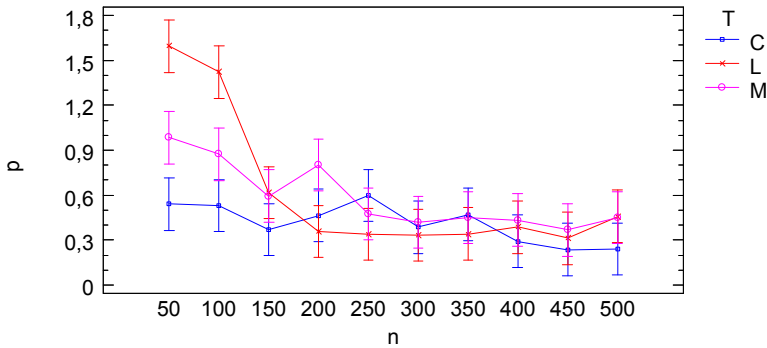


Figura 5.14: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción del territorio y n en el tiempo promedio p .

5.1.8 Tiempo promedio de cálculo y localización

A continuación, en la Figura 5.15 se muestra la tercera relación significativa entre el tiempo promedio p y el factor localización (L). Se confirma lo observado en la Figura 5.5 pero a nivel de tiempos promedio. La relación significativa entre el factor localización y el tiempo promedio de computación parece que responde al grado de ordenación de las localizaciones. En las localizaciones aleatorias los tiempos de computación son altos, y en las localizaciones ordenadas en cuadrícula son menores; los menores tiempos de computación son para las localizaciones radiales. Esto confirma la posible explicación anterior sobre la estructura radial del grafo completo de la red de carreteras de la Península Ibérica .

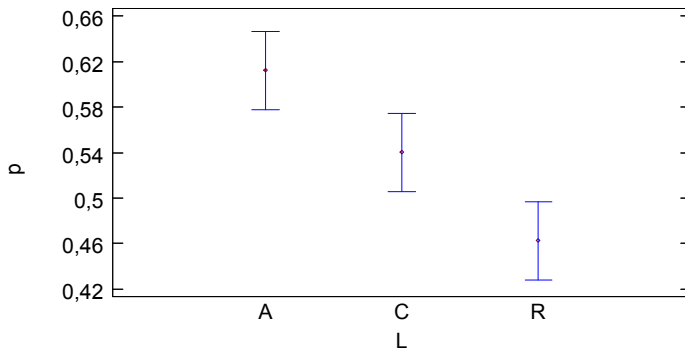


Figura 5.15: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre tiempo promedio p y localización.

La Figura 5.16 muestra la interacción entre el factor localización y el tamaño de la matriz con los tiempos promedio de computación de los arcos asimétricos; donde se observa para casi todos los valores de n lo anteriormente expuesto: la localización radial favorece los tiempos de computación promedio.

Por último, la Figura 5.17 muestra la relación de los factores territorio, localización y tamaño de la matriz respecto del tiempo promedio de computación por arco. Hay que señalar que el territorio de corta distancia (T=C)

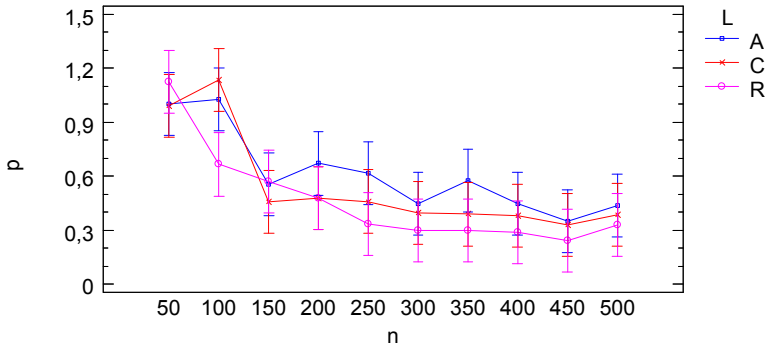


Figura 5.16: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción de la localización y n en el tiempo promedio p .

muestra una relación de n y p más lineal que para $T=M$ y $T=L$ cuya relación se transforma en exponencial. Se observa cierta anomalía para los valores centrales de n en el caso ($T=C$, y $L=A$), y llama la atención la rápida convergencia de $T=L$ hacia el límite inferior de p .

Se ha podido demostrar que existe una relación entre el coste computacional de la asimetría y el tamaño de la matriz a calcular. Pero más interesante y relevante, ha sido el hecho de demostrar la relación entre el tiempo de computación y los factores territorio y localización. El territorio en combinación con el número de localizaciones n condiciona la densidad de puntos, sus distancias promedio y así mismo el tiempo de computación promedio para el cálculo del camino mínimo entre cada par de nodos. Y al parecer, en estos experimentos, la localización también influye en los cálculos de las matrices. Se ha observado como una localización radial, que es acorde con la red de carreteras españolas, parece favorecer los tiempos de cálculo frente a otros tipos de localización como la aleatoria y la cuadrícula.

Una característica señalada de este estudio, es el altísimo coste computacional de la obtención de datos reales (matrices asimétricas) frente al ínfimo coste computacional de cálculo para las matrices de distancias ortodrómicas. Con un orden de magnitud del tiempo de computación de 800 000 de las

matrices asimétricas frente a 1 de las matrices ortodrómicas. No es extraño pensar que este hecho pueda suponer una gran barrera de entrada para los investigadores en el terreno de la optimización de problemas reales, es decir asimétricos. Otros investigadores interesados, ya disponen de una biblioteca de 2 250 instancias de referencia, de las cuales 450 son asimétricas.

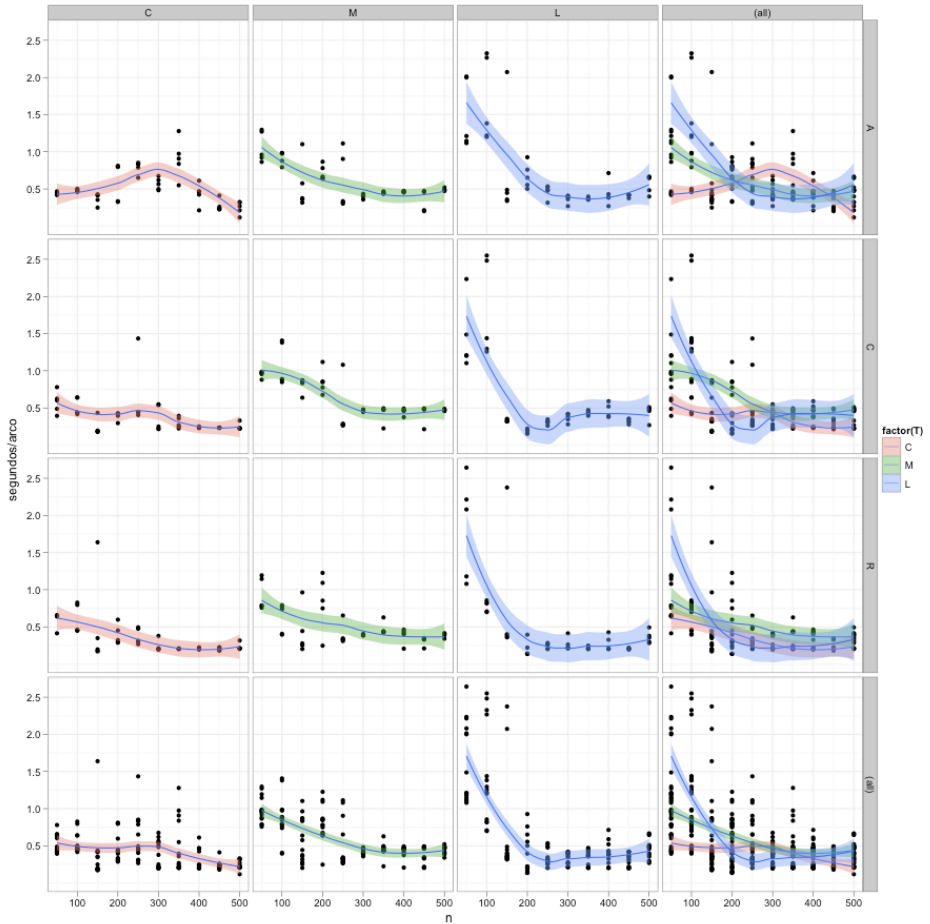


Figura 5.17: Relación entre el factor territorio, la localización, n y el tiempo promedio de cálculo de los arcos.

5.2 La asimetría en las matrices de distancias

En esta parte del análisis se van a exponer dos estudios sobre las características de las matrices de distancias c_{ij} utilizadas en los experimentos y los factores territorio y localización. Se pretende encontrar algún tipo de relación entre el grado de asimetría y algunos factores. Para ello se utilizan los indicadores de grado de asimetría descritos anteriormente en la expresión apartado 4.4.6.

1. **Peso:** el peso total de la matriz, o suma de todas las distancias c_{ij} de la matriz, tal y como se expresa en (4.20).
2. **Alfa (α):** es un indicador del grado de asimetría, y se expresa como el porcentaje de pares asimétricos sobre el total de pares de arcos, calculado según la expresión (4.17).
3. **Delta (δ):** mide el grado de asimetría en términos de diferencias de distancias para cada par y no en términos de igualdad. Tal y como se define en la expresión (4.19).
4. **Peso promedio (\overline{Peso}):** es el promedio del peso total de la matriz, esto es, la relación entre peso total de la matriz y el número total de arcos.

La Tabla 5.5 resume el conjunto de estadísticas que describen los indicadores anteriormente señalados para el total de las matrices de distancias.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Recuento	11 250	11 250	11 250	11 250
Promedio	2,026E7	19,76	0,71	211,38
Desviación estándar	2,908E7	39,53	2,29	188,45
Coef. de variación	143,53 %	200,02 %	321,93 %	89,15 %
Mínimo	32 982,9	0,0	0,0	12,42
Máximo	1,98E8	100,0	18,15	824,62

Tabla 5.5: Análisis multivariado indicadores de asimetría de las matrices.

Lo más interesante de esta tabla es señalar que el valor δ máximo puede alcanzar un 18,15 %, esto quiere decir que existen diferencias notables entre el camino de ida y el de vuelta de un par de arcos, hasta una quinta parte de su distancia. El resto de indicadores son bastante globales y no aportan información detallada. Por ejemplo: ¿qué diferencias del grado de asimetría existen entre las matrices de corta, media y larga distancia? ¿cómo influye la localización (aleatoria, radial, cuadrícula) en el grado de asimetría de las matrices de distancias? Para responder a estas cuestiones, a continuación se van analizar por separado diferentes factores y diferentes tipos de matrices (simétricas y asimétricas), así se podrán observar mejor sus diferencias.

5.2.1 Asimetría y territorio

En este primer análisis se pretende encontrar una relación entre el grado de asimetría y el territorio. La siguiente Tabla 5.6 muestra los datos estadísticos para el conjunto de matrices asimétricas (M=A) y de cortas distancias (T=C). Nótese que el valor de α promedio es 99,05 % muy próximo al 100 %, que sería un conjunto completamente asimétrico. Quiere decir que aunque son matrices de distancias reales existen algunos arcos simétricos (menos del 1 % en promedio). Otro dato interesante es el indicador δ que en promedio señala un 8,80 % de diferencias en los pares de distancias, llegando a alcanzar un 18,15 % de máxima diferencia. Por otro lado es importante señalar qué se entiende por corta distancia en estos experimentos: el peso promedio indica una distancia media de 23,66 kilómetros entre cada par de localizaciones.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Recuento	750	750	750	750
Promedio	2,28E6	99,05	8,80	23,66
Desviación estándar	1,97E6	0,98	2,53	3,50
Coef. de variación	86,17 %	0,99 %	28,79 %	14,80 %
Mínimo	44 956,9	91,27	4,42	17,32
Máximo	7,37E6	100,0	18,15	29,81

Tabla 5.6: Análisis de asimetría de las matrices (T=C,M=A).

5 | Matrices asimétricas

Lógicamente, los indicadores α y δ para el resto de matrices (T=C) simétricas no son interesantes, ya que al ser completamente simétricas, dan valores completamente iguales a 0 % y 0 % respectivamente, sin variación alguna. Sin embargo, lo que sí es interesante es analizar el peso promedio de las matrices ortodrómicas (M=O) de corta distancia (T=C), tal y como se muestra en la Tabla 5.7. Nótese que el peso promedio, ha descendido a 16,67 kilómetros por arco, frente a los 23,66 kilómetros del caso anterior (un 30 % menos). De igual modo descienden los intervalos mínimo y máximo del peso promedio, tal y como se adelantaba en el apartado 4.4.6.

	Peso	<i>Peso</i>
Recuento	750	750
Promedio	1,59E6	16,67
Desviación estándar	1,38E6	2,23
Coef. de variación	86,22 %	13,37 %
Mínimo	32 982,9	12,42
Máximo	4,63E6	19,35

Tabla 5.7: Análisis de asimetría de las matrices (T=C, M=O).

Veamos en la Tabla 5.8 el caso de media distancia (T=M) para matrices asimétricas (M=A). Si se compara con el caso anterior (T=C, M=A) se observa claramente cómo el peso promedio ha aumentado notablemente, pasando de los 23,66 kilómetros a 172,52 kilómetros como media. Éste es el significado de media distancia en estos experimentos. Pero más interesante aún, es la relación de los indicadores α y δ , mientras que α tiene un valor de 98,29 % y prácticamente no cambia respecto al caso anterior (las matrices son casi completamente asimétricas), al analizar δ se observa claramente que su valor pasa de 8,80 a 1,07.

Esto quiere decir que en las distancias medias, las diferencias entre los arcos de ida y los de vuelta en un par de localizaciones son mucho menores (un 87,82 %) que en el caso de las distancias cortas. Dicho de otro modo, en territorios de cortas distancias la asimetría de los arcos es mucho mayor; lo

cual es relevante y muy interesante para el caso de logística en las ciudades (*city logistics*).

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Recuento	750	750	750	750
Promedio	1,65E7	98,29	1,07	172,52
Desviación estándar	1,42E7	0,95	0,58	23,59
Coef. de variación	85,90 %	0,97 %	54,56 %	13,67 %
Mínimo	291 379	94,41	0,45	118,93
Máximo	4,71E7	99,97	4,86	201,35

Tabla 5.8: Análisis de asimetría de las matrices (T=M, M=A).

La Tabla 5.9 muestra los valores de peso y peso promedio para el caso de las matrices ortodrómicas de media distancia (T=M, M=O).

	Peso	\overline{Peso}
Recuento	750	750
Promedio	1,24E7	129,59
Desviación estándar	1,07E7	18,10
Coef. de variación	85,97 %	13,97 %
Mínimo	220 681	90,07
Máximo	3,54E7	148,74

Tabla 5.9: Análisis de asimetría de las matrices (T=M, M=O).

Nótese cómo el peso promedio ortodrómico es de 129,59 kilómetros respecto de los 172,52 kilómetros de la matriz real asimétrica. Este descenso se observa también en los rangos del peso promedio.

Por último, en la Tabla 5.20 se muestran las estadísticas para el caso de largas distancias y matrices asimétricas (T=L, M=A). Si se compara con el caso anterior (T=M, M=A) se observa nuevamente cómo el peso promedio ha aumentado, pasando de los 172,52 kilómetros a 354,33 kilómetros. Éste es el significado de larga distancia en estos experimentos. De nuevo, y confirmando lo observado anteriormente, α tiene un valor de 99,07 y prácticamente no cambia respecto a los casos anteriores (las matrices son casi completamente

asimétricas en cuanto a igualdad de arcos). Pero al analizar δ se observa nuevamente que su valor pasa de 1,07 a 0,80. Esto quiere decir que en las distancias largas, apenas se observan diferencias entre la distancia de los arcos de ida y los de vuelta. Esto es un 90,93 % que en el caso de las distancias cortas, y un 25,54 % menos que respecto al caso anterior de medias distancias. De otro modo, se puede afirmar en las distancias largas apenas hay diferencias de distancia entre el camino de ida y el de vuelta. Es lógico pensar que habrá ciertas conexiones estructuradas en base a autovías de doble sentido y similar distancia de ida y vuelta. En estos casos, se podría pensar que sería razonable trabajar con matrices simétricas.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Recuento	750	750	750	750
Promedio	3,39E7	99,07	0,80	354,33
Desviación estándar	2,91E7	1,12	0,51	46,56
Coef. de variación	85,89 %	1,13 %	63,56 %	13,14 %
Mínimo	632 171	91,18	0,30	258,03
Máximo	9,89E7	100,0	3,26	412,31

Tabla 5.10: Análisis de asimetría de las matrices (T=L, M=A).

Igual que en casos anteriores, la última Tabla 5.11 muestra los valores de peso y peso promedio para el caso de las matrices ortodrómicas de larga distancia (T=L, M=O).

	Peso	\overline{Peso}
Recuento	750	750
Promedio	2,61E7	271,83
Desviación estándar	2,24E7	36,44
Coef. de variación	86,20 %	13,41 %
Mínimo	481 368	196,48
Máximo	7,65E7	311,66

Tabla 5.11: Análisis de asimetría de las matrices (T=L, M=O).

El peso promedio ortodrómico 271,83 vuelve a ser menor que el real 354,33, y sus rangos también. Por último, la Tabla 5.12 resume los principales indicadores observados para cada tipo de territorio (Corta, Media y Larga distancia). En esta tabla se observa más claramente el comportamiento del indicador δ respecto de la distancia o peso promedio.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Corta distancia	2,28E6	99,05	8,80	23,66
Media distancia	1,66E7	98,29	1,07	172,52
Larga distancia	3,39E7	99,07	0,80	354,33

Tabla 5.12: Análisis de asimetría de las matrices (T=C, M, L M=A).

Para comprobar estadísticamente la relación entre el grado de asimetría δ y el factor tipo de territorio (T), a continuación se muestran en la Tabla 5.13 los resultados de un análisis ANOVA simple δ por T para las matrices asimétricas (M = A). Se puede ver claramente que el p -valor de la prueba-F es menor que 0,05, así que existe una diferencia estadísticamente significativa entre la media de δ entre un nivel de T y otro, con un nivel del 95 % de confianza. Nótese que la Ratio-F tiene un valor enorme de 6 618,66.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Entre grupos	30 964,3	2	15 482,2	6 618,66	0,0000
Intra grupos	5 256,11	2 247	2,33917		
Total (corregido)	36 220,4	2 249			

Tabla 5.13: Análisis ANOVA simple - Delta por T (M = A).

En la Figura 5.18 se muestra una gráfica de cajas para la relación entre el factor territorio (T) y el indicador δ . Se puede observar la relación inversa: a mayor territorio, menor grado de asimetría, esto es δ menor. La dispersión en corta distancia es mayor que en el resto de casos.

Esta misma relación se muestra en la Figura 5.19 donde se ha dibujado una gráfica de dispersión para la relación entre el indicador peso promedio y δ , al tiempo que con un código de colores se ha señalado el factor territorio. Se

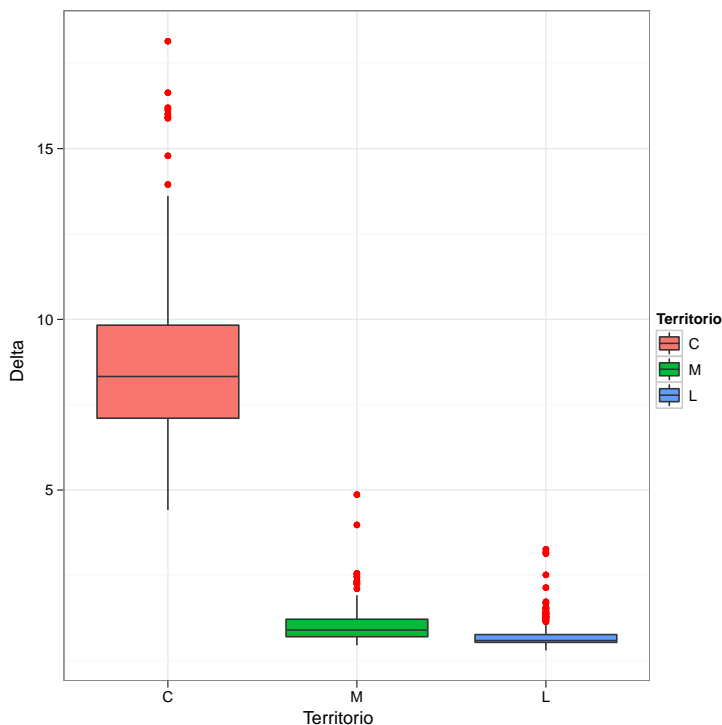


Figura 5.18: Gráfico de cajas: relación entre δ y el territorio.

puede observar la relación inversa: a mayor peso promedio, menor grado de asimetría, esto es δ menor, coincidente con el territorio de largas distancias. Claramente se observa que la dispersión en corta distancia es mayor que en el resto de casos. La función representada en la línea responde a $\delta = (0,745224 + 49,4703/\overline{Peso})^2$, con un valor de $R^2 = 0,88$.

Las conclusiones más relevantes del estudio de la relación entre la asimetría y el territorio han sido las siguientes:

1. Corta distancia: en este estudio es una distancia media de 23,66 kilómetros entre cada par de localizaciones. Para corta distancia las matrices son altamente asimétricas con un valor promedio de $\alpha = 99,048\%$

(existen en promedio menos de un 1 % de arcos simétricos). El indicador δ tiene un valor promedio de 8,80 % de diferencia en los pares de distancias. Si se compara con las ortodrómicas de territorio de corta distancia, el valor promedio de la distancia ortodrómica entre cada par de localizaciones desciende a 16,67 kilómetros (un 30 % menos que las asimétricas).

2. Media distancia: se trata de una distancia media de 172,52 kilómetros entre cada par de localizaciones. Las matrices estudiadas para el territorio de media distancia son igualmente asimétricas con un valor promedio de $\alpha = 98,29\%$. Pero mucho más relevante es observar que el valor de δ desciende en comparación a la corta distancia a un valor de 1,07. En media distancia se observan menos diferencias entre las distancias de ida y de vuelta entre cada par de arcos. Dicho de otro modo, la asimetría es un factor clave a considerar en problemas logísticos de cortas distancias (*city logistics*), y no tanto en territorios de mayor distancia. Comparativamente, el peso promedio ortodrómico es de 129,59 kilómetros (un 25 % menos) frente a los 172,52 kilómetros de las matrices asimétricas.
3. Larga distancia: se ha considerado una distancia media de 354,33 kilómetros entre cada par de localizaciones. Nuevamente, las matrices estudiadas para el territorio de larga distancia son asimétricas con un valor promedio de $\alpha = 99,07\%$. Pero cabe señalar, que el valor del indicador δ desciende nuevamente hasta 0,80; confirmando así que a medida que aumenta la distancia promedio entre cada par de localizaciones existe una menor diferencia entre las distancias de ida y de vuelta. En estos casos donde existen menores diferencias se podrían usar razonablemente los datos de las matrices ortodrómicas (simétricas), y no así en problemas de cortas distancias. Si se compara con las matrices ortodrómicas, el peso promedio ortodrómico es de 271,82 kilómetros (un 24 % menos) frente a los 354,33 kilómetros de las asimétricas.

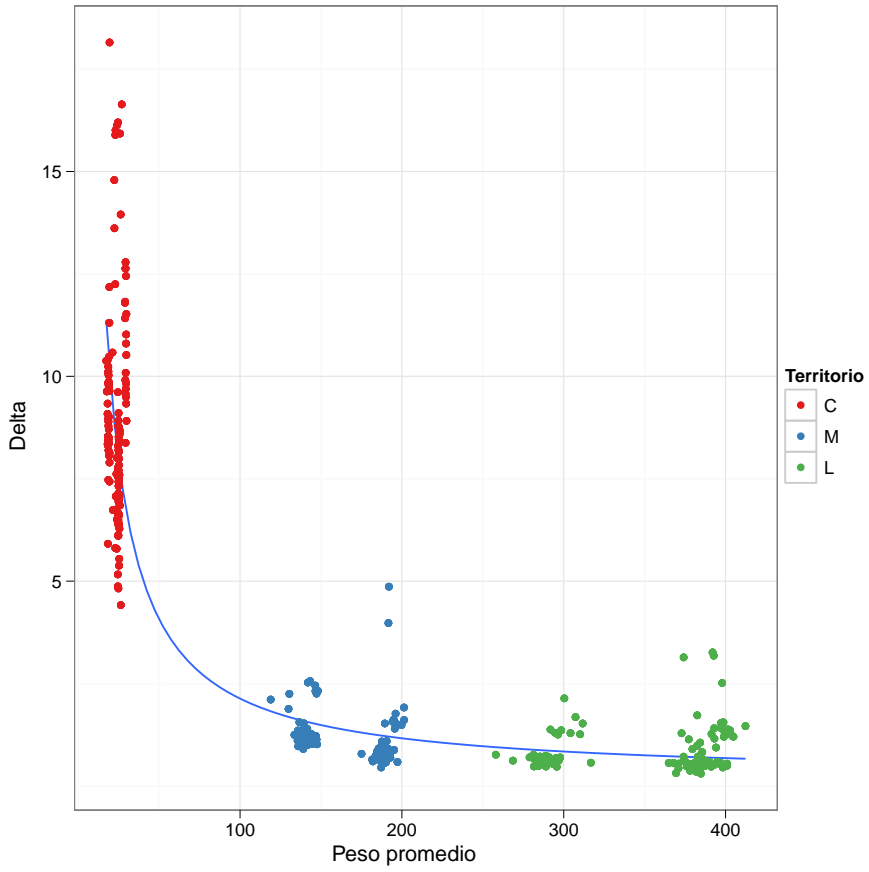


Figura 5.19: Gráfico de dispersión: relación entre peso promedio, δ y el territorio.

5.2.2 Asimetría y localización

A continuación se realizará otro estudio similar al anterior. En este caso se pretende analizar la relación entre el grado de asimetría y el factor localización. La siguiente Tabla 5.14 muestra los datos estadísticos para el conjunto de matrices asimétricas (M=A) y de localización aleatoria (L=A). El valor de α promedio es 98,51 %. El peso promedio es de 200,25 kilómetros, nótese que aquí están incluidos todos los territorios. Pero lo más importante de esta tabla es el indicador δ que tiene un valor del 3,41 %.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Recuento	750	750	750	750
Promedio	1,92E7	98,51	3,41	200,25
Desviación estándar	2,45E7	1,40	3,88	147,67
Coef. de variación	127,82 %	1,42 %	113,95 %	73,75 %
Mínimo	56 030,7	91,18	0,30	22,87
Máximo	9,89E7	99,99	16,64	412,31

Tabla 5.14: Análisis de asimetría de las matrices (L=A, M=A).

Igual que en el estudio anterior, la Tabla 5.15 muestra los valores de peso y peso promedio para el caso de las matrices ortodrómicas y localizaciones aleatorias (L=A, M=O).

	Peso	\overline{Peso}
Recuento	750	750
Promedio	1,46E7	152,39
Desviación estándar	1,89E7	114,16
Coef. de variación	129,38 %	74,91 %
Mínimo	41 207,9	16,82
Máximo	7,64E7	311,66

Tabla 5.15: Análisis de asimetría de las matrices (L=A, M=O).

La siguiente Tabla 5.16 muestra los datos estadísticos para el conjunto de matrices asimétricas (M=A) y de localización en cuadrícula (L=C). Se observa que apenas hay diferencias respecto del caso anterior: el valor de α promedio

5 | Matrices asimétricas

es 98,92 %, el peso promedio es de 200,61 kilómetros para todos los territorios, y el indicador δ que tiene un valor del 3,50 apenas un 2,5 % que en el caso anterior.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Recuento	750	750	750	750
Promedio	1,92E7	98,9176	3,17	200,61
Desviación estándar	2,45E7	0,94	3,50	147,80
Coef. de variación	127,75 %	0,95 %	110,10 %	73,67 %
Mínimo	61 432,9	95,84	0,37	24,58
Máximo	9,79E7	100,0	12,79	401,38

Tabla 5.16: Análisis de asimetría de las matrices (L=C, M=A).

La siguiente Tabla 5.17 muestra los valores de peso y peso promedio para el caso de las matrices ortodrómicas y localizaciones en cuadrícula (L=C, M=O).

	Peso	\overline{Peso}
Recuento	750	750
Promedio	1,46E7	152,75
Desviación estándar	1,89E7	114,37
Coef. de variación	129,18 %	74,88 %
Mínimo	44 905,8	18,11
Máximo	7,44E7	300,72

Tabla 5.17: Análisis de asimetría de las matrices (L=C, M=O).

La siguiente Tabla 5.18 muestra los datos estadísticos para el conjunto de matrices asimétricas (M=A) y de localización radial (L=R). En este caso, ya son más apreciables las diferencias respecto a los casos anteriores; mientras que el valor de α promedio es 98,99 %, el peso promedio es de 149,65 kilómetros para todos los territorios (un 25,40 % menos que en el caso anterior), y el indicador δ que tiene un valor del 4,09 % lo que significa un 28,84 % más que en el caso anterior. Todo esto parece indicar que el grado de asimetría aumenta con localizaciones radiales para todo tipo de territorios, curioso,

ya que España se caracteriza por tener una infraestructura de carreteras en forma radial desde la capital Madrid en el centro de la Península Ibérica.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Recuento	750	750	750	750
Promedio	1,43E7	98,99	4,09	149,65
Desviación estándar	1,83E7	0,73	4,54	110,85
Coef. de variación	127,84 %	0,74 %	111,06 %	74,07 %
Mínimo	44 956,9	95,18	0,47	17,32
Máximo	7,36E7	100,0	18,15	316,77

Tabla 5.18: Análisis de asimetría de las matrices (L=R, M=A).

A continuación, la Tabla 5.19 contiene los valores de peso y peso promedio para el caso de las matrices ortodrómicas y localizaciones radiales (L=R, M=O).

	Peso	\overline{Peso}
Recuento	750	750
Promedio	1,08E7	112,95
Desviación estándar	1,40E7	85,08
Coef. de variación	129,33 %	75,33 %
Mínimo	32 982,9	12,42
Máximo	5,67E7	247,46

Tabla 5.19: Análisis de asimetría de las matrices (L=R, M=O).

Si se comparan los indicadores para las matrices ortodrómicas (Tabla 5.15, Tabla 5.17 y Tabla 5.19) con sus respectivas versiones asimétricas (Tabla 5.14, Tabla 5.16 y Tabla 5.18) se puede observar como en todos los casos el peso promedio ortodrómico y el peso total son siempre menor que en los casos de las matrices asimétricas. También es importante señalar que el peso promedio ortodrómico para las localizaciones radiales, véase la Tabla 5.19, es menor que en el resto de casos.

Por último, la Tabla 5.20 resume los principales indicadores observados para cada tipo de localización (Aleatoria, Cuadrícula y Radial). En esta tabla se observa más claramente el comportamiento del indicador δ respecto de la

distancia o peso promedio, así como las pequeñas diferencias de las localizaciones aleatoria y cuadrícula respecto de la localización radial.

	Peso	Alfa α	Delta δ	\overline{Peso}
Aleatoria	1,92E7	98,51	3,41	200,25
Cuadrícula	1,92E7	98,92	3,17	200,61
Radial	1,43E7	98,99	4,09	149,65

Tabla 5.20: Análisis de asimetría de las matrices (L=A..R, M=A).

Para comprobar estadísticamente la relación entre el grado de asimetría δ y el factor localización (L), a continuación se muestran en la Tabla 5.21 los resultados de un análisis ANOVA simple δ por L para las matrices asimétricas (M = A). Se puede ver claramente que el p -valor de la prueba-F es igual a 0,00, así que existe una diferencia estadísticamente significativa entre la media de δ entre un nivel de L y otro, con un nivel del 95 % de confianza.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p -valor
Entre grupos	339,78	2	169,89	10,64	0,0000
Intra grupos	35880,7	2247	15,9683		
Total (corregido)	36220,4	2249			

Tabla 5.21: Análisis ANOVA simple - Delta por L (M = A).

Para observar esta relación entre las localizaciones (aleatoria, cuadrícula y radial) y el grado de asimetría expresado por δ se muestran a continuación una serie de gráficas. En la Figura 5.20 se observa la relación significativa de la localización radial.

En la Figura 5.21 se muestra una gráfica de cajas para la relación entre el factor localización (L) y el indicador δ . Esta misma relación se muestra en la Figura 5.22 donde se ha dibujado una gráfica de dispersión para la relación entre el indicador peso promedio y δ , al tiempo que con un código de colores se ha señalado el factor localización. Es importante comparar esta gráfica con la Figura 5.19 anterior. Se puede observar que al tiempo que se mantienen tres

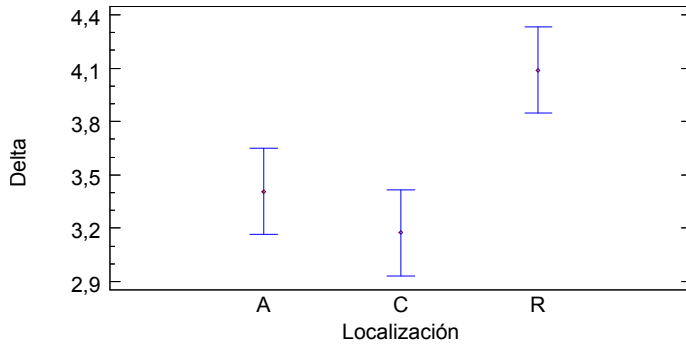


Figura 5.20: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre peso promedio, δ y la localización.

grupos de valores (que corresponden con los tres niveles del territorio), dentro de cada uno de ellos se distinguen otros dos grupos: uno que agrupa a las localizaciones aleatoria y cuadrícula, y otro para las localizaciones radiales. Nótese que las localizaciones radiales siempre tienen valores de δ superiores a las otras dos localizaciones. Nuevamente se representa la función de regresión que responde a $\delta = (0,745224 + 49,4703/\overline{Peso})^2$, con un valor de $R^2 = 0,88$.

Las conclusiones más relevantes del estudio de la relación entre la asimetría y la localización han sido las siguientes:

1. Aleatoria: el valor de α promedio es 98,51 %. El peso promedio (que incluye todos los territorios) es de 200,25 kilómetros. Lo más importante es que el indicador δ tiene un valor de 3,41 %.
2. Cuadrícula: casi no se observan diferencias con el caso anterior. Cabe señalar que el indicador δ tiene un valor de 3,49 apenas un 2,5 % más que en el caso anterior.
3. Radial: comparativamente con los anteriores se observa más diferencias. El peso promedio (todos los territorios) ha descendido a 149,65

kilómetros. El indicador δ es igual a 4,09, esto es, un 28,84 % más que en el caso anterior.

Es curioso observar que a pesar de que la red de carreteras en la Península Ibérica se caracteriza por tener una estructura radial centrada en la capital Madrid, el grado de asimetría aumenta precisamente en este tipo de localizaciones. En cualquier caso, lo relevante en este estudio es que se demuestra la relación entre el factor localización y el grado de asimetría de las matrices.

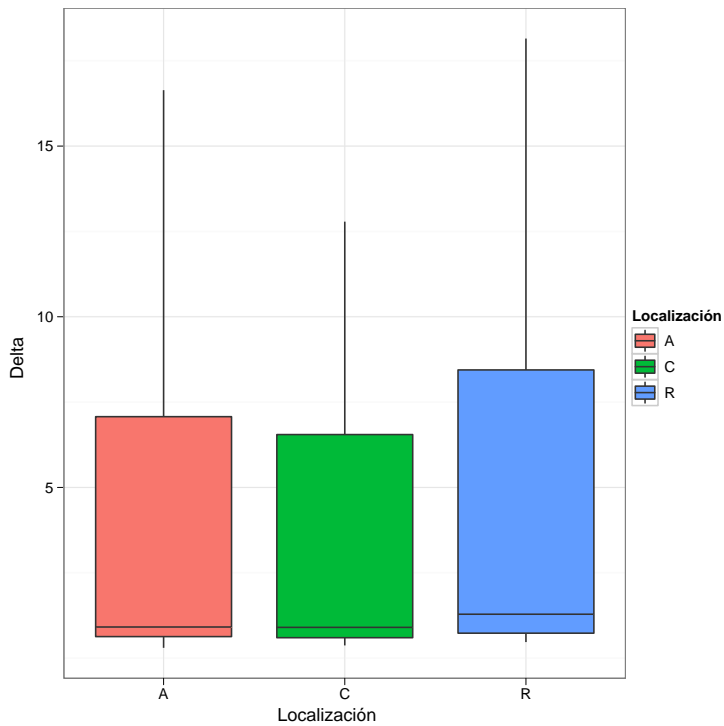


Figura 5.21: Gráfico de cajas: relación entre δ y la localización.

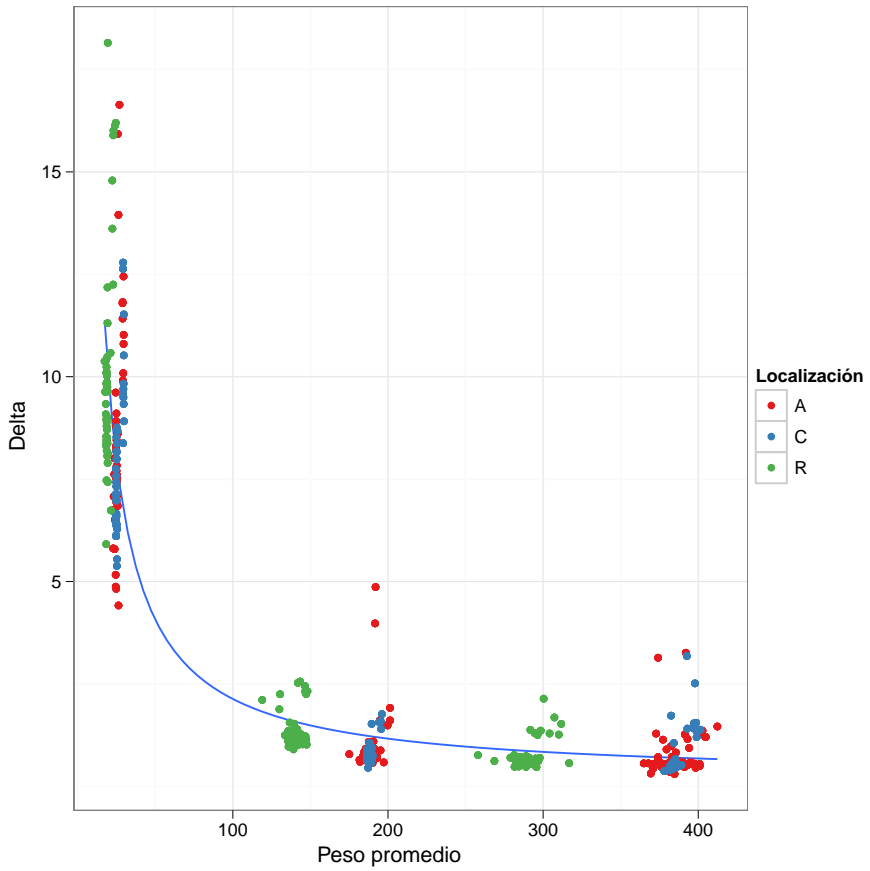


Figura 5.22: Gráfico de dispersión: relación entre peso promedio, δ y la localización.

5.2.3 Asimetría, territorio y localización

Si los factores territorio y localización están relacionados con el grado de asimetría, es lógico pensar que exista una interacción significativa entre ambos. A continuación, en la Tabla 5.22 se presentan los resultados de un ANOVA multifactorial para este caso.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	30 964,3	2	15 482,2	7 650,97	0,0000
B:L	339,78	2	169,89	83,96	0,0000
Interacciones					
AB	381,54	4	95,38	47,14	0,0000
Residuos	4 534,79	2 241	2,02		
Total (corregido)	36 220,4	2 249			

Tabla 5.22: Análisis de varianza para Delta - Suma de Cuadrados Tipo III.

Como se puede observar en la tabla, son significativos los dos efectos principales y la interacción entre ambos. El territorio es el factor con mayor impacto, seguido de la localización y la interacción entre ambos. Esto se puede observar mucho mejor en la siguiente Figura 5.23, en ella se confirma la relación entre el grado de asimetría y el territorio (mayor grado de asimetría en cortas distancias y viceversa), y con el factor localización (mayor grado de asimetría en localizaciones radiales frente al resto de localizaciones).

Es interesante observar que el grado de asimetría para la localización radial es mayor que para el resto en el caso del territorio de media distancia (M). Por último, en la Figura 5.24 se comparan los factores territorio y localización en una matriz de gráficas. Dentro de cada gráfica se muestra en los ejes δ -peso promedio cada una de las matrices asimétricas. El código de colores permite identificar el factor localización (L). Esta figura resume todo el estudio de relación entre el grado de asimetría y los factores territorio y localización.

Para terminar con este estudio, se incluyen dos figuras en las que se intenta representar, además de todo lo anterior, las diferencias entre las matrices

asimétricas ($M=A$) y las ortodrómicas ($M=O$). En la Figura 5.25 es interesante observar que las matrices ortodrómicas cuyo valor de $\delta = 0$ parecen una sombra desplazada hacia menores valores de peso promedio de las matrices asimétricas con valores de $\delta > 0$. En la Figura 5.26 se ha representado en tres dimensiones (peso promedio, territorio y grado de asimetría δ) las diferencias entre las matrices asimétricas ($M=A$) en color rojo, y las matrices ortodrómicas ($M=O$) en color azul. Aquí se observa como las matrices ortodrómicas se encuentran en el plano (territorio-peso promedio) con un grado de asimetría igual a cero, y para cada tipo de territorio se desplazan hacia menores pesos promedio en comparación con las asimétricas.

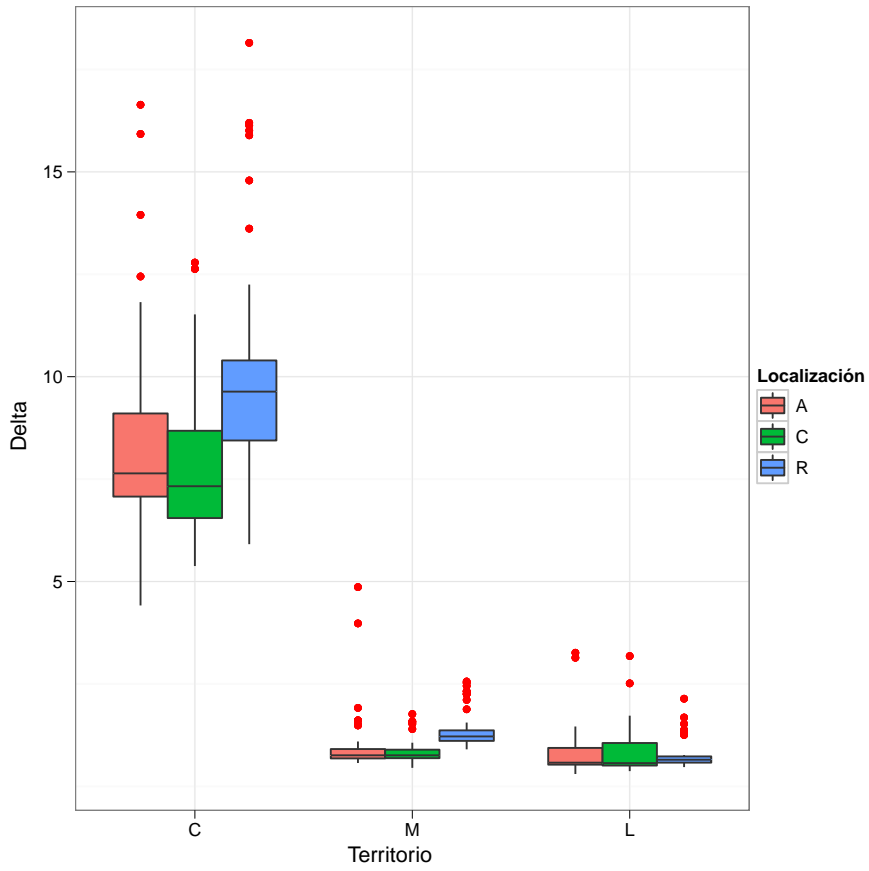


Figura 5.23: Relación entre el factor territorio, la localización y el grado de asimetría δ .

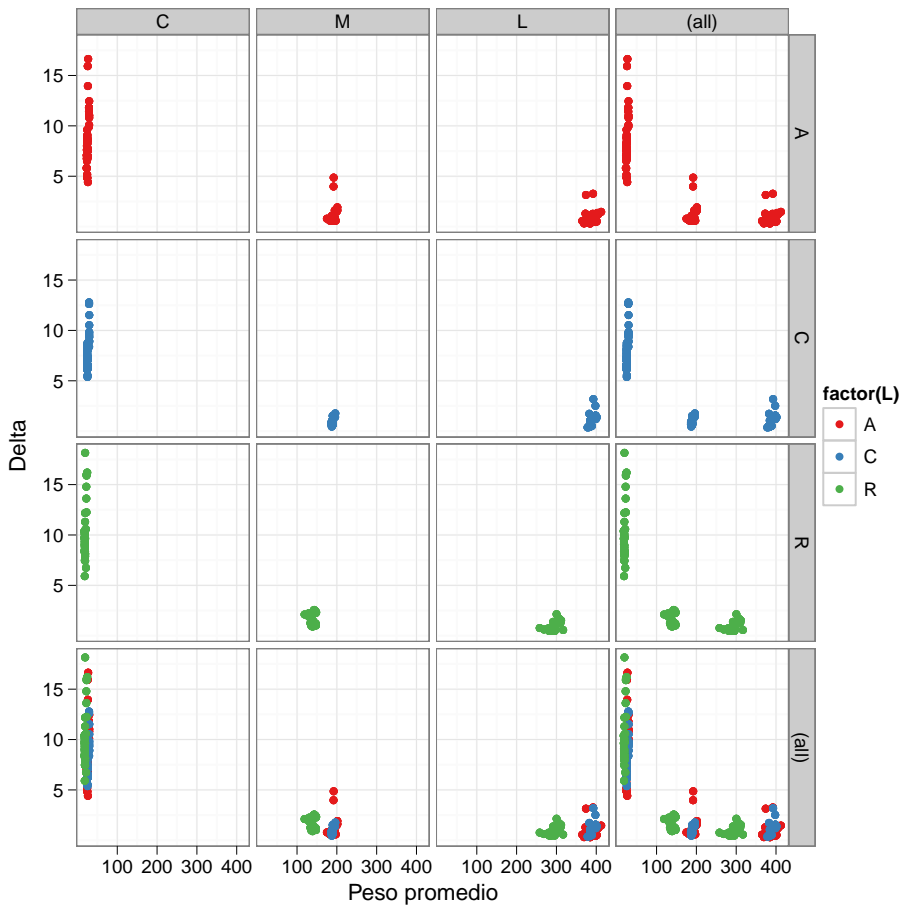


Figura 5.24: Relación entre el factor territorial, la localización, el grado de asimetría δ y el peso promedio.

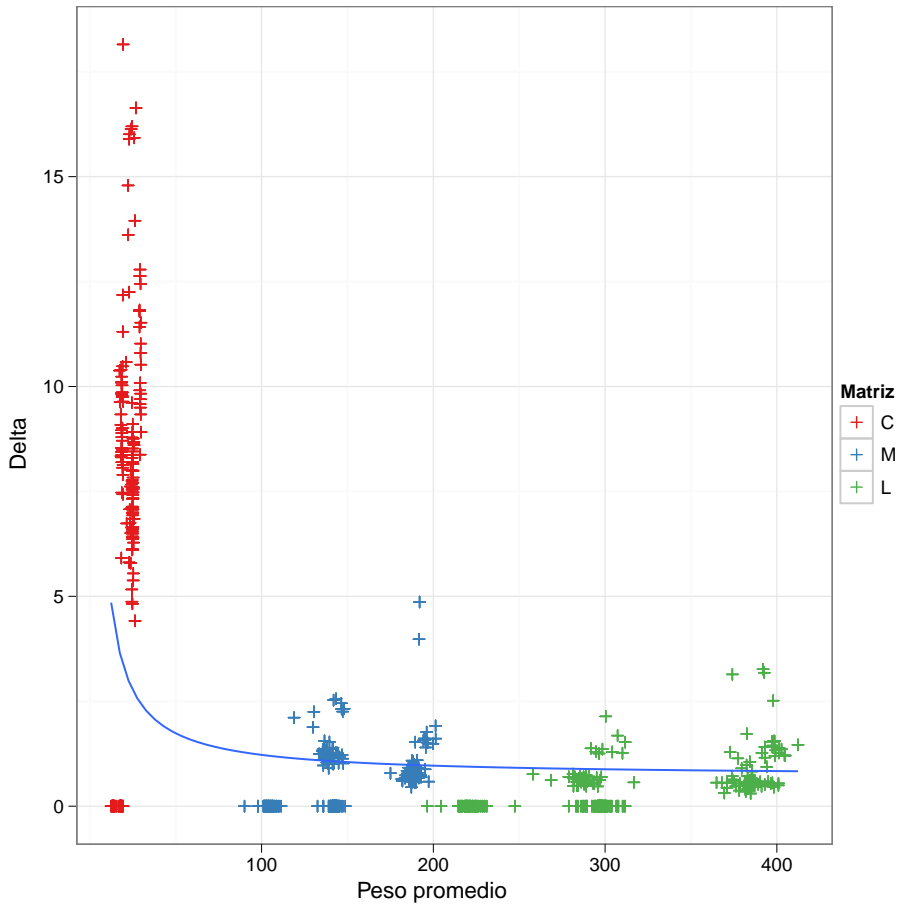


Figura 5.25: Relación entre el factor territorial, el grado de asimetría δ y el peso promedio para todas las matrices.

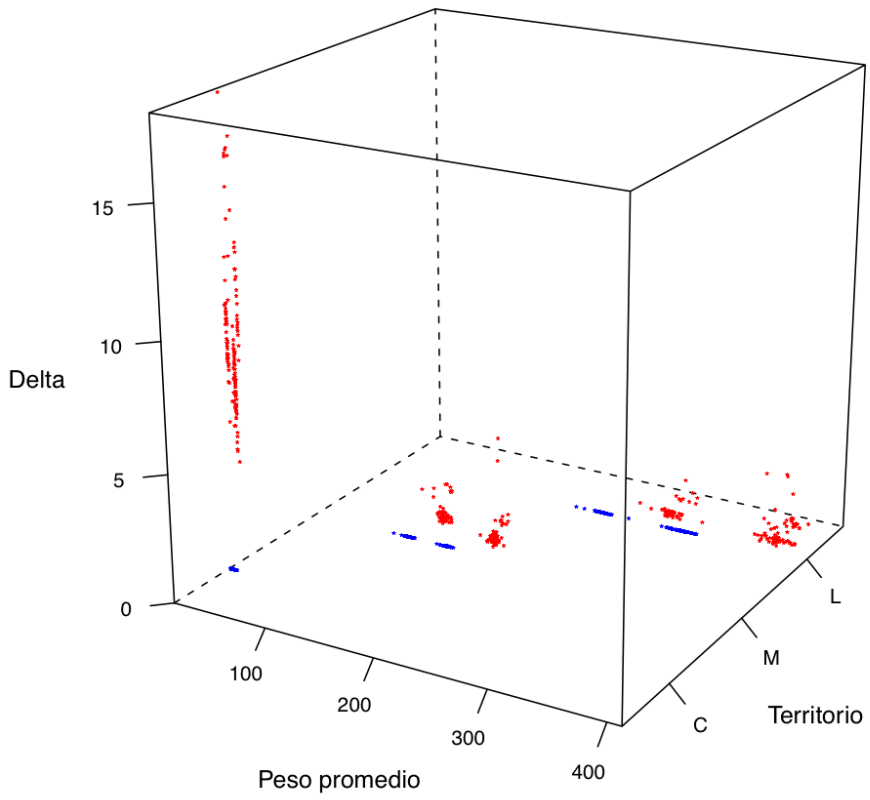


Figura 5.26: Relación 3D entre las matrices asimétricas y las ortodrómicas.

5.3 Conclusiones

Las conclusiones y aportaciones más relevantes de este capítulo han sido:

1. Se ha valorado la barrera de entrada que supone para los investigadores y las empresas el alto coste computacional o tiempo necesario del cálculo y la obtención de las matrices asimétricas, frente al ínfimo coste computacional del cálculo de las matrices ortodrómicas. La relación observada ha sido de 806 006 a 1, entre el cálculo de las matrices asimétricas y el de las ortodrómicas.
2. Se ha demostrado que existe una relación estadísticamente significativa entre los tres factores (territorio, localización y tamaño de la matriz) y sus tres interacciones con el valor de tiempo total de computación h .
3. El tamaño de la matriz condiciona el tiempo total de cálculo h . Dicho tiempo total, se ha demostrado, que crece según una función matemática respecto del tamaño de la matriz n . De forma análoga, el tiempo promedio de cálculo por arco p , se ha demostrado que decrece según el número de localizaciones n . Una explicación a este hecho es que una mayor densidad de puntos, implica una menor distancia promedio entre ellos, lo que se reflejaría en un menor tiempo de cálculo de su camino mínimo. Sin embargo, parece que existe un límite inferior de tiempo de cálculo que depende de la infraestructura e implementación del algoritmo empleada por el GIS.
4. Se ha demostrado además que el tiempo de computación responde al tipo de geo-localización. Mientras que para las localizaciones aleatorias los tiempos de computación son altos, para las localizaciones ordenadas en cuadrícula son menores, y más pequeños para las localizaciones radiales. Es posible que esto sea debido a que el grafo completo del territorio está reflejando la infraestructura radial de carreteras de la Península Ibérica centradas en la capital Madrid (en este caso); y que

el algoritmo del camino mínimo tal vez sea más rápido cuando existen mejores conexiones en el grafo entre el par de localizaciones en arcos con forma de carreteras de mayor orden. Lo que en definitiva favorece los cálculos de localizaciones radiales frente a otro tipo de localizaciones (aleatorio y cuadrícula).

5. También es significativo el factor territorio en relación al tiempo de computación. En cortas distancias se obtienen menores tiempos de computación que en medias y largas distancias. Dicho incremento de tiempo supone un promedio del 50 % en largas y medias distancias frente al territorio de corta distancia.
6. Una aportación más de este capítulo es que se ha confirmado estadísticamente la hipótesis de que la localización de los nodos en el mundo real (el ámbito geográfico del problema) representa diferente grado de asimetría, con lo que ello pueda suponer tanto en el tiempo de computación de las matrices, como en la resolución de los algoritmos (lo que se verá en el próximo capítulo).
7. Se han utilizado con éxito diversos indicadores del grado de asimetría. Y una conclusión interesante de ello, es que existen diferencias notables entre el camino de ida y el de vuelta en los pares de arcos. El indicador δ máximo ha alcanzado un valor del 18,15 %, esto es, hasta una quinta parte de la distancia de diferencia. Éste es un hecho lo suficientemente importante como para desacreditar la posible idea de que las matrices ortodrómicas son válidas para la resolución de problemas en entornos reales.
8. Ha quedado demostrado que existe una relación estadísticamente significativa entre el grado de asimetría δ y el factor territorio. En las largas distancias, existen menores diferencias entre el camino de ida y el de vuelta ($\delta = 0,80$) que en medias ($\delta = 1,07$), y en cortas distancias ($\delta = 8,80$) donde las diferencias son más notables. Esto implica que

en problemas de rutas o logística en entornos de cortas distancias o ciudades, hay que prestar especial atención a la asimetría de la red.

9. Se ha demostrado estadísticamente también la relación existente entre el factor localización y el grado de asimetría. En este caso, las localizaciones radiales (para todos los territorios) incrementan el valor del grado de asimetría δ en un 30 % respecto a las localizaciones aleatorias y en cuadrícula. Es curioso observar, que la infraestructura radial de la Península Ibérica favorece la asimetría en términos generales, y no al contrario como se podría pensar.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

En este capítulo se va a realizar un detallado conjunto de análisis de las soluciones al caso del TSP. Anteriormente, en el Capítulo 4 se describió el proceso de caracterización de las instancias, los factores, niveles o variantes seleccionados, y las variables de respuesta a estudiar en el presente capítulo. Tras el diseño factorial y el diseño de experimentos (DOE), se procedió a la ejecución y resolución de cada una de las experiencias o instancias computacionales, por lo que tan sólo resta analizar los resultados obtenidos con el principal objetivo de resolver las cuestiones e hipótesis de la investigación planteadas en el apartado 4.5. Este capítulo se estructura en tres grandes análisis:

1. Tiempos de resolución de los algoritmos: para comprender la eficiencia de cada algoritmo medida según la variable de respuesta tiempo de computación, y analizar su comportamiento en función de los factores (territorio, localización, tipo de matriz, tamaño de la matriz).
2. Bondad de las soluciones de los algoritmos: en este apartado se analizarán los resultados obtenidos por los algoritmos para comprender la eficacia de cada uno de ellos, conocer en qué medida una heurística es

mejor que otra; e investigar si su bondad se ve condicionada (y en qué medida) por los factores seleccionados en el diseño de experimentos.

3. Comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP): en el último estudio realizado, se analizará de manera comparativa las diferencias cuantitativas y cualitativas de las secuencias solución a problemas TSP frente a las de los ATSP. Con este análisis, se pretende cuantificar y subrayar las grandes diferencias existentes entre la resolución de problemas simétricos y la resolución de problemas reales asimétricos.

6.1 Tiempos de resolución de los algoritmos

En primer lugar se realizó un análisis de la varianza con todos los datos disponibles para explorar las relaciones y validar los resultados de los experimentos. La Tabla 6.1 contiene los indicadores estadísticos de dicho primer análisis. Tanto en éste como en los análisis que siguen, es importante señalar que el tiempo de computación está expresado siempre en segundos.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	1,58E7	2	7,916	1,69	0,1841
B:L	1,18E8	2	5,91E7	12,64	0,0000
C:M	2,59E9	4	6,47E8	138,51	0,0000
D:n	6,29E8	9	6,99E7	14,96	0,0000
E:r	8,12E6	4	2,03E6	0,43	0,7838
F:A	3,18E9	4	7,95E8	170,16	0,0000
Residuos	4,82E10	10 324	4,67E6		
Total (corregido)	5,49E10	10 349			

Tabla 6.1: Análisis de varianza para tiempo - Suma de Cuadrados Tipo III.

Se demuestra que el factor réplica r se puede descartar de los ANOVA, ya que en la Tabla 6.1 la Ratio-F para el factor r es igual a 0,43 y el valor- p igual

a 0,783 y muy próximo a 1. De este modo se asegura que las 5 réplicas son estadísticamente equivalentes, validando los experimentos en este sentido. Los siguientes análisis ANOVA se realizarán sin el factor r réplica ya que no afecta a la variable de respuesta tiempo. De este modo, los grados de libertad de r irán al residuo y así aumentará si cabe la potencia del experimento. Durante esta primera exploración estadística se detectaron dos casos en los que la dispersión de una de las variantes de un factor era muy grande respecto del resto. El primer caso es para el factor algoritmo, tal y como se observa en la Figura 6.1, el algoritmo Concorde (A=CO) tiene una dispersión muy grande respecto al resto de algoritmos. Esto indica que dicha variante debe ser estudiada de manera diferenciada en los análisis de la varianza, y de ese modo reducir la heterocedasticidad de los resultados.

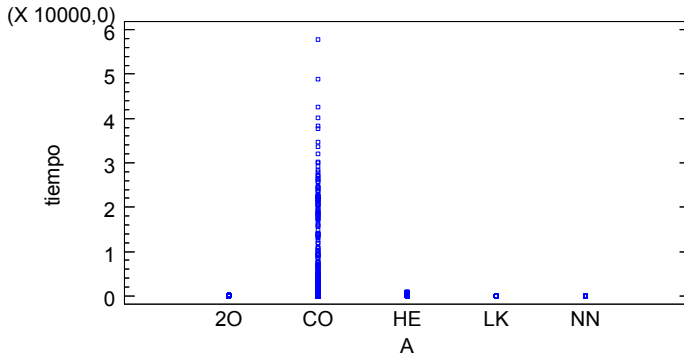


Figura 6.1: Dispersión de tiempo por variantes de algoritmo.

De igual modo, la Figura 6.2 muestra que la matriz transformada (M=T) es un nivel con mucha más dispersión que el resto para el factor tipo de matriz. Esto también indica que esta combinación debería ser estudiada de manera diferenciada, lo cual parece lógico, ya que la matriz transformada tiene un tamaño 4 veces superior a la matriz asimétrica y es muy posible que afecte de manera notable al tiempo de computación de los algoritmos.

También es importante señalar, tal y como se mostraba en la Tabla 4.12, que no todos los algoritmos seleccionados están diseñados para trabajar con

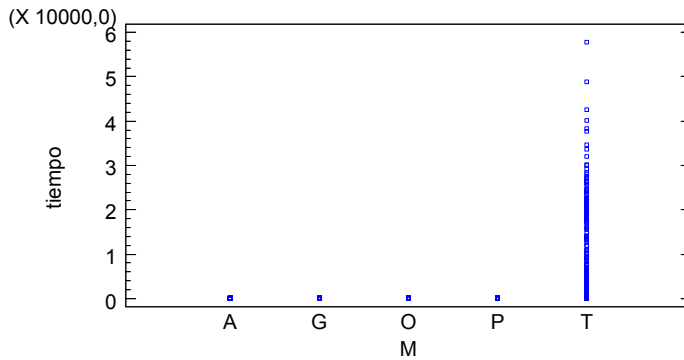


Figura 6.2: Dispersión de tiempo por niveles de matriz.

matrices asimétricas y que ha sido imposible realizar un experimento ortogonal completo. Así pues, la combinación matriz asimétrica ($M=A$) será otro de los casos que habrá que tener diferenciado al realizar los análisis de varianza.

Con todo lo anterior, y tal y como muestra la Tabla 6.2, se han diseñado un conjunto de análisis para comprender cómo cada uno de los factores interviene o condiciona el tiempo de computación de las diferentes heurísticas, de los cuales, sólo se describirá en detalle los más relevantes.

Variable respuesta	Algoritmo	Asimetría
Tiempo	A<>CO	M<>A
Tiempo	Todos	M<>A, M<>T
Tiempo	A<>CO, A<>LK	M<>T
Tiempo	A=CO, A=HE	M<>A

Tabla 6.2: Diversos análisis de varianza para tiempo.

6.1.1 Análisis de la varianza del tiempo (A<>CO y M<>A)

El primer de los casos analizados discriminará el algoritmo Concorde (A<>CO) y las matrices asimétricas (M<>A). Es decir se analizarán todos los algoritmos menos Concorde resolviendo matrices simétricas. La Tabla 6.3 muestra los resultados de los indicadores estadísticos con una interacción de

orden máximo igual a 2. Al observar los resultados de la Ratio-F y del p -valor aparecen 6 relaciones significativas: 3 factores y otras 3 interacciones.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p -valor
Efectos principales					
A:T	3 190,64	2	1 595,32	1,13	0,3226
B:L	5 493,02	2	2 746,51	1,95	0,1427
C:M	4,17E6	3	1,39E6	986,89	0,0000
D:n	3,51E6	9	390 811	277,17	0,0000
E:A	9,50E6	3	3,16E6	2247,74	0,0000
Interacciones					
AB	232,32	4	58,08	0,04	0,9968
AC	7 748,04	6	1 291,34	0,92	0,4821
AD	5 295,45	18	294,19	0,21	0,9998
AE	10 580,6	6	1 763,43	1,25	0,2769
BC	6 602,5	6	1 100,42	0,78	0,5852
BD	6 830,08	18	379,45	0,27	0,9991
BE	17 670,6	6	2 945,1	2,09	0,0512
CD	4,00E6	27	148 197	105,10	0,0000
CE	1,03E7	9	1,14E6	813,60	0,0000
DE	8,50E6	27	315 094	223,47	0,0000
Residuos	9,94E6	7 053	1 410,02		
Total (corregido)	5,00E7	7 199			

Tabla 6.3: Análisis de varianza para tiempo (A<>CO y M<>A) - Suma de Cuadrados Tipo III.

El factor de mayor interacción sobre los resultados es el algoritmo. En la Figura 6.3 se observa que el intervalo para la heurística de Keld Helsgaun (A=HE) destaca con unos tiempos significativamente mayores que para el resto de heurísticas (nótese que no está incluido Concorde). Aunque en el gráfico no se observa muy claramente, existe un pequeño solapamiento entre los intervalos de A=20 y de A=LK, también existe otro solape entre A=LK y A=NN. Así que en este gráfico no se observan diferencias significativas entre estos últimos tres algoritmos.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

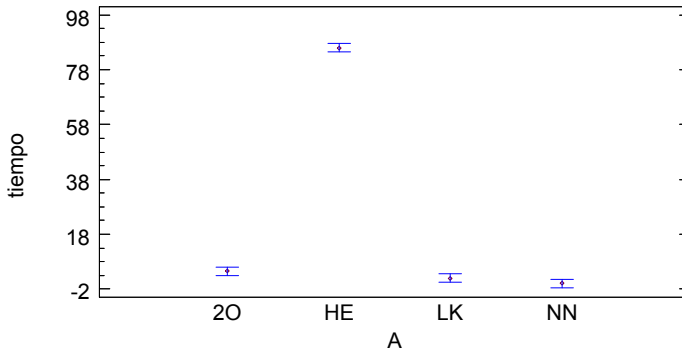


Figura 6.3: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y los algoritmos (A<>CO y M<>A).

El segundo factor de importancia y que condiciona el valor del tiempo de computación es el tipo de matriz. En la Figura 6.4 se ilustra que el intervalo para las matrices transformadas (M=T) es mucho mayor que para el resto de tipos de matrices. Más adelante se estudiará la interacción de este factor con otros. Nótese que no están incluidas las matrices asimétricas (M=A).

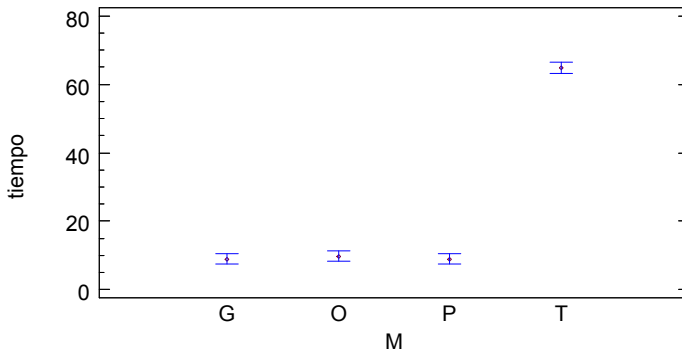


Figura 6.4: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tipo de matriz (A<>CO y M<>A).

La tercera relación significativa aparece en la interacción de factores: tipo de matriz y algoritmo. En la Figura 6.5 es interesante observar que la transformación de la matriz (M=T) afecta a todos los algoritmos, pero mucho

más a Helsgaun (A=HE). Sin tener presente todavía a Concorde, este gráfico refleja también que Helsgaun es una heurística mucho más sofisticada y lenta que el resto de heurísticas (más sencillas y mucho más rápidas). También se aprecia que la transformación afecta a 2-Opt.

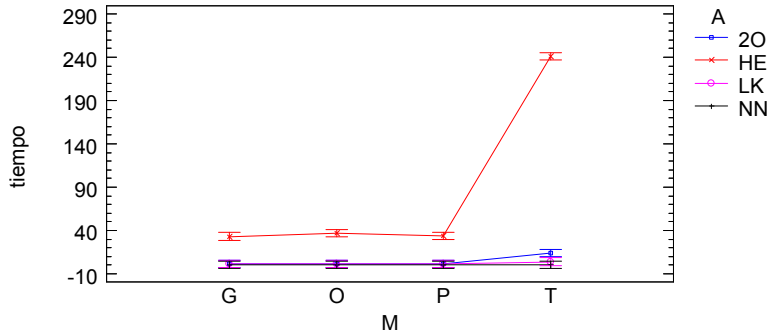


Figura 6.5: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo ($A \ll CO$ y $M \ll A$).

A continuación, se analiza la cuarta relación entre el factor tamaño de la matriz n y el tiempo de computación del algoritmo. En la Figura 6.6 se observa muy claramente la relación exponencial que existe entre ambos. Esto es, el tiempo de computación requerido crece exponencialmente con el tamaño de la matriz n . Además, se adivina que en torno a $n = 500$ el tiempo de computación crece notablemente.

La quinta relación significativa aparece en otra interacción de factores: tamaño de matriz y algoritmo. La Figura 6.7 es muy interesante, ya que muestra que Helsgaun es un algoritmo al que le afecta más el tamaño de la matriz que al resto (Concorde no tratado). Helsgaun muestra una relación exponencial, frente al resto de heurísticas sencillas que tienen un comportamiento más lineal. La heurística 2-Opt se comienza a diferenciar del resto para valores muy grandes de n .

La sexta y última relación significativa encontrada en este primer análisis, aparece en la interacción de factores: tamaño de matriz y tipo de matriz. La

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

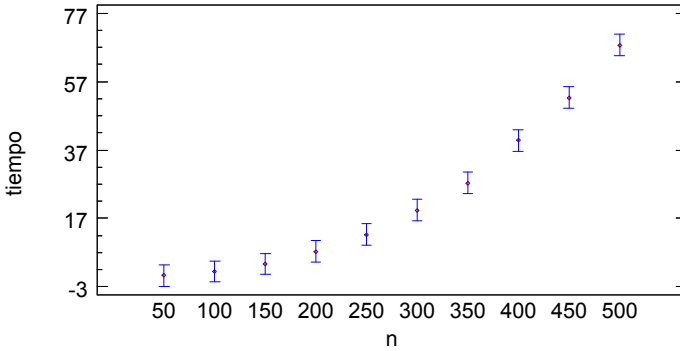


Figura 6.6: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tamaño de la matriz ($A \ll CO$ y $M \ll A$).

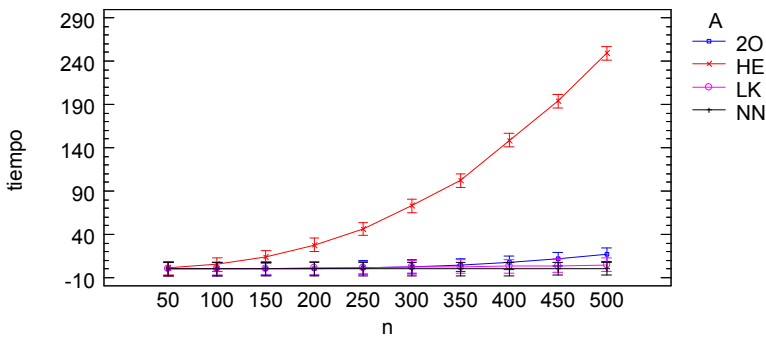


Figura 6.7: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo ($A \ll CO$ y $M \ll A$).

Figura 6.8 no es menos importante. Como se esperaba, la transformación T afecta notablemente al tiempo de computación, y es importante señalar que no se observan diferencias entre el resto de tipos de matrices simétricas no transformadas.

Las conclusiones más relevantes de este primer análisis son las siguientes:

1. Helsingaun es una técnica más avanzada pero más lenta que el resto.
2. La transformación afecta al tamaño de la matriz y por tanto al tiempo

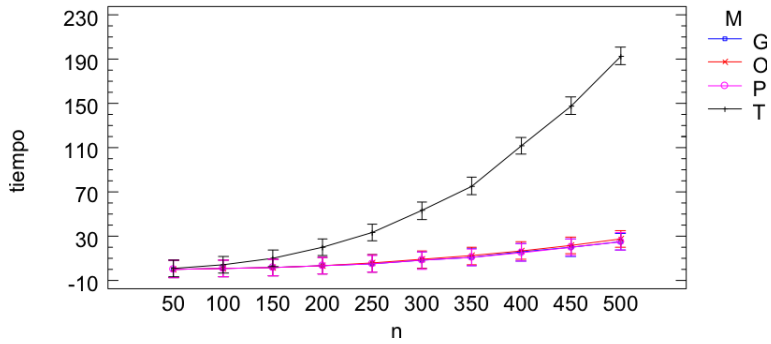


Figura 6.8: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el tipo de matriz en el tiempo ($A \langle \rangle CO$ y $M \langle \rangle A$).

de computación. Afecta mucho más a Helsgaun que al resto y en menor medida a 2-Opt.

3. El número de nodos n hace crecer exponencialmente los tiempos de computación, y en especial si la matriz es transformada; Helsgaun se ve afectado en mayor medida que el resto en estos casos.

6.1.2 Análisis de la varianza del tiempo (M<>A y M<>T)

En este caso, se tomarán los resultados de todos los algoritmos, también Concorde, para la resolución de todas las matrices simétricas a excepción de las matrices transformadas que son discriminadas. A diferencia del análisis anterior, en éste se introducen los resultados de Concorde. La Tabla 6.4 muestra las estadísticas resultantes con interacciones de orden máximo igual a 2. Los resultados de la Ratio-F y del p -valor muestran 7 relaciones significativas: 3 factores y otras 4 interacciones.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p -valor
Efectos principales					
A:T	2 171,66	2	1 085,83	11,17	0,0000
B:L	488,82	2	244,41	2,51	0,0810
C:M	491,12	2	245,56	2,53	0,0801
D:n	607 796	9	67 532,9	694,64	0,0000
E:A	1,16E6	4	291 242	2 995,69	0,0000
Interacciones					
AB	412,16	4	103,04	1,06	0,3747
AC	1 255,19	4	313,79	3,23	0,0118
AD	3 748,06	18	208,22	2,14	0,0033
AE	7 872,25	8	984,03	10,12	0,0000
BC	171,921	4	42,98	0,44	0,7783
BD	1 622,18	18	90,12	0,93	0,5449
BE	3 372,49	8	421,56	4,34	0,0000
CD	1 077,72	18	59,87	0,62	0,8905
CE	3 300,46	8	412,55	4,24	0,0000
DE	983 132	36	27 309,2	280,90	0,0000
Residuos	642 044	6 604	97,22		
Total (corregido)	3,42E6	6 749			

Tabla 6.4: Análisis de varianza para tiempo (M<>A y M<>T) - Suma de Cuadrados Tipo III.

De todas las relaciones, a continuación se analizan las 5 primeras en orden de relevancia. En primer lugar, es el factor algoritmo el que destaca respecto

del resto. En la Figura 6.9 están todos los algoritmos, aunque eso sí, para las matrices asimétricas sin transformación. A las ya conocidas relaciones entre el algoritmo y el tiempo de computación, se añade ahora a la clasificación el algoritmo Concorde. Dicho algoritmo muestra unos valores de tiempo de computación intermedios entre Helsgaun (más lento) y el resto de las heurísticas sencillas. Véase también las similitudes en las heurísticas LK y 2O frente a NN. Es relevante subrayar que Helsgaun es más lento que Concorde para la resolución de problemas simétricos.

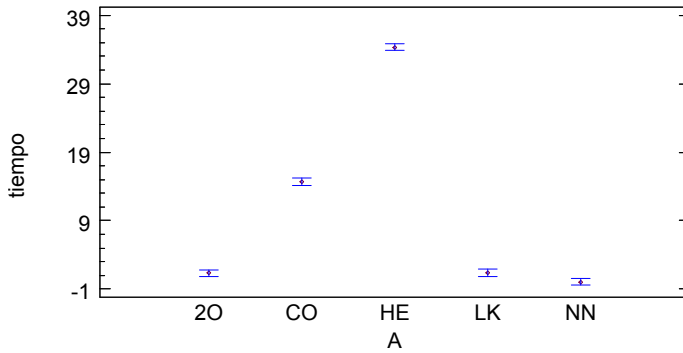


Figura 6.9: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tiempo y los algoritmos ($M \langle \rangle A$ y $M \langle \rangle T$).

En segundo lugar se analiza el factor tamaño de la matriz n . En la Figura 6.10 aparecen unos intervalos muy pequeños, y se observa una vez más la relación exponencial entre el tamaño de la matriz y n .

A continuación se analiza la tercera relación significativa, que es debida a la interacción de los factores tamaño de la matriz y algoritmo. La Figura 6.11 muestra que el ranking de heurísticas se mantiene para todo el rango de n . Dicho de otro modo, Helsgaun es la heurística más lenta para todos los tamaños de matrices simétricas ($n = 50, \dots, 500$) de las heurísticas comparadas y seguido del algoritmo Concorde. Esto es natural pues son heurísticas más complejas capaces de obtener mejores resultados que el resto de heurísticas simples, como se verá más adelante.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

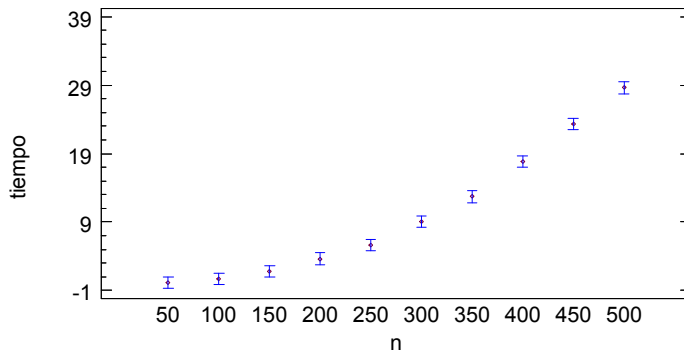


Figura 6.10: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tiempo y el tamaño de la matriz ($M \ll A$ y $M \ll T$).

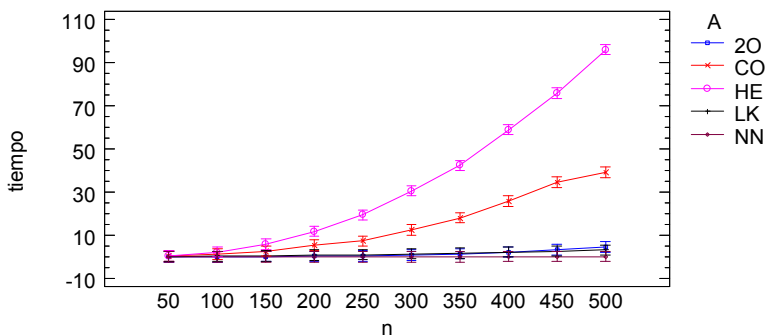


Figura 6.11: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo ($M \ll A$ y $M \ll T$).

Seguidamente se analiza el factor tipo de territorio. En la Figura 6.12 es curioso observar que, mientras que no existen diferencias significativas entre larga (L) y media (M) distancia, existe una ligera diferencia entre ellas y la corta (C) distancia. Si bien, dicha diferencia es de 1 segundo en promedio. No está del todo clara esta relación, aunque una posible explicación a este efecto podría encontrarse en el peso promedio de los arcos de la matriz. Serían necesarios más estudios en esta dirección para cerciorarse frente a posibles desviaciones de las hipótesis del ANOVA.

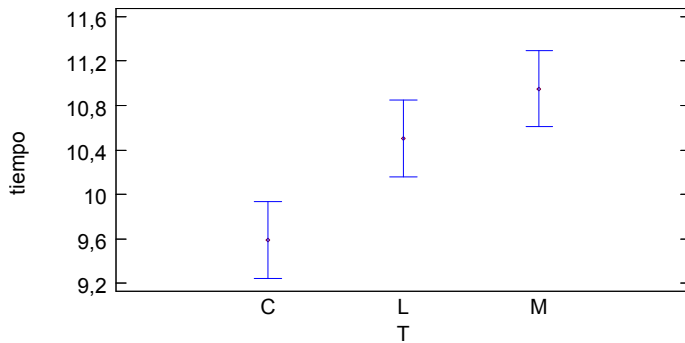


Figura 6.12: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tiempo y el territorio (M<>A y M<>T).

Por último, se analiza la interacción de los factores territorio y algoritmo sobre el tiempo de computación. En la Figura 6.13 cabe resaltar que el territorio afecta a Helsgaun en general frente al resto de heurísticas. Mientras que a Concorde le afecta en menor medida pero de manera levemente diferenciada para cada tipo de territorio. Se desconoce la razón de este efecto. Una hipótesis que se podría estudiar en el futuro, es que en matrices de territorios grandes (largas distancias) existe menos diversidad entre las distancias de los arcos, esto es, unos arcos más similares; y esto de algún modo dificulta la labor del algoritmo (y a la inversa).

Las conclusiones más relevante de este apartado son las siguientes:

1. Helsgaun es más lenta que Concorde.
2. Si en análisis posteriores se confirma que Concorde es capaz además de encontrar las mejores soluciones en estos mismos casos, se deducirá que es preferible usar Concorde frente a Helsgaun.
3. Se ha descubierto una intrigante relación entre el tipo de territorio y el tiempo de computación de Helsgaun y en especial de Concorde.

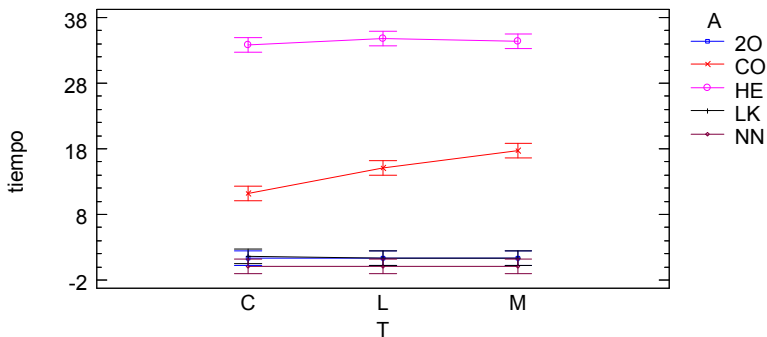


Figura 6.13: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el territorio y el algoritmo en el tiempo (M<>A y M<>T).

6.1.3 Análisis de la varianza del tiempo (M<>T, A<>CO y A<>LK)

Se tratan ahora únicamente aquellos algoritmos que son capaces de resolver matrices asimétricas (M=A). Queda excluido Lin Kernighan. En este análisis se han excluido las matrices transformadas por la gran dispersión que introducen en los resultados, pero no el resto de simétricas. De este modo, los resultados aquí presentados tendrán menos heterocedasticidad. La Tabla 6.5 muestra las estadísticas resultantes con interacciones de orden máximo igual a 2. Los resultados de la Ratio-F y del *p*-valor muestran 13 relaciones significativas: 5 factores y otras 8 interacciones. En este apartado, sólo se describen aquellas relaciones significativas que aportan información interesante al estudio en curso.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	233,71	2	116,85	5,00	0,0067
B:L	1 176,5	2	588,25	25,19	0,0000
C:M	7 075,48	3	2 358,49	101,01	0,0000
D:n	734 028	9	81 558,7	3 492,86	0,0000
E:A	1,09E6	2	549 871	23 548,98	0,0000
Análisis de varianza para tiempo (M<>T, A<>CO y A<>LK) - Suma de Cuadrados Tipo III.					

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Interacciones					
AB	38,31	4	9,57	0,41	0,8014
AC	468,86	6	78,14	3,35	0,0027
AD	569,39	18	31,63	1,35	0,1434
AE	2 193,9	4	548,47	23,49	0,0000
BC	446,59	6	74,43	3,19	0,0040
BD	2 097,47	18	116,52	4,99	0,0000
BE	2 166,35	4	541,58	23,19	0,0000
CD	8 234,88	27	304,99	13,06	0,0000
CE	87 919,9	6	14 653,3	627,55	0,0000
DE	917 929	18	50 996,0	2 183,98	0,0000
Residuos	123 055	5 270	23,35		
Total (corregido)	2,98E6	5 39			

Tabla 6.5: Análisis de varianza para tiempo (M<>T, A<>CO y A<>LK) - Suma de Cuadrados Tipo III.

En orden de relevancia, el primer factor es el algoritmo, seguido del tamaño de la matriz. Anteriormente ya se ha descrito el comportamiento de las heurísticas refinadas frente a las más sencillas, y cómo el tiempo de computación crece exponencialmente con el tamaño de la matriz. Es más interesante en este momento representar la interacción entre el algoritmo y el tamaño de la matriz. La Figura 6.14 es muy relevante, ya que muestra que Helsgaun es un algoritmo capaz de resolver incluso problemas ATSP de gran tamaño ($n = 500$) en menos de 2 minutos. Sin duda, es una gran noticia, teniendo presente que no es posible usar Concorde para la resolución de ATSP; siendo necesario aplicar la transformación de la matriz. Dicha transformación haría que Concorde empleara un gran tiempo de computación, tal y como se ilustra en la Figura 6.15. El tiempo de resolución de Concorde con matrices transformadas $n = 500$ alcanza como promedio los 6 000 segundos, esto es 1,66 horas, frente a los dos minutos de Helsgaun al tratar matrices asimétricas. Por otro lado, es sabido que Concorde puede llegar a alcanzar soluciones óptimas en su proceso de cálculo.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

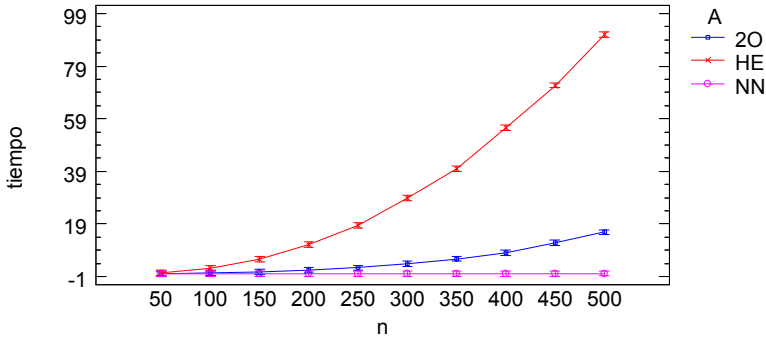


Figura 6.14: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo ($M \ll T$, $A \ll CO$ y $A \ll LK$).

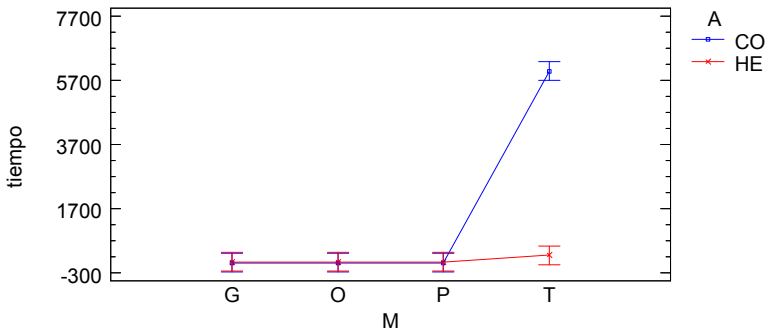


Figura 6.15: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo ($A=CO$, $A=HE$, $M \ll A$).

Es relevante la Figura 6.16 y también la Figura 6.17 que refleja que la asimetría condiciona el tiempo de computación. Es interesante también observar nuevamente que las matrices ortodrómicas se diferencian de las matrices P y G aunque todas ellas son simétricas. Esto parece indicar que Helsgaun tiene preferencia (le resulta más fácil encontrar la solución) por las matrices asimétricas donde los arcos tienen mayor diversidad (incluso entre un mismo par de localizaciones), que por aquellas matrices con arcos más homogéneos y menos diferenciados.

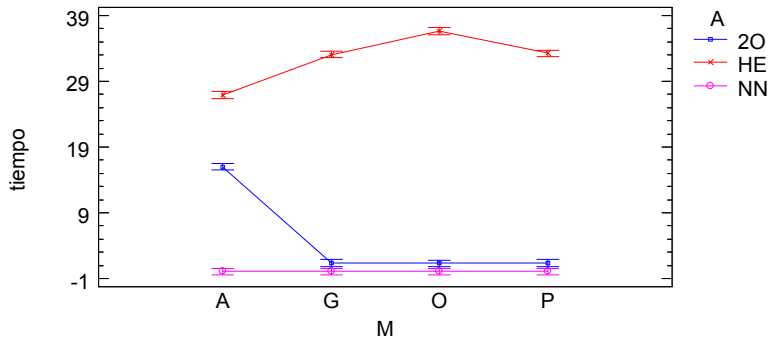


Figura 6.16: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo ($M \langle \rangle T$, $A \langle \rangle CO$ y $A \langle \rangle LK$).

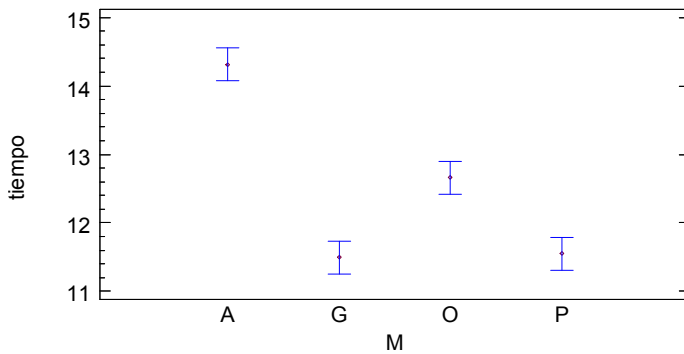


Figura 6.17: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tiempo y el tipo de matriz ($M \langle \rangle T$, $A \langle \rangle CO$ y $A \langle \rangle LK$).

En este análisis se ha intentado aportar nuevas facetas al estudio en curso, sus conclusiones son:

1. Se ha demostrado la versatilidad de Helsgaun para la resolución de diferentes problemas y la rapidez con la que los resuelve, sin necesidad de realizar una transformación.
2. Con transformación, Concorde requiere tiempos de computación altos frente a Helsgaun.

3. También ha quedado patente cierta predilección de Helsgaun por aquellas matrices con arcos más diferenciados, como son las asimétricas.

6.1.4 Análisis de la varianza del tiempo (M<>A, A=CO y A=HE)

En este último análisis de la varianza del tiempo, se va a realizar una interesante comparativa entre los algoritmos Concorde y Helsgaun. Para que ambos puedan ser comparados, hay que excluir las matrices asimétricas del estudio. Por tanto, sólo se incluyen los resultados de matrices simétricas, incluyendo las transformadas cuyo efecto es interesante estudiar para completar las conclusiones anteriores. La Tabla 6.6 muestra los estadísticos resultantes con interacciones de orden máximo igual a 2. Los resultados de la Ratio-F y del *p*-valor indican 11 relaciones significativas: 4 factores y otras 7 interacciones. De todas ellas, a continuación sólo se describen aquellas que resultan interesantes para completar el estudio.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	4,56E7	2	2,28E7	2,73	0,0652
B:L	3,39E8	2	1,69E8	20,36	0,0000
C:M	6,44E9	3	2,14E9	257,39	0,0000
D:n	1,76E9	9	1,96E8	23,54	0,0000
E:A	1,81E9	1	1,81E9	218,01	0,0000
Interacciones					
AB	8,28E7	4	2,07E7	2,48	0,0419
AC	1,33E8	6	2,22E7	2,66	0,0141
AD	1,98E8	18	1,10E7	1,32	0,1611
AE	4,42E7	2	2,21E7	2,65	0,0709
BC	1,01E9	6	1,69E8	20,27	0,0000
BD	1,60E8	18	8,94E6	1,07	0,3748
BE	3,32E8	2	1,66E8	19,89	0,0000
CD	4,97E9	27	1,84E8	22,08	0,0000
CE	5,61E9	3	1,87E9	224,08	0,0000

Análisis de varianza para tiempo (M<>A, A=CO y A=HE) - Suma de Cuadrados Tipo III. ▷

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
DE	1,39E9	9	1,54E8	18,51	0,0000
Residuos	2,91E10	3 487	8,34E6		
Total (corregido)	5,34E10	3 599			

Tabla 6.6: Análisis de varianza para tiempo ($M \ll A$, $A=CO$ y $A=HE$) - Suma de Cuadrados Tipo III.

La Figura 6.18 muestra que Concorde se ve mucho más afectado por la transformación que Helsgaun.

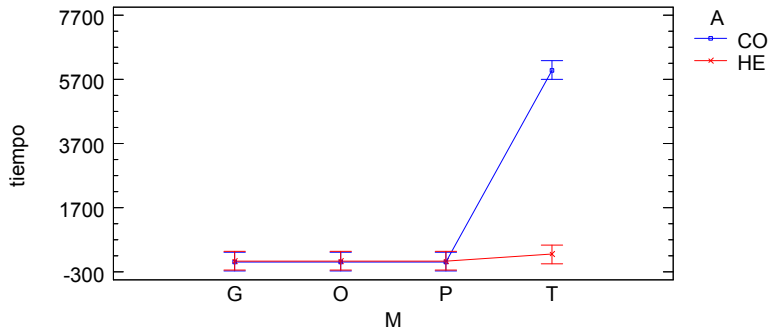


Figura 6.18: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el tipo de matriz y el algoritmo en el tiempo ($M \ll A$, $A=CO$ y $A=HE$).

Es interesante también observar la evolución de estos dos algoritmos respecto al tamaño del problema, debido al efecto de la transformación Concorde tiene tiempos promedios superiores a Helsgaun, tal y como ilustra la Figura 6.19.

Para terminar, resulta interesante analizar la interacción entre estos dos algoritmos y los factores territorio y localización. En la Figura 6.20 se muestra la interacción con el territorio, y se adivina que comparativamente Concorde es más sensible que Helsgaun (como promedio) a los efectos del territorio. Destaca que dicha sensibilidad distingue entre territorio de corta distancia (C) y el resto de media y larga distancia. También es relevante ver que el territorio tiene cierto efecto sobre los tiempos incluso en matrices simétricas.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

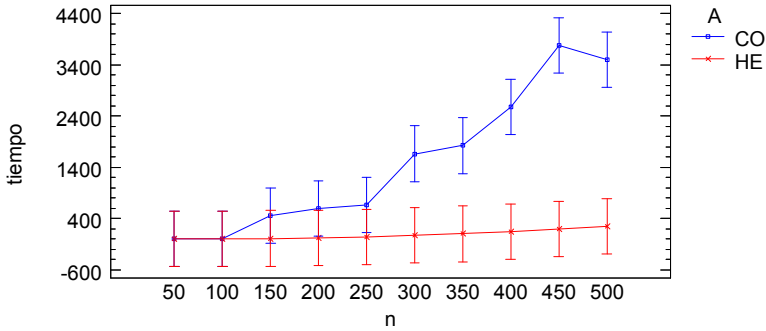


Figura 6.19: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el tamaño de matriz y el algoritmo en el tiempo ($M \langle \rangle A$, $A=CO$ y $A=HE$).

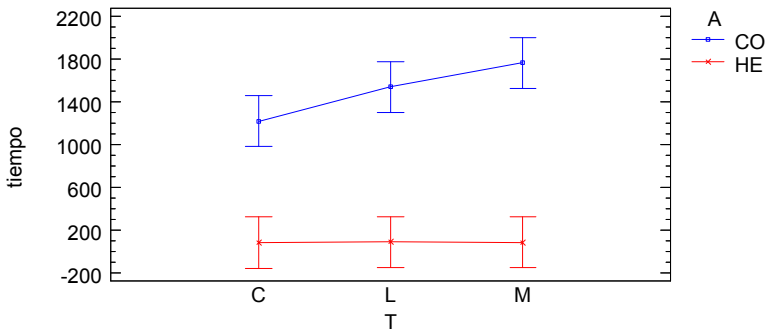


Figura 6.20: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el territorio y el algoritmo en el tiempo ($M \langle \rangle A$, $A=CO$ y $A=HE$).

En la Figura 6.21 se ilustra la interacción entre la localización de los nodos y los algoritmos. Nuevamente la localización en cuadrícula parece dificultar la labor del algoritmo, en este caso Concorde. Tal vez, estas dos interacciones sean poco significativas realmente, pero la transformación de la matriz parece amplificar su efecto en promedio.

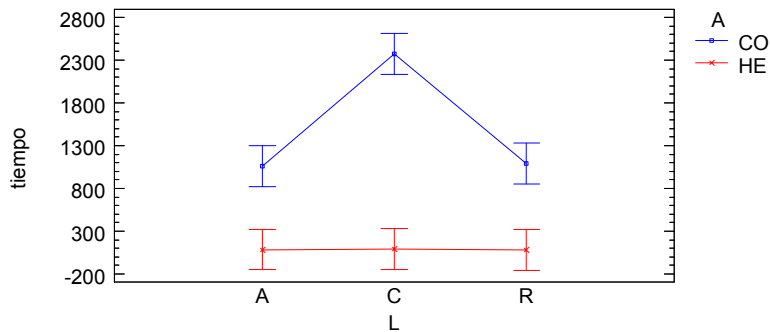


Figura 6.21: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la interacción entre el tiempo, la localización y el algoritmo ($M < > A$, $A = CO$ y $A = HE$).

6.1.5 Conclusiones a los análisis de varianza para el tiempo

Tras los análisis anteriores, en este apartado se recogen las conclusiones más significativas, algunas de las cuales son aportaciones relevantes de este estudio.

Relaciones observadas:

1. El tipo de algoritmo condiciona el tiempo de computación de manera significativa, siendo Helsgaun y Concorde los computacionalmente más costosos.
2. El tamaño de la matriz condiciona el tiempo de computación, de manera directa y exponencial.
3. El proceso de transformación de las matrices condiciona enormemente el tiempo de computación.
4. Con matrices simétricas, Helsgaun es unas tres veces más lento que Concorde.
5. Se observa como $M=T$ afecta mucho más a Concorde que a Helsgaun.

6. Las localizaciones en cuadrícula dificultan la resolución de los problemas frente a otro tipo de localizaciones. Este efecto se ve amplificado con las matrices transformadas y más a Concorde que a Helsgaun.
7. El territorio muestra cierto impacto sobre el tiempo de computación. Especialmente en el caso de las cortas distancias. Una hipótesis es que la diversidad en los valores de las distancias de los arcos puede influir en los resultados.
8. Helsgaun también se ve afectado por el territorio y la localización; y la asimetría afecta al tiempo de computación.

Para terminar este estudio, se han incluido una serie de gráficas descriptivas (con puntos, líneas de suavizado y franjas de error estándar); donde se comparan los tiempos de computación en función del tamaño de la matriz (n) para todas las combinaciones de algoritmos y tipos de matriz. En la Figura 6.22 se representan conjuntamente todas las combinaciones de algoritmo y tipo de matriz en un gráfico de dos ejes: en el eje horizontal el tamaño de la matriz n y en el vertical el tiempo de computación en segundos y escala logarítmica. En la Figura 6.23 se ha dividido el gráfico anterior en una matriz de gráficos, donde cada fila corresponde a un tipo de matriz y cada columna a un algoritmo. Nótese que no existen las combinaciones de LK y CO para las matrices asimétricas. Por último, en la Figura 6.24 se ha realizado una comparativa de Helsgaun con Concorde para todos los casos posibles, y en la Figura 6.25 se agrupan todas las combinaciones del resto de heurísticas sencillas. Observando con detalle los diferentes gráficos se puede comprender mejor el comportamiento de los diferentes algoritmos para la resolución de los problemas simétricos y asimétricos, si bien hay que tener presente que el tiempo está representado en una escala logarítmica.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

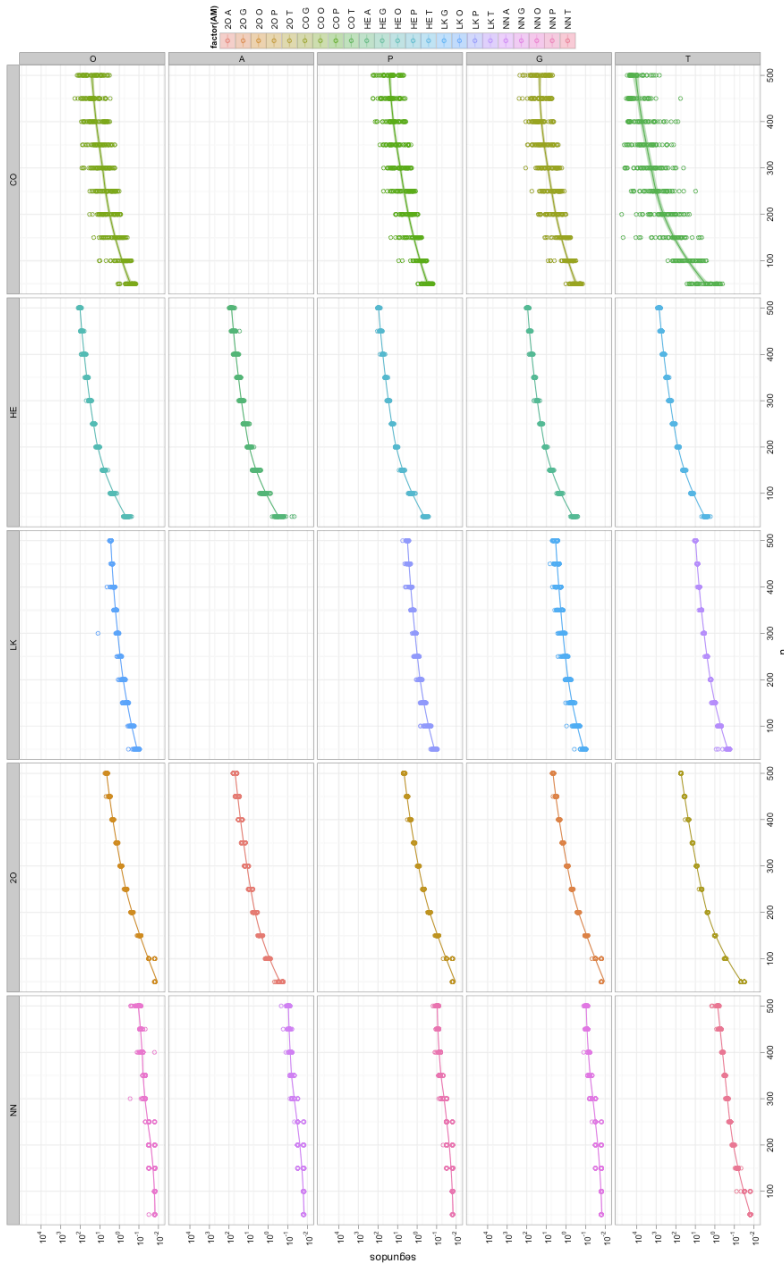


Figura 6.23: Comparativa para todos los algoritmos y tipos de matriz.

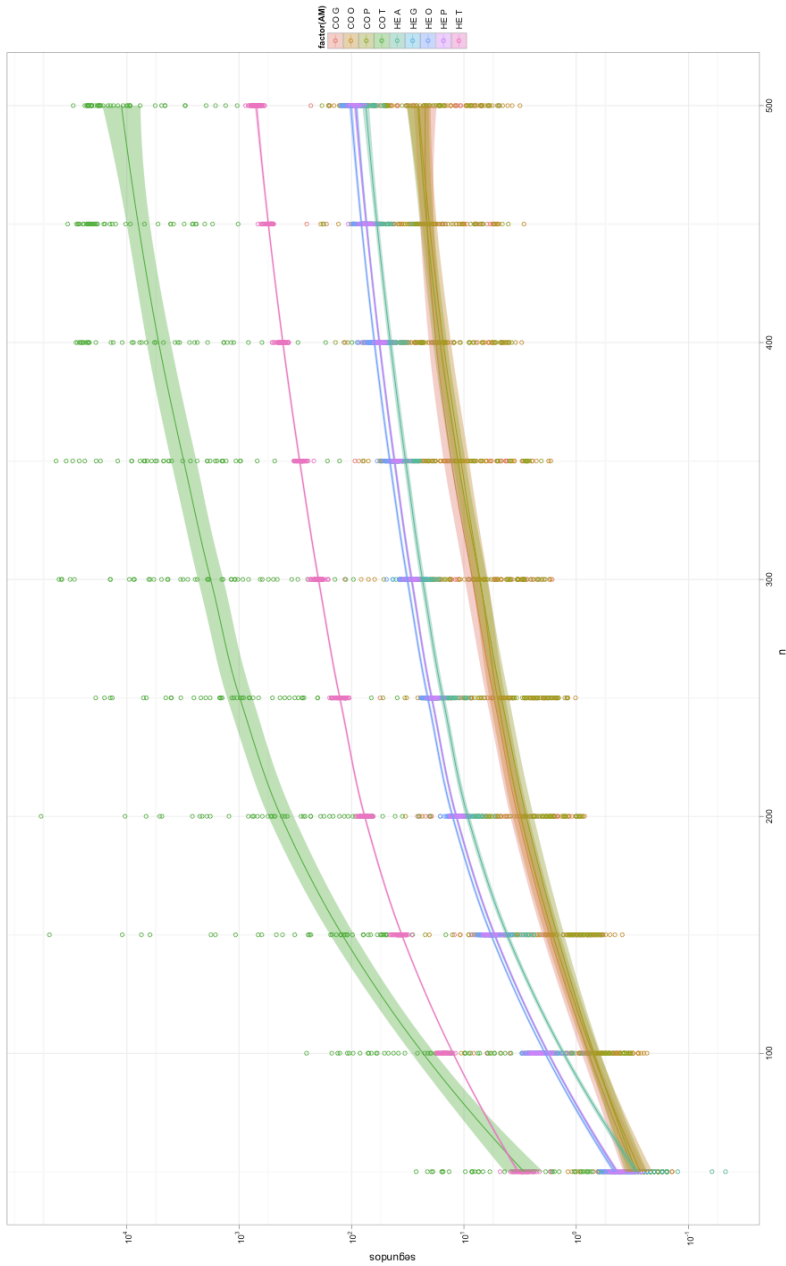


Figura 6.24: Tiempos de computación según n de Helsing vs. Concorde y tipos de matriz.

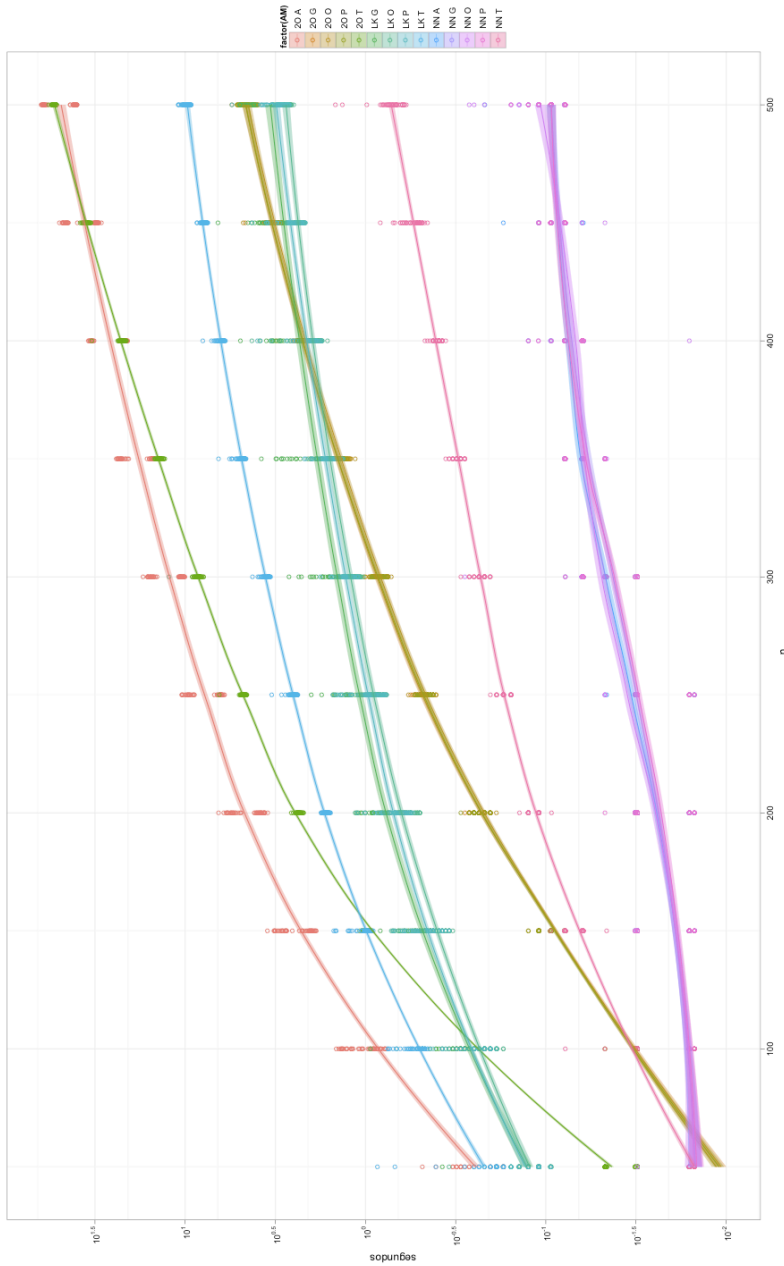


Figura 6.25: Tiempos de computación según n para heurísticas sencillas y tipos de matriz.

6.2 Bondad de las soluciones de los algoritmos

En esta sección se van a analizar los resultados obtenidos por los algoritmos en todas las experiencias computacionales. El objetivo no es sólo analizar en qué medida un algoritmo es mejor que otro, sino si dicha bondad se ve condicionada por los factores seleccionados en el diseño de experimentos: territorio, localización, tamaño de la matriz y tipo de matriz o asimetría. Para ello, se han utilizado las siguientes variables respuesta o indicadores:

$S_{i,A}$ es la solución a la instancia i proporcionada por un determinado algoritmo A . Es el resultado de tomar la secuencia solución y valorarla con la matriz de distancias M_i de la instancia i . Es importante recordar que Concorde y Lin Kernighan no pueden resolver problemas asimétricos ATSP, esto es $M=A$.

S_i^* es la mejor solución encontrada para la instancia i proporcionada por el conjunto de posibles algoritmos A . Si la matriz es asimétrica ($M=A$), lógicamente se toma la mejor solución de los algoritmos: Helsgaun, NN y $2-opt$, en otros casos se toma la mejor de todos los algoritmos.

ΔS_i^* es el porcentaje de incremento de la solución $S_{i,A}$ respecto de la mejor solución encontrada S_i^* . Tal y como se expresa en:

$$\Delta S_i^* = \frac{S_{i,A} - S_i^*}{S_i^*} \cdot 100 \quad \forall A, i \quad (6.1)$$

Este indicador tendrá un valor del 0% si la solución $S_{i,A}$ coincide con la mejor solución encontrada S_i^* , y valores mayores cuanto más se aleje (peor sea respecto) de la mejor solución encontrada. Este indicador no será posible calcularlo ni analizarlo en el caso de $M=A$ y los algoritmos Concorde y Lin Kernighan.

A continuación se muestran los análisis y conclusiones más relevantes encontrados, aunque hay que mencionar que para llegar a ellos fue necesario

realizar todo un conjunto de análisis de la varianza y otras estadísticas. La siguiente Tabla 6.7 resume el conjunto de ANOVA realizados.

Variable respuesta	Algoritmo	Asimetría
ΔS_i^*	Todos	Todos
ΔS_i^*	Todos	M<>T
ΔS_i^*	A<>CO, A<>LK	M<>T
ΔS_i^*	Todos	M<>A
ΔS_i^*	A=CO, A=LK, A=HE	M<>A
ΔS_i^*	A=CO, A=LK, A=HE	M<>A, M<>T
ΔS_i^*	A=CO, A=LK, A=HE	M=T

Tabla 6.7: Diversos análisis de varianza para ΔS_i^* .

Se puede hacer una clasificación de los algoritmos en términos generales según su tasa de éxito tal y como muestra la siguiente Tabla 6.8.

Algoritmo	Número de S^*	Experiencias	% de S^*
NN	7	2 250	0,31 %
2O	5	2 250	0,22 %
LK	730	1 800	40,56 %
CO	1 650	1 800	91,67 %
HE	1 446	2 250	64,27 %
Total		10 350	

Tabla 6.8: Clasificación de algoritmos TSP según su mejor solución.

Según estos resultados, el algoritmo con mayor número de mejores soluciones es Concorde en un 91,67 % de sus posibles experiencias (no asimétricas), seguido de Helsgaun (simétricas y asimétricas). A continuación, Lin Kernighan y con muy poco éxito (menos del 0,5 %) se encuentran NN y 2-opt. La Tabla 6.9 desglosa los resultados de la Tabla 6.8 según el tipo de matriz. Nótese que para el tipo de matriz es M=(O, P, G, T) y cada algoritmo realizó 1 800 experiencias computacionales de las cuales 450 corresponden al tipo de matriz transformada (M=T). Por otro lado, en el tipo asimétrico (M=A) cada algoritmo ATSP resolvió 450 instancias.

Algoritmo	M=(O,P,G)		M=A		M=T	
	N. S^*	% S^*	N. S^*	% S^*	N. S^*	% S^*
NN	0	0,0 %	0	0,0 %	7	1,6 %
2O	3	0,2 %	2	0,4 %	0	0,0 %
LK	628	46,6 %	-	-	102	22,7 %
CO	1350	100 %	-	-	300	66,7 %
HE	930	68,9 %	448	99,6 %	68	15,1 %

Tabla 6.9: Clasificación de algoritmos TSP según su mejor solución y el tipo de matriz.

Como se esperaba, Concorde siempre encuentra la solución óptima para las 1 350 instancias simétricas. La tasa de éxito de Helsgaun es de un 69 %, mayor que la de LK con un 46,6 %. Las heurísticas sencillas raramente tienen éxito. En los casos asimétricos, Helsgaun claramente domina, aunque no se disponen de datos comparativos para LK y CO ya que no aceptan las matrices asimétricas. Sorprendentemente, CO no siempre obtiene el óptimo en todos los casos con M=T. Una posible explicación, es que durante el proceso de transformación, los valores $-\infty$ o $+\infty$ introducidos crean algún tipo de inestabilidad numérica dentro de CO. Seguidamente se presentan los resultados más concluyentes de los diferentes análisis de la varianza realizados.

6.2.1 Análisis de la varianza de la bondad (A=CO, A=LK, A=HE y M<>A, M<>T)

En este análisis de la varianza, se excluyen los algoritmos NN y *2-opt*, y se centra la atención en los tres principales algoritmos y las matrices simétricas, excluyendo el efecto de la transformación (que se explicará más adelante). El siguiente ANOVA de la Tabla 6.10 muestra si existe alguna relación entre el indicador de bondad de la solución ΔS_i^* y el resto de factores. Aparecen 11 relaciones significativas: 4 factores y 7 interacciones. Los factores estudiados en orden de importancia son: el algoritmo, el tamaño, y la localización; seguido de la interacción entre el algoritmo y el tamaño de la matriz.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Efectos principales					
A:T	0,01	2	0,005	3,04	0,0477
B:L	0,08	2	0,044	23,59	0,0000
C:M	0,0004	2	0,000	0,13	0,8766
D:n	1,00	9	0,11	59,29	0,0000
E:A	1,38	2	0,69	368,01	0,0000
Interacciones					
AB	0,02	4	0,005	2,76	0,0264
AC	0,01	4	0,004	2,45	0,0444
AD	0,06	18	0,003	2,05	0,0055
AE	0,01	4	0,003	1,74	0,1383
BC	0,10	4	0,02	14,02	0,0000
BD	0,11	18	0,006	3,34	0,0000
BE	0,06	4	0,01	8,78	0,0000
CD	0,04	18	0,002	1,31	0,1699
CE	0,01	4	0,002	1,33	0,2544
DE	0,64	18	0,03	18,91	0,0000
Residuos	7,40	3936	0,001		
Total (corregido)	10,99	4049			

Tabla 6.10: Análisis de varianza para ΔS_i^* - Suma de Cuadrados Tipo III.

En la Figura 6.26 se observa que para la resolución de matrices simétricas no transformadas, Concorde es sin duda es el mejor algoritmo. Seguido de HE y LK. Aunque es importante señalar que las diferencias son minúsculas (0,05 % como máximo para LK, y 0,02 % para HE).

En la Figura 6.27 se ilustra como el tamaño parece afectar muy ligeramente (0,05 % es prácticamente nada) a la calidad de la solución. En estos casos, es más importante recordar, la importancia o el comportamiento sobre el tiempo de computación, tal y como se describe en el apartado 6.1.

La Figura 6.28 muestra cierto impacto de la localización sobre la bondad de las soluciones. La estructura de localizaciones radial y cuadrícula parece dificultar la calidad de la solución, pero apenas un 0,03 %.

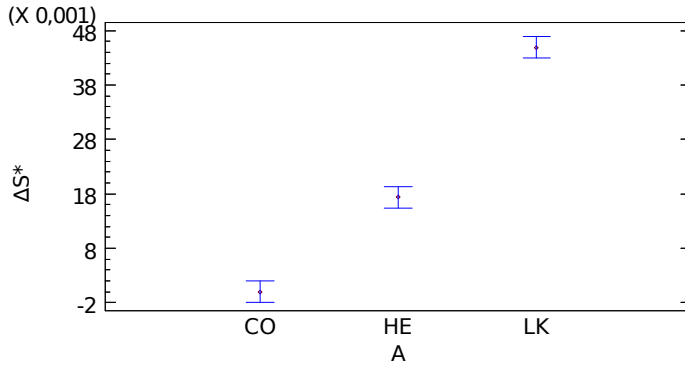


Figura 6.26: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la bondad y los algoritmos (A=CO, A=LK, A=HE y M<>A, M<>T).

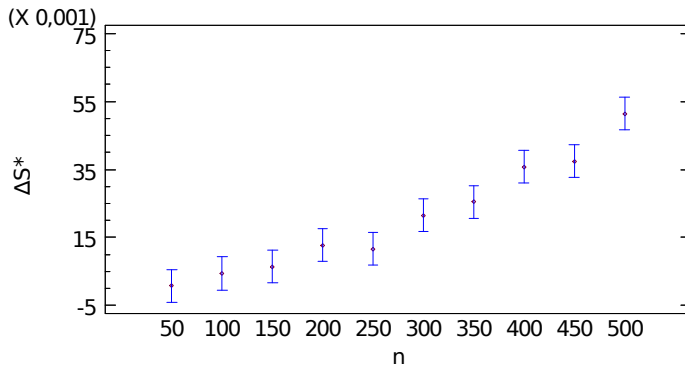


Figura 6.27: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la bondad y el tamaño (A=CO, A=LK, A=HE y M<>A, M<>T).

Se demuestra una interacción entre el algoritmo y el tamaño de la matriz que afecta a la bondad de las soluciones. La Figura 6.29 muestra dicha relación. En ella, se observa que LK se ve más afectado que HE y CO por el tamaño del problema en la calidad de la solución. Pero nótese que las diferencias máximas apenas alcanza el 0,1% de desviación en el peor de los casos. Helsgaun se sitúa en un 0,06% de desviación máxima para $n = 500$.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

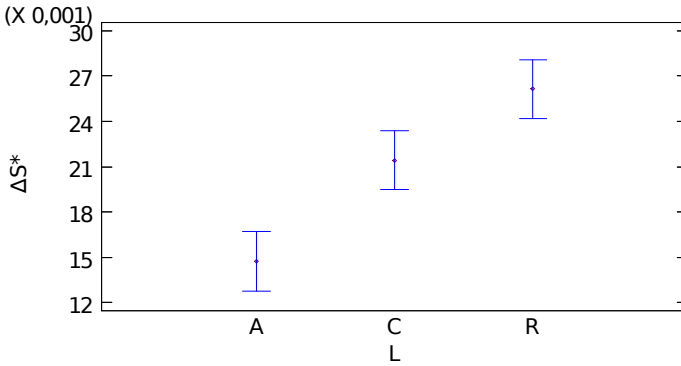


Figura 6.28: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la bondad y la localización (A=CO, A=LK, A=HE y M<>A, M<>T).

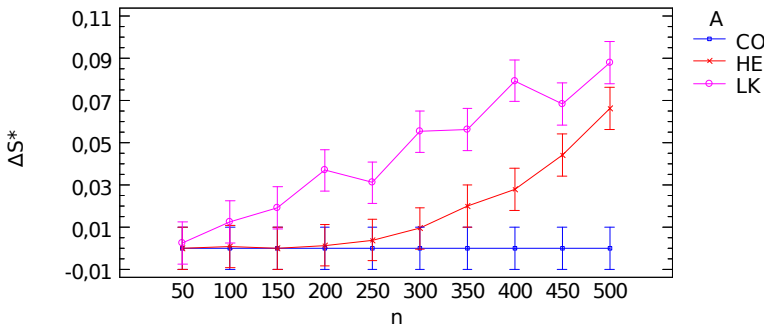


Figura 6.29: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-tamaño y la bondad (A=CO, A=LK, A=HE y M<>A, M<>T).

Por último, se ha creído interesante mostrar también la interacción entre el algoritmo y el factor localización. La Figura 6.30 muestra como mientras Concorde presenta una alta bondad y es robusto frente a esta interacción, Helsgaun parece verse afectado en un 20 % por la localización radial, y LK además se ve afectado por las localizaciones en cuadrícula frente a las aleatorias. Las conclusiones más relevantes de este apartado son las siguientes:

1. En la resolución de problemas simétricos sin transformar, Concorde es

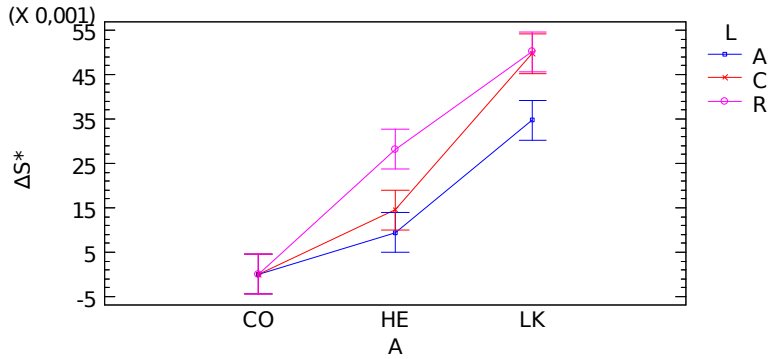


Figura 6.30: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-localización y la bondad (A=CO, A=LK, A=HE y M<>A, M<>T).

el mejor algoritmo, seguido muy de cerca por Helsgaun y Lin Kernighan.

2. El tamaño del problema tiene un impacto muy pequeño en la calidad de la solución.

6.2.2 Análisis de la varianza de la bondad (A=CO, A=LK, A=HE y M=T)

En esta sección se describe el análisis de la varianza para el caso anterior, pero sólo con matrices transformadas. Se pretende analizar el impacto de la transformación sobre los 3 principales algoritmos. En la Tabla 6.11 se muestra si existe alguna relación entre el indicador de bondad de la solución ΔS_i^* y el resto de factores.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Efectos principales					
A:T	21 578,0	2	10 789	192,14	0,0000
B:L	456,53	2	228,26	4,07	0,0174
Análisis de varianza para ΔS_i^* (M=T) - Suma de Cuadrados Tipo III. ▷					

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
C:n	5 538,51	9	615,39	10,96	0,0000
D:A	3 724,63	2	1 862,31	33,17	0,0000
Interacciones					
AB	397,21	4	99,30	1,77	0,1328
AC	2 595,29	18	144,18	2,57	0,0003
AD	17,73	4	4,43	0,08	0,9888
BC	1 727,99	18	95,99	1,71	0,0320
BD	761,30	4	190,32	3,39	0,0091
CD	1 872,38	18	104,02	1,85	0,0161
Residuos	71 199,2	1 268	56,15		
Total (corregido)	109 869	1 349			

Tabla 6.11: Análisis de varianza para ΔS_i^* ($M=T$) - Suma de Cuadrados Tipo III.

Atendiendo a los valores de la Ratio-F y del *p*-valor aparecen 8 relaciones significativas: 4 factores y 4 interacciones. Los factores en orden de importancia son: el territorio, el algoritmo, y el tamaño. En la Figura 6.31 para la resolución únicamente de matrices simétricas transformadas, es interesante observar que el territorio de corta distancia afecta en un 9 % negativamente a la bondad de las soluciones. No se observan diferencias entre los territorios de media y larga distancia.

A continuación, en la Figura 6.32 parece que Helsgaun obtiene una tasa de éxito menor que CO y LK para la resolución de matrices transformadas, tal y como se adelantaba en la Tabla 6.9.

En la Figura 6.33 es interesante observar que la bondad decrece linealmente respecto del tamaño de la matriz, desde valores próximos al 2 % para $n = 50$ hasta valores del 8,5 % en $n = 500$.

Por último, del resto de relaciones significativas, se ha creído como más interesante mostrar en la Figura 6.34 como para todo el rango de n estudiado, el territorio de corta distancia es un factor que afecta a la bondad de las soluciones, empeorando la tasa de éxito a razón de 1 a 5 respecto de los otros territorios.

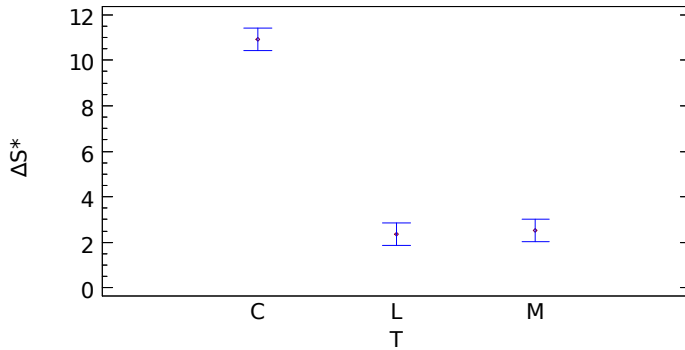


Figura 6.31: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la bondad y el territorio (A=CO, A=LK, A=HE y M=T).

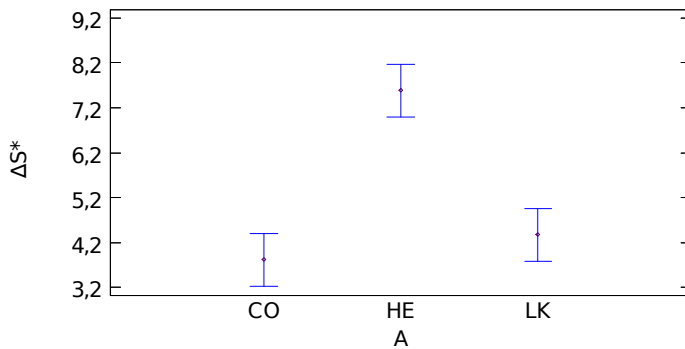


Figura 6.32: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la bondad y el algoritmo (A=CO, A=LK, A=HE y M=T).

6.2.3 Conclusiones a los análisis de varianza de la bondad

En este apartado se recogen las conclusiones más significativas y relevantes de este estudio.

Problemas asimétricos:

1. Como es sabido Concorde no puede resolver directamente problemas asimétricos (M=A) sin realizar la transformación de la matriz. En estos casos, Helsgaun es el mejor algoritmo de las heurísticas probadas (NN,

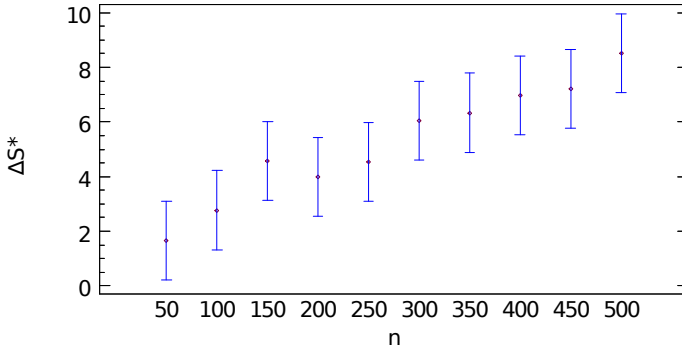


Figura 6.33: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la bondad y el tamaño de la matriz (A=CO, A=LK, A=HE y M=T).

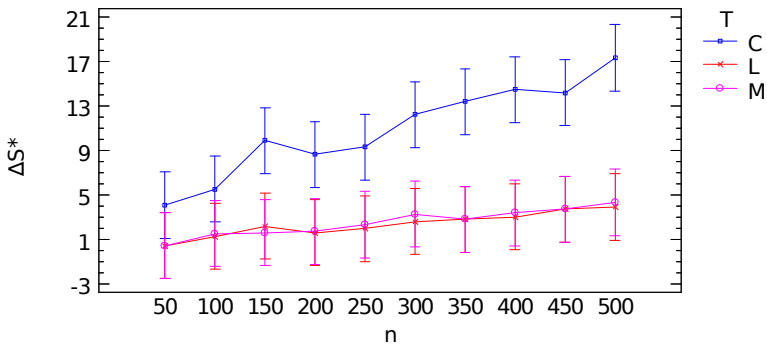


Figura 6.34: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la interacción territorio-tamaño de la matriz y la bondad (A=CO, A=LK, A=HE y M=T).

2-opt y HE). Por ejemplo, con 2-opt la asimetría afecta a la calidad de las soluciones empeorando sus resultados un 11 %.

2. Las heurísticas NN y 2-opt han presentado los peores resultados tanto en la resolución de problemas simétricos como asimétricos, y se han considerado algoritmos testigo en este estudio. En la resolución de problemas simétricos y asimétricos, los factores territorio, localización y

tamaño del problema afectan a las heurísticas NN y *2-opt* negativamente.

Problemas simétricos

1. Para la resolución de problemas simétricos, Concorde ofrece las mejores soluciones en términos generales, seguido de LK y HE. Las diferencias apenas son del 1 % en términos generales y promedios. Sin embargo, el tiempo computacional, y la sencillez de implementación podría decantar la elección hacia otras heurísticas.
2. Al eliminar el factor de la transformación, en la resolución de problemas simétricos, CO destaca muy levemente sobre HE y LK.
3. En la resolución de problemas simétricos con transformación ($M=T$), ésta afecta a HE más que a CO y LK. Dado el enorme tiempo de computación que Concorde emplea en la resolución de problemas simétricos con matrices transformadas, en estos casos, Lin Kernighan es una buena opción, ya que ofrece buenos resultados y tiempos menores de computación que Concorde y que Helsgaun.
4. En el caso de matrices simétricas con transformación, el factor territorio es relevante en relación a la bondad de la solución. Las cortas distancias parecen dificultar significativamente la resolución de problemas con un 9 % de empeoramiento. Este efecto se observa además para todo el rango de tamaños estudiados, con ratios de empeoramiento de 1 a 5 para todo el rango de n .
5. El tamaño de la matriz influye en los resultados, aunque muy ligeramente a HE y LK en el peor de los casos.
6. La localización también tiene cierto impacto, pero muy pequeño sobre HE y LK.

6.3 Comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP)

En los análisis presentados en el apartado 5.2 se encontraron relaciones entre el grado de asimetría de las matrices de distancias y algunos factores. Una de las conclusiones de dicho análisis es que existe cierta relación entre el grado de asimetría de una matriz (δ) y el peso promedio (\overline{Peso}) de los arcos de la misma. Puede ser lógico pensar que si existe una relación entre las matrices simétricas y asimétricas en forma de incremento de peso o peso promedio de las distancias entre pares de nodos:

1. ¿Podría ser factible resolver el problema simétrico TSP (más sencillo y rápido) y a continuación tomar su secuencia solución como secuencia válida al problema asimétrico ATSP?
2. ¿Se puede ponderar de algún modo el valor de la solución TSP para tener una aproximación (o cota) de la solución al problema asimétrico ATSP?

El estudio presentado en este apartado, pretende ofrecer algo de luz sobre estas cuestiones. Para ello, en primer lugar se definen los siguientes indicadores:

TSP es el resultado de tomar la secuencia solución encontrada en la resolución del problema simétrico (TSP), y valorarla con la matriz de distancias propias del problema simétrico original (matriz ortodrómica).

ATSP de forma análoga, es el resultado de tomar la secuencia solución de la resolución del problema asimétrico (ATSP), y valorarla con la matriz de distancias propias del problema asimétrico (matriz asimétrica). Como en los algoritmos Lin Kernighan y Concorde no es posible resolver ATSP, en estos casos, se toma la secuencia solución del problema mediante la transformación de la matriz. Dicha secuencia solución se valora con la matriz asimétrica.

$\Delta ATSP$ es el porcentaje de incremento de la valoración $ATSP$ respecto del TSP . Tal y como se expresa en:

$$\Delta ATSP = \frac{ATSP - TSP}{TSP} \cdot 100 \quad (6.2)$$

TSP_A en este caso se toma la secuencia solución al problema TSP (simétrico) y se valora con la matriz de distancias asimétricas (M=A). Lógicamente, como las distancias reales asimétricas son mayores o iguales a las distancias ortodrómicas, esta valoración $TSP_A \geq TSP$.

$ATSP_O$ es el caso recíproco al anterior, se toma la secuencia solución al problema ATSP (asimétrico) y se valora con la matriz ortodrómica (M=O). Como las distancias ortodrómicas son menores o iguales a las reales asimétricas, esta valoración será menor a la solución $ATSP$.

ΔTSP_A es el porcentaje de incremento de la valoración TSP_A respecto de la $ATSP$. Este indicador también puede ser negativo señalando un decremento:

$$\Delta TSP_A = \frac{TSP_A - ATSP}{ATSP} \cdot 100 \quad (6.3)$$

$\Delta ATSP_O$ es el porcentaje de incremento (o en negativo, decremento) de la valoración $ATSP_O$ respecto de la TSP , tal y como muestra:

$$\Delta ATSP_O = \frac{ATSP_O - TSP}{TSP} \cdot 100 \quad (6.4)$$

Distancia Hamming (dH) para medir el grado de diferencia o desacuerdo entre las secuencias TSP y ATSP. Este indicador proporciona una medida del grado de desorden de la secuencia TSP respecto de la secuencia ATSP. La distancia Hamming fue descrita en el apartado 4.6.3. Nótese que la distancia Hamming puede tener un valor máximo de n .

ΔdH es el porcentaje de nodos diferentes sobre el total de nodos, que tiene la secuencia TSP respecto de la ATSP:

$$\Delta dH = \frac{dH}{n} \cdot 100 \quad (6.5)$$

Valores muy altos de este indicador (próximos al 100%) o valores dH próximos a n , indican que cualitativamente la secuencia TSP es muy diferente a la obtenida en el problema ATSP.

Distancia de adyacencia (dA) proporciona una mejor información sobre la similitud de las secuencias en el contexto del TSP, ya que indica el número de arcos de la secuencia TSP no coincidentes en la secuencia ATSP. La distancia de adyacencia fue descrita también en el apartado 4.6.3. Vale la pena recordar que la distancia de adyacencia puede tener un valor máximo de $n + 1$.

ΔdA es el porcentaje de arcos diferentes sobre el total de arcos, que tiene la secuencia TSP respecto de la ATSP:

$$\Delta dA = \frac{dA}{n + 1} \cdot 100 \quad (6.6)$$

Valores muy altos de este indicador (próximos al 100%) o valores dA próximos a $n + 1$, indican que cualitativamente la secuencia TSP es muy diferente a la obtenida en el problema ATSP.

6.3.1 Análisis cuantitativo

La siguiente Tabla 6.12 muestra el análisis estadístico sencillo de los indicadores cuantitativos $\Delta ATSP$, ΔTSP_A y $\Delta ATSP_O$ de todo el conjunto de datos disponible: 3 territorios \times 3 localizaciones \times 5 réplicas \times 10 tamaños diferentes de matrices \times 5 algoritmos diferentes = 2 250 registros.

	$\Delta ATSP$	ΔTSP_A	$\Delta ATSP_O$
Recuento	2 250	2 250	2 250
Promedio	81,62	12,35	15,26
Desviación estándar	28,53	15,39	12,49
Coef. de variación	34,95 %	124,68 %	81,86 %
Mínimo	32,97	-16,59	-11,12
Máximo	196,89	89,91	65,25

Tabla 6.12: Análisis cuantitativo de las secuencias.

Lo más relevante e interesante de estas estadísticas, es el promedio del indicador $\Delta ATSP$ con un valor del 81,62 % y un desviación estándar igual a 28,53, indica claramente que existe una gran diferencia cuantitativa entre las soluciones al problema asimétrico ATSP y las soluciones al problema simétrico TSP. En el siguiente análisis se confirmará además que también existen diferencias significativas desde el punto de vista cualitativo, esto es, la secuencia de localizaciones. Es importante señalar, que el valor mínimo de este indicador es de un 32,98 % y que se ha llegado a alcanzar el valor máximo del 196,89 %.

La siguiente Figura 6.35 ilustra en forma de histograma la distribución de frecuencias de los incrementos del indicador ($\Delta ATSP$). Se puede observar claramente como la gran mayoría de los casos tiene valores de incremento entre el 50 % y el 150 %, que son grandes o muy grandes diferencias.

A continuación, en la Figura 6.36 también en forma de histograma se muestra la distribución de frecuencias del indicador (ΔTSP_A). Nótese que este indicador puede tomar valores negativos (decrementos). Su curva de distribución está desplazada hacia incrementos, con un valor promedio del 12,35 % y una desviación estándar de 15,39. Un 37,7 % de los casos tiene diferencias absolutas iguales o superiores al 10 %, y un 62,08 % de los casos tiene diferencias absolutas iguales o superiores al 5 %.

La idea que subyace detrás de estas estadísticas nuevamente es que no es lo mismo resolver problemas simétricos que asimétricos, y tampoco es factible resolver problemas simétricos TSP y posteriormente valorar la secuencia solución con la matriz de distancias reales asimétricas. Como se demuestra,

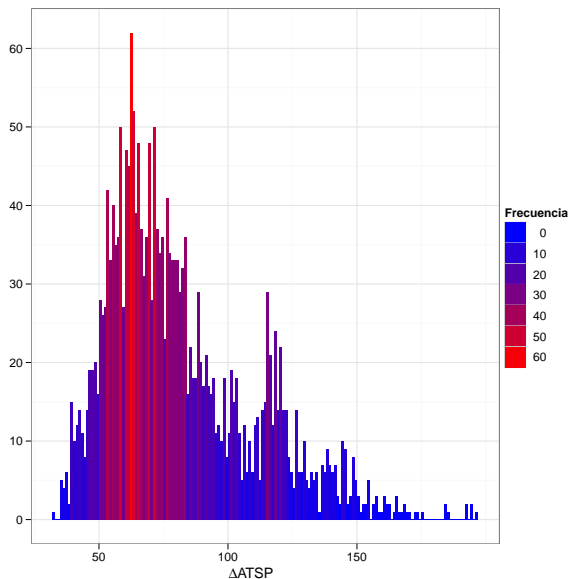


Figura 6.35: Histograma del incremento del indicador $\Delta ATSP$.

la mayoría de los casos tiene diferencias iguales y superiores al 5 % (y un promedio del 12,35 %). Vale la pena recordar que en el problema TSP, la bondad entre algunos algoritmos de última generación se disputa o defiende en rangos inferiores al 1 %.

Por último, en la Figura 6.37 se muestra la distribución de frecuencias del indicador ($\Delta ATSP_O$). Esta gráfica se parece a la anterior, aunque el significado es diferente. Al igual que en el caso anterior, este indicador también puede tomar valores negativos (decrementos). Su curva de distribución está desplazada hacia los incrementos, con un valor promedio del 15,26 y una desviación estándar de 12,49. En esta ocasión, un 54,62 % de los casos tiene diferencias absolutas iguales o superiores al 10 %, y un 79,64 % de los casos tiene diferencias absolutas iguales o superiores al 5 %.

Nuevamente, más de la mitad de los casos muestra diferencias superiores o iguales a dos dígitos porcentuales. Se demuestra que tampoco es lo mismo

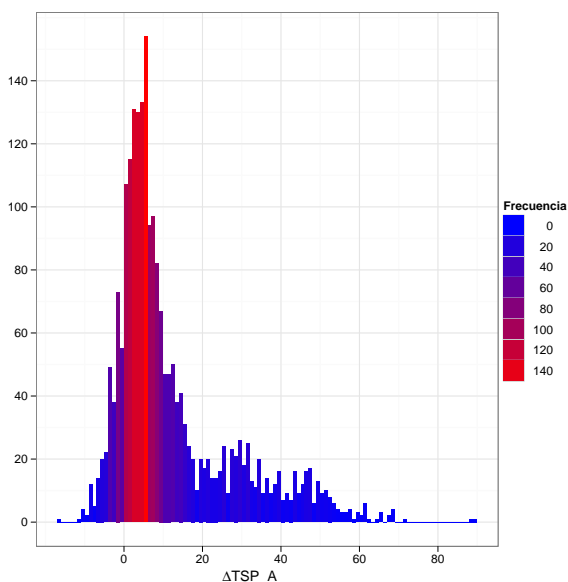


Figura 6.36: Histograma del incremento del indicador ΔTSP_A .

resolver el problema asimétrico ATSP y medir su secuencia con la matriz de distancias ortodrómicas para intentar tener la solución al problema simétrico TSP.

Con estos tres indicadores $\Delta ATSP$, ΔTSP_A y $\Delta ATSP_O$, se ha querido demostrar que existen grandes diferencias cuantitativas entre la resolución de los problemas simétricos y los asimétricos. Y que aunque tentadora, no es una técnica factible tomar la secuencia solución de un caso (p.e. simétrico) y valorarla con la matriz de distancias del otro (p.e. asimétrico) para obtener la solución del segundo; y viceversa.

La reflexión que aquí se propone es; ¿qué es más interesante?: seguir investigando en la frontera de optimización de los algoritmos para el TSP, con disputas sobre rangos de solución cada vez más estrechos, o centrarse en el desarrollo de algoritmos para la resolución de problemas asimétricos ATSP,

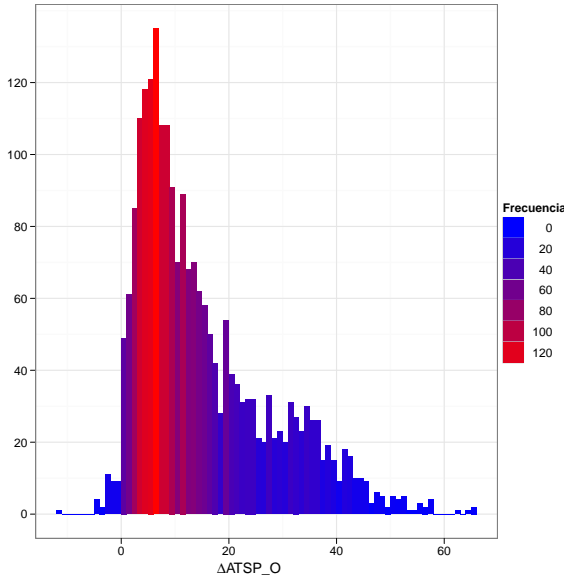


Figura 6.37: Histograma del incremento del indicador $\Delta ATSP_O$.

útiles para la problemática real de las empresas, y su logística en un entorno formado por redes de carreteras (con itinerarios no simétricos).

En cualquier caso, queda descartada la posible idea de que un algoritmo bueno para la resolución del TSP proporcionará soluciones útiles a problemas reales, cuando queda demostrado que la realidad es asimétrica, y además, que las soluciones a los problemas reales asimétricos poco tienen que ver con los simétricos.

Para comprobar si existe alguna relación entre el indicador cualitativo $\Delta ATSP$ y el resto de factores se realizó un ANOVA, cuyos resultados se encuentran en la Tabla 6.13. Unos resultados similares se obtienen si se toma como variable respuesta del ANOVA el indicador ΔTSP_A o el indicador $\Delta ATSP_O$. Seguidamente se describen aquellas conclusiones que se han considerado más relevantes.

Comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP) | 6.3

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	1,18E6	2	594 768	7 978,56	0,0000
B:L	108 840	2	54 420,2	730,02	0,0000
C:n	222 184	9	24 687,1	331,17	0,0000
D:A	68 561	4	17 140,2	229,93	0,0000
Interacciones					
AB	21 047,2	4	5 261,8	70,58	0,0000
AC	20 390,5	18	1 132,8	15,20	0,0000
AD	15 271	8	1 908,88	25,61	0,0000
BC	16 518,4	18	917,68	12,31	0,0000
BD	1 623,27	8	202,90	2,72	0,0055
CD	7 260,82	36	201,69	2,71	0,0000
Residuos	159 528	2 140	74,54		
Total (corregido)	1,83E6	2 249			

Tabla 6.13: Análisis de varianza para $\Delta ATSP$ - Suma de Cuadrados Tipo III.

Observando los valores de la Ratio-F y del *p*-valor aparecen 10 relaciones significativas: 4 factores y 6 interacciones. Los factores en orden de importancia son: el territorio, la localización, el tamaño de la matriz, y el algoritmo.

En la siguiente Figura 6.38 se muestra una matriz de gráficas donde comparar los factores territorio y localización. Dentro de cada gráfica se muestra en los ejes $n-\Delta ATSP$. El código de colores permite identificar el factor localización (L). Esta figura describe visualmente las relaciones entre el indicador $\Delta ATSP$ y los factores territorio, la localización y el tamaño de la matriz.

Por último, en la siguiente Figura 6.39 se puede comparar los factores territorio y algoritmo. Dentro de cada gráfica se muestra en los ejes $n-\Delta ATSP$. El código de colores permite identificar el algoritmo. Esta figura describe visualmente las relaciones entre el indicador $\Delta ATSP$ y los factores territorio, el algoritmo y el tamaño de la matriz.

A raíz de todo lo anterior, se puede obtener las siguientes conclusiones del análisis cuantitativo:

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

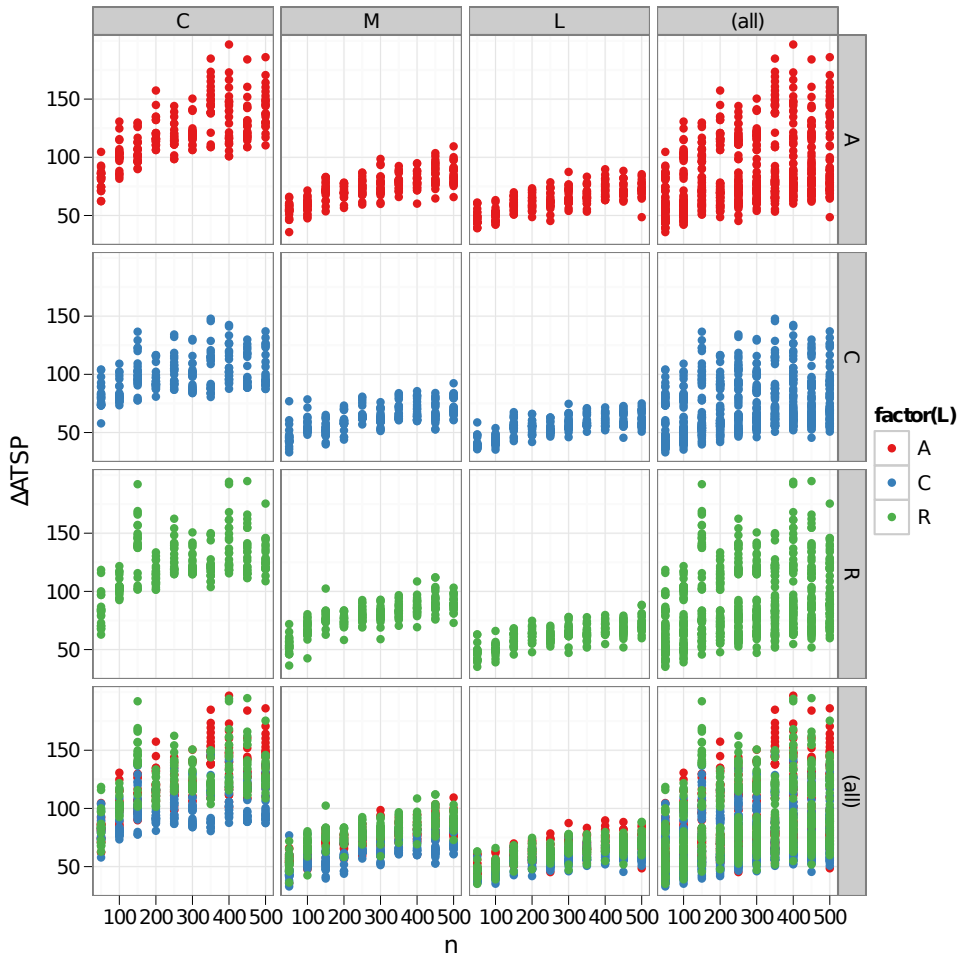


Figura 6.38: Relación entre el factor territorio, la localización, el tamaño n y el indicador $\Delta ATSP$.

Comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP) | 6.3

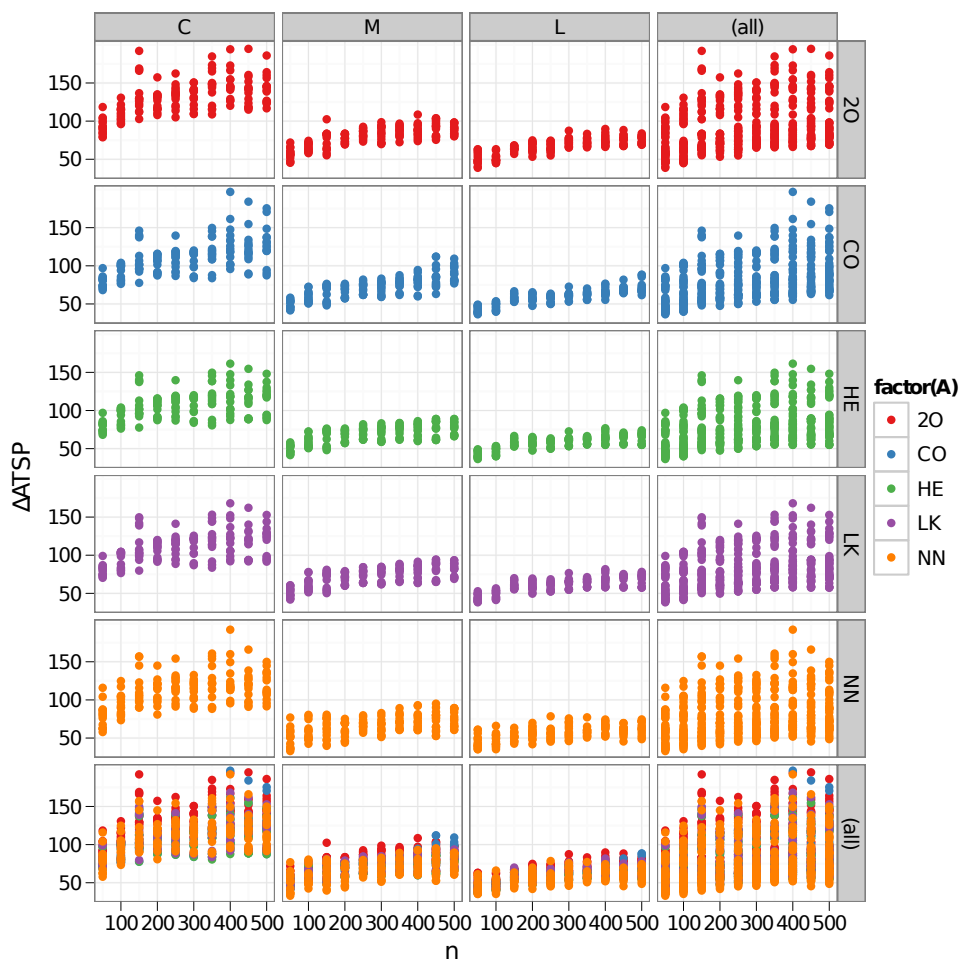


Figura 6.39: Relación entre el factor territorio, el algoritmo, el tamaño n y el indicador $\Delta ATSP$.

1. Se puede observar, que existe una relación inversa entre el tipo de territorio y el valor promedio del indicador $\Delta ATSP$; mientras que en cortas distancias (T=C) el promedio de $\Delta ATSP$ es igual al 115 %, en T=M su valor es del 72 %, llegando al 60 % para T=L (largas distancias). Esto significa que cuantitativamente las diferencias entre la solución TSP y la ATSP son menores a mayor distancia, pero en cualquier caso sus diferencias son notables, con un valor mínimo del 32,97 %.
2. Según los resultados del ANOVA, la localización en cuadrícula proporciona unos valores promedio del 72 % del indicador $\Delta ATSP$, mientras que las localizaciones radiales y aleatorias se sitúan en torno al 86 % de valor promedio.
3. El tamaño de la matriz también condiciona los resultados del indicador $\Delta ATSP$. Existe una relación directamente proporcional entre el tamaño de la matriz n y el indicador $\Delta ATSP$, pasando de un valor promedio del 60 % para $n = 50$ a un promedio del 92 % para $n = 500$. Las diferencias entre el valor de la solución TSP y la ATSP se acentúan con problemas de mayor tamaño.
4. Según los resultados del ANOVA, los algoritmos Concorde, Lin Kernighan y NN se sitúan en valores promedio para todos los casos cercanos al 79 % del indicador $\Delta ATSP$, mientras que *2-opt* tiene valores promedio del 92 %.
5. Se ha descartado la idea de que un algoritmo bueno para la resolución del TSP proporcionará soluciones útiles a problemas reales. Las soluciones a los problemas reales asimétricos poco tienen que ver con los simétricos.

6.3.2 Análisis cualitativo

La siguiente Tabla 6.14 muestra el análisis estadístico sencillo de todo el conjunto de datos para los indicadores cualitativos ΔdH y ΔdA .

	ΔdH	ΔdA
Recuento	2 250	2 250
Promedio	97,06	71,65
Desviación estándar	7,67	12,15
Coef. de variación	7,89 %	16,96 %
Mínimo	6,0	8,91
Máximo	99,8	98,04

Tabla 6.14: Análisis cualitativo de las secuencias.

Lo más relevante es observar que cualitativamente existen grandes diferencias entre las secuencias solución a los problemas simétricos TSP y los asimétricos ATSP. El promedio del indicador ΔdA , con un valor de 71,65 % y una desviación estándar igual 12,15, indica que las secuencias simétricas son muy diferentes a las asimétricas. Los valores son incluso mayores si se utiliza el indicador de la distancia Hamming ΔdH . Es de destacar también, que el valor mínimo del indicador ΔdA se sitúa próximo al 9 %. Esto quiere decir que en términos generales las secuencias simétricas y asimétricas son muy diferentes, y en el mejor de los casos un 9 % de la secuencia será diferente. La siguiente Figura 6.40 ilustra en forma de histograma la distribución de frecuencias de los incrementos de la distancia Hamming (ΔdH). Nótese que esta gráfica está notablemente desplazada hacia valores muy próximos al 100 % y que son realmente pocos los casos con valores menores al 80 %. En la parte inferior de la Figura 6.40 se observa el histograma la distribución de frecuencias de los incrementos de la distancia de adyacencia (ΔdA). Nótese que son realmente pocos los casos en los que el valor es menor a un 30 %.

Pero, ¿existe alguna relación entre (por ejemplo) el indicador cualitativo ΔdA y el resto de factores de las instancias? Para responder a esta pregunta, se realizó un ANOVA con los siguientes resultados de la Tabla 6.15.

6 | Análisis de las soluciones al caso del TSP

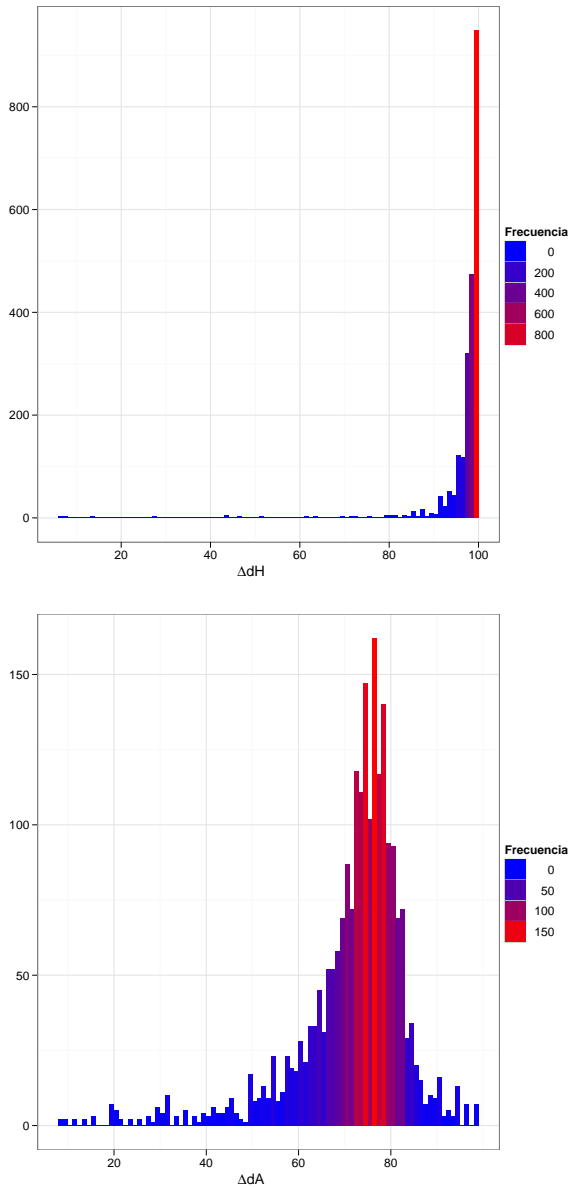


Figura 6.40: Histograma del incremento de la distancia Hamming ΔdH (arriba), e histograma del incremento de la distancia de adyacencia ΔdA (abajo).

Comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP) | 6.3

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Efectos principales					
A:T	19 610,6	2	9 805,29	83,21	0,0000
B:L	15 359,7	2	7 679,84	65,17	0,0000
C:n	15 245,2	9	1 693,91	14,37	0,0000
D:A	16 842,3	4	4 210,56	35,73	0,0000
Interacciones					
AB	754,59	4	188,64	1,60	0,1714
AC	2 901,54	18	161,19	1,37	0,1372
AD	2 397,56	8	299,69	2,54	0,0093
BC	1 758,84	18	97,71	0,83	0,6669
BD	1 799,11	8	224,88	1,91	0,0548
CD	3 151,41	36	87,53	0,74	0,8675
Residuos	252 187	2 140	117,84		
Total (corregido)	332 008	2 249			

Tabla 6.15: Análisis de varianza para ΔdA - Suma de Cuadrados Tipo III.

Observando los valores de la Ratio-F y del p -valor aparecen 5 relaciones significativas: 4 factores y otra interacción. En orden de importancia: el territorio, la localización, el algoritmo y el tamaño de la matriz son los factores que significativamente condicionan el valor del incremento de la distancia de adyacencia ΔdA . Por último, se observa cierta interacción entre el territorio y el algoritmo sobre el valor de ΔdA .

En la Figura 6.41 se comparan los factores territorio y localización en una matriz de gráficas. Dentro de cada gráfica se muestra en los ejes $n-\Delta dA$. El código de colores permite identificar el factor localización (L). Esta figura describe visualmente las relaciones entre el indicador ΔdA y los factores territorio, la localización y el tamaño de la matriz.

De modo similar, la Figura 6.42 se puede comparar los factores territorio y algoritmo. Dentro de cada gráfica se muestra en los ejes $n-\Delta dA$. El código de colores permite identificar el algoritmo.

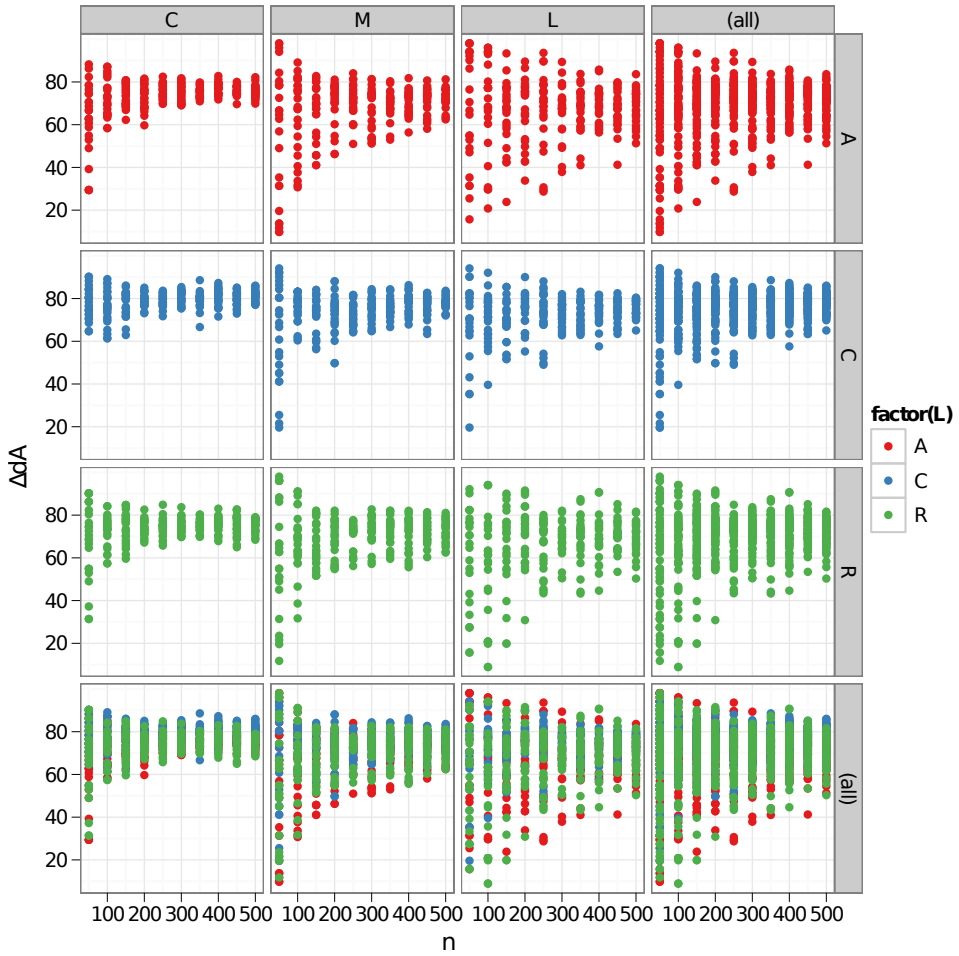


Figura 6.41: Relación entre el factor territorio, la localización, el tamaño n y el incremento de la distancia de adyacencia ΔdA .

Comparación cualitativa y cuantitativa de las soluciones simétricas (TSP) y asimétricas (ATSP) | 6.3

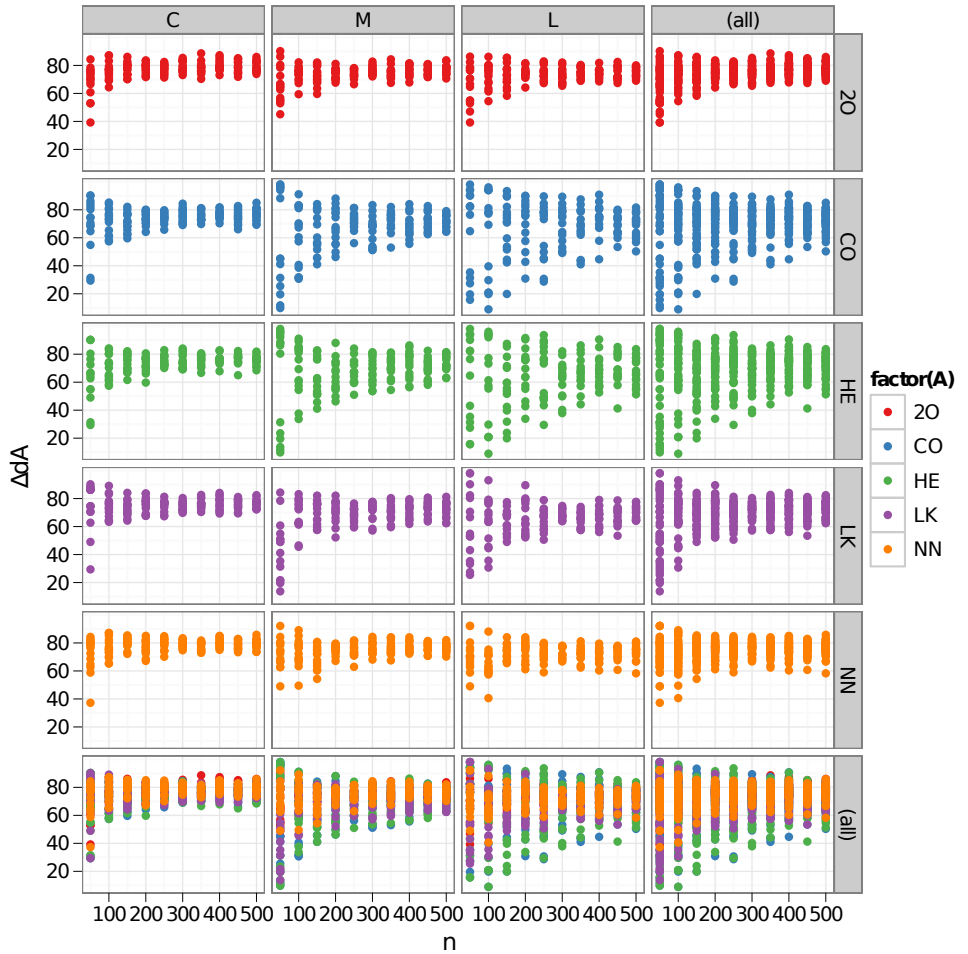


Figura 6.42: Relación entre el factor territorio, el algoritmo, el tamaño n y el incremento de la distancia de adyacencia ΔdA

En cierto modo, las gráficas anteriores resumen las conclusiones más relevantes del análisis cualitativo:

1. En los territorios de mayores distancias, se incrementa la dispersión del indicador ΔdA . En cambio, el valor promedio de ΔdA decrece ligeramente con el territorio, con valores del 76 % para T=C, 71 % para T=M y un 68 % para T=L. En territorios de largas distancias hay menores diferencias entre las secuencias simétricas y las asimétricas, pero significativamente grandes.
2. Se observa que para tamaños de matrices más grandes, decrece la dispersión de ΔdA y además aumenta su valor mínimo, pasando del 65 % para $n = 50$ al 75 % para $n = 500$. A medida que aumenta el tamaño del problema, es más probable encontrar diferencias entre las secuencias simétricas y las asimétricas.
3. Es interesante observar, que la localización es un factor que también tiene una relación significativa con los resultados del indicador ΔdA . En especial en el caso de L=C (cuadrícula), con valores promedio de ΔdA iguales al 75 %. En cambio, para localizaciones aleatorias y radiales, el valor desciende al 70 % de promedio.
4. De toda la experiencia computacional, son relativamente pocos, los casos con resultados de ΔdA menores al 50 %. Esto refuerza la conclusión de que no es lo mismo resolver el problema TSP que el ATSP en términos de secuencia solución.
5. Según el ANOVA, los algoritmos Concorde, Helsgaun y Lin Kernighan tiene valores promedio de ΔdA en torno al 70 %. Mientras que NN y *2-opt* presentan valores superiores del 75 %.

6.3.3 Análisis gráfico

En esta sección se mostrarán algunos ejemplos gráficos de los resultados obtenidos en la resolución del caso del TSP. El objetivo de estas gráficas es ilustrar las principales conclusiones de este estudio, mostrando gráficamente las diferencias entre algunas secuencias resultantes del problema TSP con las correspondiente al problema ATSP. De las 10 350 experiencias computacionales llevadas a cabo para el caso del TSP, se han seleccionado sólo unas pocas. El criterio de selección está basado principalmente en los indicadores ΔdA y $\Delta ATSP$; aunque también se ha tenido en cuenta la relación entre los resultados y los factores objeto del estudio (territorio, localización, tamaño del problema, algoritmo, etc.). Para una mejor comprensión de las diferencias observadas, acompañando a las figuras se encontrará un breve texto descriptivo de las características de cada ejemplo.

CC-0503HE

El primer ejemplo es el de la instancia CC-0503. Se trata de 50 nodos localizados en un territorio de corta distancia y distribuidos en forma de cuadrícula. En la Figura 6.43 se superponen en color azul la solución con el algoritmo de Helsgaun al problema ortodrómico (matriz simétrica), y en color rojo la misma instancia resuelta con el mismo algoritmo pero con la matriz de distancias reales asimétrica. Nótese las enorme diferencias, en cuanto a la distancia total recorrida (los 244,21 km de la ortodrómica frente a los 423,26 km de la real asimétrica), con $\Delta ATSP = 73,32\%$; y también en cuanto a la secuencia solución con $\Delta dA = 90,20\%$. Por último, la Figura 6.44 y la Figura 6.45 muestran algunos detalles de la comparación donde se puede observa la naturaleza de las diferencias en secuencia y en distancia total recorrida.

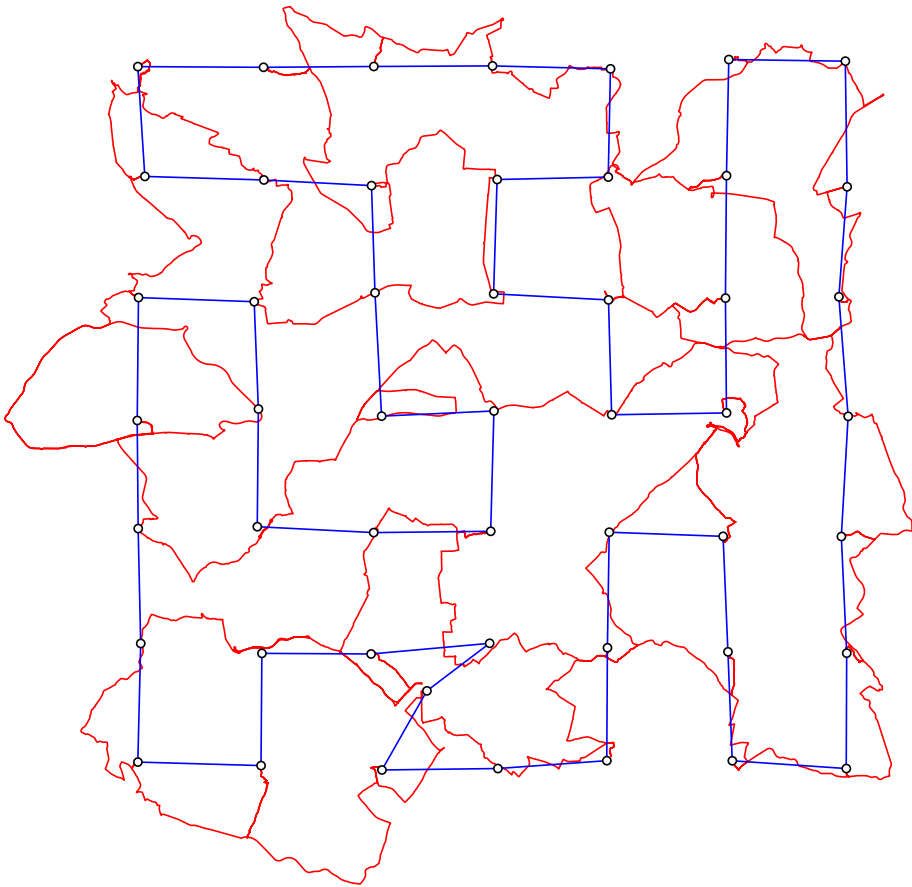


Figura 6.43: Comparación de soluciones para la instancia CC-0503 con Helsgaun.

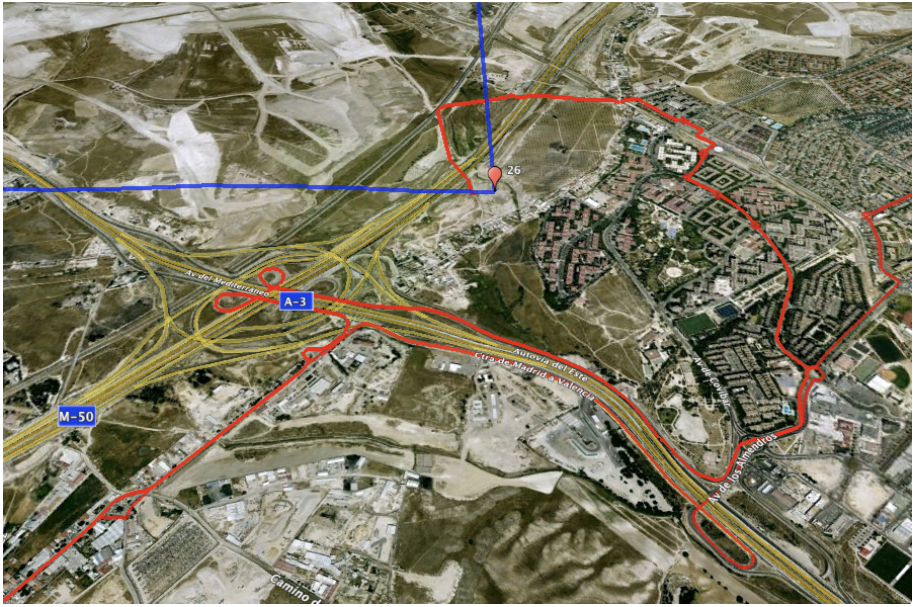


Figura 6.44: Detalle del mapa para la instancia CC-0503 con Helsgaun.

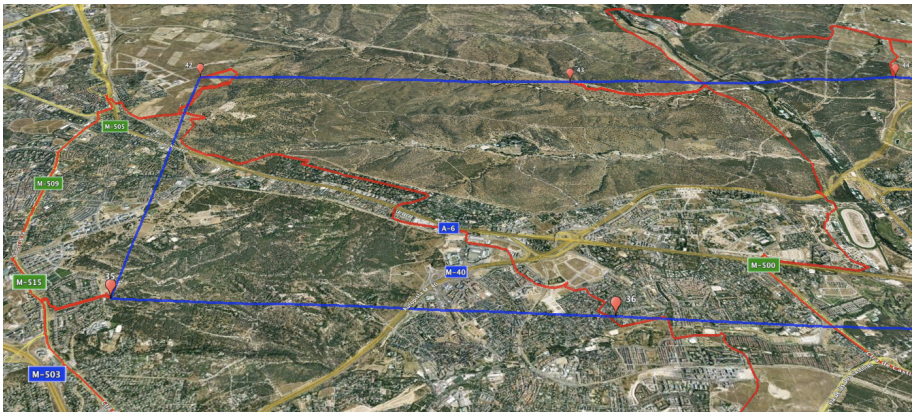


Figura 6.45: Detalle del mapa para la instancia CC-0503 con Helsgaun.

MR-0504CO

Este segundo ejemplo trata de 50 nodos localizados en un territorio de media distancia y distribuidos radialmente. En la Figura 6.46 se superponen las soluciones del algoritmo de Concorde; nótese que en caso de Concorde fue necesario aplicar la transformación para convertirla en simétrica. La distancia total recorrida es de 1 369,74 km para la solución ortodrómica y de 2 097,97 km para la real asimétrica, con $\Delta ATSP = 53,17\%$; y el encontrado para el indicador $\Delta dA = 98,04\%$ respecto de la secuencia ortodrómica directa. La Figura 6.47 muestra algunos detalles de interés.

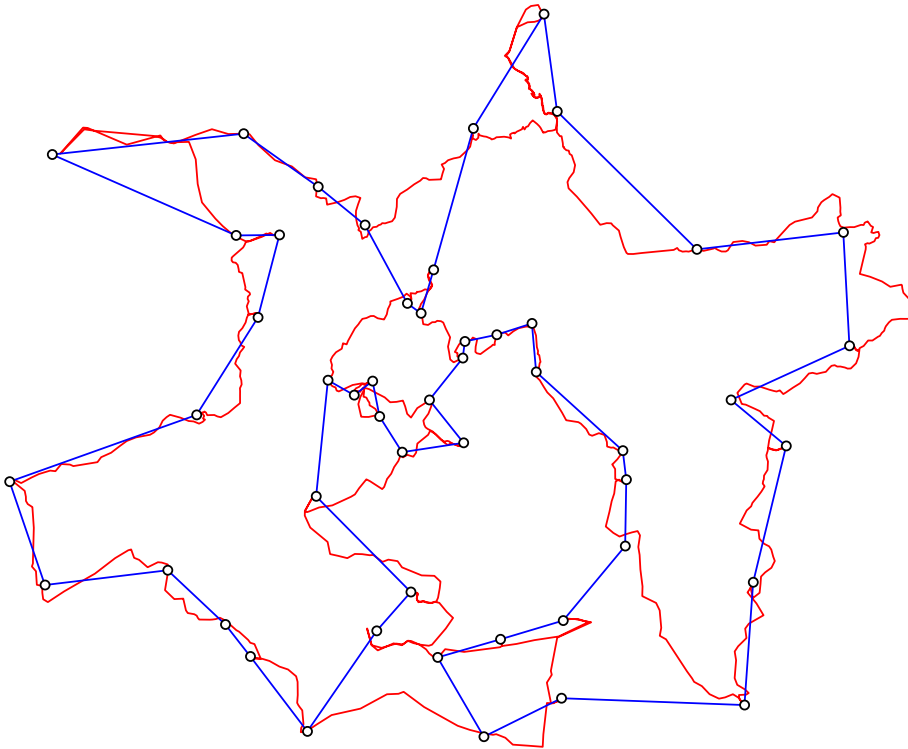


Figura 6.46: Comparación de soluciones para la instancia MR-0504 con Concorde.



Figura 6.47: Detalle del mapa para la instancia MR-0504 con Concorde.

CA-4005CO

Este último ejemplo se refiere a 400 nodos localizados aleatoriamente en corta distancia. La Figura 6.48 muestra la solución con el algoritmo de Concorde para el caso simétrico, y la Figura 6.49 representa la solución al caso asimétrico, gracias a la transformación de la matriz. La función objetivo es igual a 535,79 km para la solución ortodrómica y de 1 590,73 km para la real asimétrica, con un altísimo valor de $\Delta ATSP = 196,89\%$; y el indicador $\Delta dA = 74,56\%$. Para su comparación, en la Figura 6.50 se observan superpuestos los dos gráficos anteriores.

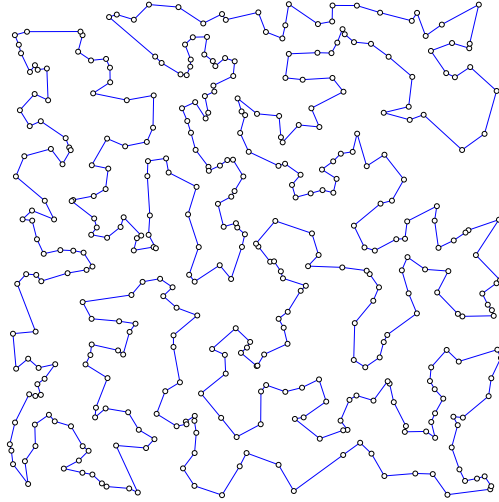


Figura 6.48: Solución de la instancia CAO4005 con Concorde.

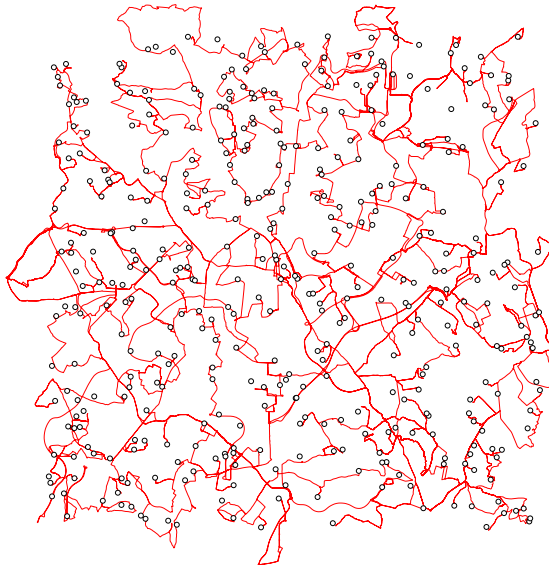


Figura 6.49: Solución de la instancia CAT4005 con Concorde.

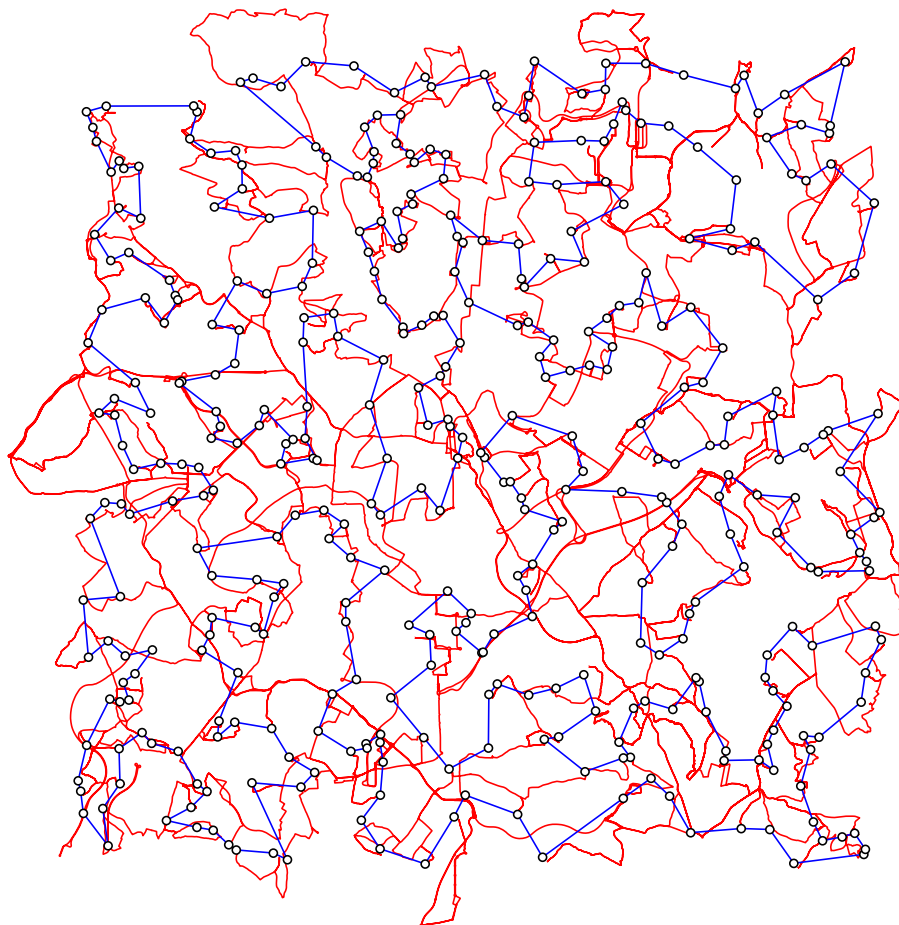


Figura 6.50: Comparación de soluciones para la instancia CA-4005 con Concorde.

6.4 Conclusiones

A continuación se enumeran las conclusiones y las aportaciones más relevantes de este capítulo:

1. El tipo de algoritmo condiciona el tiempo de computación. Helsgaun y Concorde son computacionalmente más costosos y junto con Lin Kernighan son los tres algoritmos que ofrecen mejores resultados. En los problemas simétricos y asimétricos, los factores territorio, localización y tamaño del problema afectan a las heurísticas NN y *2-opt* negativamente.
2. El tamaño de la matriz condiciona el tiempo de computación de manera directa y exponencial. Las localizaciones en cuadrícula influyen significativamente dificultando los tiempos de resolución, amplificado en las matrices transformadas. El factor territorio muestra cierto impacto sobre el tiempo de computación, especialmente en el caso de las cortas distancias.
3. La asimetría afecta al tiempo de computación porque afecta directamente a las heurísticas que pueden trabajar con matrices asimétricas, y porque el uso de la transformación de matrices incrementa notablemente el tiempo de computación. En el entorno de las matrices simétricas, Helsgaun es unas 3 veces más lento que Concorde.
4. Existe una relación inversa entre el factor territorio y el valor promedio del indicador $\Delta ATSP$. Hay menores diferencias entre las secuencias simétricas y las asimétricas en largas distancias que en cortas distancias. Existe una relación entre la localización y el indicador $\Delta ATSP$. Las diferencias entre la solución cuantitativa del TSP y la del ATSP son mayores en localizaciones radiales y aleatorias (86 %) frente a las localizaciones en cuadrícula (72 %). A medida que aumenta el tamaño del

problema es más probable encontrar diferencias entre las secuencias simétricas y las asimétricas.

5. Son pocos los casos con resultados de ΔdA menores al 50 %. Los tres indicadores $\Delta ATSP$, ΔTSP_A y $\Delta ATSP_O$ demuestran que no es factible tomar la secuencia solución de un caso (p.e. simétrico) y valorarla con la matriz de distancias del otro (p.e. asimétrico) para obtener la solución del segundo; y viceversa.

Durante décadas, gran parte del esfuerzo científico se ha centrado en el desarrollo de técnicas y algoritmos para la resolución de problemas TSP simétricos, intentando lograr algoritmos cada vez más rápidos y capaces de encontrar mejores soluciones. Esto sin duda ha ayudado a mejorar las técnicas hoy disponibles, que compiten en y por márgenes de tiempo y bondad de la solución cada vez más estrechos. Al revisar la literatura científica, se percibe la idea de que dicho objetivo es casi un fin en sí mismo; y parece que existe la idea preconcebida de que lo único importante es que el algoritmo sea capaz de encontrar las mejores soluciones en un entorno controlado de laboratorio y en instancias de referencia. Sin embargo, las empresas actuales realizan sus negocios y sus operaciones logísticas en un entorno altamente competitivo y complejo. Éstas, demandan soluciones eficaces y eficientes a sus problemas reales. En esta investigación se ha demostrado que incluso la realidad de los problemas más simples de transporte, es altamente compleja. El grafo de distancias (tiempos o costes) que representa la realidad del problema es sin lugar a dudas un grafo dirigido asimétrico. Obtener la matriz asimétrica de distancias de transporte incluso para problemas relativamente pequeños requiere un altísimo coste computacional, y supone una gran barrera de entrada para las empresas, y para la investigación y desarrollo de técnicas y algoritmos en entornos reales.

Con esta investigación se ha querido cuantificar, y refutar la posible idea de que las técnicas eficientes y soluciones obtenidas en entornos teóricos, simétricos, ortodrómicos y de laboratorio pueden ser válidas (o transformadas)

en buenas soluciones para el mundo real del transporte. Como se ha demostrado, poco o nada tienen que ver las soluciones simétricas con las asimétricas (ni cualitativa, ni cuantitativamente); y algunas técnicas simplemente dejan de funcionar o se vuelven ineficientes con la asimetría. La asimetría es tan compleja como el mundo que nos rodea, tiene diferentes grados, y está condicionada por muchos factores; algunos de los cuales se han estudiado aquí: el territorio, la localización, y el tamaño del problema. Este trabajo no pretende desmerecer los actuales algoritmos y técnicas, al contrario. No se trata de que dichos algoritmos o de que la investigación realizada hasta la fecha no sean válidos. De lo que se trata, es de devolver el foco de atención de tanto esfuerzo investigador a la realidad compleja y asimétrica que nos envuelve. Lo importante no son sólo los algoritmos, sino su aplicación en la realidad y las matrices que la representan.

7 | Contraste e inferencia del TSP asimétrico

En este capítulo se van a contrastar los resultados y conclusiones anteriormente explicados en el Capítulo 6 con la ayuda de algunos algoritmos especialmente diseñados para la resolución del ATSP. El objetivo es poder inferir dichas conclusiones también al conjunto de algoritmos asimétricos.

7.1 Algoritmos para el ATSP

Existe una mayor atención en la literatura al problema simétrico que al asimétrico. Es un hecho que el primero es un problema más simple y básico que el segundo. Para el problema simétrico TSP, la mejor heurística conocida de tiempo polinomial con una calidad de la solución conocida y garantizada se debe a [Arora \(1998\)](#), que es capaz de garantizar un factor de aproximación $1 + \varepsilon$ con respecto a la solución óptima para cualquier factor fijo de error $\varepsilon > 0$. En contraste, la mejor heurística conocida de tiempo polinomial con una solución garantizada para el ATSP (descrita en [Asadpour et al., 2010](#)) sólo puede garantizar un factor de aproximación de $\log n / \log \log n$. Es evidente que el ATSP es un problema mucho más difícil de resolver, y por ello, no es de extrañar que una porción significativa de la literatura TSP únicamente considere las distancias euclidianas y el escenario simétrico.

Sin embargo, existe una rica literatura sobre la generalización y formulaciones del ATSP, como por ejemplo los trabajos de [Gouveia y Pires \(1999\)](#), [Fischetti, Lodi y Toth \(2003\)](#); y de muchos otros como: [Arora \(1998\)](#), [Bontoux, Artigues y Feillet \(2010\)](#), y [Germs, Goldengorin y Turkensteen \(2012\)](#).

Para realizar el contraste asimétrico, además de los algoritmos ya descritos, algunos de los cuales son capaces de abordar escenarios asimétricos: *NN - nearest neighbor algorithm* ([Flood, 1956](#)), *2-Opt heuristic* ([Croes, 1958](#)), LK de Keld Helsgaun ([Helsgaun, 2000](#)); fue necesario seleccionar un par de heurísticas de última generación especialmente diseñadas para la resolución del problema asimétrico ATSP.

7.1.1 Algoritmo de ramificación y poda de Fischetti et al. (2003)

El algoritmo de ramificación y poda de [Fischetti, Lodi y Toth \(2003\)](#), es un método exacto capaz de resolver casos difíciles ATSP. En los experimentos computacionales del trabajo original este algoritmo *branch-and-cut* resultó ser más eficaz que otros de ramificación y acotación (*branch-and-bound*).

Es interesante destacar que el algoritmo fue probado con éxito en un conjunto de 51 casos reales (instancias: *balas*, *TSPLIB*, *ftv*, *Cirasella* con $n \geq 100$). Este algoritmo requiere de una relajación LP en cada nodo del árbol de soluciones, por lo que en el trabajo original se utilizó CPLEX 6.5.3 como solver LP.

En este estudio, el algoritmo de Fischetti (A=FI) fue compilado a partir del código fuente original y siguiendo las instrucciones de sus autores. Se definió un límite interno de 150 000 nodos de ramificación, y en lugar de CPLEX se utilizó la versión del algoritmo auto-contenida desarrollada por los mismos autores. Siguiendo sus recomendaciones y para garantizar el éxito de los experimentos se limitó para matrices con $n = 50$ localizaciones. Este algoritmo será ejecutado sin imponer un tiempo límite de computación.

7.1.2 Heurística mejorada GKS/TBCOP de Goldengorin et al. (2006)

GKS/TBCOP es una versión mejorada de [Goldengorin, Jaeger y Molitor \(2006\)](#) basada en el código original de [Helsgaun \(2000\)](#). Es una heurística constructiva llamada *Contract-or-Patch heuristic (COP)* especialmente diseñada para el ATSP. La versión mejorada se basa en la sustitución de la selección de cada camino después de eliminar el arco más costoso del ciclo más corto en un problema *Optimal Assignment Problem Solution (OAPS)*; eligiendo un sólo arco del ciclo corto en el OAPS con la mayor tolerancia superior respecto del ATSP relajado. El uso de las tolerancias superiores ayuda al algoritmo en su búsqueda de soluciones óptimas. A pesar del hecho de que se necesita más tiempo para el cálculo de las tolerancias, los experimentos computacionales realizados por los autores para el ATSP muestran que en la mayoría de las situaciones el algoritmo basado en las tolerancias supera a los algoritmos basados en costes. La reducción del tiempo de solución es causada principalmente por el hecho de que el proceso de ramificación es mucho más eficaz, de modo que las soluciones óptimas se encuentran en una etapa anterior del proceso de ramificación. El algoritmo mejorado produce rutas de mayor calidad que la versión anterior del algoritmo COP.

Al igual que el caso anterior, el algoritmo de Goldengorin (A=GO) fue compilado a partir del código fuente original y siguiendo las instrucciones de sus autores. Sin embargo, debido a la introducción de valores ∞ , no será posible resolver las instancias con matrices transformadas (M=T). En este caso, tampoco será impuesto un tiempo límite de computación.

7.2 Ampliación de los experimentos

Con estos dos algoritmos seleccionados, se amplía el conjunto de experimentos descritos. De modo que serán analizados conjuntamente los resultados de las 2 250 instancias $\times 8$ algoritmos – 450 matrices asimétricas $\times 2$ heurísticas no ATSP (LK y CO) – 450 (M=T no soportado en GO) – 2 025 (instancias de tamaño $n > 50$ en FI); dando lugar a un conjunto total de 14 625

experimentos computacionales. La ampliación de los experimentos fue llevada a cabo siguiendo el proceso y utilizando el mismo hardware descrito en el apartado 4.6.7. En su conjunto total, fue requerido un tiempo de 830 horas CPU para un *blade* equivalente. Como anteriormente, los resultados son analizados estadísticamente utilizando el ANOVA multifactorial, y la principales variables respuesta: tiempos CPU, bondad de las soluciones y la comparación cuantitativa y cualitativa de las soluciones simétricas TSP y asimétricas ATSP.

7.3 Tiempos de resolución de los algoritmos

Uno de los resultados más interesantes se observa al analizar los tiempos CPU requeridos por los algoritmos capaces de resolver ATSP. El ANOVA resultante se muestra en la Tabla 7.1.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
Efectos principales					
A:T	2 900,6	2	1 450,3	17,7	0,0000
B:L	1 028,8	2	514,4	6,3	0,0019
C:M	2 502,2	3	834,1	10,2	0,0000
D:n	753 030	8	94 128,8	1 148,7	0,0000
E:A	1,546E6	6	257 723	3 145,2	0,0000
Interacciones					
AB	351,6	4	87,9	1,1	0,3681
AC	1 221,9	6	203,7	2,5	0,0210
AD	2 664,9	16	166,6	2,1	0,0086
AE	11 786,4	12	982,2	12	0,0000
BC	236,5	6	39,4	0,5	0,8229
BD	1 788,7	16	111,8	1,4	0,1491
BE	4 835	12	402,9	4,9	0,0000
CD	3 348,8	24	139,5	1,7	0,0174
DE	1,038E6	48	21 638,7	264,1	0,0000
Residuos	849 253	10 364	81,9		
Total (corregido)	4,269E6	10 529			

Tabla 7.1: Análisis de varianza para tiempo y algoritmos ATSP ($M \neq T$, $A \neq CO$ y $A \neq LK$).

Con un nivel del 95 % de confianza ($\alpha = 0,05$), todos los factores individuales y 6 interacciones de orden dos fueron estadísticamente significativos. A tenor de la importancia observada por la magnitud de la Ratio-F, el factor Algoritmo por ejemplo, no es menor de 3 145,2. Esto significa que las diferencias entre los diferentes algoritmos generan 3 145,2 más varianza que la varianza obtenida en cada algoritmo. Así que el tipo de algoritmo tiene una importancia e influencia estadísticamente muy fuerte sobre el tiempo CPU.

En la Figura 7.1 se muestra una gráfica descriptiva (con puntos, líneas de suavizado y franjas de error estándar); donde se comparan los tiempos de computación en función del tamaño de la matriz (n) para todas las combinaciones de algoritmos y tipos de matriz. El eje vertical está en escala logarítmica y muestra el tiempo CPU en segundos. Se puede observar que no hay gráfico para los algoritmos LK y CO en matrices asimétricas, y en GO para matrices transformadas (M=T).

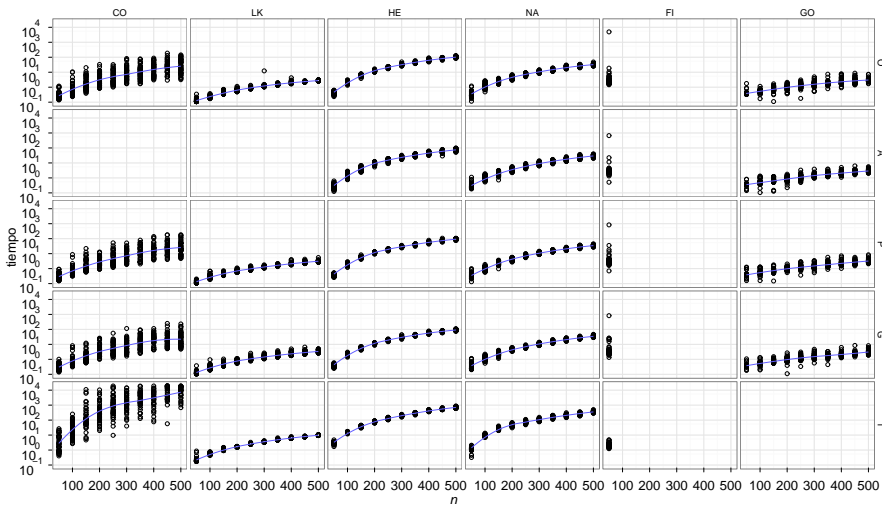


Figura 7.1: Comportamiento en tiempo CPU para los algoritmos (CO, LK, HE, NA, FI, GO), según tipos y tamaño de matriz.

Se confirma que el tipo de algoritmo tiene una fuerte influencia sobre el tiempo CPU. Como era de esperar, el método mejorado Lin-Kernighan de

Helsgaun (HE) y Concorde (CO) son los algoritmos computacionalmente más costosos. El tamaño de la matriz afecta de manera directa y exponencial al tiempo para todos los algoritmos, tipos de matriz, casos simétrico y asimétrico. Como era de esperar también, el proceso de transformación de la matriz ($M=T$) resulta en un incremento enorme del tiempo de computación. Estos resultados lógicos, validan los resultados y conclusiones de los experimentos anteriores.

En cuanto a los otros factores estudiados, la localización afecta al tiempo CPU para todos los métodos. La gráfica de medias de la Figura 7.2 muestra la interacción entre los factores algoritmo y localización sólo para el caso de matrices asimétricas. La superposición de intervalos denota que las medias contenidas entre ellos no son estadísticamente diferentes. Las localizaciones en cuadrícula implican un tiempo ligeramente superior para todos los métodos comparados con la localización radial y aleatoria; excepto para FI que consume más tiempo en localizaciones aleatorias ($n = 50$). Vale la pena recordar que para el caso de matrices simétricas, los tiempos se incrementan notablemente (20 %) para CO en localizaciones en cuadrícula de un modo estadísticamente significativo.

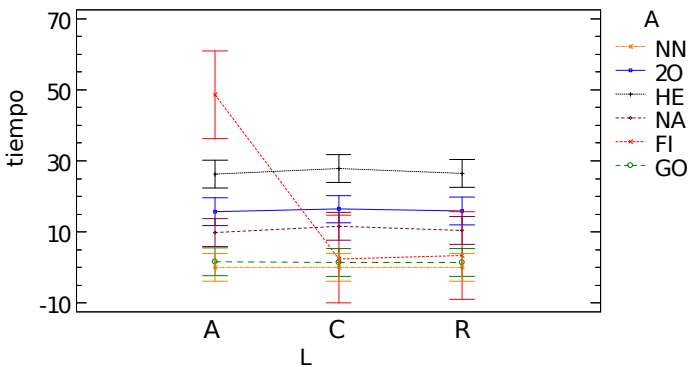


Figura 7.2: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la localización y algoritmos en el tiempo ($M=A$).

Otros resultados interesantes se refieren al factor territorio. La Figura 7.3 muestra la interacción entre el algoritmo y el territorio sólo en el caso de matrices asimétricas. En general, y especialmente para FI, existe una preferencia de los algoritmos para los territorios de cortas distancias. Lo que viene a consolidar la idea de que la mayor variabilidad de las distancias en los arcos de territorios de cortas distancias ayudaría a los algoritmos a encontrar una solución acortando el proceso de búsqueda. Para el caso de matrices simétricas, el tiempo CPU de CO se incrementa hasta en un 37 % en los casos de larga y media distancia respecto de cortas distancias. El grado de asimetría de la red de transporte, y las diferencias entre las distancias afectan a los métodos estudiados.

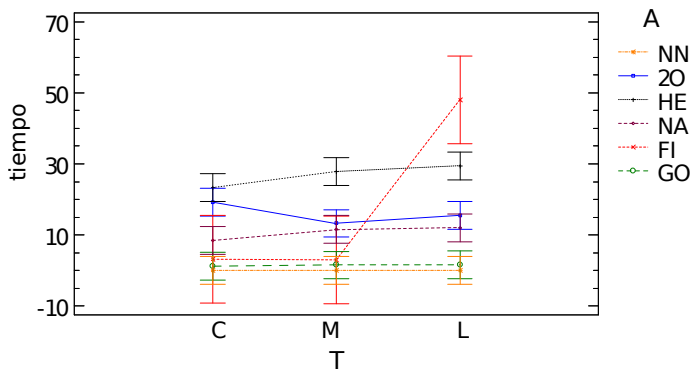


Figura 7.3: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el territorio y el algoritmo en el tiempo (M=A).

Finalmente, se concluye que el tiempo CPU es afectado por el tipo de matriz (factor asimetría). Si se excluyen las matrices transformadas (M=T) donde el tiempo se incrementa en un gran orden de magnitud, el resultado obtenido se muestra en la Figura 7.4. No se observan diferencias significativas entre las matrices M=P y M=G. Esto significa que las diferencias en el tiempo no se pueden atribuir a la magnitud de las distancias, sino más bien a las diferencias entre las mismas distancias. También se observa cómo las matrices

asimétricas ($M=A$) necesitan mucho más tiempo que las matrices ortodrómica ($M=O$).

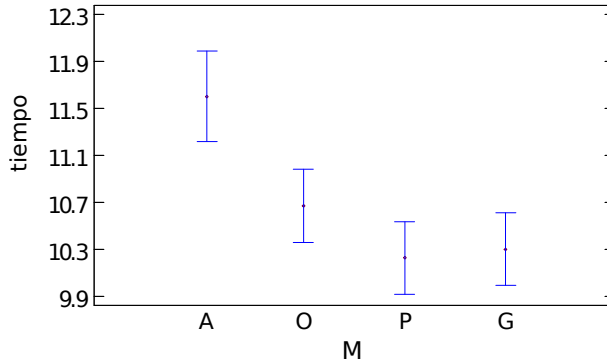


Figura 74: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tipo de matriz y el tiempo ($M \neq T$, $A \neq CO$ y $A \neq LK$).

7.4 Bondad de las soluciones

La Tabla 7.2 muestra el número de veces que cada algoritmo proporciona la mejor solución ($N. S^*$), y la correspondiente tasa de éxito ($\% S^*$) para los tres conjuntos de tipo de matriz. La segunda y tercera columna es para las matrices $M=(O, P, G)$ (1 350 experimentos por algoritmo). La cuarta, quinta, sexta y séptima columna es para las asimétricas ($M=A$) y transformadas ($M=T$) respectivamente, con 450 experimentos por algoritmo. En el caso de $A=GO$ no hay datos para $M=T$, y en $A=FI$ sólo hay datos para problemas de tamaño $n = 50$.

Como es sabido, CO siempre produce la solución óptima para las 1 350 instancias simétricas. Como se esperaba, la ratio de éxito de HE es muy alta con un 69% y mucho mejor que la de LK con el 46%. Las heurísticas sencillas NN y 20 raramente tienen éxito. Más interesante es el contraste asimétrico, donde para las matrices asimétricas ($M=A$) el algoritmo FI es el dominante para problemas de pequeño tamaño ($n = 50$). En otros casos asimétricos, HE es la mejor alternativa posible de los algoritmos estudiados, ya que LK y CO

Algoritmo	M=(O,P,G)		M=A		M=T	
	N. S*	% S*	N. S*	% S*	N. S*	% S*
NN	0	0,0 %	0	0,0 %	0	0,0 %
2O	3	0,2 %	0	0,0 %	0	0,0 %
LK	627	46,4 %	-	-	70	15,6 %
CO	1 350	100 %	-	-	391	86,9 %
HE	930	68,9 %	414	92,0 %	33	7,3 %
NA	463	34,3 %	155	34,4 %	30	6,7 %
FI	83	61,5 %	45	100 %	0	0,0 %
GO	252	18,7 %	66	14,7 %	-	-

Tabla 72: Número de mejores soluciones y tasa de éxito para los algoritmos estudiados según el tipo de matriz.

no aceptan matrices asimétricas. CO no obtiene la solución óptima en todos los casos para M=T. El proceso de transformación, y los valores $-\infty$ o $+\infty$ de la matriz parece que crea problemas de inestabilidad numérica en el algoritmo CO, produciendo pequeñas desviaciones sobre la solución óptima. Estos valores ∞ son también la razón por la que no se experimentó con M=T en GO. A partir de estos resultados, se puede concluir que CO no sólo necesita un mayor y exponencial tiempo CPU para las matrices transformadas, sino que también hay que tener presente que sus resultados no son del todo fiables. Otra conclusión interesante es que para las matrices transformadas, NA y LK superan a HE. Sin embargo, dicho proceso de transformación no es necesario para HE o NA.

La Tabla 7.3 muestra para los diferentes algoritmos y tipos de matriz los valores medios de ΔS_i^* , definida en secciones anteriores en la expresión (6.1). Nuevamente, se observa un gran deterioro en FI, HE, NA y CO para las matrices transformadas (M=T). Para matrices de gran tamaño HE, NA y GO son buenas opciones. Mientras que para todas las otras, CO y HE son claramente dominantes. Para matrices transformadas es incluso mejor usar LK que HE.

Las diferencias existentes en el grado de asimetría según el territorio afectan al comportamiento de los algoritmos, tal y como muestra la Tabla 7.4.

7 | Contraste e inferencia del TSP asimétrico

Algoritmo	O	A	T	P	G	Media
NN	23,78	23,63	22,88	22,12	21,10	22,70
2O	8,34	17,11	631,33	6,49	5,93	133,84
LK	0,04	–	1,56	0,05	0,05	0,42
CO	0,00	–	1,19	0,00	0,00	0,30
HE	0,02	0,01	9,10	0,02	0,02	1,83
NA	0,04	0,01	7,07	0,04	0,04	1,45
FI	0,18	0,00	25,84	0,07	0,03	5,23
GO	0,45	0,26	–	0,38	0,36	0,36
Media	4,11	6,84	99,85	3,64	3,44	

Tabla 7.3: Medias de ΔS_i^* según los factores algoritmo y tipo de matriz.

Algoritmo	C	M	L	Media
NN	24,28	21,88	21,95	22,70
2O	119,02	136,98	145,51	133,84
LK	0,42	0,41	0,44	0,42
CO	0,41	0,30	0,18	0,30
HE	3,40	1,09	1,00	1,83
NA	2,92	0,76	0,65	1,45
FI	4,79	5,50	5,39	5,23
GO	0,31	0,38	0,40	0,36
Media	19,44	20,91	21,93	

Tabla 7.4: Medias de ΔS_i^* según los factores algoritmo y territorio.

Es relevante e interesante observar cómo dependiendo del tipo de algoritmo, existen preferencias hacia entornos más simétricos o asimétricos. Dicho de otro modo, en largas distancias (CO, HE, NA) y medias distancias (LK) frente a cortas distancias (FI, GO, NN, 2O). Además, aunque no se muestra, este efecto aparece para todos los tamaños de matriz y en especial para las matrices transformadas.

La Tabla 7.5 no muestra efectos muy señalados (aunque son estadísticamente significativos) de los factores localización y algoritmo. Es interesante recordar que aunque la red de carreteras de la Península Ibérica se caracteriza por su estructura radial (centrada en la capital Madrid); el grado de asimetría

se incrementa en este tipo de localización. En otros países podría existir una importante relación entre otro tipo de localización y el grado de asimetría de la red que condicionara también el comportamiento de los algoritmos.

Algoritmo	Random	Grid	Radial	Media
NN	23,49	22,52	22,10	22,70
2O	150,47	124,90	126,14	133,84
LK	0,45	0,31	0,50	0,42
CO	0,25	0,53	0,12	0,30
HE	1,98	1,52	1,99	1,83
NA	1,54	1,06	1,73	1,45
FI	5,56	6,73	3,38	5,23
GO	0,44	0,27	0,39	0,36
Media	23,02	19,73	19,54	

Tabla 75: Medias de ΔS_i^* según los factores algoritmo y localización.

Finalmente, hay que mencionar que el tamaño de la matriz tiene un efecto pequeño sobre los valores de ΔS_i^* . El efecto es menor que 0,06 % en el peor de los casos. La Figura 7.5 muestra las medias de los factores simetría y algoritmo (excluyendo M=T). El eje horizontal muestra el tamaño de la matriz n , y el vertical (con diferente escala para cada tipo de matriz) la desviación porcentual ΔS_i^* sobre la mejor solución. Observando la escala vertical, destaca M=T donde el efecto sobre ΔS_i^* se acentúa con n .

7.5 Evaluación cuantitativa y cualitativa

Nuevamente se calculan los indicadores presentados en el apartado 6.3 para comprobar si posible una sustitución cruzada válida de las soluciones al escenario simétrico y asimétrico. Dichos indicadores se calcularon para el conjunto extendido de 3 territorios \times 3 localizaciones \times 10 tamaños \times 8 algoritmos \times 5 réplicas, dando lugar a 3 195 datos comparativos. Los resultados confirman y subrayan las conclusiones anteriores. El valor medio de $\Delta ATSP$ alcanza un 80,1 %. Esto indican las enormes diferencias entre las soluciones TSP y ATSP. El valor mínimo observado es grande, de un 32,9 % (y se llega a

7 | Contraste e inferencia del TSP asimétrico

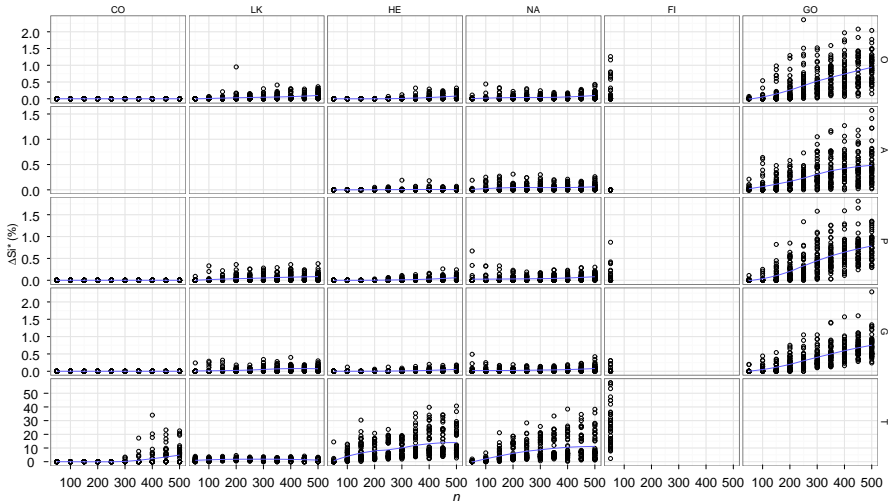


Figura 7.5: Medias de ΔS_i^* según el tamaño n , algoritmos (CO, LK, HE, NA, FI, GO) y factor asimetría.

alcanzar un máximo de 196,9 %). A la izquierda de la Figura 7.6 se muestra la distribución de frecuencias de los valores de $\Delta ATSP$. Mayoritariamente los valores se sitúan entre un 50 % y un 100 %. A la derecha de la Figura 7.6 se muestra un segundo histograma, esta vez para ΔTSP_A . La distribución está claramente sesgada hacia valores positivos con una media del 13,6 %. Exactamente, un 39,8 % de los casos muestran diferencias iguales o superiores al 10 %.

Estos resultados, cuantifican e ilustran las enormes diferencias que existen entre el escenario simétrico y el asimétrico. Queda demostrada que la idea de resolver un TSP con distancias ortodrómicas (observada incluso en algún software comercial) no es válida. Y tampoco que se pueda calcular o extrapolar la distancia real a posteriori. Como media, se observan diferencias del 13,6 % que son extremadamente grandes para problemas TSP cuyas técnicas actualmente compiten en rangos menores del 2 %. La distribución de $\Delta ATSP_O$ es positiva, con medias del 14,3 %. En un 50,02 % de los casos, las

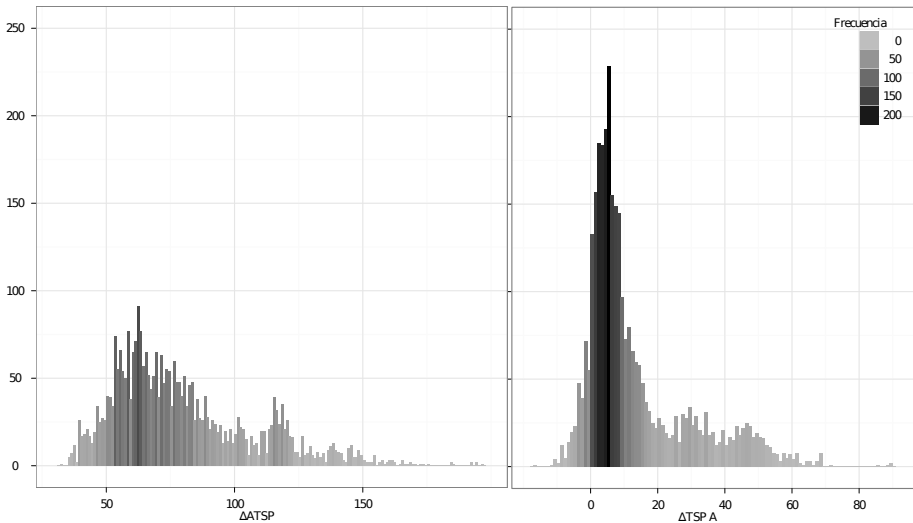


Figura 7.6: Histogramas para $\Delta ATSP$ (izquierda) y $\Delta TSPA$ (derecha).

diferencias son iguales o mayores que el 10 %. Otro resultado significativo aparece al observar las diferencias entre las secuencias TSP y ATSP obtenidas. La media de ΔdA tiene un valor del 71 %, e incluso más grande para la distancia de Hamming ΔdH . Tal y como muestran los histogramas de la Figura 7.7. El valor mínimo de ΔdA es de un 6 %. Lo que indica que el mejor de los casos, un 6 % de la secuencia sería diferente. A la derecha se observa que la distribución está claramente sesgada hacia valores próximos al 100 %.

7.6 Conclusiones

En este capítulo se ha realizado una extensión a los experimentos del Capítulo 4 y de los cálculos analizados en el Capítulo 6. Aunque se han seleccionado dos heurísticas de última generación especialmente diseñadas para la resolución del ATSP, los resultados alcanzados y el contraste asimétrico aquí presentado no hace más que confirmar y subrayar las conclusiones anteriormente alcanzadas.

Tanto en el caso de heurísticas sencillas, heurísticas diseñadas para el

7 | Contraste e inferencia del TSP asimétrico

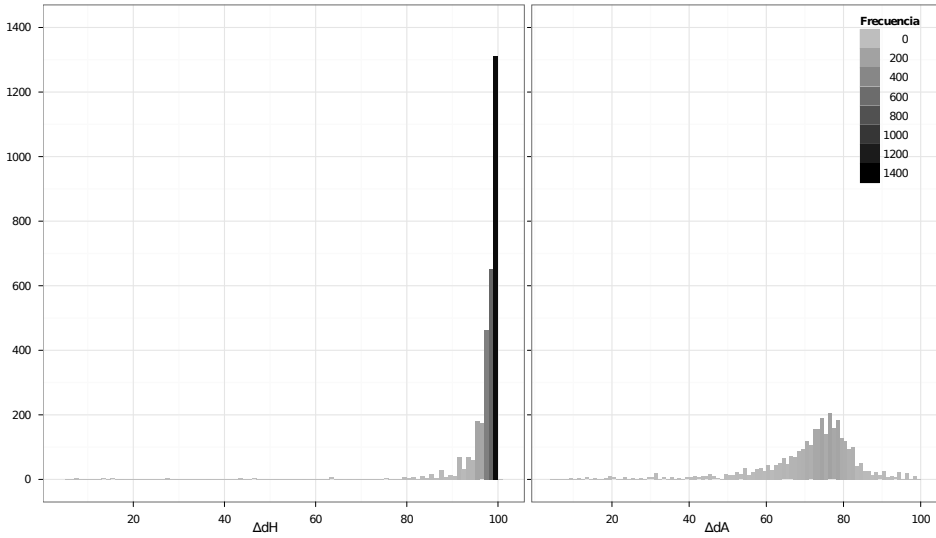


Figura 7.7: Histogramas para ΔdH (izquierda) y ΔdA (derecha).

caso simétrico TSP, flexibles (TSP y ATSP) o especialmente diseñadas para el ATSP; el diferente grado de asimetría de una red de transporte y el resto de los factores estudiados (territorio, localización, tamaño) condicionan de una manera estadísticamente significativa tanto el tiempo de computación de los algoritmos como los resultados alcanzados (número de mejores soluciones, tasa de éxito, desviación sobre la mejor solución encontrada).

Si bien en estos capítulos se ha estudiado cómo los diferentes factores e interacciones afectan a uno u otro algoritmo, lo más relevante ha sido la demostración de las hipótesis planteadas y la cuantificación de las diferencias existentes (cuantitativa y cualitativamente) entre las soluciones del escenario simétrico y del asimétrico. Al extender y contrastar las estadísticas incluyendo heurísticas especializadas en el ámbito asimétrico se está en disposición de inferir y generalizar las conclusiones alcanzadas para todos los casos TSP y ATSP.

8 | Asimetría: El caso del CVRP

Este capítulo supone una extensión del Capítulo 4 al caso del problema de rutas de vehículos capacitados. Se analizará la relación entre el factor de asimetría, ahora en el contexto de los problemas CVRP. A lo largo del capítulo se presentarán las hipótesis del nuevo caso y se describirá el nuevo proceso de experimentación. Se describen detalladamente las heurísticas seleccionadas para la resolución del CVRP y se presentan las cuestiones e hipótesis de la investigación. Se explicará con detalle aquellos factores que son novedosos en esta parte del estudio, así como los niveles o variantes seleccionados y las variables respuesta estudiadas.

8.1 Justificación y objetivos

No es posible hacer un estudio del impacto de la asimetría sobre todas las posibles variantes de problemas VRP, con todas sus posibles restricciones, algoritmos y heurísticas conocidos, etc. En este caso, se pretende cotejar si la asimetría de la red tiene o no un efecto en el contexto de los CVRP, considerando también algún método basado en la geometría planar euclidiana. ¿Condicionará la asimetría el coste total de las rutas? ¿Es posible utilizar el proceso de post-optimización para contrarrestar el supuesto efecto perjudicial de la asimetría sobre la bondad de la solución?

Con todo ello, y volviendo al concepto inicial ilustrado en la Figura 3.1, el fin último de esta investigación es estar en disposición de inferir que la asimetría tiene un efecto muy importante en el caso del TSP, en el CVRP, y por tanto en todos los problemas de rutas que de ellos se derivan. Si así se demostrara, se pretende alentar a la comunidad científica a no pasar por alto este factor, y a considerar la asimetría (y otros factores) como claves de futuros desarrollos e investigaciones, que aspiren a ser aplicados con éxito en el contexto real de las empresas.

8.2 Algoritmos para el CVRP

En el apartado 3.5 del Capítulo 3 se describió con detalle el problema CVRP. Tal y como es sabido, en el CVRP para cada cliente i se asocia una demanda de servicio d_i que es conocida y no negativa, y que deberá ser atendida sin fraccionar. Se dispone de una flota de vehículos homogéneos K cuya capacidad total de servicio C también es conocida y debe ser superior a toda la demanda $d_i \forall i \in V$. Dicha flota parte de un depósito central, normalmente el nodo 0, cuya demanda $d_0 = 0$. En este problema clásico no se introducen más restricciones además de la capacidad. El objetivo consiste en minimizar el coste total de operación medido indistintamente como la suma de la distancia total recorrida por todos los vehículos, los tiempos totales necesarios para todas las rutas, su coste en unidades monetarias, etc.

Para su resolución, será necesario disponer de una matriz de costes o distancias, donde para cada arco $(i,j) \in A$ se asocia un coste c_{ij} no negativo para el arco desde el cliente i hasta el cliente j . El problema clásico de la literatura se trata en realidad de un SCVRP, se sobrentiende que las distancias entre nodos (i,j) son distancias ortodrómicas donde $c_{ij} = c_{ji}, \forall (i,j) \in A$. En el caso en el que los arcos fueran recorridos reales asimétricos, esto es, una matriz asimétrica; se trataría de un ACVRP.

En la siguiente Figura 8.1 se muestra un ejemplo de solución un problema CVRP con una matriz simétrica de distancias ortodrómicas ($k = 4, n =$

14). Este ejemplo se ha elaborado a partir del ejemplo de Laporte (2007). La demanda de cada nodo cliente $d_i = [1, 5, 2, 2, 9, 6, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 1, 1]$, y se dispone de cuatro vehículos de capacidad homogénea $C_k = 10$.

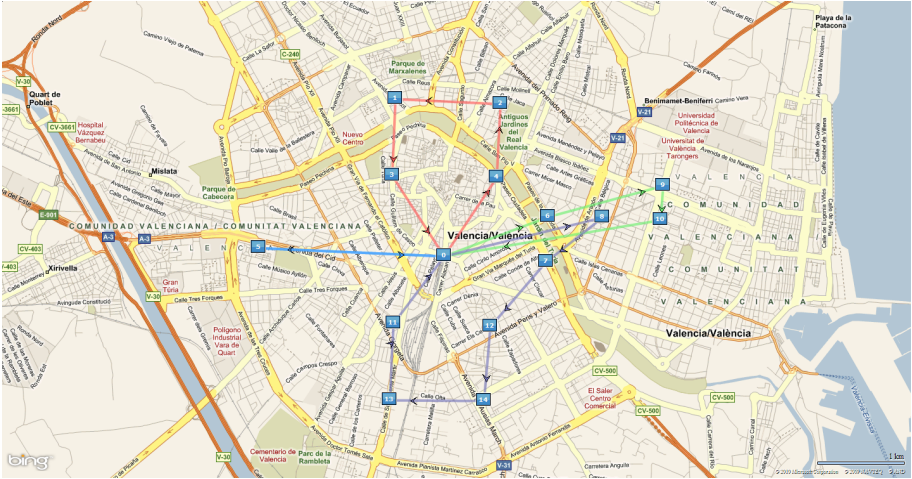


Figura 8.1: Solución del SCVRP con distancias euclidianas ($k = 4$ $n = 14$).

La distancia total recorrida de las cuatro rutas es igual a 22,68 km. Nótese el envío directo de una de las rutas, y que hay otras dos rutas que se interseccionan. Con ayuda de un GIS se ha calculado la matriz asimétrica de distancias mínimas entre pares de nodos; y se ha resuelto el problema ACVRP, tal y como muestra la Figura 8.2. La distancia total recorrida de las cuatro rutas es igual a 33,00 km (un 45,5 % más que en el SCVRP).

Nótese las grandes diferencias existentes entre ambos casos debido a las restricciones impuestas por la red de calles y su sentido de circulación. En el caso asimétrico se puede observar que hay más rutas que se interseccionan, compartiendo segmentos de calles en sus itinerarios.

En la práctica, un CVRP es mucho más complejo de resolver que un TSP de tamaño equivalente, ya que incluye el TSP como un caso especial donde $C = +\infty$ y $K = 1$. Actualmente se pueden resolver problemas TSP de cientos e incluso miles de vértices mediante el uso de algoritmos *branch-and-cut-and-*



Figura 8.2: Solución del ACVRP con distancias mínimas e itinerarios reales ($k = 4$ $n = 14$).

price, véase [Applegate et al. \(2006\)](#); sin embargo, los más recientes y sofisticados algoritmos exactos para la resolución del VRP, [Baldacci, Christofides y Mingozzi \(2008\)](#), sólo pueden resolver instancias de unos 100 clientes. En la literatura aparecen propuestas de algoritmos exactos para la resolución del CVRP simétrico basados en la programación lineal entera, en la programación dinámica, y en *branch-and-bound* (ramificación y acotación); tal y como se describe en la revisión de [Laporte y Nobert \(1987\)](#), y de [Toth y Vigo \(2001b\)](#), pero su capacidad para la resolución de problemas o instancias realistas es muy limitada. Por ejemplo, en la propuesta de formulación de [Baldacci, Hadjiconstantinou y Mingozzi \(2004\)](#) y mediante un algoritmo de ramificación y acotación, se consigue resolver de manera óptima diferentes instancias VRP de la literatura de tamaño $16 \leq n \leq 135$. El algoritmo también fue capaz de resolver instancias generadas aleatoriamente de tamaño $30 \leq n \leq 60$ con $K = 3, \dots, 5$ vehículos; e incluso algunas instancias mayores de tamaño $n = 100$ y $K = 8$ vehículos. Esta gran complejidad explica la razón de que el esfuerzo investigador se haya centrado en el desarrollo de heurísticas y meta-

heurísticas; y no tanto en el desarrollo de algoritmos exactos. Otra razón de ello, es que las heurísticas se pueden adaptar más fácilmente a las diferentes características de las variantes de problemas VRP.

Tal y como se describe en el artículo de [Laporte y Nobert \(1987\)](#) y también en el libro de [Toth y Vigo \(2001b\)](#), los algoritmos para la resolución del problema clásico del CVRP se pueden dividir en tres categorías: algoritmos exactos (*exact algorithms*), heurísticas clásicas (*classical heuristics*) y meta-heurísticas (*meta-heuristics*). Como en esta investigación se pretende trabajar con instancias de tamaño relativamente grande ($n = 50, \dots, 500$), y dada la complejidad del problema a resolver, se descartará la utilización de algoritmos exactos en los siguientes experimentos. Se consideran heurísticas clásicas aquellas que siguen un proceso de mejora desde una determinada solución hacia una solución mejor, descendiendo en la función objetivo a minimizar hasta que no es posible encontrar una solución mejor. Nótese que las meta-heurísticas en su proceso de búsqueda de soluciones mejores, a diferencia de las heurísticas clásicas, consideran como posible paso intermedio las soluciones que no mejoran la solución presente, e incluso soluciones que no sean factibles. Las heurísticas clásicas, a su vez, se dividen en dos tipos: heurísticas constructivas (*constructive heuristics*) y heurísticas de mejora (*improvement heuristics*); sus características serán tratadas más adelante. Para seleccionar los algoritmos de este estudio fue necesaria una revisión de la literatura científica. De la multitud de heurísticas y meta-heurísticas se ha procurado recoger en la selección una pequeña variedad de técnicas, algunas más simples y clásicas, y otras mucho más actuales y avanzadas; a partir de su:

1. Alto reconocimiento científico según el número de referencias científicas.
2. Buena posición frente a bancos de pruebas reconocidos, como el CMT de [Christofides, Mingozzi y Toth \(1979\)](#) que contiene 14 instancias de $51 \leq n \leq 199$; y el GWKC de [Golden et al. \(1998\)](#) con 20 instancias de mayores dimensiones $200 \leq n \leq 480$.

Este estudio no pretende hacer una comparación exhaustiva de las técnicas existentes, sino más bien estudiar el efecto de la asimetría sobre algunos de los algoritmos más reconocidos en la actualidad.

8.2.1 Algoritmo de Clarke y Wright (1964)

Se trata de una de las heurísticas más conocidas para la resolución del VRP, y fue desarrollada por [Clarke y Wright \(1964\)](#). También es conocida como el algoritmo de los ahorros (*savings algorithm*). En la actualidad existen otros algoritmos y variantes que ofrecen mejores resultados que éste, pero la heurística de Clarke y Wright se ha popularizado por su gran sencillez y rapidez de implementación. Los resultados que ofrece rondan el 7% de desviación promedio sobre los mejores resultados conocidos del banco de pruebas CMT. La idea que hay detrás de este algoritmo es muy sencilla: considerando una localización o depósito central 0 y n localizaciones o clientes con demanda, se supone que la solución inicial al VRP consiste en n rutas directas de n vehículos que servirán cada uno de ellos a una de los n clientes. La distancia total de las n rutas será igual a 2 veces la suma de las distancias c_{0i} entre el depósito 0 y cada cliente i :

$$2 \sum_{i=1}^n c_{0i} \quad (8.1)$$

Nótese que se en la concepción inicial del algoritmo la matriz de distancias se considera simétrica ($c_{ij} = c_{ji}$), y por ello la expresión (8.1) multiplica por 2 la distancia entre el depósito 0 y el cliente i . Siguiendo con la idea inicial, si se utilizara un único vehículo para servir a dos clientes i y j en un sólo viaje, la distancia total se reduciría en el ahorro s_{ij} tal y como muestra la siguiente expresión:

$$s_{ij} = 2c_{0i} + 2c_{0j} - (c_{0i} + c_{ij} + c_{0j}) = c_{0i} + c_{0j} - c_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (8.2)$$

Dicho de otro modo, s_{ij} es el ahorro de distancia que se consigue al unir dos rutas $[0, \dots, i, 0]$ y $[0, j, \dots, 0]$ en una ruta $[0, \dots, i, j, \dots, 0]$ tal y como se ilustra en la Figura 8.3. Lógicamente, cuanto mayor sea el ahorro, más interesante será combinar i y j en una misma ruta. Sin embargo, debido a las posibles restricciones del VRP, como la capacidad en el CVRP, no siempre será factible dicha combinación. El objetivo del algoritmo, es determinar el número de vehículos necesarios y la ruta que realizará cada uno de ellos.

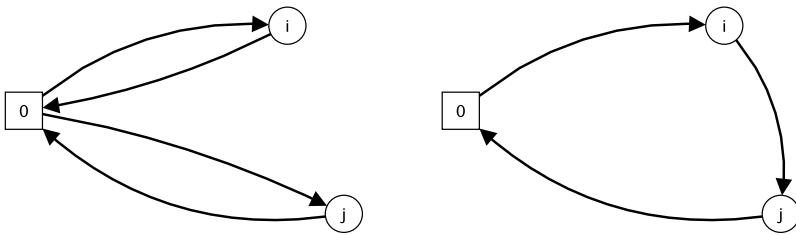


Figura 8.3: Concepto original de ahorro s_{ij} en Clarke y Wright (e.p).

En el pseudocódigo 8.1 se expresa la lógica del algoritmo; a partir de una matriz de distancias c_{ij} simétrica, el algoritmo comienza calculando los ahorros s_{ij} con los cuales creará una lista ordenada L de mayor a menor s_{ij} . En la versión en paralelo del algoritmo, se recorre la lista L en orden decreciente de s_{ij} , tomando como s_{hk} el mejor ahorro s_{ij} no considerado hasta el momento. Entonces, se determina si existen dos rutas, una que contenga el arco $(0, j)$ y otra con el arco $(i, 0)$ que puedan ser combinadas de manera factible (según las restricciones de capacidad, por ejemplo). En caso afirmativo, se combinan dichas rutas, borrando los arcos $(0, j)$ e $(i, 0)$, e introduciendo el arco (i, j) .

El pseudocódigo 8.1 se refiere a la versión en paralelo del algoritmo que difiere de la clásica a partir de la creación de la lista ordenada L . A partir de dicho punto, se considera cada ruta $[0, i, \dots, j, 0]$. Seguidamente, se determina el primer ahorro s_{ki} o s_{jl} que pueda ser usado factiblemente para combinar la ruta actual con otra ruta que contenga el arco $(k, 0)$ o el arco $(0, l)$. Si es posible, se procede a la mezcla y se repite esta operación para la ruta actual.

Algoritmo 8.1 Clarke y Wright (CW) - en paralelo

Entrada: matriz de distancias**Salida:** *Rutas*

- 1: **para** $i = 1$ **a** n **hacer**
 - 2: **para** $j = i$ **a** n **hacer**
 - 3: **si** $i \neq j$ **entonces**
 - 4: **construye** matriz S
 $s_{ij} = c_{0i} + c_{0j} - c_{ij}$
 - 5: **fin si**
 - 6: **fin para**
 - 7: **fin para**
 - 8: **Crea** lista L **ordenando** S
 - 9: $s_{hk} \leftarrow$ **primer** ahorro de L
 - 10: $N_{Rutas} = n$
 - 11: **mientras** $L \neq \phi$ **y** $s_{hk} > 0$ **hacer**
 - 12: $s_{hk} \leftarrow$ **primer** $s_{ij} \in L$ **no considerado** todavía
 - 13: **si** $Mezcla(h,k) = posible$ **entonces**
 - 14: $Mezcla(Ruta_h, Ruta_k)$
 $N_{Rutas} = N_{Rutas} - 1$
 - 15: **fin si**
 - 16: **fin mientras**
-

Si no existe una mezcla factible, se considera la siguiente ruta y se repiten las mismas operaciones hasta acabar cuando no existen más mezclas factibles.

Tal y como se demuestra en [Toth y Vigo \(2001b\)](#), existe una gran variabilidad de resultados y de eficiencia en tiempo entre la versión secuencial y en paralelo de este algoritmo. Es importante señalar que la versión en paralelo ofrece mejores resultados que son dominantes sobre los de la secuencial.

El algoritmo de Clarke y Wright consume cierto tiempo y recursos en el cálculo y almacenamiento de la matriz de ahorros, ya que es necesario realizar una ordenación decreciente de los valores de la matriz de ahorros para el cálculo del ahorro máximo. En general se suele utilizar el conocido método de ordenación *QuickSort*, aunque en la literatura científica aparecen otros métodos de ordenación y estructuras de datos adaptadas a este caso mucho más eficientes, como el de [Golden, Magnanti y Nguyen \(1977\)](#). Muchos de los métodos alternativos fueron desarrollados en la década de 1970-1980, cuando la capacidad computacional de los ordenadores era mucho menor que ahora, en la actualidad es posible calcular y ordenar decrecientemente los ahorros para un problema de $n = 1\,000$ en menos de 0,3 segundos.

Aunque originalmente este algoritmo se desarrolló para grafos no dirigidos, se puede aplicar tanto en matrices de distancias simétricas como en asimétricas. Sin embargo, según la experiencia de [Vigo \(1996\)](#), en el caso asimétrico ACVRP el comportamiento del mismo empeora considerablemente, aunque se reduzca a la mitad el número de posibles mezclas de rutas. Para calcular los ahorros en el caso asimétrico, es importante tener presente las diferencias entre c_{ij} y c_{ji} :

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j \quad (8.3)$$

8.2.2 Algoritmo de barrido - *sweep algorithm* (1974)

Aunque de origen anterior, el algoritmo de barrido (*sweep algorithm*) se popularizó gracias al trabajo de Gillett y Miller (1974). Este algoritmo pertenece a la familia de métodos constructivos de dos etapas, en concreto a la familia agrupamiento-primero y ruta-después (*cluster-first, route-second*). Como su nombre indica, la heurística construye la solución en dos fases: en primer lugar recorre el conjunto de nodos clientes realizando un barrido circular sobre el plano y formando grupos (*cluster*) de clientes según su demanda y la limitación de capacidad de los vehículos; en segundo lugar, se ejecuta un algoritmo TSP con los nodos de cada grupo con el objetivo de formar cada una de las rutas de la solución. Esto se puede observar en los dos pseudocódigos: 8.2 (fase de *clustering*) y 8.3 (fase de *routing*).

Algoritmo 8.2 Algoritmo de barrido - (fase 1: *clustering*)

Entrada: matriz de coordenadas

Salida: *Grupos*

```

1: para  $i = 1$  a  $n$  hacer
2:   transformación a coordenadas polares
   calcula  $(r_i, \theta_i)$ 
3: fin para
4: Define ángulo inicial  $\theta^*$ 
5: Define sentido de giro  $g$ 
6: Crea lista  $L$  ordenando  $i$  según  $\Delta(\theta_i - \theta^*)$  creciente
7:  $k = 1$ 
8: mientras  $L \neq \phi$  hacer
9:    $i \leftarrow$  primer nodo  $\in L$  no considerado todavía
10:  si  $Agrupar(i, k) = posible$  entonces
11:     $Agrupar(i, k)$ 
12:  si no
13:     $k = k + 1$ 
     $Agrupar(i, k)$ 
14:  fin si
15: fin mientras

```

Algoritmo 8.3 Algoritmo de barrido - (fase 2: *routing*)

Entrada: matriz de distancias y *Grupos*

Salida: *Rutas*

- 1: para $k = 1$ a K hacer
 - 2: **Ejecutar algoritmo TSP para** $Grupo_k$
 Construye y valora $Ruta_k$
 - 3: **fin para**
 - 4: $N_{Rutas} \leftarrow K$
-

El algoritmo de barrido funciona del siguiente modo; en primer lugar se realiza una transformación de las coordenadas de latitud y longitud de cada nodo cliente a un sistema de coordenadas polar cuyo origen estará situado en la localización del nodo depósito (*depot*). De este modo, el nodo depósito será el polo del sistema de coordenadas, y la localización de cada nodo cliente i vendrá expresada por su distancia r_i con el polo p y el ángulo θ_i , esto es (r_i, θ_i) .

A continuación, el algoritmo toma un ángulo inicial arbitrario θ^* , a partir del cual realizará un barrido o recorrido de 2π radianes sobre el plano polar, acabando en el mismo ángulo θ^* donde comenzó, véase la Figura 8.4. Este recorrido por los 4 cuadrantes se puede realizar en sentido levógiro (sentido contrario a las agujas del reloj) o dextrógiro en contraposición. Según sea el caso, el conjunto de nodos cliente serán ordenados en orden creciente de $\Delta(\theta_i - \theta^*)$. Esto es equivalente a trazar un eje imaginario de ángulo θ^* que pase siempre por el polo p , y hacerlo girar 2π radianes localizando a su paso, y de manera ordenada según el giro del eje, todos los nodos clientes (r_i, θ_i) .

El algoritmo comenzará el barrido con un vehículo k sin utilizar y con capacidad máxima de carga C_k . En cada nodo localizado i , se comprobará si su demanda d_i puede ser atendida por la capacidad restante del vehículo sobre su capacidad máxima C_k . En caso afirmativo el nodo i será agrupado o asociado al vehículo k . En caso negativo, se cierra el grupo de clientes asociados al vehículo k y se crea un nuevo grupo $k + 1$ con el nodo i . Este

proceso se repite a medida que gira el eje, hasta que todos los nodos i han sido agrupado en K grupos. Con esto acaba la primera fase del algoritmo de agrupación (*clustering*).

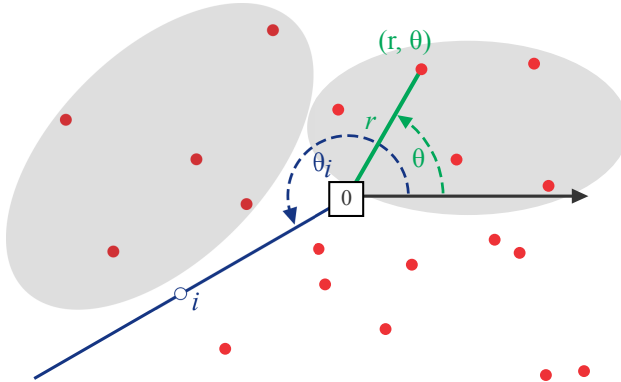


Figura 8.4: Ejemplo de barrido en coordenadas polares (e.p).

En este punto, comienza la segunda fase del algoritmo, donde se resolverán K rutas o problemas TSP. Para ello se utilizará cualquier heurística TSP, tal y como se describió en el apartado 8.2.5. El resultado es un conjunto de K rutas que comienzan y terminan en el nodo central, que reciben el nombre de pétalos (*petals*) porque su forma recuerda los de una flor, tal y como muestra la Figura 8.5. Esta heurística es muy sencilla, y en el caso simétrico sólo generará rutas que no se interseccionan entre sí, no explorando soluciones con otro tipo de formaciones más complejas pero mejores. Precisamente, esa es una de las razones por las que ha sido seleccionado para los próximos experimentos; ya que se pretende estudiar el impacto de la asimetría y otros factores ligados al territorio y la red de carreteras en el resultado de algunas heurísticas VRP. Naturalmente, otra de las razones de su elección, es porque se trata de uno de los algoritmos más populares y de referencia en la literatura científica.

Es importante señalar que el algoritmo de barrido se puede implementar usando ambos sentidos de giro (levógiro y dextrógiro), lo que probablemente proporcionará dos soluciones diferentes que se pueden comparar, para fi-

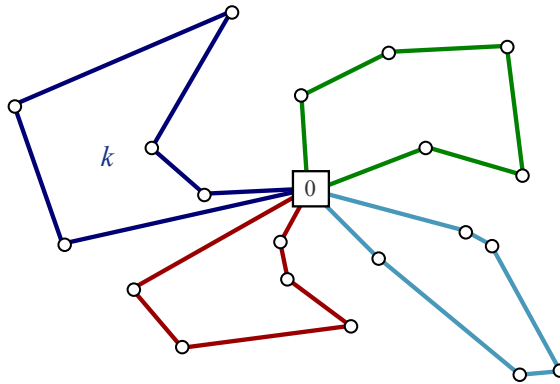


Figura 8.5: Ejemplo de rutas con forma de pétalos (e.p).

nalmente elegir la mejor. Otra forma de obtener un conjunto de soluciones alternativas para comparar, es iniciar varias veces el algoritmo con diferentes valores del ángulo inicial θ^* y diferente sentido de giro g . El algoritmo de barrido es realmente fácil de implementar y rápido en su ejecución, si bien el tiempo total de ejecución y su bondad dependerá de la heurística TSP implementada en su segunda fase. Según [Toth y Vigo \(2001b\)](#), con esta heurística se pueden obtener soluciones que rondan el 7,09 % de desviación sobre el óptimo conocido de instancias de referencia.

8.2.3 General Heuristic de Pisinger y Røpke (2007)

A diferencia de muchas heurísticas de la literatura que han sido desarrolladas para la resolución de un tipo concreto de problema VRP; David Pisinger y Stefan Røpke desarrollaron una heurística unificada que es capaz de resolver diferentes variantes de problemas VRP. Según afirman los propios autores; las necesidades actuales de las empresas de transporte son variables y particulares, lo que justifica el desarrollo de técnicas y heurísticas que sean capaces de adaptarse y sean válidas para la diferente casuística. La heurística general de [Pisinger y Røpke \(2007\)](#), se puede aplicar a diferentes variantes de problemas VRP: con capacidad CVRP, con ventanas horarias CVRPTW,

sin retornos OVRP, con múltiples depósitos MDVRP, y con dependencia del cliente (SDVRP - *Site Dependent VRP*).

Esto se consigue mediante la transformación de todos estos problemas a un problema general de recogida y entrega con ventanas horarias (RPDPTW - *Rich Pickup and Delivery Problem with Time Windows*). Por ejemplo, una instancia CVRP puede ser transformada en una instancia VRPTW en la cual todos los tiempos de viaje y de servicio son igual a cero, y la ventana de tiempo $[e_i, l_i]$ es igual a $[0, 0]$ para todos los nodos clientes i . Si el CVRP tuviera la restricción de máxima duración de ruta, entonces se deberían considerar los tiempos de los recorridos y la ventana de tiempo debería ser igual a $[0, D]$, siendo D la duración máxima de la ruta permitida.

El algoritmo utiliza la búsqueda adaptativa en gran vecindario (ALNS - *Adaptive Large Neighborhood Search*) propuesta en Røpke y Pisinger (2006). El ALNS en realidad es un sistema de búsqueda local en el cual, un conjunto de algoritmos simples y rápidos compiten por modificar y mejorar la solución actual. En cada iteración del algoritmo, se elige un algoritmo para la destrucción de la solución actual, y otro algoritmo para la reparación o reconstrucción de la misma. La nueva solución encontrada será aceptada siempre que cumpla con un criterio definido en el sistema de búsqueda local. En realidad, el ALNS es una extensión del (LNS - *Large Neighborhood Search*) presentado por Shaw (1998). También se podría decir que el ALNS está basado en el paradigma *Ruin and Recreate* presentado por Schrimpf et al. (2000), o el *Ripup and Reroute* de Dees y Karger (1982). El siguiente pseudocódigo 8.4 muestra el funcionamiento general del algoritmo.

El ALNS tiene la ventaja de poder incorporar en su núcleo aquellas heurísticas conocidas que hayan demostrado su eficacia y eficiencia en el proceso de búsqueda local. El ALNS puede explorar grandes porciones del espacio de búsqueda (vecindarios) de una manera robusta y estructurada, adaptándose a diferentes características del problema, y con capacidad de escapar de óptimos locales incluso en problemas muy restringidos. Ha demostrado su

Algoritmo 8.4 Algoritmo ALNS

-
- 1: Construir una solución factible x
 - 2: $x^* \leftarrow x$
 - 3: **mientras** no se cumpla criterio de convergencia **hacer**
 - 4: Calcular puntuaciones $\{\pi_j\}$
 - 5: Seleccionar un vecindario de destrucción N^- y un vecindario de reconstrucción N^+ según una ruleta de selección y las puntuaciones $\{\pi_j\}$
 - 6: Generar una nueva solución x' a partir de x usando las heurísticas seleccionadas de destrucción y reconstrucción
 - 7: **si** x' puede ser aceptada **entonces**
 - 8: $x \leftarrow x'$
 - 9: **fin si**
 - 10: Actualizar puntuaciones $\{\pi_j\}$ de N^- y de N^+
 - 11: **si** $f(x) < f(x^*)$ **entonces**
 - 12: $x^* \leftarrow x$
 - 13: **fin si**
 - 14: **fin mientras**
-

bondad al enfrentarse con el CMT de [Christofides, Mingozi y Toth \(1979\)](#), sus soluciones tienen una desviación en promedio inferior al 0,4% de las mejores soluciones conocidas en tiempos de computación equivalentes. Al compararse con el GWKC de [Golden et al. \(1998\)](#), la desviación máxima promedio fue del 1,25% sobre las mejores soluciones conocidas en tiempos de computación equivalentes. En este segundo conjunto de instancias, fue capaz de encontrar una nueva solución mejorada. Cabe mencionar que también fue contrastado con el reciente conjunto de instancias de [Li, Golden y Wasił \(2005\)](#) que contiene 12 instancias de $560 \leq n \leq 1200$, donde fue capaz de encontrar tres nuevas soluciones mejoradas.

Cabe destacar que el investigador Rodríguez, A. durante el desarrollo de los presentes experimentos, detectó y ayudó a Stefan Røpke a resolver una limitación en la última versión disponible de su algoritmo referente al orden de magnitud de la función objetivo.

8.2.4 EAX (*edge assembly crossover*) de Nagata (2007)

En los últimos años, la utilización de técnicas meta-heurísticas ha proporcionado muy buenos resultados en la resolución de los VRP. Gracias a la utilización de técnicas como: el recocido simulado (*simulated annealing*), la búsqueda tabú (*tabu search*), los algoritmos evolutivos (*evolutionary algorithms*), etc. se han conseguido soluciones próximas al óptimo, tal y como muestra la revisión de [Cordeau et al. \(2005\)](#). En el año 2007, Yuichi Nagata propuso la utilización un algoritmo evolutivo con el operador de cruce *edge assembly crossover* (EAX) para la resolución del problema CVRP. Tal y como se describe en [Nagata \(2007\)](#), la idea principal de su trabajo consiste en utilizar el conocido operador de cruce EAX para la resolución del CVRP. Dicho operador había sido utilizado con éxito por el propio [Nagata y Kobayashi \(1997\)](#) para la resolución de problemas TSP.

Como cualquier otro operador de cruce, el EAX genera nuevas soluciones de descendencia (*offspring*) a partir de la combinación de soluciones antecesoras (*parents*). El proceso que sigue el EAX es un poco complejo, pero básicamente consiste en una serie de etapas de relajación y mejora de la solución. En primer lugar se construye unas soluciones intermedias mediante la combinación de las aristas de las soluciones de los padres y bajo condiciones de relajación. La única condición impuesta en esta etapa es la de continuidad, esto es, se obtienen varias sub-rutas (*sub-tours*) pero deben estar cerradas. En la segunda parte del proceso, cada solución intermedia es modificada para dar lugar a una solución factible mediante la combinación de las sub-rutas intentando minimizar la distancia total del recorrido con una adecuada selección de las aristas a conectar y a borrar. La Figura 8.6 ilustra de manera resumida el funcionamiento del operador EAX en la resolución del TSP.

En el caso del TSP, la meta-heurística con el operador EAX es capaz de producir resultados que se alejan del óptimo en menos del 1% para una variedad de casos: $n = 100, \dots, 3\,000$; tal y como se describe en [Michalewicz y Fogel \(2000\)](#). En estudios más recientes de [Nagata \(2006\)](#); algoritmos evolu-

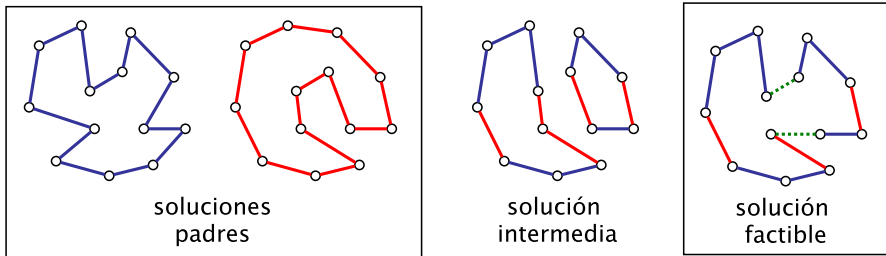


Figura 8.6: Ejemplo de cruce EAX para el TSP (e.p).

tivos con el operador EAX han sido capaces de encontrar la solución óptima a problemas de tamaño $n = 24\,000$ en un día de cálculo. El operador de cruce EAX, aunque fue diseñado para resolver el TSP, puede ser adaptado para la resolución del CVRP.

El algoritmo evolutivo de Nagata comienza generando y seleccionando una serie de soluciones iniciales que serán los padres de la próxima generación de soluciones. Para cada par de soluciones padres se les aplica el operador de cruce EAX lo que dará lugar a varias soluciones descendientes. Este proceso de selección y cruzamiento se repite una serie de veces, y tras varias generaciones se obtendrán soluciones mejores que las iniciales y cada vez más próximas a la solución óptima. Es importante señalar que el algoritmo de Nagata incorpora un proceso de búsqueda local con 2-Opt e intercambio (c, λ, μ) para la etapa de modificación y factibilidad de las soluciones intermedias. La Figura 8.7 ilustra de manera sencilla el funcionamiento del operador EAX en la resolución del CVRP, pero para más detalles sobre el algoritmo es recomendable la lectura del artículo original de Nagata (2007).

Según el propio Nagata, este algoritmo evolutivo fue aplicado en la resolución del reconocido CMT *benchmark* de Christofides, Mingozzi y Toth (1979), y que consiste en 14 instancias de tamaño $50 \leq n \leq 199$. También fue aplicado en el GWKC que consiste en 20 instancias de mayor tamaño $200 \leq n \leq 480$ propuestas por Golden et al. (1998). El algoritmo demostró poder encontrar

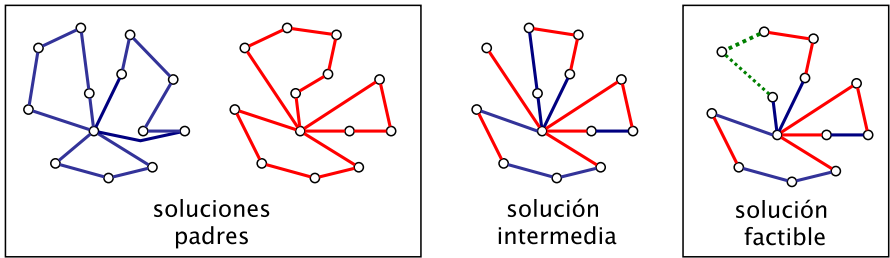


Figura 8.7: Ejemplo de cruce EAX para el CVRP (e.p).

las mejores soluciones conocidas para las instancias de Christofides, y fue capaz incluso de encontrar nuevas mejores soluciones para las instancias de Golden, pero con tiempos de computación superiores.

8.2.5 Heurísticas de mejora - *improvement heuristics*

Existe una clasificación de los algoritmos que se pueden aplicar a las soluciones del CVRP con el objetivo de mejorar su solución, [Toth y Vigo \(2001b\)](#).

Heurísticas intra-ruta (*intra-route*): se trata de aplicar alguna heurística de post-optimización a cada ruta resultante del CVRP de manera separada e independiente. Esto es, se toma cada una de las rutas generadas por el algoritmo principal CVRP y se procesa como si de un TSP se tratara. Así pues, se puede utilizar cualquiera de los algoritmos TSP según sea un problema simétrico o asimétrico, tal y como se describe en el apartado , como por ejemplo: 2-Opt, 3-Opt o el algoritmo de LK de Keld Helsgaun. Según [Toth y Vigo \(2001b\)](#), al aplicar 3-Opt como heurística de post-optimización, se consigue mejorar los resultados en un 2 % en algunas instancias. La combinación de la heurística de Clarke y Wright en su versión paralela y de 3-Opt como heurística de post-optimización, consigue soluciones muy rápidamente en un rango del 6,71 % de desviación sobre los óptimos conocidos.

Heurísticas entre-rutas (*inter-route*): se trata de aplicar alguna heurística de post-optimización al conjunto de rutas resultantes del CVRP. De manera conjunta, se considera todas las rutas y mediante movimientos de intercambio de nodos entre rutas se pretende mejorar la solución global. Comúnmente se suelen realizar intercambios de nodos entre dos o más rutas. En [Thompson y Psaraftis \(1993\)](#) se describe un esquema general de mejora basado en transferencias de nodos y ciclos de permutación circulares.

En esta investigación se ha seleccionado el algoritmo de LK de Keld Helsgaun para estudiar el grado de mejora intra-ruta que se puede conseguir sobre las soluciones de los diferentes algoritmos CVRP; y a su vez, su relación con otros factores de estudio: la asimetría, el territorio, el tamaño del problema, etc. En el caso del TSP presentado en el [Capítulo 4](#), el algoritmo de Helsgaun demostró lograr buenas o muy buenas soluciones en una amplia gama de situaciones, tal y como se explicó detalladamente en el [Capítulo 6](#).

La elección del LK de Keld Helsgaun para la siguiente parte de la investigación permite dar continuidad a todo el trabajo de la presente Tesis Doctoral. Otra de las razones por las cuales se ha seleccionado una heurística intra-ruta, es porque uno de los objetivos de los experimentos será estudiar el tiempo adicional de computación necesario.

Para conocer otros algoritmos y técnicas de mejora, *benchmarks* y referencias, es interesante la visita al sitio *VRP Web*¹ que actualmente se mantiene por la Red Andaluza de Investigación en Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados de la Universidad de Málaga.

¹<http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/>

8.3 Cuestiones e hipótesis para la investigación

Nuevamente se plantean algunas cuestiones que dan lugar a una extensión de la presente investigación en el contexto de los problemas CVRP.

Cuestiones:

1. ¿En qué medida la asimetría afecta a la eficacia en la solución aportada por las heurísticas CVRP seleccionadas?
2. ¿En qué medida la asimetría afecta a la eficiencia de las heurísticas CVRP?
3. ¿En qué casos es interesante aplicar una técnica heurística de mejora intra-ruta? ¿qué grado de mejora se consigue?
4. ¿Cómo evolucionan los aspectos anteriores en función del tamaño del problema a resolver?
5. ¿Qué técnicas de resolución son las más indicadas según el caso?

Hipótesis de la investigación:

1. La asimetría condiciona la eficacia de la solución de las heurísticas CVRP.
2. La asimetría condiciona la eficiencia de las heurísticas en la resolución del CVRP.
3. La localización de los nodos clientes en el territorio real, esto es el ámbito geográfico, representará un diferente grado de asimetría y condicionará por tanto la eficiencia y/o eficacia de los métodos.
4. La asimetría de la red de comunicaciones tendrá un efecto particular sobre aquellos métodos basados en la geometría planar euclidiana (por ejemplo, el algoritmo de barrido).

5. La asimetría condicionará el coste total de las rutas solución.
6. El tamaño del problema condicionará notablemente y restará eficiencia y/o eficacia a las técnicas usadas en el estudio.

La mayoría de las cuestiones e hipótesis aquí planteadas son una extensión lógica al caso del CVRP, de las ya resueltas y demostradas para el caso del TSP. Muchos de los aspectos son comunes al caso del TSP, y ya han sido descritos en el Capítulo 4 por lo que serán tratados resumidamente en el apartado 8.4; para el resto de aspectos que no son descritos en detalle es importante mantener la referencia del anterior apartado 4.6.

8.4 Experimentos

En esta sección se describirá brevemente el proceso científico llevado a cabo para resolver las cuestiones planteadas anteriormente.

8.4.1 Caracterización de las instancias

A continuación se describe brevemente la clasificación de las características de las instancias.

Territorio

La región geográfica del planeta donde se sitúa cada instancia vendrá definida por los mismos territorios estudiados en el caso del TSP: Corta, Media y Larga distancia.

Localización

La posición que tomarán los nodos de la instancia dentro del territorio: Aleatoria, Cuadrícula y Radial.

Simetría

Sigue siendo el factor clave de esta investigación. Como el territorio y su conjunto de nodos geolocalizados no cambian respecto al caso del TSP, se podrán utilizar las mismas matrices de distancias. En este caso se acotará el estudio a dos únicos tipos de matriz: Ortodrómica y Asimétrica.

Tamaño de la matriz

Se mantendrá el rango y el intervalo del número de localizaciones. En el CVRP siempre debe existir un nodo central o depósito (*depot*), así que el número de clientes será lógicamente $n - 1$.

Localización del depósito

En el caso del CVRP, otro posible e interesante factor a estudiar es la localización del depósito. Se han definido tres posibles variantes para la localización del depósito:

1. Aleatorio: el depósito podrá ser cualquiera de los n nodos.
2. Centrado: el depósito será aquel nodo que esté situado más cerca del centro geográfico del territorio.
3. Periférico: es el caso contrario al anterior, el depósito será aquel nodo que esté situado más alejado del centro geográfico, o en la periferia del territorio.

Demanda de servicio

La demanda de servicio es un factor cuantitativo, para el cual se han definido dos niveles. En ambos casos se define un rango $[\min, \max]$: Pequeña $[1, 10]$ y Grande $[50, 100]$; dentro del cual se elegirá un valor aleatoriamente para cada nodo mediante una distribución uniforme discreta. El nodo depósito siempre tendrá un valor de demanda igual a cero. Nótese que los dos intervalos definidos son diferentes tanto en amplitud y como en magnitud. En estos experimentos se utilizarán valores de demanda enteros.

Capacidad máxima

La capacidad máxima de los vehículos es un factor cuantitativo, que se ha definido como un factor dependiente de la demanda de servicio y del tipo de territorio, con tres posibles niveles:

1. Pequeña: lo que dará lugar a rutas con menor número de paradas; menos demanda y clientes atendidos.
2. Media: se sitúa entre los dos niveles extremos, con un número intermedio de paradas y clientes atendidos.
3. Grande: una gran capacidad de carga dará lugar a rutas relativamente más largas con mayor número de paradas y clientes atendidos.

Post-optimización

La aplicación de una técnica de post-optimización intra-rutas se considera un factor cualitativo. Se considerará como un factor binario ya que dicha técnica podrá ser aplicada o no. En realidad, se trata de dos fases de la ejecución del algoritmo CVRP: en primer lugar se ejecutará el algoritmo CVRP correspondiente con normalidad, y tras su finalización se aplicará la técnica de mejora intra-rutas (en este caso, el algoritmo de LK de Keld Helsgaun). Esto dará lugar a dos soluciones: una pre y otra post-optimización, que serán analizadas y comparadas posteriormente.

En el caso del algoritmo de barrido, descrito en el apartado 8.2.2, no tiene sentido aplicar Helsgaun a posteriori en estos experimentos, ya que precisamente éste es el algoritmo que se utiliza dentro del algoritmo de barrido en la fase de *routing*. Esto tiene como consecuencia un conjunto de experimentos que no es ortogonal completo, tal y como se describe más adelante.

Réplicas del algoritmo

Además del factor réplica de la instancia, en los presentes experimentos se ha considerado otro nivel de réplica, para los algoritmos de Røpke y para el de Nagata. Dichos algoritmos se consideran meta-heurísticas, que como es sabido, en cada ejecución pueden proporcionar soluciones diferentes a un mismo problema. Por ello, se ha establecido un nivel de 5 réplicas del algoritmo. Las 5 soluciones resultantes serán analizadas y comparadas, tanto en rango como en promedio.

8.4.2 Estudio detallado de la capacidad máxima

A continuación, se explicará en detalle un factor que se considera importante para el caso del CVRP: la capacidad máxima. No cabe duda de que la demanda de cada cliente d_i y la capacidad máxima C de los vehículos son factores que están relacionados. Una vez cumplidas las premisas básicas del CVRP (flota ilimitada de capacidad homogénea, demanda no atendida fraccionadamente, y capacidad mayor o igual a la demanda): ¿qué criterio establecer para la definición de la capacidad máxima? Cualquier rango de capacidad máxima podría definir un posible escenario de experimentación, pero en esta Tesis Doctoral se utilizará el indicador de número de paradas promedio por ruta para calcular la capacidad máxima C , y el número de paradas promedio por ruta debería estar relacionado con el territorio.

La experiencia y el conocimiento de la realidad industrial y logística de las empresas, confirma que: mientras en el transporte de larga distancia predomina el transporte de gran volumen (pedidos grandes y gran capacidad de carga), el transporte de corta distancia suele ser más capilar (pedidos más pequeños y frecuentes, y menor capacidad de carga). Esto, debería traducirse en rutas más largas pero con menos paradas en larga distancia, y rutas relativamente más cortas pero con más paradas para territorios de corta distancia.

Para simular este efecto, se propone la utilización de unas distribuciones de probabilidad triangular. La función de probabilidad $P(x)$ en una distri-

bución triangular viene determinada por la expresión (8.4), siendo a el valor mínimo del rango, b su valor máximo, y c la moda. Nótese que en este caso, x representa el número de paradas deseado.

$$P(x | a,b,c) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c \leq x \leq b \\ 0 & \text{otros} \end{cases} \quad (8.4)$$

La siguiente Figura 8.8 muestra las distribuciones de probabilidad triangular para cada uno de los tres territorios corta, media y larga distancia de izquierda a derecha.

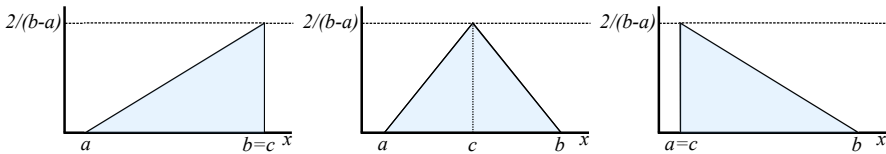


Figura 8.8: Distribución de probabilidad triangular para los territorios corta, media y larga distancia.

Se puede crear un generador de número de paradas que utilice la distribución de probabilidad anteriormente descrita. La expresión (8.5) muestra el cálculo del número de paradas $G(p)$ en función de un valor de $p \in [0,1]$.

$$G(p) = \begin{cases} a + \sqrt{p(b-a)(c-a)} & p \leq \frac{c-a}{b-a} \\ b - \sqrt{(1-p)(b-a)(b-c)} & p > \frac{c-a}{b-a} \end{cases} \quad (8.5)$$

La siguiente Tabla 8.1 muestra los valores a, b, c seleccionados para el generador de número de paradas, según el territorio y una distribución de probabilidad triangular.

A partir del número de paradas calculado anteriormente, se podrá definir la capacidad máxima C en la expresión (8.6). Esto es, la capacidad máxima C de los vehículos será igual a la máxima demanda d_i de los clientes i más tanta capacidad añadida como el producto del número de paradas deseado

Territorio	Mínimo (a)	Máximo (b)	Moda (c)
Corta	10	25	25
Media	10	25	17,5
Larga	10	25	10

Tabla 8.1: Número de paradas según el territorio y una distribución triangular.

menos una, por la demanda promedio \bar{d}_i de todos los clientes i . En estos experimentos: la demanda d_i , la capacidad C , y el número de paradas serán redondeados a los números enteros más próximos.

$$C = \max d_i + (num.paradas - 1)\bar{d}_i \quad \forall i \in [1, \dots, n] \quad (8.6)$$

Es importante señalar, que el intervalo fijado para el número de paradas (el tamaño de la matriz, y el número de rutas previsible), es coherente con los resultados de muestran los *benchmarks* más reconocidos. Para realizar este diseño de experimentos, fue necesario revisar las instancias de Christofides, Golden, TSPLIB, Taillard, y Fisher entre otros. Tras su revisión, se puede afirmar que sus valores de (nodos n , rutas k , paradas s) en general están en concordancia con un intervalo que oscile entre: $n = 50, k = 5, s = 10$ y $n = 500, k = 20, s = 25$. Dicho de otro modo, el rango de instancias y experimentos aquí presentados está en la línea y dentro del mismo rango de magnitudes que los *benchmarks* más reconocidos de la literatura científica.

8.4.3 Estudio de las variables respuesta

Se enumeran las variables respuesta que serán cuantificadas y analizadas posteriormente. Algunas de las variables ya fueron descritas con detalle en el apartado 4.6.3, por lo que no serán explicadas nuevamente.

Calidad de la solución

Como es sabido la función objetivo del CVRP trata de minimizar la distancia total recorrida por todas las rutas de la solución, cumpliendo con todos los servicios y atendiendo a las restricciones de capacidad máxima. La calidad de la solución se mide en términos de distancia total para el conjunto (suma) de todas las rutas. Se utilizarán unidades de distancia (kilómetros). Para analizar las soluciones se utilizarán los siguientes indicadores:

1. Tasa de éxito: calculada como el porcentaje de veces que un algoritmo encuentra la mejor solución en un conjunto de soluciones.
2. Diferencia o desviación cuantitativa respecto de la mejor solución: se calculará la ratio de desviación respecto de la mejor solución encontrada.

Tiempo computacional

Se realizará un registro detallado del tiempo de CPU o de procesador que realmente se utilice en la ejecución del algoritmo, excluyendo todo tiempo de entrada/salida de datos y cualquier otra operación del sistema. Así mismo, se registrará el tiempo antes y después de la post-optimización, para poder analizar el consumo de tiempo extra de la técnica de mejora; y contrastarlo con la posible mejora alcanzada. En el caso de existir diferentes réplicas o ejecuciones del algoritmo (5 para Røpke y Nagata), se calculará el tiempo promedio de una ejecución.

8.4.4 Diseño factorial

Nuevamente se utilizará el diseño factorial para estudiar el efecto de los factores y sus niveles sobre las variables respuesta. La siguiente Tabla 8.2 enumera para cada uno de los 7 factores seleccionados (columnas) sus diferentes variantes o niveles (filas). Nótese que como la capacidad máxima se ha calculado a partir de la demanda y del territorio, se agrupa en una única columna (en adelante *demcap*).

Territorio (distancia)	Localización	Simetría	Tamaño Depósito (n)	Demcap	Post-Opt.
(C)orta	(A)leatoria	(O)rtodrómica	50	(A)leatorio	(P)equena -
(M)edia	(C)uadrícula	(A)simétrica	100	(C)entrado	(G)rande (p)
(L)arga	(R)adial		...	(P)eriférico	
			500		
3	3	2	10	3	2

Tabla 8.2: Factores y sus variantes o niveles para el caso del CVRP.

Así pues, existen $3 \times 3 \times 2 \times 10 \times 3 \times 2 \times 2 = 2\,160$ tratamientos a partir de las combinaciones de estos factores y sus niveles y/o variantes.

8.4.5 Diseño experimental y resolución

Al aplicar las 5 posibles réplicas de cada instancia, se deduce que será necesario construir tantas instancias de problemas a resolver como tratamientos por réplicas, en este caso: $2\,160$ tratamientos $\times 5$ replicas = $10\,800$ instancias. Seguidamente se describe los recursos utilizados en el proceso de generación de instancias y su resolución.

En esta ocasión, el proceso está dividido en las siguientes etapas secuenciales: localización del depósito, adaptación de las matrices, demanda de los clientes y capacidad máxima de los vehículos, algoritmos y resolución, post-resolución, y finalmente el análisis estadístico. La siguiente Tabla 8.3 muestra un resumen de los recursos generados y utilizados en el proceso de generación de tratamientos. Para cada etapa del proceso se indica el número de ficheros generados, la cantidad de datos generados, el tiempo de computación requerido, el tiempo total requerido incluyendo procesamiento de ficheros y el número de *blades* o máquinas utilizadas en dicha tarea. Nótese que tanto el tiempo de computación como el tiempo total requerido están expresados para 1 *blade* equivalente, y que la columna *Blades* indica el número máximo de máquinas utilizadas en cada etapa. En la tabla, se utiliza “s” para las unidades segundos.

Etapa	Ficheros Datos	T. Comp.	T. Total	Blades	
Localizaciones	1 350	10 MB	20,7 s	27 s	1
Matrices (O, A)	2 700	2,15 GB	2 757,2 s	3 180 s	1
Demandas, Capacidad máxima	900	3,7 MB	14,1 s	27 s	1
Total	4 950	2,16 GB	2 792 s	3234 s	1

Tabla 8.3: Recursos en la adaptación de instancias.

Todos estos ficheros e instancias son otra de las aportaciones de esta Tesis Doctoral. Gracias a este trabajo, futuros investigadores disponen de un nuevo repositorio (librería de instancias CVRP) complementario a los ya existentes y reconocidos científicamente: Christofides, Golden, TSPLIB, Taillard, y Fisher entre otros. Sin duda, es bueno para la comunidad científica disponer de nuevos problemas que se puedan utilizar en la investigación científica. Si bien, por un lado es imprescindible probar y comparar los resultados de una nueva técnica o heurística con los benchmarks reconocidos de referencia, también es muy saludable experimentar en nuevos horizontes de investigación; en especial cuando los datos provienen de entornos realistas, como es este caso. De lo contrario, cabe la posibilidad de que la línea de investigación se constriña siempre a los mismos entornos, en muchas ocasiones alejados de la realidad.

Los investigadores interesados en este trabajo podrán encontrar todas las instancias generadas en el apartado “Instancias de problemas” de la web del grupo de investigación SOA (Sistemas de Optimización Aplicada)².

²<http://soa.iti.es>

Software y hardware

Se realizaron las modificaciones oportunas para adaptar el software desarrollado (apartado 4.6.7) al nuevo proceso de experimentación. Existiendo las suficientes diferencias (tipología de las instancias, localización del depósito, cálculo de demanda y capacidad máxima, nuevos algoritmos, etc.) como para considerarse un software nuevo y diferente. Se utilizó la misma infraestructura de computación de altas prestaciones con la misma configuración (CPU, cores, memoria RAM) utilizada en el caso anterior del TSP.

8.4.5.1 Algoritmos y cálculos de resolución

Se integraron los algoritmos originales de Pisinger y Røpke, Nagata, y Keld Helsgaun; para ello fue necesaria una comunicación y la colaboración de sus respectivos autores. Fueron programados el algoritmo de Clarke y Wright, y el algoritmo de barrido. Como todos los algoritmos seleccionados son capaces de trabajar con matrices simétricas y asimétricas, el experimento es ortogonal completo. Como se justificó anteriormente, el algoritmo de barrido (SW) ya incorpora siempre la post-optimización con Helsgaun en su fase de *routing*, mientras que en el resto de algoritmos se podrá estudiar sus resultados sin y con post-optimización. El experimento es no balanceado. La siguiente Tabla 8.4 muestra la relación entre el tipo de matriz (o asimetría), la heurística, el número de réplicas del algoritmo y su post-optimización.

	CW	SW	Røpke	Nagata
Ortodrómica	✓	✓	✓	✓
Asimétrica	✓	✓	✓	✓
Post-opt. (Helsgaun)	-/✓	✓	-/✓	-/✓
Réplicas del algoritmo	1	1	5	5

Tabla 8.4: Relación entre asimetría, heurísticas, réplicas y post-optimización.

Atendiendo al diseño factorial expuesto en la Tabla 8.2, se desprende que existen $3 \times 3 \times 2 \times 10 \times 3 \times 2 \times 5 = 5\,400$ tratamientos básicos (considerando las 5 réplicas generadas de cada instancia). Si se consideran los 4 algoritmos

se obtiene un total de 21 600 pruebas; que se multiplican al considerar las 5 réplicas en los algoritmos de Røpke y Nagata, y la post-optimización con Helsingaun hasta alcanzar un total de 124 200 experiencias computacionales. Cada una de estas 124 200 experiencias generará su correspondiente fichero solución con las rutas resultantes del problema CVRP.

Es interesante señalar que el esfuerzo computacional de resolución de los experimentos para este caso del CVRP, multiplica por 12 el anteriormente ya realizado en el caso del TSP. El proceso de resolución se realizó mediante 30 *blades*, resolviendo cada una de las 124 200 experiencias en un orden aleatorio. En la Tabla 8.5 se resume la etapa de resolución. Tanto el tiempo de computación como el tiempo total requerido se expresan para 1 *blade* equivalente; mientras que la columna *Blades* indica el número máximo de máquinas utilizadas. En la tabla, se utiliza “h” para las unidades horas.

Etapa	Ficheros Datos	T. Comp.	T. Total	Blades
Resolución	124 200 84,14 MB	12 704,5 h	21 600 h	30

Tabla 8.5: Recursos en la resolución de instancias CVRP.

8.5 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado y justificado una extensión al trabajo de investigación: el estudio del efecto de la asimetría y otros factores en el contexto de los problemas CVRP.

1. Una de las aportaciones interesantes de este capítulo es la definición de la capacidad máxima de los vehículos como un factor cuantitativo dependiente de la demanda de servicio y del tipo de territorio. Se ha propuesto la utilización de unas distribuciones de probabilidad triangular que simulen la experiencia y el conocimiento recogido de la realidad industrial y logística de las empresas: mientras en el transporte de larga distancia predomina el transporte de gran volumen (pedidos grandes

y gran capacidad de carga), el transporte de corta distancia suele ser más capilar (pedidos más pequeños y frecuentes, y menor capacidad de carga). Esto se refleja en rutas más largas pero con menos paradas en larga distancia, y rutas relativamente más cortas pero con más paradas para territorios de corta distancia. Esta propuesta puede ser utilizada en el futuro para generar nuevos escenarios de investigación.

2. Una de las aportaciones más importantes de este capítulo ha sido, que gracias a este trabajo, se proporciona a la comunidad científica un nuevo conjunto de instancias CVRP útil y de posible referencia para futuros trabajos científicos que sería complementario a los conocidos *benchmarks* de Christofides, Golden, TSPLIB, Taillard, y Fisher entre otros. Este nuevo conjunto de datos proporciona un conjunto integrado de 5 400 instancias con: distintos tamaños ($n = 50, 100, 150, \dots, 500$), varios grados de asimetría (distancias ortodrómicas y distancias reales según el camino mínimo), basados en localizaciones reales y diferentes patrones de distribución geográfica sobre territorios de varios tamaños; y con diferentes características de localización del depósito, y de relación entre la capacidad máxima y la demanda de servicio.

9 | Análisis de las soluciones en el caso del CVRP

En el anterior Capítulo 8 se describió el proceso de caracterización de las instancias, el diseño de experimentos, los factores seleccionados con sus niveles o variantes, y las variables de respuesta a estudiar. Tras la ejecución y resolución de las 124 200 experiencias computacionales, en este capítulo se presentan los análisis de las soluciones al caso CVRP.

9.1 Tiempos de resolución de los algoritmos

En este apartado se presentan diversos análisis de la varianza de la variable de respuesta tiempo de computación en función de los factores y sus respectivos niveles y variantes. ¿Cómo afectan estos factores a la eficiencia de las diferentes técnicas seleccionadas?

En los análisis que siguen el tiempo de computación está expresado siempre en segundos (*s*). La Tabla 9.1 contiene un conjunto de estadísticas que describen el comportamiento para el tiempo total de computación. Existe un amplio rango de tiempos que cubren un espectro que va desde 0,000 segundos (menos de la precisión de cálculo del tiempo) hasta los 8 167,46 segundos requeridos para la resolución de una instancia, o lo que es lo mismo 2,27 horas. Mientras que la primera columna de la tabla representa el total de los experimentos, la segunda columna de la tabla se refiere a los tratamientos sin

post-optimización (PO=0), y la última los tratamientos con post-optimización (PO=1). Nótese que el número de tratamientos PO=1 es superior a los de PO=0 porque el algoritmo de barrido ($A = SW$) siempre se ha ejecutado con la post-optimización como algoritmo de *routing*.

	Tiempo (s)	Tiempo PO=0	Tiempo PO=1
Recuento	124 200	59 400	64 800
Promedio	735,86	768,63	705,81
Desviación estándar	1 166,42	1 181,72	1 151,4
Coef. de variación	158,51 %	153,74 %	163,13 %
Mínimo	0,0	0,0	0,06
Máximo	8 167,46	8 165,54	8 167,46

Tabla 9.1: Análisis de tiempo total de computación.

Es importante señalar que esta tabla no sirve realmente para comparar los tiempos requeridos sin y con post-optimización, ya que para ello hay que analizar los datos desde el punto de vista de cada tratamiento, y su variación con el factor post-optimización (PO), y otros factores. Por ello, fue necesario comparar los resultados de los análisis de la varianza del tiempo sin post-optimización (PO=0) y con post-optimización (PO=1); y se realizó un ANOVA con todos los factores incluyendo la post-optimización. Al realizar dicha comparación se observó lo siguiente:

1. Los resultados de los ANOVA del tiempo con PO=0 y PO=1 son idénticos desde el punto de vista cualitativo. Los factores significativos y las interacciones significativas (de orden 2) son los mismos en ambos casos, aunque con diferentes valores del cuadrado medio, la Ratio-F y del p -valor.
2. La post-optimización no es un factor que determine significativamente el comportamiento del tiempo total de cómputo, tal y como se demuestra en el apartado 9.1.2.

3. Como se explica en el apartado 9.1.2, los tiempos de post-optimización son relativamente pequeños y constantes, lo que no altera prácticamente el comportamiento del tiempo respecto del conjunto de parámetros.
4. Como es sabido, con PO=1 se puede analizar y comparar los 4 algoritmos: Clarke y Wright (A=CW), el algoritmo de barrido (A=SW), el algoritmo de Nagata (A=NA), y el de Røpke (A=RO). No así en el caso de analizar PO=0.
5. Como era de esperar, en ambos casos (PO=0 y PO=1) los factores réplica r y réplica de algoritmo RA no son factores significativos en estos resultados, se descartan de los ANOVA.

9.1.1 Análisis de la varianza del tiempo (PO=1)

En este apartado se describe el análisis de la varianza del tiempo de computación requerido para los experimentos con post-optimización (PO=1). La Tabla 9.5 muestra los resultados de los indicadores estadísticos con interacciones de orden máximo igual a 2.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p -valor
Efectos principales					
A:demcap	1,93E8	1	1,93E8	1 519,73	0,0000
B:depot	4,38E7	2	2,19E7	172,24	0,0000
C:T	9,31E6	2	4,65E6	36,57	0,0000
D:L	2,05E7	2	1,02E7	80,61	0,0000
E:M	617 811	1	617 811	4,85	0,0276
F:n	4,30E9	9	4,78E8	3 757,57	0,0000
G:A	2,89E10	3	9,64E9	75 756,96	0,0000
Interacciones					
AB	1,24E7	2	6,23E6	48,94	0,0000
AC	5,36E6	2	2,68E6	21,07	0,0000

Análisis de varianza del tiempo con post-optimización - Suma de Cuadrados Tipo III. ▸

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	<i>p</i> -valor
AD	1,21E7	2	6,07E6	47,69	0,0000
AE	8,39E6	1	8,39E6	65,92	0,0000
AF	8,87E8	9	9,85E7	774,29	0,0000
AG	1,38E9	3	4,60E8	3 616,19	0,0000
BC	1,49E7	4	3,72E6	29,26	0,0000
BD	769 225	4	192 306	1,51	0,1961
BE	2,97E6	2	1,48E6	11,70	0,0000
BF	6,76E7	18	3,75E6	29,51	0,0000
BG	3,17E8	6	5,28E7	414,98	0,0000
CD	9,92E6	4	2,48E6	19,49	0,0000
CE	1,22E8	2	6,13E7	481,60	0,0000
CF	9,66E7	18	5,36E6	42,16	0,0000
CG	7,50E7	6	1,25E7	98,22	0,0000
DE	2,30E6	2	1,15E6	9,06	0,0001
DF	5,89E7	18	3,27E6	25,72	0,0000
DG	1,67E8	6	2,79E7	219,85	0,0000
EF	3,31E7	9	3,68E6	28,91	0,0000
EG	3,11E6	3	1,03E6	8,16	0,0000
FG	2,26E10	27	8,38E8	6 583,06	0,0000
Residuos	8,22E9	64 631	127 319		
Total (corregido)	8,59E10	64 799			

Tabla 9.2: Análisis de varianza del tiempo con post-optimización - Suma de Cuadrados Tipo III.

Los resultados de la Ratio-F y del *p*-valor demuestran 27 relaciones significativas: 7 factores y 20 interacciones. A continuación, de todas las relaciones encontradas se subrayarán aquellas que se han considerado más interesantes. En primer lugar aparece el factor algoritmo. La Figura 9.1 muestra que los tiempos promedio de los algoritmos de barrido (A=SW) y el algoritmo de Clarke y Wright (A=CW) son muy pequeños. Estas dos heurísticas sencillas sirven de testigo tanto en el análisis del tiempo de computación como en el análisis de la bondad de los resultados. En la figura destaca el alto promedio del algoritmo de Nagata (A=NA) frente al de Røpke (A=RO). Si se analiza la dispersión de los datos, se observa que esto es debido a la gran dispersión de

los resultados de Nagata, del orden de un 800 % superior a la dispersión de los resultados de Røpke. Esta dispersión aumenta a medida que aumenta el tamaño del problema n .

Nótese, que esta gran dispersión de los resultados del algoritmo de Nagata sugiere que dicha variante debe ser estudiada de manera diferenciada en los análisis de la varianza, y de ese modo reducir la heterocedasticidad de los resultados. Dicho análisis se realizó confirmando todo el comportamiento y las conclusiones que se describen a continuación. También se realizó un análisis con las heurísticas testigo por separado para observar con mayor detalle su comportamiento; los resultados observados se describen al final de cada uno de los siguientes párrafos.

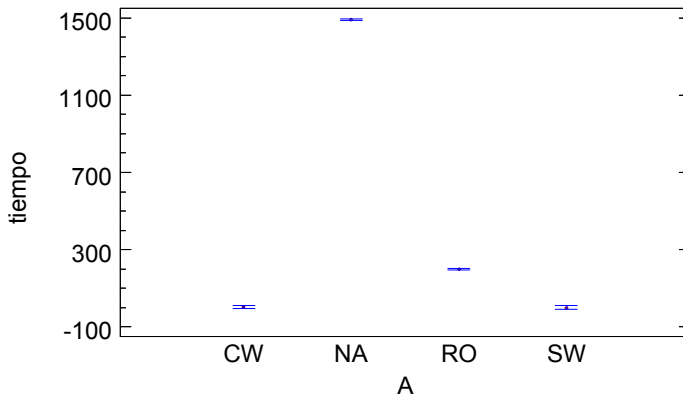


Figura 9.1: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tiempo y el algoritmo (PO=1).

La segunda relación significativa es debida a la interacción del algoritmo y el tamaño del problema. La Figura 9.2 ilustra el comportamiento relativamente lineal de NA y RO en función de n , lo cual es bueno dada la complejidad combinatoria del problema CVRP. Por otro lado, para $n = 500$ los tiempos promedio de NA son un 1000 % respecto de los de RO. Más adelante se verá la diferencia de bondad en la solución. Tanto en esta como en la figura anterior, es de destacar los estrechos márgenes de confianza alcanzados.

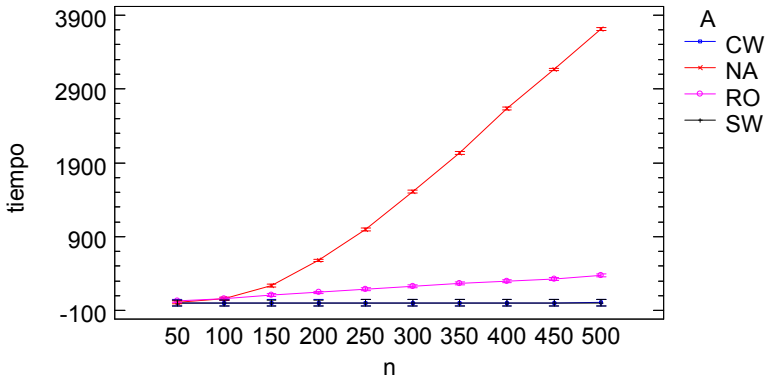


Figura 9.2: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la interacción algoritmo- n en el tiempo ($PO=1$).

Uno de los factores que aparece como relevante, es la pareja demanda de servicio-capacidad máxima (demcap); descrita en el apartado 8.4.2. Vale la pena recordar que en estos experimentos la capacidad máxima se ha definido como un factor dependiente de la demanda de servicio y del tipo de territorio; y que para la demanda de servicio se definieron dos niveles: Pequeña y Grande. Los valores de la Ratio-F y del p -valor demuestran que el factor este factor condiciona los tiempos de resolución, sólo o en interacción con otros factores como el algoritmo, el número de clientes, etc. Por ejemplo, la Figura 9.3 muestra que los problemas con alta demanda (demcap = G), cuyos valores oscilan dentro del rango [50,100] unidades de servicio para cada cliente, parecen afectar al tiempo de computación del algoritmo de Nagata, y no tanto al resto de algoritmos. Los tiempos promedio de Nagata se ven incrementados un 150% en demcap=G respecto de demcap=P. Se desconoce la causa exacta de este efecto sobre el comportamiento del algoritmo de Nagata. Si se analiza la varianza del tiempo respecto del factor demcap con los algoritmos A=CW y A=SW no se observa el mismo efecto; cambios en demcap no afecta significativamente ni al algoritmo de Clarke y Wright (A=CW), ni al algoritmo de barrido (A=SW).

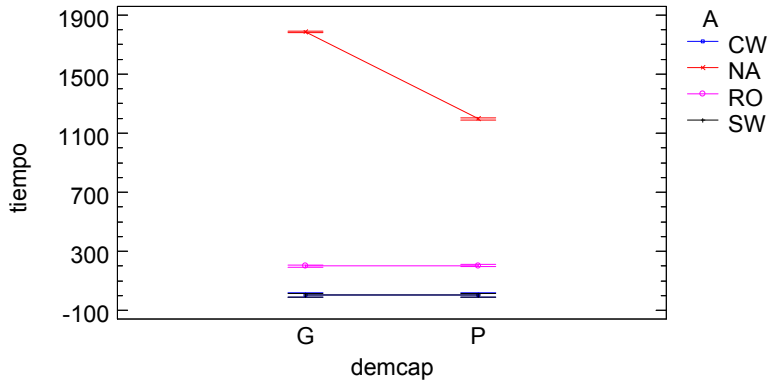


Figura 9.3: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-demcap en el tiempo (PO=1).

Estas diferencias parece que están condicionadas y se acentúan con el número de nodos n ; tal y como se muestra en la Figura 9.4.

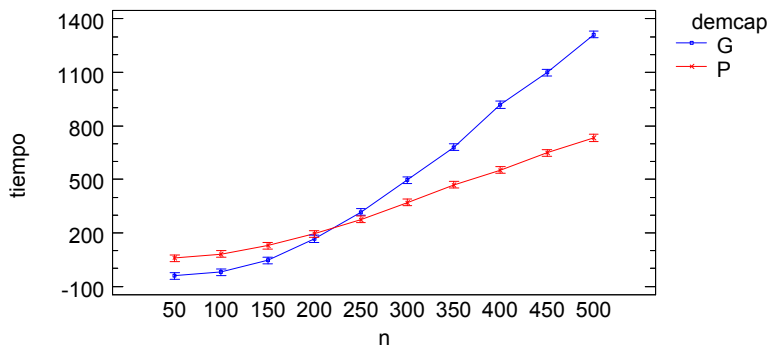


Figura 9.4: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la interacción n -demcap en el tiempo (PO=1).

Otro factor significativo muy interesante a analizar es la localización del depósito (en adelante depot), que tal y como se describe en el apartado 8.4.2 en estos experimentos puede tomar tres posibles valores: depot=C (centrado), depot=A (aleatorio), depot=P (periférico). Los resultados de la Tabla 9.5 demuestra que tanto la interacción depot-algoritmo, como el propio factor depot tienen un efecto significativo en los resultados del tiempo de

computación, que destaca mucho más en el caso del algoritmo de Nagata. Como se observa en la Figura 9.5 y en la Figura 9.6 el algoritmo de Nagata es más sensible a la localización del depósito. Si la localización es periférica (depot=P) sus tiempos se incrementan un 22 % respecto a la localización centrada (depot=C); la localización aleatoria resulta en un penalización del tiempo intermedia entre ambos casos. Røpke sin embargo se ve afectado en apenas un 2 % con depot=P respecto de depot=C. Una posible explicación a este hecho, es que Nagata esté utilizando en su algoritmo propiedades o reglas geométricas del plano euclidiano que no funcionan con la misma eficiencia cuando el depot no está centrado. Si se analiza por separado esto mismo con los algoritmos A=CW y A=SW se observa el mismo efecto, tanto el algoritmo de Clarke y Wright (A=CW), como el algoritmo de barrido (A=SW) incrementan sus pequeños tiempos de computación en un 5 % con el depósito localizado en la periferia respecto del depósito centrado.

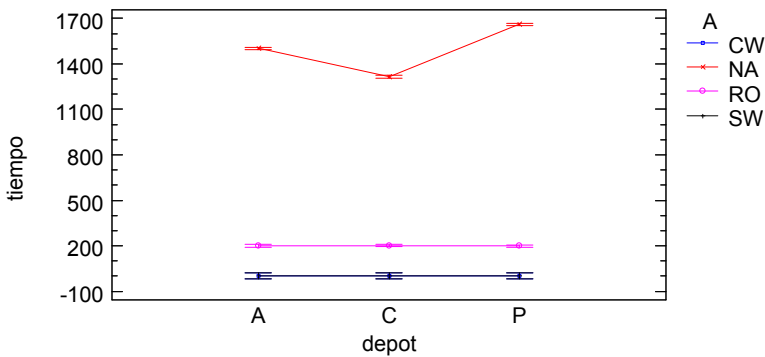


Figura 9.5: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción localización del depósito-algoritmo en el tiempo (PO=1).

Además de los ya comentados, existen otros factores e interacciones significativas. Por ejemplo el tipo de matriz (M) o asimetría es un factor que aparece ligeramente significativo con un valor de la Ratio-F de 4,85 y del *p*-valor igual a 0,028. Esto quiere decir que aunque todos los algoritmos seleccionados son capaces de resolver problemas asimétricos CVRP en cierta

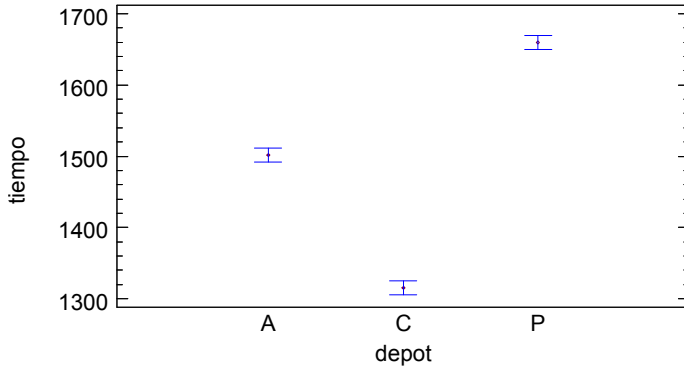


Figura 9.6: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción localización del depósito-algoritmo en el tiempo (A=NA, PO=1).

medida la asimetría afecta a sus tiempos de resolución. Al analizar más en detalle los resultados se observa que tanto en Nagata como en Røpke los tiempos se incrementan en alrededor del 2 % en $M=A$ (asimétrico) respecto de $M=O$ (simétrico u ortodrómico). Esto se puede observar en la Figura 9.7 y en la Figura 9.8. Curiosamente, al analizar el efecto del tipo de matriz (asimetría) en el tiempo con los algoritmos ($A=CW$ y $A=SW$) se observa un efecto contrario, la asimetría ($M=A$) reduce los tiempos de computación de estas dos heurísticas sencillas en un 15 %.

Tal y como se demostró en el apartado 6.1 para el caso del TSP, nuevamente el territorio aparece como un factor que tiene un efecto ligero sobre los tiempos de computación (Figura 9.9). En este caso, los territorios de corta ($T=C$) y media distancia ($T=M$) proporcionan mejores tiempos promedio respecto de los territorios de larga distancia ($T=L$). Estas diferencias aunque pequeñas son significativas, y vienen a reforzar las conclusiones observadas en el Capítulo 6 y en el Capítulo 5. Una hipótesis a este comportamiento es que la diversidad en los valores de las distancias de los arcos puede influir en los resultados. Si los arcos se parecen más (más simetría en largas distancias), es posible que algoritmos como Nagata o Røpke tengan que realizar mayores

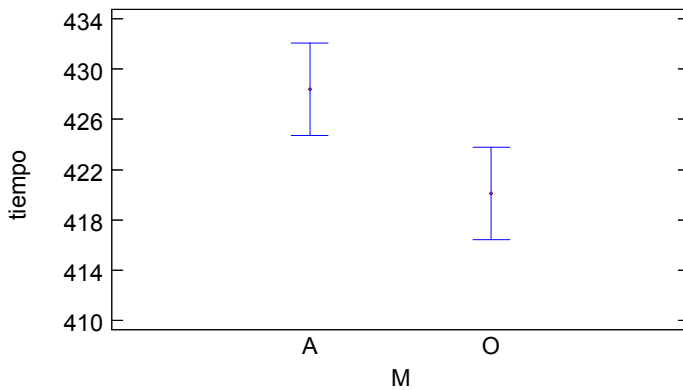


Figura 9.7: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tiempo y el tipo de matriz (PO=1).

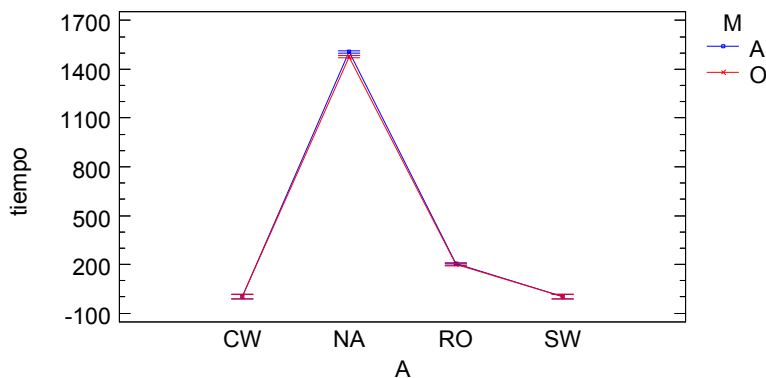


Figura 9.8: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción asimetría-algoritmo en el tiempo (PO=1).

esfuerzos computacionales para mejorar la solución. Esta es una de las aportaciones importantes de esta Tesis Doctoral, y sería interesante realizar más investigaciones en el futuro en este sentido. Al analizar el efecto del territorio en el tiempo con los algoritmos (A=CW y A=SW) se confirma este hecho. El territorio de largas distancias llega a afectar hasta en un 68 % los tiempos obtenidos en corta distancia, en especial en A=CW.

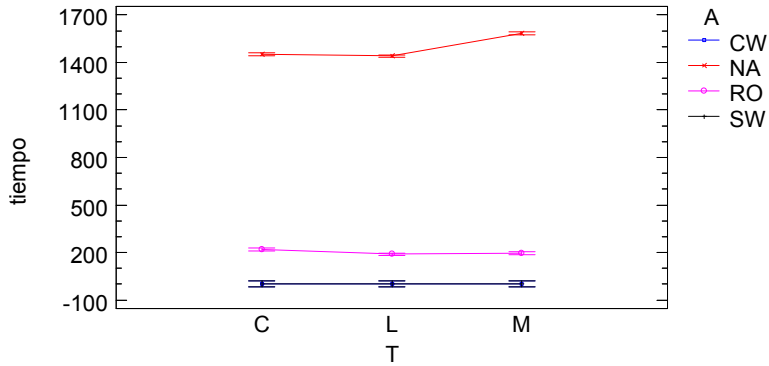


Figura 9.9: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción territorio-algoritmo en el tiempo (PO=1).

Por último, se observa que la localización sigue siendo un factor significativo o que tiene un impacto sobre el tiempo de computación. Tal y como se muestra en la Figura 9.10, el factor localización afecta más a Nagata que al resto de algoritmos. Nagata incrementa sus tiempos en un 15 % en las localizaciones cuadrícula y radial respecto de la localización aleatoria. Curiosamente Røpke sufre un efecto contrario apenas significativo, disminuyendo los tiempos con localizaciones cuadrícula y radial respecto de la aleatoria en un 5 %. Se podría decir por tanto, que Nagata confirma el efecto de la localización sobre el tiempo, y que Røpke es más robusto respecto de este factor. Al analizar el efecto de la localización en el tiempo con los algoritmos (A=CW y A=SW) se confirma este hecho. En especial, la localización radial afecta hasta en un 50 % los tiempos obtenidos en corta distancia en A=CW. En el algoritmo de barrido no se observan diferencias significativas.

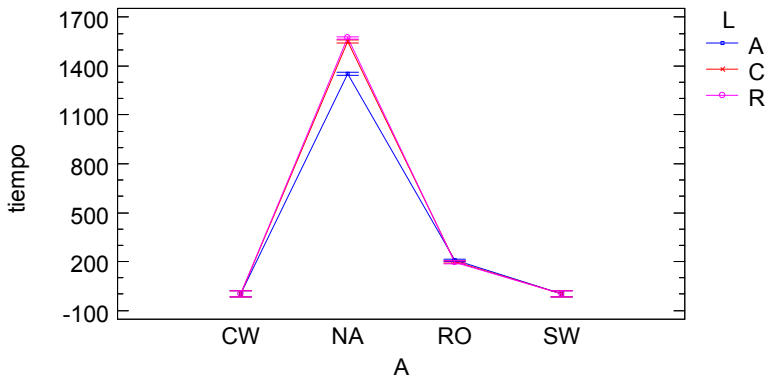


Figura 9.10: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción localización-algoritmo en el tiempo (PO=1).

9.1.2 Tiempo de post-optimización

Aquí se pretende analizar el esfuerzo computacional extra que supone la utilización de un técnica de post-optimización. En primer lugar, se pretende averiguar si el factor post-optimización (PO) tiene un efecto significativo en el comportamiento global de los tiempos de computación; o si por el contrario existen otros factores más determinantes. Para ello, se realizó un análisis de la varianza para la variable de respuesta tiempo de computación cuyos resultados se muestran en la Tabla 9.3. Nótese que se excluyen del análisis los datos del algoritmo de barrido (A<>SW).

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Efectos principales					
A:PO	44 405,2	1	44 405,2	0,08	0,7724
B:numrutas	1,08E9	49	2,22E7	41,81	0,0000
C:demcap	1,94E9	1	1,94E9	3 660,50	0,0000
D:depot	4,73E8	2	2,36E8	446,24	0,0000
E:T	6,17E7	2	3,08E7	58,14	0,0000
F:L	2,70E8	2	1,35E8	254,94	0,0000

Análisis de varianza del tiempo y del factor post-optimización (A<>SW) - Suma de Cuadrados Tipo III. ▷

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
G:M	7,44E6	1	7,44E6	14,03	0,0002
H:n	9,22E9	9	1,02E9	1 929,61	0,0000
I:A	5,20E10	2	2,60E10	48 995,34	0,0000
Residuos	6,30E10	118 730	530 995		
Total (corregido)	1,65E11	118 799			

Tabla 9.3: Análisis de varianza del tiempo y del factor post-optimización (A<>SW) - Suma de Cuadrados Tipo III.

Una conclusión importante de este análisis, es que los resultados confirman que el factor post-optimización (PO) no es un factor que tenga un efecto significativo en el comportamiento del tiempo de computación; tal y como así lo indican los resultados de la Ratio-F igual al 0,08 y del p-valor igual a 0,7724. Esta afirmación se muestra en la Figura 9.11, donde se ilustran las medias y 95 % de Tukey HSD para la relación entre el tiempo y el factor post-optimización (PO). Se observa claramente que ambos intervalos se solapan, si bien el promedio con post-optimización es ligeramente superior.

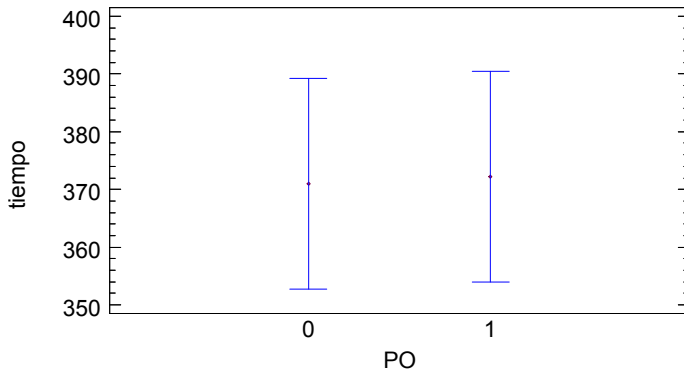


Figura 9.11: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tiempo y el factor post-optimización (A<>SW).

Sin embargo, no cabe duda de que en cierta medida, la post-optimización incrementa el tiempo total de cómputo. Para cuantificar con exactitud el incremento de tiempo que supone la post-optimización, fue necesario calcular la siguiente ratio:

ΔtPO_i es el porcentaje de incremento de tiempo de computación necesario para obtener una solución con post-optimización $t_{i,PO=1}$, respecto de la solución original sin post-optimización $t_{i,PO=0}$ para cada tratamiento i .

$$\Delta tPO_i = \frac{t_{i,PO=1} - t_{i,PO=0}}{t_{i,PO=0}} \cdot 100 \tag{9.1}$$

Nótese que esta ratio sólo es posible calcularla para todos los algoritmos excepto el algoritmo de barrido, así que se dispone de 59 400 datos para analizar. La Tabla 9.4 muestra el conjunto de estadísticas que describen el comportamiento general del incremento de tiempo con post-optimización para los tres algoritmos: Clarke y Wright (A=CW), el algoritmo de Nagata (A=NA) y el de Røpke (A=RO). Llama la atención el alto valor máximo de ΔtPO_i para el caso de A=CW. Más adelante se verá que este valor se alcanza en problemas de pequeño tamaño ($n = 50, \dots, 150$) donde los tiempos de computación son muy pequeños, y el tiempo adicional de post-optimización se traduce en incrementos porcentuales muy grandes. Si centramos la atención en los otros dos algoritmos, se observa que A=RO tiene un promedio ligeramente superior a A=NA, pero por contra una desviación estándar menor. El valor máximo de ΔtPO_i es casi el doble en A=NA que en A=RO. El dato más relevante que se puede obtener de este pequeño análisis es que la post-optimización puede llegar a significar un incremento de tiempo próximo a un 1/5 para A=RO y de 2/5 para A=NA sobre el tiempo de cómputo original; si bien es cierto que en promedio el incremento de tiempo es menor al 1%.

	A=CW	A=RO	A=NA
Recuento	10 800	54 000	54 000
Promedio	15 098,9	0,31	0,25
Desviación estándar	73 004,5	0,36	0,78
Coef. de variación	483,51 %	115,87 %	318,38 %

Análisis del incremento de tiempo con post-optimización. ▷

	A=CW	A=RO	A=NA
Mínimo	0,0	0,0	0,0
Máximo	3,7749E6	17,50	39,57

Tabla 9.4: Análisis del incremento de tiempo con post-optimización

El primer de los casos analizará el algoritmo de barrido (A↔SW). Como era de esperar, los factores réplica r y réplica de algoritmo RA no son factores significativos en estos resultados. Por ello, se descartan de los ANOVA. La Tabla 9.5 muestra los resultados de los indicadores estadísticos con una interacción de orden máximo igual a 2. Al observar los resultados de la Ratio-F y del p -valor aparecen 15 relaciones significativas: 6 factores y otras 9 interacciones.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p -valor
Efectos principales					
A:demcap	3,60E9	1	3,60E9	5,56	0,0184
B:depot	3,78E10	2	1,89E10	29,19	0,0000
C:T	6,40E11	2	3,20E11	494,34	0,0000
D:L	4,19E11	2	2,09E11	324,29	0,0000
E:M	4,44E8	1	4,44E8	0,69	0,4076
F:n	1,04E13	9	1,16E12	1 792,68	0,0000
G:A	4,47E12	2	2,23E12	3 456,39	0,0000
Interacciones					
AB	5,12E8	2	2,56E8	0,40	0,6730
AC	1,05E9	2	5,27E8	0,81	0,4429
AD	1,68E9	2	8,41E8	1,30	0,2726
AE	2,84E8	1	2,84E8	0,44	0,5075
AF	1,77E9	9	1,96E8	0,30	0,9738
AG	4,58E9	2	2,29E9	3,54	0,0291
BC	2,01E9	4	5,03E8	0,78	0,5393
BD	1,90E9	4	4,76E8	0,74	0,5668
BE	2,99E8	2	1,49E8	0,23	0,7936
BF	2,45E10	18	1,36E9	2,11	0,0039
BG	4,81E10	4	1,20E10	18,57	0,0000

Análisis de varianza para el incremento de tiempo con post-optimización - Suma de Cuadrados Tipo III. ▸

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
CD	4,76E10	4	1,19E10	18,39	0,0000
CE	2,49E8	2	1,24E8	0,19	0,8245
CF	2,79E11	18	1,55E10	23,97	0,0000
CG	8,14E11	4	2,03E11	314,57	0,0000
DE	1,16E8	2	5,84E7	0,09	0,9137
DF	1,92E11	18	1,07E10	16,54	0,0000
DG	5,34E11	4	1,33E11	206,36	0,0000
EF	1,55E9	9	1,73E8	0,27	0,9833
EG	5,65E8	2	2,82E8	0,44	0,6462
FG	1,32E13	18	7,38E11	1 140,74	0,0000
Residuos	3,83E13	59 249	6,47E8		
Total (corregido)	5,95E13	59 399			

Tabla 9.5: Análisis de varianza para el incremento de tiempo con post-optimización - Suma de Cuadrados Tipo III.

De entre todos los factores e interacciones significativos, destaca el factor algoritmo. En la Figura 9.12 se observa que la heurística de Clarke y Wright (A=CW) destaca con unos incrementos de tiempo significativamente mayores que para el resto de heurísticas. Mientras que para A=CW el intervalo se sitúa en incrementos del 30 200 %, para el algoritmo de Nagata (A=NA) y el de Røpke (A=RO) se observan intervalos solapados, centrados en el 0 % y con valores máximos del 250 %. El alto valor de A=CW impide ver con claridad los otros dos intervalos, y sugiere que debería apartarse del ANOVA para conocer mejor el impacto de los factores sobre el indicador ΔtPO_i .

En la Figura 9.13 se observa claramente que los altos porcentajes de ΔtPO_i aparecen en tamaños de problemas pequeños ($n = 50, \dots, 150$), donde como se verá, los tiempo de computación para A=CW son muy bajos, y cualquier tiempo adicional de cómputo significa grandes incrementos porcentuales.

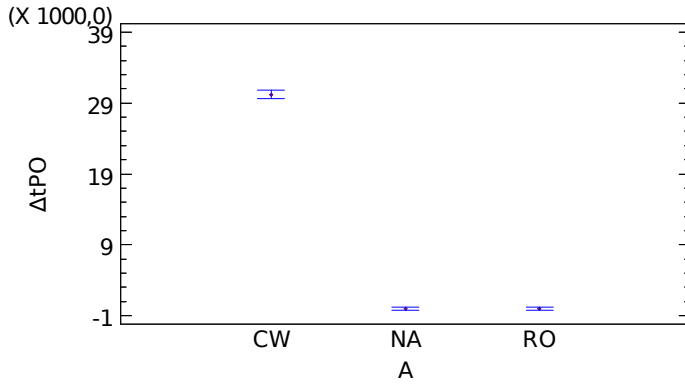


Figura 9.12: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el ΔtPO_i y los algoritmos.

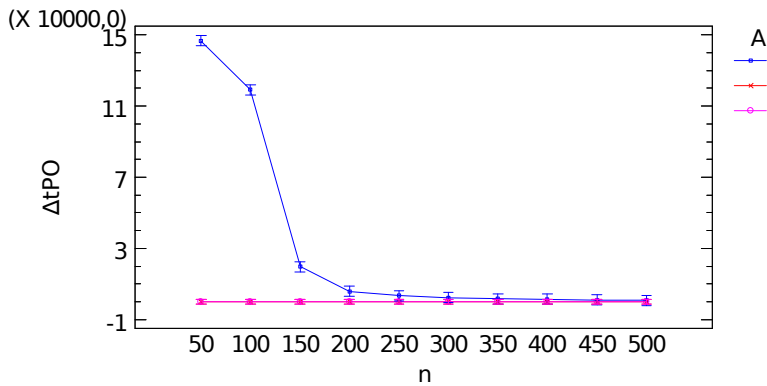


Figura 9.13: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el tamaño y los algoritmos en ΔtPO_i .

9.1.3 Tiempo de post-optimización (A<>CW)

Por todo lo descrito en el apartado anterior, y para observar mejor el efecto de los factores estudiados, a continuación se realizó un nuevo análisis sin considerar A=CW. Los resultados de la Ratio-F y del p -valor demuestran 23 relaciones significativas: 6 factores y otras 17 interacciones.

Al analizar en detalle todas y cada una de las relaciones, se llega a una conclusión muy clara y sencilla. El indicador ΔtPO_i es función del tiempo

de computación, y éste está relacionado con multitud de otros factores. De todas estas relaciones, el tamaño del problema n y el algoritmo son factores clave. En definitiva, se observa que existe una relación directa entre el tamaño del problema n y el tiempo total de computación. La post-optimización implica un tiempo añadido al de computación original. Este tiempo adicional se traduce en un incremento porcentual relativamente alto cuanto el tiempo original de cómputo es pequeño (problemas pequeños), y relativamente bajo cuando el tiempo original de cómputo es alto (problemas grandes). Dicho de otro modo, el tiempo invertido en la post-optimización es relativamente bajo (casi insignificante) sobre el tiempo total cuando el tamaño del problema es grande.

En la Figura 9.14 se ilustran las medias y 95 % de Tukey HSD para ΔtPO_i en la interacción entre el tamaño del problema n y los algoritmos (sólo A=RO y A=NA); cuyo valor de la Ratio-F igual a 3 226,95 y un p -valor igual a 0,00. Esta figura ilustra la afirmación anterior: existe una relación inversamente proporcional entre ΔtPO_i y n que tiene a porcentajes próximos a cero a medida que aumenta el tamaño del problema n . Más adelante se verá en qué medida la inversión en este tiempo de computación adicional es rentable desde el punto de vista de bondad de la solución.

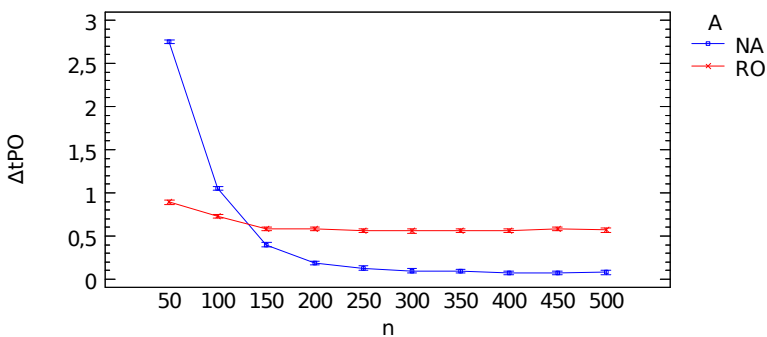


Figura 9.14: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el tamaño y los algoritmos en ΔtPO_i .

9.1.4 Conclusiones a los análisis de varianza para el tiempo

En este apartado se recogen las conclusiones más significativas tras los análisis anteriores.

1. El tipo de algoritmo determina el tiempo de computación de manera muy significativa. Evidentemente el número de clientes $n - 1$, determina el tiempo de manera directa y exponencial.
2. La asimetría afecta a los tiempos de resolución.
3. El territorio tiene un efecto ligero sobre el tiempo de computación. Este hecho refuerza las conclusiones observadas en el Capítulo 6 y en el Capítulo 5: la menor diversidad en los valores de las distancias de los arcos puede influir en los resultados.
4. La localización de los nodos afecta al tiempo. Otra de las aportaciones de esta Tesis Doctoral ha sido demostrar que: el factor localización del depósito tiene un efecto significativo en los resultados del tiempo de computación, que destaca en el caso del algoritmo de Nagata. Tanto el algoritmo de Clarke y Wright (A=CW), como el algoritmo de barrido (A=SW) incrementan sus tiempos de computación en un 5 % con el depósito localizado en la periferia respecto del depósito centrado.
5. Aparece como relevante el factor demanda de servicio-capacidad máxima. los problemas con alta demanda (demcap = G) parecen afectar al tiempo de computación del algoritmo de Nagata, y no tanto al resto de algoritmos.

En la Figura 9.15 se representan conjuntamente todas las combinaciones de algoritmo y tipo de matriz en un gráfico de dos ejes: en el eje horizontal el tamaño de la matriz n y en el vertical el tiempo de computación en segundos y escala logarítmica. Se muestran en dos colores diferentes el factor demcap (demanda de servicio-capacidad máxima). Al observar detenidamente la gráfica se ve que Nagata es más sensible que otros algoritmos al factor demcap, y

que las diferencias entre matrices asimétricas y simétricas son más notorias para mayores valores de n .

En la Figura 9.16 se representan conjuntamente todas las combinaciones de algoritmo y localizaciones de los nodos: en el eje horizontal el tamaño de la matriz n y en el vertical el tiempo de computación en segundos y escala logarítmica. En esta gráfica además se muestran en dos colores diferentes el factor depot (localización del depósito). Queda reflejado que Nagata es más sensible a la localización periférica del depósito. También se observa ligeramente los incrementos de tiempo con $L=C$ o $L=R$.

En la Figura 9.17 se ha representado en tres dimensiones (demanda total, localización del depósito y tiempo de computación). Además cada punto tiene un código de colores según el algoritmo (verde es $A=NA$, azul es $A=RO$, rojo es $A=CW$ y marrón es $A=SW$). Aquí se observa varias cosas: por un lado vemos que las gráficas están duplicadas desde el punto de vista de la demanda, esto es existen dos grupos demanda pequeña y demanda grande. Para el algoritmo de Nagata (color verde) y también para el de Røpke (color azul) se observa que los tiempos son menores cuando la demanda es menor. Para todos los algoritmos se observa que cuando el depósito está centrado en la periferia, los tiempos de computación se incrementan. Esta misma información se ha representado en la matriz de gráficas de la Figura 9.18, donde se representan conjuntamente todas las combinaciones de algoritmo y localizaciones del depósito: en el eje horizontal la demanda total y en el vertical el tiempo de computación en segundos y escala logarítmica. En esta gráfica además se muestran en dos colores diferentes el factor demcap (demanda máxima).

En la Figura 9.19 se observa que el tiempo de computación, además de depender del número de nodos n , también depende de la demanda, y los algoritmos (con el mismo código de color que en la Figura 9.17).

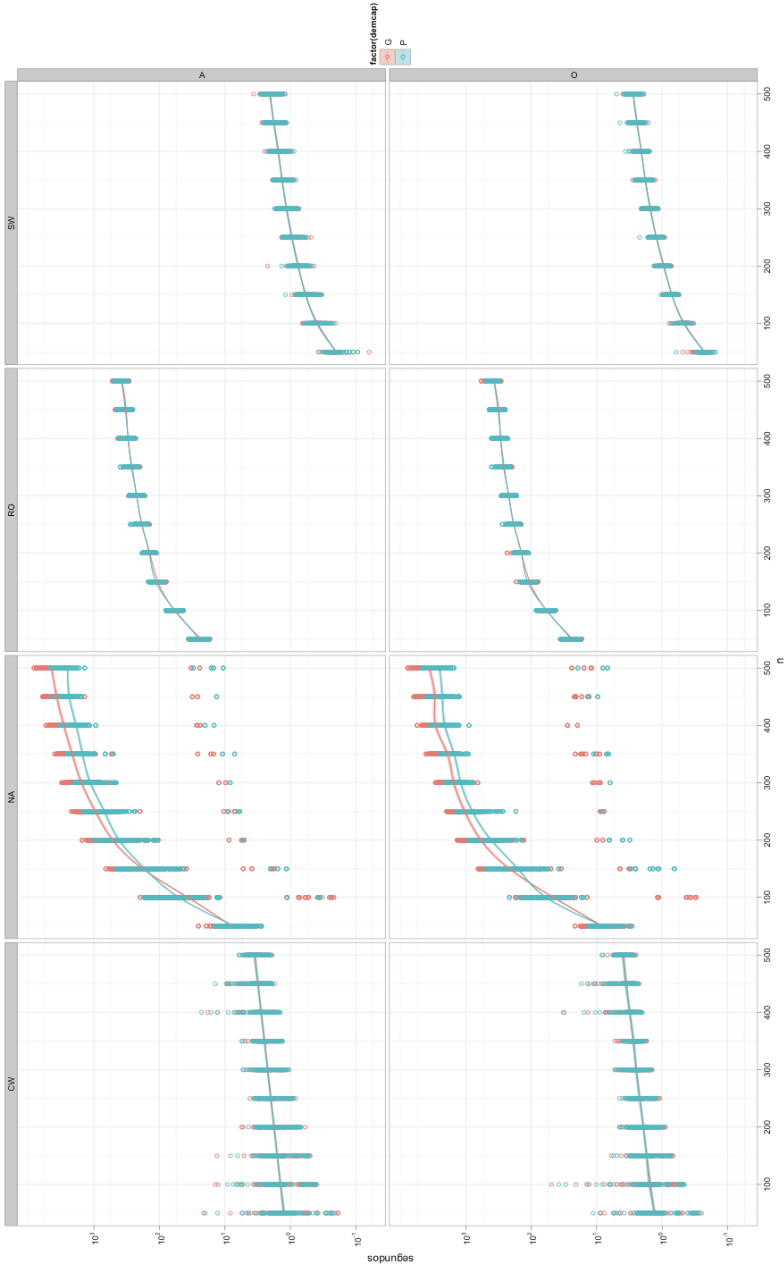


Figura 9.15: Comparativa de tiempos para todos los algoritmos-tipos de matriz con el factor demcap.

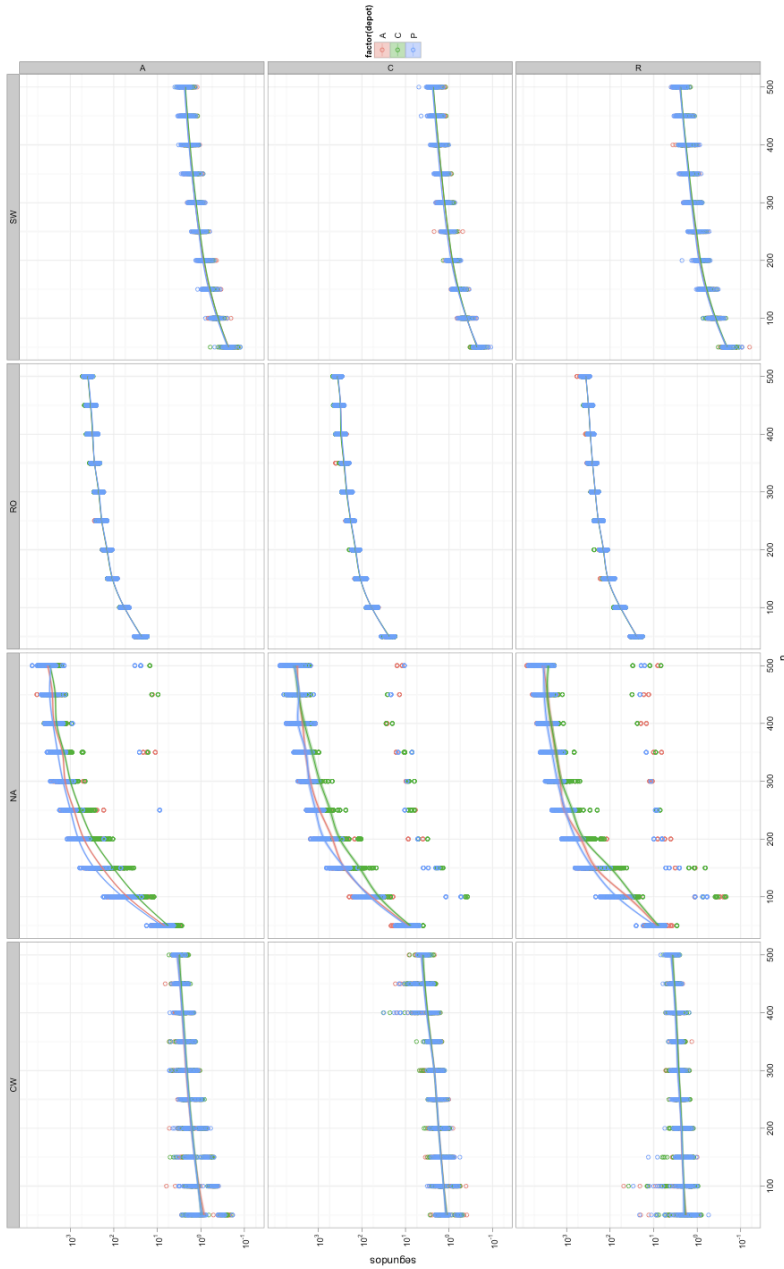


Figura 9.16: Comparativa de tiempos para todos los algoritmos-localizaciones con el factor localización del depósito.

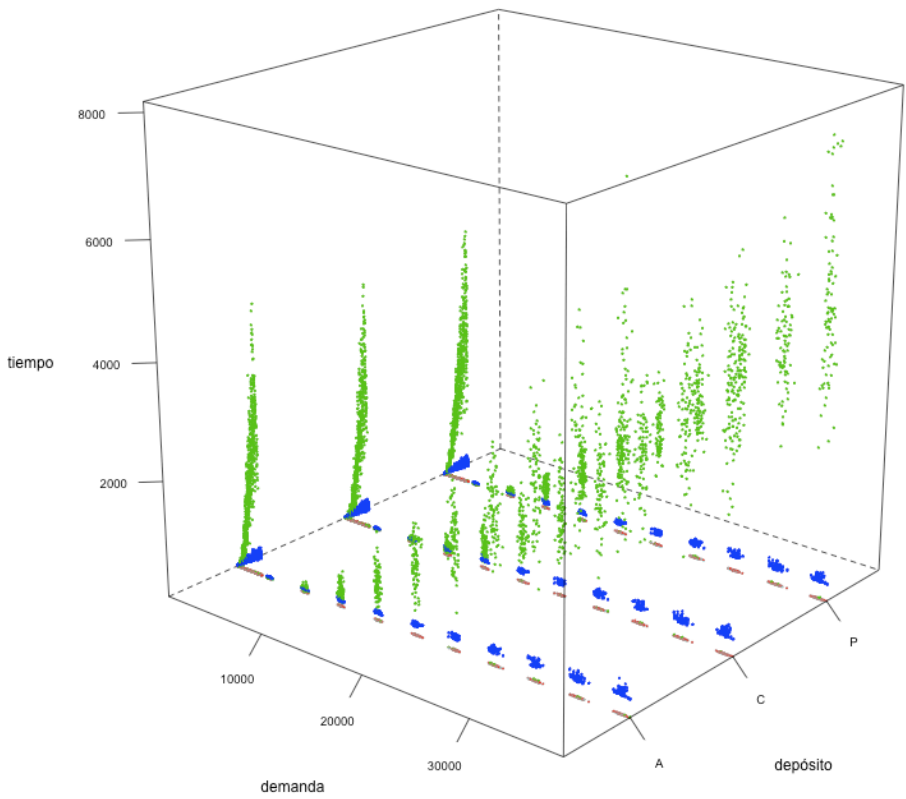


Figura 9.17: Relación 3D entre el tiempo, la demanda, el depot y los algoritmos.

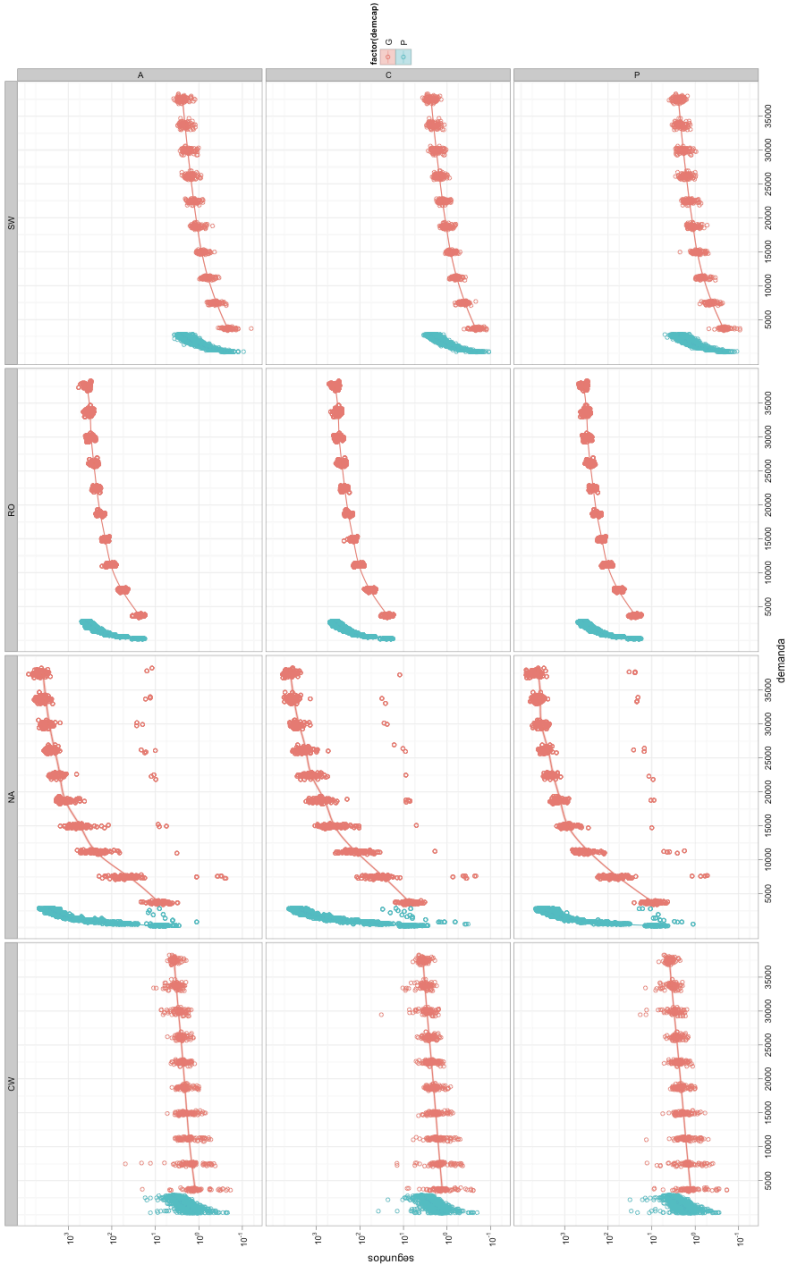


Figura 9.18: Comparativa de tiempos para todos los algoritmos-demanda con el factor localización del depósito.

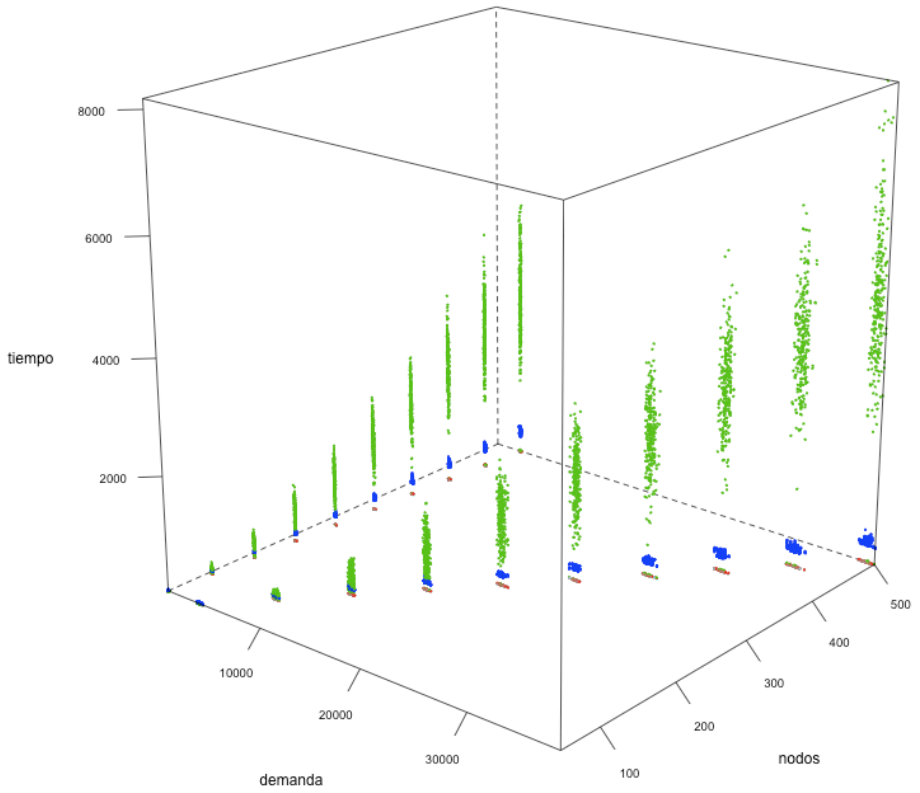


Figura 9.19: Relación 3D entre el tiempo, la demanda, el número de nodos y los algoritmos.

9.2 Bondad de la solución de los algoritmos

El objetivo analizar si la bondad de las soluciones se ve condicionada por los factores seleccionados en el diseño de experimentos. Para ello, se utiliza el indicador ΔS_i^* tal y como se hizo con el caso del TSP en el apartado 6.2.

La siguiente Tabla 9.6 muestra una clasificación de los algoritmos según su tasa de éxito (mejor solución encontrada). Nótese que en este caso sólo se ha tomado la mejor solución proporcionada por el conjunto de las réplicas de algoritmo (RA) y de las opciones de post-optimización.

Algoritmo	Número de S^*	Tratamientos	% de S^*
CW	0	5 400	0,00 %
NA	5 335	5 400	98,80 %
RO	780	5 400	14,44 %
SW	3	5 400	0,06 %
Total		21 600	

Tabla 9.6: Clasificación de algoritmos CVRP según su mejor solución (única).

Es muy importante señalar que los algoritmos de Nagata y Røpke fueron compilados a partir del código fuente original y probados tal cual (*as-is*) los proporcionaron sus respectivos autores (sin ser modificados), y siguiendo en todo momento sus indicaciones y recomendaciones sobre su configuración. Ambos algoritmos, se pueden considerar meta-heurísticas, y como tales pueden tener diferentes parámetros de configuración (afinado) y criterios de parada que, sin duda afectan no sólo al tiempo total de computación, sino también a los mejores resultados obtenidos. Por ello, estos resultados no se deben considerar como una comparación estricta de la bondad de los algoritmos. Vale la pena recordar una vez más que el objetivo de esta Tesis Doctoral no es hacer un *benchmark* o *ranking* de los algoritmos, sino medir y comprender en qué medida la asimetría y el resto de los factores objeto de estudio condicionan su comportamiento.

La Tabla 9.7 muestra los resultados en función de la opción de post-optimización (entre paréntesis PO=0, PO=1). Se puede observar que la post-

optimización (1) apenas mejora un poco la tasa de éxito global (mejor solución encontrada) de los algoritmos de Nagata (+1,47 %) y Røpke (+0,20 %). Mientras que el algoritmo de Clarke y Wright no es capaz de encontrar la mejor solución ni siquiera con ayuda de la post-optimización. Esta tabla ha demostrado que la post-optimización mejora la tasa de éxito en un pequeño porcentaje. Más adelante se cuantificará la mejora que proporciona la post-optimización en la función objetivo (ΔS_i^*), aunque no se logre alcanzar la mejor solución posible (éxito).

Algoritmo	Núm. S^* (0)	Exp. (0)	% S^* (0)	Núm. S^* (1)	Exp. (1)	% S^* (1)
CW	0	5 400	0,00 %	0	5 400	0,00 %
NA	9 834	27 000	36,42 %	10 230	27 000	37,89 %
RO	2 506	27 000	9,28 %	2 560	27 000	9,48 %
SW	—	—	—	3	5 400	0,06 %
Total	12 340	59 400		12 793	64 800	

Tabla 9.7: Clasificación de algoritmos CVRP según su mejor solución y la post-optimización.

La Tabla 9.8 desglosa los resultados según el tipo de matriz o asimetría (entre paréntesis M=O, M=A). Las tasas de éxito de los algoritmos disminuyen en los casos con matrices asimétricas (A). Nótese que la asimetría hace descender la tasa de éxito del algoritmo de Nagata (−1,52 %), el de Røpke (−2,53 %) y el de barrido (−0,04 %).

Estas estadísticas han demostrado que la asimetría hace descender la tasa de éxito de los algoritmos en un pequeño porcentaje, que por otro lado, parece superior al incremento de éxito proporcionado por la post-optimización. Seguidamente se profundizará en el estudio del impacto de la asimetría, la post-optimización y otros factores en la bondad de la solución proporcionada por los algoritmos.

Algoritmo	Núm. S^* (O)	Exp. (O)	% S^* (O)	Núm. S^* (A)	Exp. (A)	% S^* (A)
CW	0	5 400	0,00 %	0	5 400	0,00 %

Clasificación de algoritmos CVRP según su mejor solución y el tipo de matriz. ▷

Algoritmo	Núm. S^* (O)	Exp. (O)	% S^* (O)	Núm. S^* (A)	Exp. (A)	% S^* (A)
NA	10 237	27 000	37,91 %	9 827	27 000	36,40 %
RO	2 874	27 000	10,64 %	2 192	27 000	8,12 %
SW	2	2 700	0,07 %	1	2 700	0,04 %
Total	13 113	62 100		12 020	62 100	

Tabla 9.8: Clasificación de algoritmos CVRP según su mejor solución y el tipo de matriz.

9.2.1 Efecto de la post-optimización

Seguidamente se estudiará el efecto de la post-optimización sobre la bondad de la solución. La Tabla 9.9 contiene un conjunto de estadísticas sencillas que describen el comportamiento de ΔS_i^* según la post-optimización pero sin el algoritmo de barrido. La primera columna de la tabla representa el total de los experimentos, la segunda columna de la tabla se refiere a los tratamientos sin post-optimización (PO=0), y la última los tratamientos con post-optimización (PO=1). Nótese que la post-optimización mejora el valor promedio de ΔS_i^* en apenas un 0,13 % de promedio.

	ΔS_i^*	ΔS_i^* PO=0	ΔS_i^* PO=1
Recuento	118 800	59 400	69 400
Promedio	1,22	1,289	1,16
Desviación estándar	2,59	2,78	2,38
Coef. de variación	211,58 %	215,62 %	205,6 %
Mínimo	0,0	0,0	0,0
Máximo	22,5	22,5	22,5

Tabla 9.9: Análisis de ΔS_i^* según la post-optimización (A<>SW).

Para saber si la post-optimización tiene un efecto real sobre ΔS_i^* , se realizó un ANOVA cuyos resultados se muestran en la Tabla 9.10. En primer lugar, se comprobó que tanto el factor réplica, como el factor réplica de algoritmo no son factores significativos en el comportamiento de la bondad de la solución, por ello, son descartados de los análisis. Tal y como indican los

resultados, el factor post-optimización tiene un efecto sobre la mejora de la solución significativo en términos generales.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Efectos principales					
A:PO	515,45	1	515,45	600,07	0,0000
B:demcap	22,70	1	22,70	26,44	0,0000
C:depot	214,25	2	107,12	124,71	0,0000
D:T	268,58	2	134,29	156,34	0,0000
E:L	2 180,23	2	1 090,12	1 269,08	0,0000
F:M	191,80	1	191,80	223,30	0,0000
G:n	3 783,89	9	420,432	489,45	0,0000
H:A	68 4976	2	342 488	39 8712,59	0,0000
Residuos	102 029	118 779	0,8589		
Total (corregido)	794 182	118 799			

Tabla 9.10: Análisis de varianza de ΔS_i^* y del factor post-optimización (A<>SW) - Suma de Cuadrados Tipo III.

Sin embargo, al analizar los resultados con más detalle (interacción de orden 2), se observa que:

1. La mejora de ΔS_i^* apenas supone un 0,45 % en promedio, tal y como se ilustra en la Figura 9.1 con las medias y 95 % de Tukey HSD para la relación entre ΔS_i^* y la post-optimización.
2. La dispersión de ΔS_i^* para A=CW es del orden de seis veces la de A=RO o A=NA. Esta gran dispersión de los resultados del algoritmo de Clarke y Wright sugiere que dicha variante debe ser estudiada de manera diferenciada en los análisis de la varianza, y de ese modo reducir la heterocedasticidad de los resultados.
3. Al analizar el efecto de la interacción entre los algoritmos y la post-optimización en ΔS_i^* , Figura 9.21, se descubre que el efecto de mejora de la post-optimización en Clarke y Wright es de un 1,5 %, y menor del 0,01 % en los otros dos algoritmos.

- Por último, si se vuelve a realizar el mismo ANOVA, pero filtrando A=CW y A=SW, el factor de post-optimización no tiene un efecto significativo sobre la mejora de la bondad ΔS_i^* en los algoritmos A=NA y A=RO.

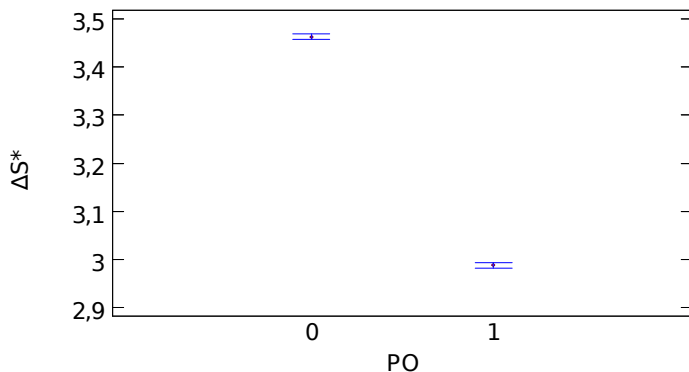


Figura 9.20: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre ΔS_i^* y la post-optimización.

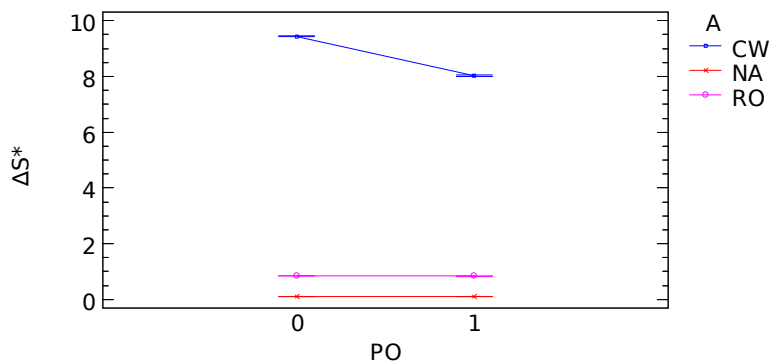


Figura 9.21: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre los algoritmos y la post-optimización en ΔS_i^* .

La conclusión que se obtiene de estos análisis, es que la post-optimización en términos generales apenas supone una mejora notable. Si bien puede ayudar a mejorar la calidad de la solución y la tasa de éxito de las heurísticas

sencillas, en los algoritmos avanzados (y siempre estadísticamente hablando) apenas supone una mejora apreciable. En cualquier caso, dado el relativamente poco tiempo de computación extra que supone (apartado 9.1.2), queda a elección del investigador adoptar un criterio precavido e intentar mejorar la solución mediante cualquier técnica de post-optimización (ya sea intra-ruta como en estos experimentos u de otro tipo).

9.2.2 Análisis de la varianza de la bondad (PO=1)

En este apartado se presenta un análisis de la varianza de indicador de bondad ΔS_i^* considerando únicamente los experimentos tras la post-optimización por varias razones:

1. Los resultados de los ANOVA del indicador ΔS_i^* con PO=0 y PO=1 son idénticos desde el punto de vista cualitativo. Los factores significativos y las interacciones significativas (de orden 2) son los mismos en ambos casos.
2. Como se ha demostrado anteriormente, la post-optimización no es un factor que determine significativamente el comportamiento de ΔS_i^* , si bien, al tomar el escenario de PO=1 se asegura que el análisis estará considerando los mejores resultados alcanzados.
3. Se tiene una visión más completa de la interacción de los factores con los algoritmos, ya que como es sabido, con PO=1 se puede analizar y comparar los 4 algoritmos.
4. Los resultados del análisis de ΔS_i^* con PO=1 podrán ser relacionados más fácilmente con las conclusiones obtenidas en el apartado 9.1.1.

Los resultados de la Ratio-F y del p -valor demuestran 25 relaciones significativas: 7 factores y 18 interacciones. Se observó una gran dispersión de los resultados de los algoritmos SW y CW respecto de NA y RO. Por ello, se

decidió estudiar de manera separada cada pareja de algoritmos, y así reducir la heterocedasticidad de los resultados.

9.2.3 Análisis de la varianza de la bondad (PO=1, A=CW y A=SW)

En este primer análisis por separado, se cuenta con los algoritmos de Clarke y Wright, y el algoritmo de barrido. La Tabla 9.11 muestra 25 relaciones significativas: 7 factores y 18 interacciones.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Efectos principales					
A:demcap	3 962,96	1	3 962,96	8,60	0,0034
B:depot	1,36E6	2	681 494	1 478,06	0,0000
C:T	7,38E6	2	3,69E6	8 004,88	0,0000
D:L	71 942,7	2	35 971,4	78,02	0,0000
E:M	131 783	1	131 783	285,82	0,0000
F:n	101 400	9	11 266,7	24,44	0,0000
G:A	1,28E7	1	1,28E7	27 850,01	0,0000
Interacciones					
AB	43,75	2	21,87	0,05	0,9537
AC	5 409,42	2	2 704,71	5,87	0,0028
AD	1 112,37	2	556,18	1,21	0,2993
AE	28,87	1	28,87	0,06	0,8024
AF	10 392,6	9	1 154,73	2,50	0,0074
AG	6 521,84	1	6 521,84	14,14	0,0002
BC	555 216	4	138 804	301,05	0,0000
BD	117 524	4	29 380,9	63,72	0,0000
BE	25 534,7	2	12 767,3	27,69	0,0000
BF	64 733,8	18	3 596,32	7,80	0,0000
BG	1,43E6	2	719 490	1 560,47	0,0000
CD	96 124,3	4	24 031,1	52,12	0,0000
CE	179 657	2	89 828,3	194,82	0,0000
CF	45 887,1	18	2 549,28	5,53	0,0000
CG	7,28E6	2	3,64E6	7 903,56	0,0000
DE	4 496,39	2	2 248,2	4,88	0,0076

Análisis de varianza de ΔS_i^* con post-optimización (A=CW y A=SW) - Suma de Cuadrados Tipo III. ▷

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
DF	20 176,9	18	1 120,94	2,43	0,0006
DG	75 593,7	2	37 796,8	81,98	0,0000
EF	21 880,7	9	2 431,19	5,27	0,0000
EG	131 808	1	131 808	285,87	0,0000
FG	128 785	9	14 309,4	31,03	0,0000
Residuos	4,91E6	10 667	461,074		
Total (corregido)	3,70E7	10 799			

Tabla 9.11: Análisis de varianza de ΔS_i^* con post-optimización (A=CW y A=SW) - Suma de Cuadrados Tipo III.

De los resultados anteriores, es importante destacar el efecto sobre ΔS_i^* de la interacción territorio y los algoritmos. Nótese en la Figura 9.22 como los territorios de larga distancia provocan que el algoritmo de barrido llegue a alcanzar valores de ΔS_i^* del 145 % sobre la mejor solución encontrada. En el algoritmo de CW los territorios de larga distancia tienen un efecto apenas apreciable que incrementa ΔS_i^* en un 0,4 % sobre sus mejores resultados.

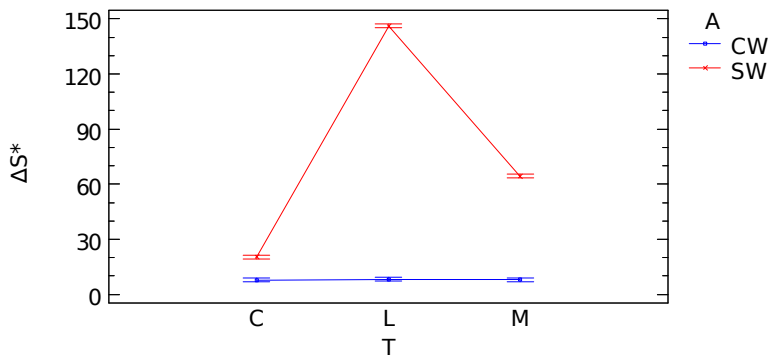


Figura 9.22: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-territorio en ΔS_i^* (PO=1, A=CW y A=SW).

Resulta muy interesante, la interacción entre el algoritmo y la localización del depósito y su efecto sobre ΔS_i^* . En la Figura 9.23 se demuestra que la localización periférica del depósito tiene un efecto muy notable en la

heurística de barrido, empeorando sus resultados lo que incrementa la ratio ΔS_i^* un 60 % respecto de la localización del depósito centrada. Es importante recordar que la heurística de barrido utilizada reglas geométricas basadas en el plano euclidiano, tal y como se describió en el apartado 8.2.2. Por otro lado, en el algoritmo CW no se observan diferencias significativas.

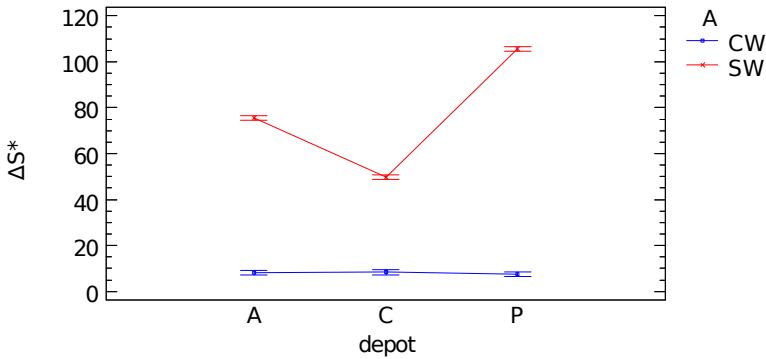


Figura 9.23: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-localización del depósito en ΔS_i^* (PO=1, A=CW y A=SW).

Respecto del resto de factores e interacciones, hay que destacar de manera resumida:

1. La interacción algoritmo con el tipo de matriz, demuestra que el algoritmo de barrido pierde eficacia con las matrices asimétricas frente a las ortodrómicas, incrementando el valor de ΔS_i^* en un 15 %. El algoritmo de CW no muestra un efecto apreciable.
2. Al incrementarse el tamaño del problema n el algoritmo de barrido va incrementando ΔS_i^* , esto es, perdiendo eficacia. El algoritmo de CW no muestra un efecto apreciable.
3. Con demandas pequeñas (demcap =P) el algoritmo de barrido empeora, incrementando ΔS_i^* en un 3 %.

4. Con localizaciones radiales, el algoritmo de barrido mejora ΔS_i^* en un 6 %, confirmando que las propiedades geométricas del problema condicionan la eficacia de este tipo de heurísticas.

9.2.4 Análisis de la varianza de la bondad (PO=1, A=NA y A=RO)

Por último se repite el análisis anterior, pero con los algoritmos de Nagata y el de Røpke. La Tabla 9.12 muestra 24 relaciones significativas: 7 factores y 17 interacciones.

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
Efectos principales					
A:demcap	0,45	1	0,45	4,94	0,0262
B:depot	5,45	2	2,72	29,98	0,0000
C:T	44,13	2	22,06	242,35	0,0000
D:L	102,39	2	51,19	562,34	0,0000
E:M	128,08	1	128,08	1 406,84	0,0000
F:n	2 190,16	9	243,35	2 672,81	0,0000
G:A	7 265,41	1	7 265,41	79 798,56	0,0000
Interacciones					
AB	1,25	2	0,62	6,87	0,0010
AC	0,32	2	0,16	1,78	0,1684
AD	0,60	2	0,30	3,31	0,0366
AE	1,01	1	1,01	11,20	0,0008
AF	6,62	9	0,73	8,08	0,0000
AG	0,008	1	0,008	0,09	0,7598
BC	0,72	4	0,18	2,00	0,0922
BD	11,96	4	2,99	32,85	0,0000
BE	0,09	2	0,04	0,54	0,5821
BF	55,97	18	3,10	34,15	0,0000
BG	10,20	2	5,10	56,03	0,0000
CD	5,87	4	1,46	16,14	0,0000
CE	45,76	2	22,88	251,34	0,0000
CF	35,55	18	1,97	21,69	0,0000
CG	44,27	2	22,13	243,12	0,0000

Análisis de varianza de ΔS_i^* con post-optimización (A=NA y A=RO) - Suma de Cuadrados Tipo III. ▷

Fuente	Suma cuadrados	Grados libertad	Cuadrado medio	Ratio-F	p-valor
DE	8,42	2	4,21	46,28	0,0000
DF	46,46	18	2,58	28,35	0,0000
DG	100,04	2	50,02	549,44	0,0000
EF	29,16	9	3,24	35,59	0,0000
EG	134,66	1	134,66	1 479,02	0,0000
FG	1 181,31	9	131,25	1 441,64	0,0000
Residuos	4 904,42	53 867	0,09		
Total (corregido)	16 360,9	53 999			

Tabla 9.12: Análisis de varianza de ΔS_i^* con post-optimización (A=NA y A=RO) - Suma de Cuadrados Tipo III.

Una de las primeras relaciones significativas, es la que se demuestra entre el algoritmo y el tipo de matriz y su efecto en el indicador ΔS_i^* . Al observar la Figura 9.24 se comprende que el efecto del tipo de matriz sobre el algoritmo de Røpke es de apenas un 0,2%, e inferior para el algoritmo de Nagata. Aunque el efecto es muy pequeño, el ANOVA señala que es significativo y que los algoritmos mejoran muy ligeramente sus resultados con matrices ortodrómicas. Es curioso observar cómo incluso con algoritmos capaces de resolver problemas asimétricos CVRP la asimetría siempre deja una pequeña huella en la eficacia de las técnicas.

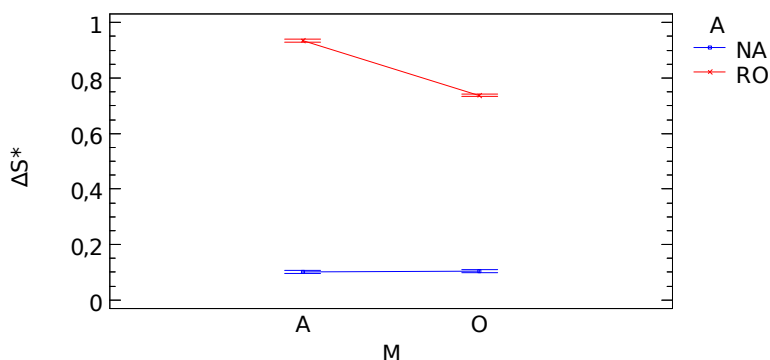


Figura 9.24: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-tipo de matriz en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).

Otra relación a subrayar es la que aparece al considerar el tamaño del problema n y su interacción con los algoritmos seleccionados sobre ΔS_i^* . La Figura 9.25 muestra como ambos algoritmos, empeoran muy ligeramente sus resultados conforme aumenta el tamaño del problema. Nagata se muestra nuevamente más robusto que Røpke.

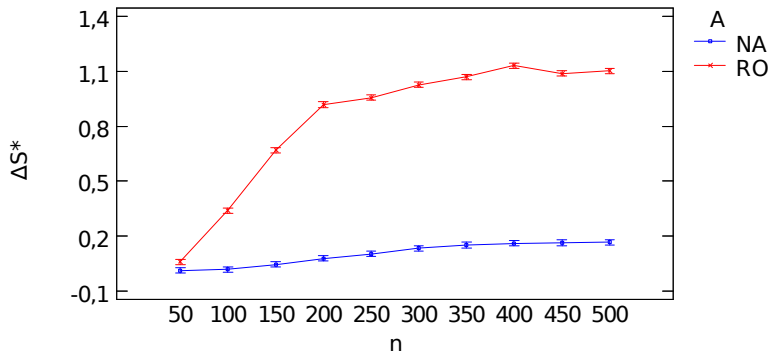


Figura 9.25: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-tamaño del problema en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).

Según la localización de los clientes, tal y como se esperaba, los algoritmos muestran un comportamiento diferente. Røpke se ve perjudicado ligeramente con las localizaciones en cuadrícula, apenas un 0,2 % de ΔS_i^* . Nagata no se ve afectado de manera significativa, tal y como muestra la Figura 9.26.

La Figura 9.27 vuelve a mostrar que el territorio tiene un efecto significativo sobre la eficacia del algoritmo, aunque se desconoce las verdaderas razones de este comportamiento, en especial en el algoritmo de Røpke.

Es interesante señalar que se ha observado una pequeña predilección de los algoritmos por los problemas de gran demanda frente a los de pequeña demanda. Tal vez, una mayor horquilla o rango de valores ayude a los algoritmos a mejorar sus soluciones, tal y como se ilustra en la Figura 9.28.

Para terminar, también se ha observado una ligera influencia de la localización del depósito sobre los resultados, aunque de manera desigual para

9 | Análisis de las soluciones en el caso del CVRP

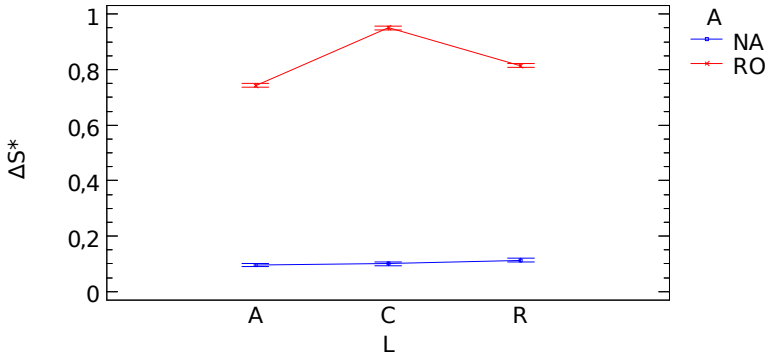


Figura 9.26: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-localización en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).

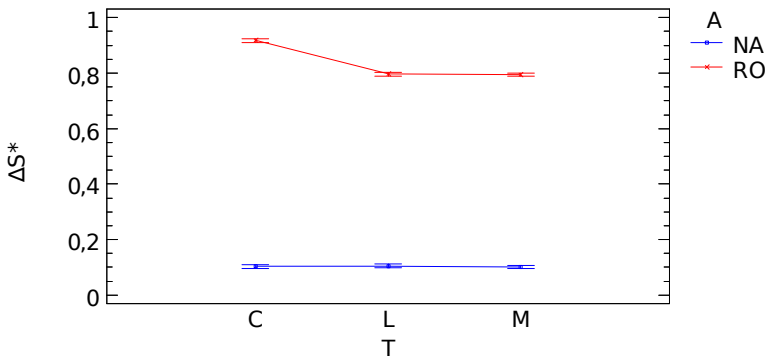


Figura 9.27: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre la interacción algoritmo-territorio en ΔS_i^* (PO=1, A=NA y A=RO).

ambos algoritmos. Es difícil afirmar en qué medida influye este factor sobre los resultados, ya que apenas es perceptible (véase la Figura 9.28).

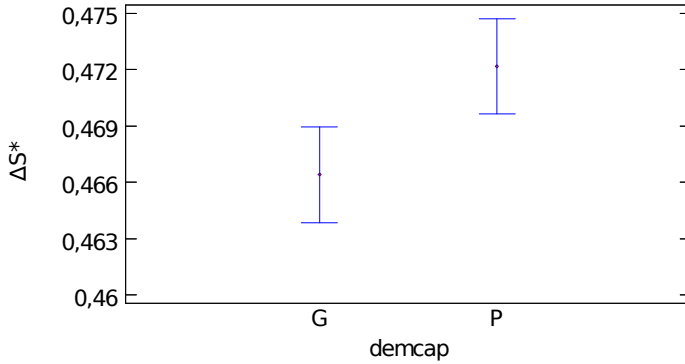


Figura 9.28: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre ΔS_i^* y la interacción algoritmo-demanda y capacidad máxima (PO=1, A=NA y A=RO).

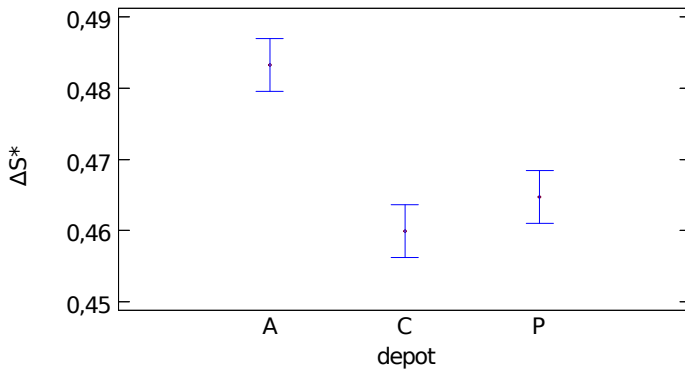


Figura 9.29: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre ΔS_i^* y la interacción algoritmo-localización del depósito (PO=1, A=NA y A=RO).

9.2.5 Conclusiones a los análisis de varianza de la bondad

Seguidamente se presentan las conclusiones más importantes para el análisis de la varianza de la bondad de las soluciones.

1. El tipo de algoritmo determina la bondad de la solución de manera muy significativa. El EAX (*edge assembly crossover*) de Nagata obtiene los mejores resultados.

2. El tamaño de la matriz o el número de clientes $n - 1$, determina de forma inversa la bondad de la solución. Al crecer el tamaño del problema los algoritmos empeoran muy ligeramente sus resultados.
3. Todos los algoritmos seleccionados son capaces de resolver problemas ACVRP, el ANOVA señala que los algoritmos mejoran muy ligeramente sus resultados con matrices ortodrómicas.
4. Los territorios de larga distancia provocan que el algoritmo de barrido llegue a alcanzar valores de ΔS_i^* del 145 % sobre la mejor solución encontrada.
5. Con localizaciones radiales, el algoritmo de barrido mejora ΔS_i^* en un 6 %, confirmando que las propiedades geométricas del problema condicionan la eficacia de este tipo de heurísticas.
6. El factor localización del depósito tiene un efecto significativo en los resultados de ΔS_i^* , en especial en la heurística de barrido, que empeora sus resultados, incrementando la ratio un 60 % respecto de la localización del depósito centrada.
7. Se ha observado una pequeña predilección de los algoritmos por los problemas de gran demanda frente a los de pequeña demanda. Tal vez, una mayor horquilla o rango de valores ayude a los algoritmos a mejorar sus soluciones, y viceversa.

9.3 Análisis de Nagata con parada a tiempo

Además del estudio realizado de las variables respuesta de todos los experimentos; en una segunda fase del estudio, se decidió que para comprender mejor el efecto de los factores sobre la bondad de las soluciones sería necesario centrar la atención sobre NA y sus resultados en diferentes condiciones de tiempo límite de computación. El factor parada a tiempo (pt) fue definido

como el porcentaje de tiempo CPU máximo disponible sobre el tiempo total requerido sin límite o hasta la parada natural del algoritmo ($pt = 100\%$) en los experimentos descritos anteriormente. Se estudió un rango de $pt = \{10\%, 20\%, 40\%, 60\%, 80\%, 100\%\}$. El conjunto de 5 400 resultados de NA en los experimentos anteriores sin límite de tiempo ($pt = 100\%$), fue ampliado hasta los 32 400 experimentos. Cada instancia i con parada a tiempo requirió de una ejecución independiente (nueva semilla) del algoritmo. Con el nuevo conjunto de resultados se estudió la variable respuesta pS , según la expresión 9.2, donde un valor positivo de $pS_{i,pt}$ indicará el porcentaje de empeoramiento en la resolución de la instancia i en la parada a tiempo pt sobre el valor alcanzado para $pt = 100\%$:

$$pS_{i,pt} = \frac{S_{i,pt} - S_{i,100}}{S_{i,100}} \cdot 100 \quad \forall i, pt \quad (9.2)$$

Con todo ello se realizó un ANOVA con los factores objeto de estudio e interacciones de orden dos. A continuación se listan en orden de importancia (Ratio-F, p -valor) y con p -valores menores que 0,05 los factores e interacciones con efectos estadísticamente significativos sobre pS con un 95,0% de nivel de confianza: pt (5 996, 0), n (357,3, 0), $n-pt$ (122,61, 0), simetría (98,55, 0), pt -simetría (35,17, 0), pt -territorio (31,44, 0), pt -demcap (30,63, 0), pt -localización (28,43, 0), demcap (27,05, 0), pt -depot (21,04, 0), depot (20,75, 0), territorio (15,47, 0), territorio-simetría (10,7, 0). Todos los factores estudiados son significativos, o en solitario o mediante algún tipo de interacción.

Como muestra la Figura 9.30 de medias e intervalos HSD de Tukey, la sensibilidad del empeoramiento de la solución aumenta para problemas de mayor tamaño (más complejidad) y menor tiempo de cómputo disponible. Sin embargo NA es muy robusto, y alcanza buenas soluciones incluso con poco tiempo de computación y tamaños grandes. Los empeoramientos del orden del 2% observados, coinciden con lo apuntado por Toth y Vigo (2001b) donde se señala que las metaheurísticas de última generación, si bien pueden consumir mucho tiempo de computación, tienen rendimientos del 2% al

0,5 %. Las oscilaciones que muestra la gráfica en valores pequeños de pt se

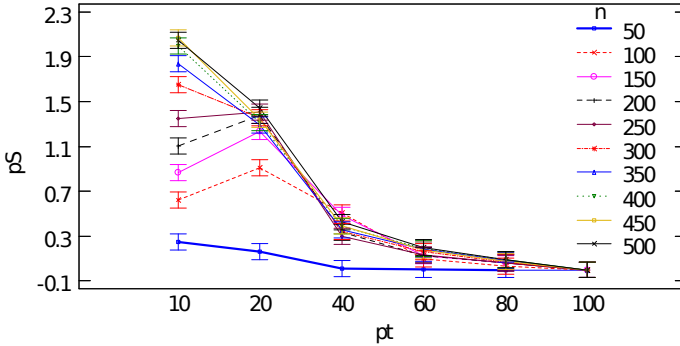


Figura 9.30: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el número de nodos n y el tiempo de cómputo en el empeoramiento de la solución (NA).

deben a la divergencia de soluciones (en función objetivo, pero también en número de rutas k) durante su proceso de mejora de la solución. Incluso para NA, una metaheurística muy flexible que se adapta a entornos asimétricos, tal y como muestra la Figura 9.31 la asimetría condiciona la complejidad del problema y empeora (ligeramente pero de manera significativa) los resultados alcanzados. Estas diferencias son mayores en $pt = 10\%$ pero dejan de ser significativas para valores de $pt \geq 40\%$. Según la Figura 9.32, el factor territorio (relacionado con el grado de asimetría) también condiciona los resultados de NA, del mismo modo que se observó en el estudio sobre el tiempo CPU anteriormente. Nuevamente las diferencias decrecen hasta dejar de ser significativas para valores de $pt \geq 40\%$.

Tal y como se explicó anteriormente, se confirma que los problemas con el factor demanda-capacidad pequeña afectan también a la función objetivo en entornos de poco tiempo de computación ($pt < 40\%$), representado en la Figura 9.33.

Con la parada a tiempo se observa que el factor localización tiene un mayor efecto en las etapas tempranas del proceso de resolución, según la Figura 9.34. Otro factor estudiado significativo es la localización del depósito,

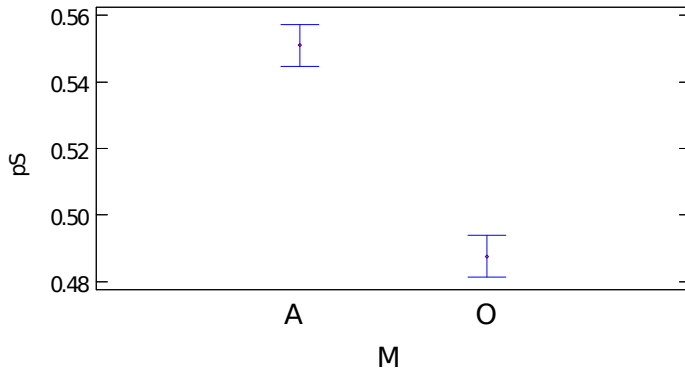


Figura 9.31: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la asimetría y el empeoramiento de la solución (NA).

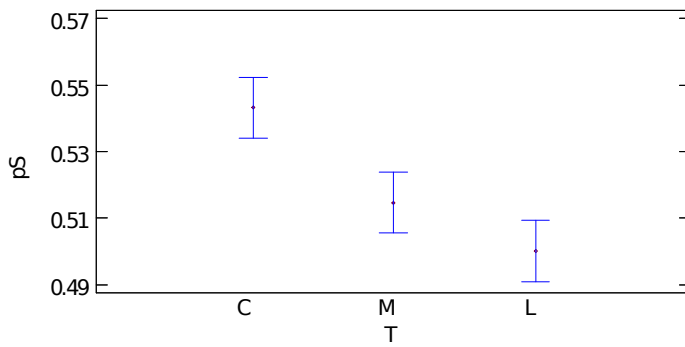


Figura 9.32: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el territorio y el empeoramiento de la solución (NA).

en la Figura 9.35. Si la localización es periférica NA tiene mayor dificultad que si es centrada, si bien su efecto es visible en condiciones de estrés ($pt \leq 20\%$).

9 | Análisis de las soluciones en el caso del CVRP

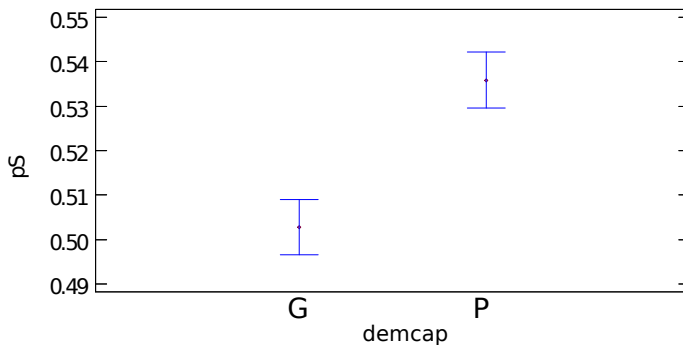


Figura 9.33: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la demanda-capacidad máxima y el empeoramiento de la solución (NA).

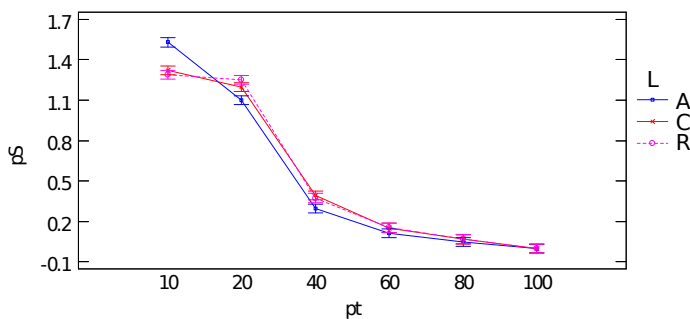


Figura 9.34: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la parada a tiempo, la localización y el empeoramiento de la solución.

9.4 Comparación cuantitativa y cualitativa de las soluciones CVRP y ACVRP

Este apartado ayuda a comprender el efecto de la asimetría sobre los problemas CVRP, subrayando las diferencias existentes entre la solución encontrada en los problemas simétricos CVRP y la de los problemas asimétricos ACVRP. Para ello, en primer lugar se calcularon los siguientes indicadores:

CVRP es el resultado de tomar las rutas de la solución del problema simé-

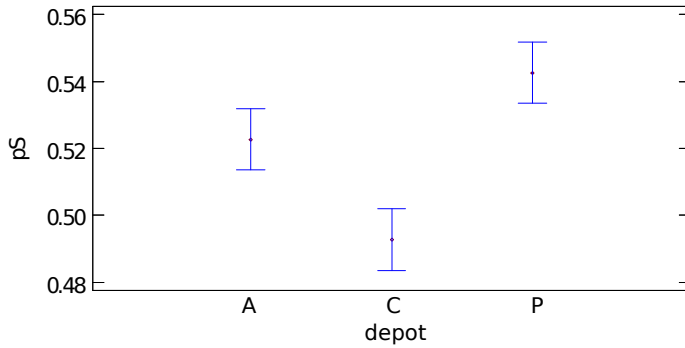


Figura 9.35: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la localización del depósito y el empeoramiento de la solución.

trico (CVRP), y valorarlas con la matriz de distancias simétrica (matriz ortodrómica).

$ACVRP$ en este caso, es el resultado de tomar las rutas de la solución al problema asimétrico (ACVRP), y valorarlas con la matriz de distancias asimétrica.

$\Delta ACVRP$ es el porcentaje de incremento de la valoración $ACVRP$ respecto del $CVRP$.

$CVRP_A$ en este caso se toman las rutas de la solución al problema simétrico CVRP y se valoran con la matriz de distancias asimétricas.

$ACVRP_O$ es el caso recíproco al anterior, se toman las rutas de la solución al problema asimétrico ACVRP y se valoran con la matriz ortodrómica.

$\Delta CVRP_A$ es el porcentaje de incremento de la valoración $CVRP_A$ respecto de la $ACVRP$. Este indicador también puede ser negativo señalando un decremento.

$\Delta ACVRP_O$ es el porcentaje de incremento (o en negativo, decremento) de la valoración $ACVRP_O$ respecto de la $CVRP$.

Dichos indicadores se calcularon para cada instancia (siempre con post-optimización), por lo que se dispone de 32 400 registros comparativos.

9.4.1 Análisis cuantitativo

La siguiente Tabla 9.13 muestra el análisis estadístico sencillo para los indicadores $\Delta ACVRP$, $\Delta CVRP_A$ y $\Delta ACVRP_O$ en todo el conjunto de datos disponible. Lo más interesante y relevante de esta estadística, es el promedio del indicador $\Delta ACVRP$ con un valor del 59,86 % indica claramente que existe una gran diferencia cuantitativa entre las soluciones al problema asimétrico ACVRP y las soluciones al problema simétrico CVRP. Nótese que el indicador $\Delta ACVRP$ ha llegado a alcanzar un valor máximo de 239,35 %.

	$\Delta ACVRP$	$\Delta CVRP_A$	$\Delta ACVRP_O$
Recuento	32 400	32 400	32 400
Promedio	59,86	10,28	8,38
Desviación estándar	21,36	13,12	8,44
Coef. de variación	35,68 %	127,61 %	100,72 %
Mínimo	0,3	-58,46	-31,46
Máximo	239,35	71,74	154,36

Tabla 9.13: Análisis cuantitativo de las soluciones CVRP.

Analizando $\Delta CVRP_A$ se observa que existen grandes diferencias cuantitativas entre la solución al problema simétrico CVRP valorado con la matriz asimétrica y la solución propia del problema asimétrico ACVRP. El alto valor del incremento, y el gran rango de posibles desviaciones confirma sin lugar a dudas que no es posible tomar la solución simétrica valorada con la matriz asimétrica como un valor equivalente a la solución asimétrica ACVRP. La misma conclusión se obtiene al analizar el caso recíproco con $\Delta ACVRP_O$. Nuevamente, esto indica sin lugar a dudas que existe una notable diferencia cuantitativa entre las soluciones al problema asimétrico ACVRP valorado con la matriz ortodrómica (simétrica) y la solución propia del problema simétrico

CVRP. Al igual que ocurría en el caso del TSP, las diferencias son tan grandes, que no es buena idea realizar esta sustitución cruzada de las soluciones.

La siguiente Figura 9.36 ilustra en forma de histograma la distribución de frecuencias de los incrementos del indicador $\Delta ACVRP$. Se puede observar claramente como la gran mayoría de los casos tienen valores de incremento entre el 30 % y el 90 %, que son notables o grandes diferencias.

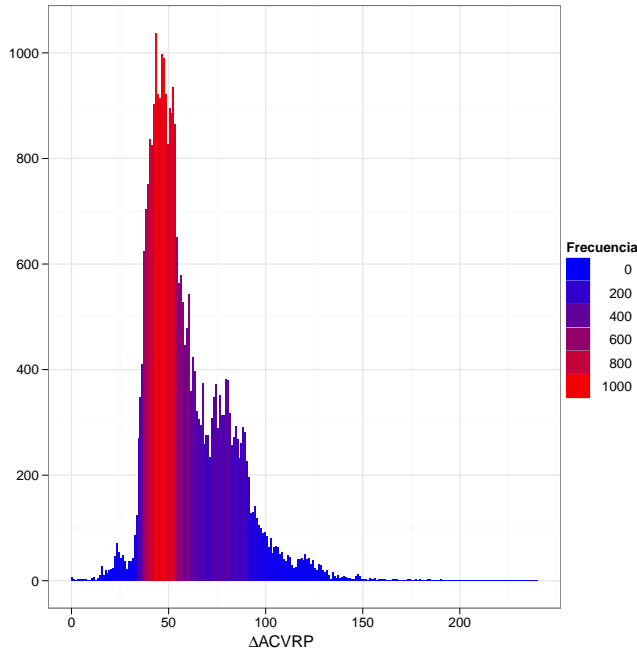


Figura 9.36: Histograma del indicador $\Delta ACVRP$.

La Figura 9.37 ilustra el histograma de la distribución de frecuencias de los incrementos del indicador $\Delta CVRP_A$. La mayoría de los casos tienen valores de incremento entre el 10 % y el 30 %, que son diferencias importantes que descartar este tipo de sustitución.

Por último, la Figura 9.38 muestra el histograma para el indicador $\Delta ACVRP_O$. En este último caso, la mayor parte de los puntos se encuen-

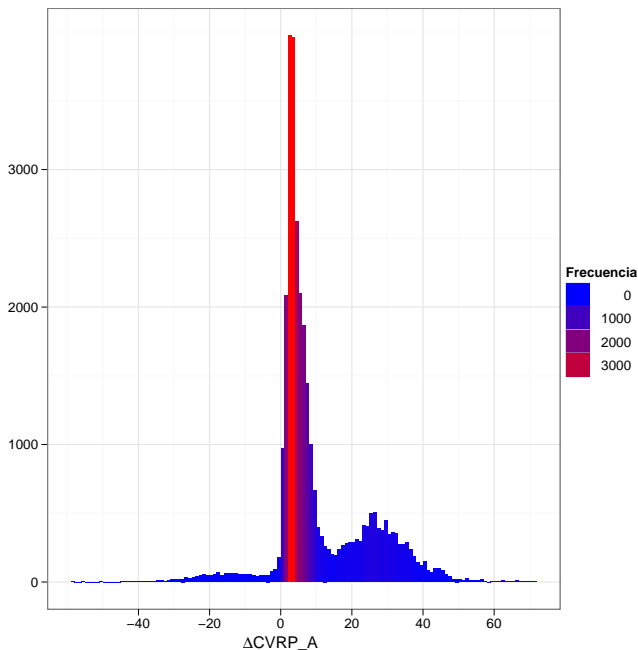


Figura 9.37: Histograma del indicador $\Delta CVRP_A$.

tran entre el 7 % y el 40 %. Estos valores confirman todo lo anteriormente expuesto.

Para comprender mejor si existen relaciones entre el indicador $\Delta ACVRP$ y el resto de factores se realizó un ANOVA, dando lugar a 18 relaciones significativas: 6 factores y 12 interacciones. Los factores más importantes son: el territorio, la localización del depósito, el algoritmo, la interacción entre el territorio y el algoritmo, la localización de los clientes, entre otros. Los resultados más destacados, se resumen seguidamente.

En primer lugar, en la Figura 9.39 se observa que existe una relación significativa e inversa entre el tipo de territorio y $\Delta ACVRP$ (Ratio-F igual a 27 355,67, y p -valor de 0,00). En territorio de mayor distancia, las diferencias entre la solución ACVRP y CVRP son menores, del orden del 45 %. Estas

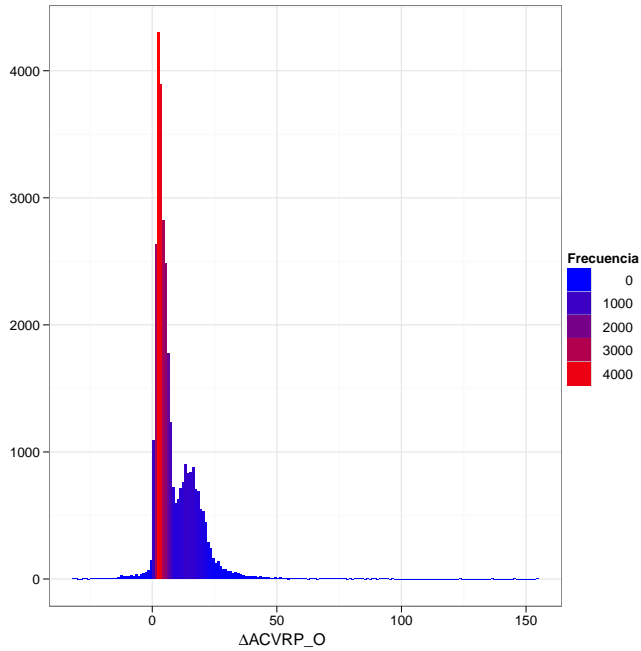


Figura 9.38: Histograma del indicador $\Delta ACVRP_O$.

diferencias se acentúan para territorios de menores distancias, siendo del orden del 60 % en media distancia, y del 85 % en corta distancia. Dicho de otro modo, el grado de asimetría es mayor en territorios de cortas distancias que en largas distancias, y esto afecta a las diferencias entre la solución ACVRP y CVRP. Nuevamente se confirman las conclusiones del Capítulo 4 y del Capítulo 6 para el caso del TSP. Esta afirmación se confirma para los 4 algoritmos seleccionados (Ratio-F igual a 964,61, y p -valor de 0,00), donde se ve amplificada un 33 % para el algoritmo de barrido, tal y como se muestra en la Figura 9.40.

Otro factor relevante y novedoso es la localización del depósito, que tiene un efecto significativo sobre $\Delta ACVRP$ con una Ratio-F igual a 3 603,53, y p -valor de 0,00. Tal y como se ilustra en la Figura 9.41, es muy interesante

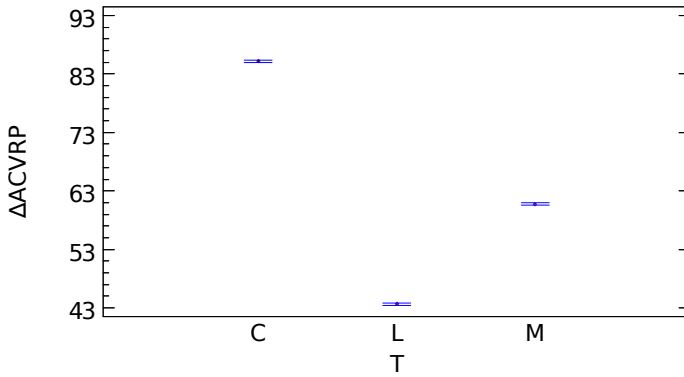


Figura 9.39: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el indicador $\Delta ACVRP$ y el territorio.

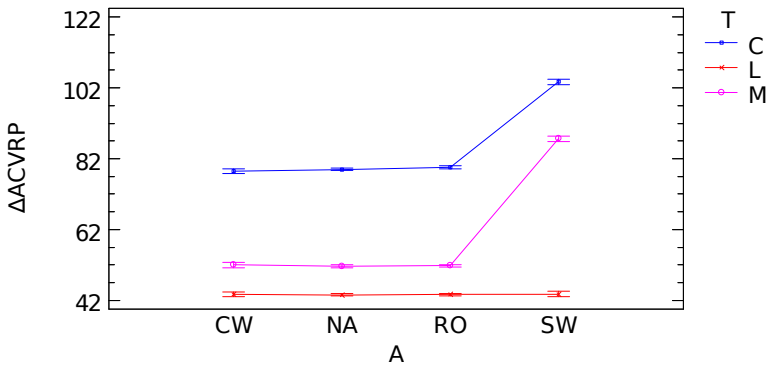


Figura 9.40: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el algoritmo-territorio en el indicador $\Delta ACVRP$.

observar que con localizaciones del depósito en la periferia las diferencias entre ACVRP y CVRP son menores (del orden del 55 %) que con el depósito centrado (70 %). La localización del depósito aleatoria, se sitúa en una rango intermedio (65 %). Una posible hipótesis que explique este hecho es que: el grado de asimetría está condicionado inversamente al tamaño medio de los arcos euclidianos; así que con el depósito centrado, el tamaño medio es menor (mayor grado de asimetría) que con el depósito en la periferia (mayor tamaño medio del arco, y menor asimetría). Y por tanto, a mayor grado de

asimetría, mayores diferencias que se muestran en el indicador $\Delta ACVRP$. En cualquier caso, para comprender mejor este hecho sería necesario hacer nuevas investigaciones en este sentido. Este efecto se manifiesta también para todos los algoritmos estudiados (Ratio-F igual a 225,33, y p -valor de 0,00), tal y como se ilustra en la Figura 9.42. Se vuelve a observar que el algoritmo de barrido nota el efecto de modo amplificado.

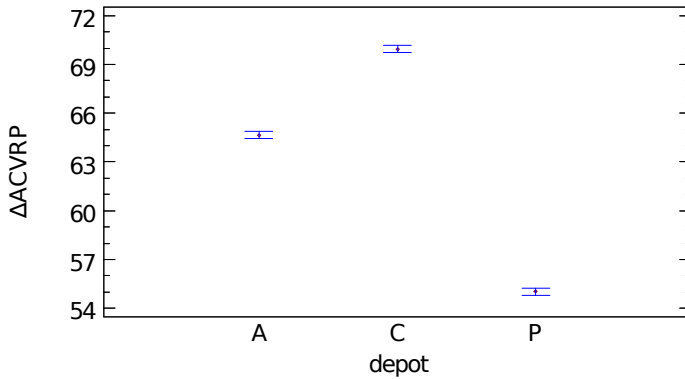


Figura 9.41: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre la localización del depósito en el indicador $\Delta ACVRP$.

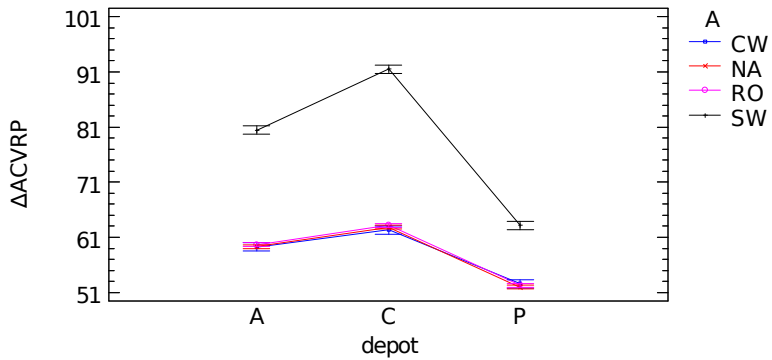


Figura 9.42: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el algoritmo y la localización del depósito en el indicador $\Delta ACVRP$.

Con una Ratio-F igual a 170,47 y p -valor de 0,00, se confirma que la localización del depósito también muestra una interacción con el tipo de territorio, tal y como se ilustra en la Figura 9.43 confirmando que las localizaciones del depósito centradas tienen un valor mayor del indicador $\Delta ACVRP$ para todo tipo de territorios (e inversamente proporcional al tamaño del territorio).

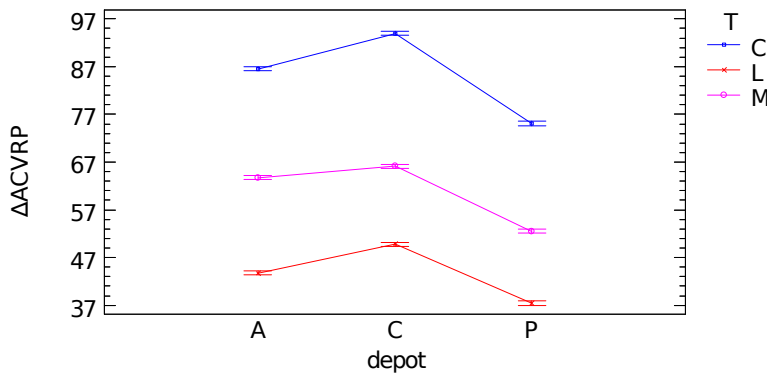


Figura 9.43: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95 % de confianza para la relación entre el territorio y la localización del depósito en el indicador $\Delta ACVRP$.

Por último, con una Ratio-F igual a 751,42 y p -valor de 0,00 el factor localización tiene un efecto significativo sobre el indicador $\Delta ACVRP$. Tal y como se ilustra en la Figura 9.44, las localizaciones radiales incrementan las diferencias del indicador $\Delta ACVRP$ en un 9 % respecto de las localizaciones aleatorias y en cuadrícula. Esto confirma las conclusiones del Capítulo 4 y del Capítulo 6 para el caso del TSP, donde se demostraba que el grado de asimetría aumenta en el caso de las localizaciones radiales, y por tanto en este caso, el valor del indicador $\Delta ACVRP$.

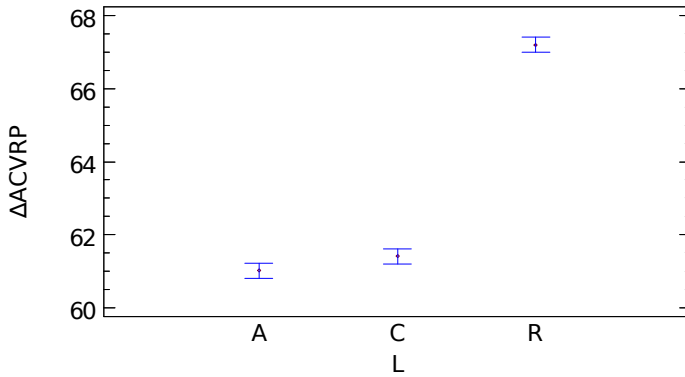


Figura 9.44: Medias e intervalos HSD de Tukey al 95% de confianza para la relación entre el indicador $\Delta ACVRP$ y la localización de los clientes.

9.4.2 Análisis gráfico

En esta última sección se muestran algunos ejemplos gráficos de los resultados obtenidos en los experimentos del caso del CVRP. El objetivo de estas gráficas es ilustrar nuevamente las conclusiones de este caso, mostrando las diferencias entre las rutas resultantes del problema CVRP con las correspondientes al problema ACVRP. De las 124 200 experiencias computacionales llevadas a cabo para el caso del CVRP, se han seleccionado sólo unas pocas de las 64 800 con post-optimización. Este apartado, supone en cierta medida la condensación de los resultados obtenidos tras años de trabajo de investigación en la realización de la presente Tesis Doctoral.

G-C-LC-0501

El primer ejemplo es el de la instancia G-C-LC-0501. Se trata de 50 nodos localizados en un territorio de larga distancia y distribuidos en forma de cuadrícula. Una relación de gran demanda-capacidad y un depósito localizado en el centro del territorio. En este ejemplo es fácil observar sus diferencias: en cuanto a la distancia total de las rutas (los 4 502,30 km de la ortodrómica

frente a los 6 262,51 km de la real asimétrica), con $\Delta ACVRP = 39,09\%$; y también en cuanto a las secuencias o rutas de la solución.

Nótese que la solución asimétrica tiene 5 rutas (existe un envío directo al nodo 31) mientras que la ortodrómica tiene 4. En la Figura 9.45 se superponen las soluciones ortodrómica (en color azul) y real asimétrica (en color rojo).

En la Figura 9.46 y la Figura 9.47 muestran algunos detalles de la comparación donde se puede observa la naturaleza de las diferencias en secuencia y en distancia total recorrida.

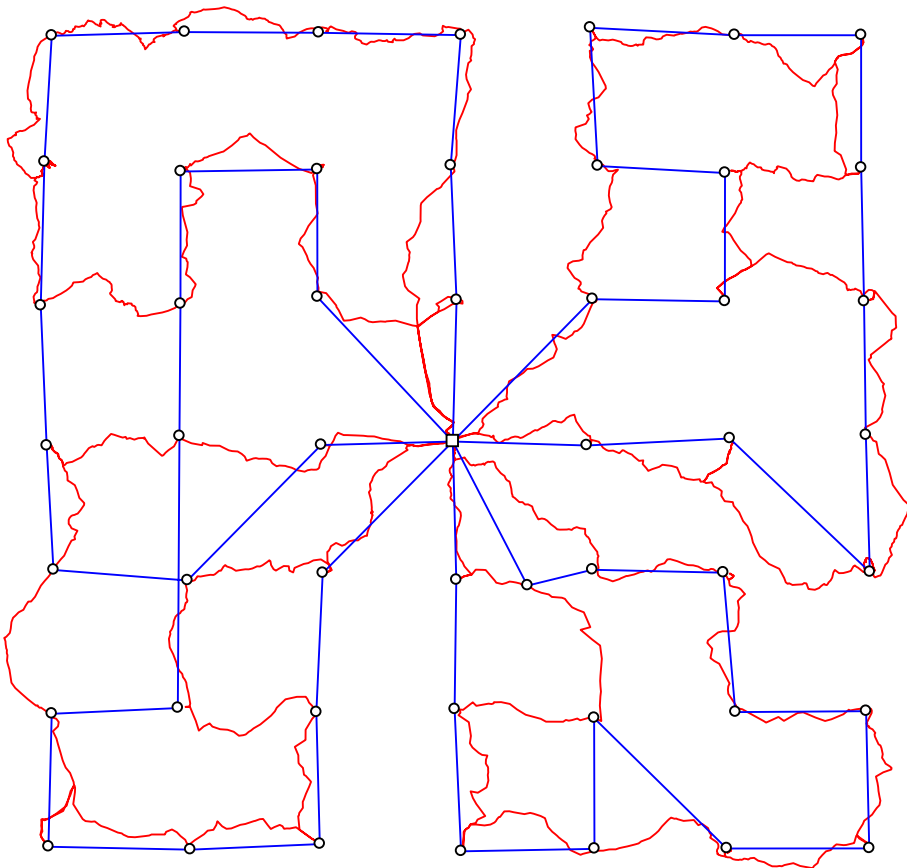


Figura 9.45: Comparación de soluciones para la instancia G-C-LC-0501 con Nagata.



Figura 9.46: Detalle del mapa para la instancia G-C-LC-0501 con Nagata.

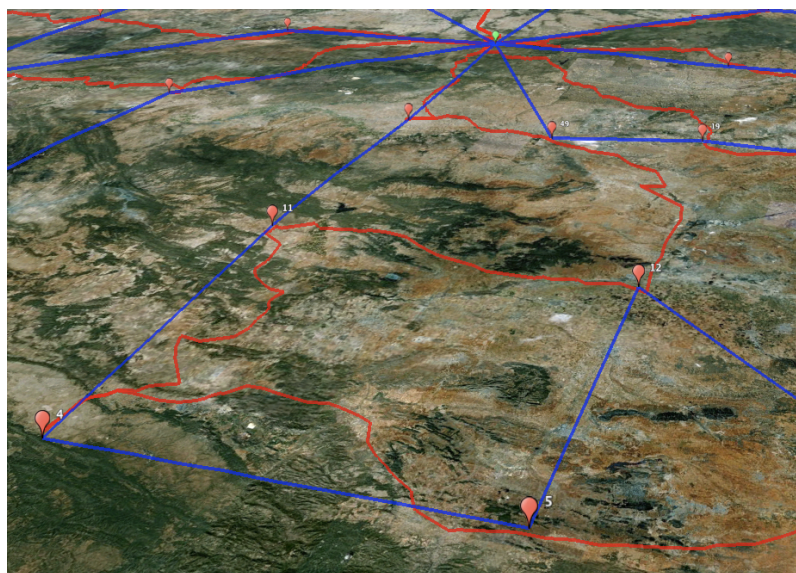


Figura 9.47: Detalle del mapa para la instancia G-C-LC-0501 con Nagata.

G-C-MR-1001

Tiene 100 nodos en un territorio de media distancia y distribuidos de forma radial. Una relación de gran demanda-capacidad y un depósito localizado en el centro. En la Figura 9.48 se superponen los dos gráficos. La Figura 9.49 y la Figura 9.50 muestran algunos detalles comparativos. Ambas soluciones tienen el mismo número de rutas, 5. La distancia total de las rutas (los 2 149,41 km de la ortodrómica frente a los 3 385,60 km de la real asimétrica), con $\Delta ACV RP = 57,51\%$; y en las secuencias de las rutas de la solución:

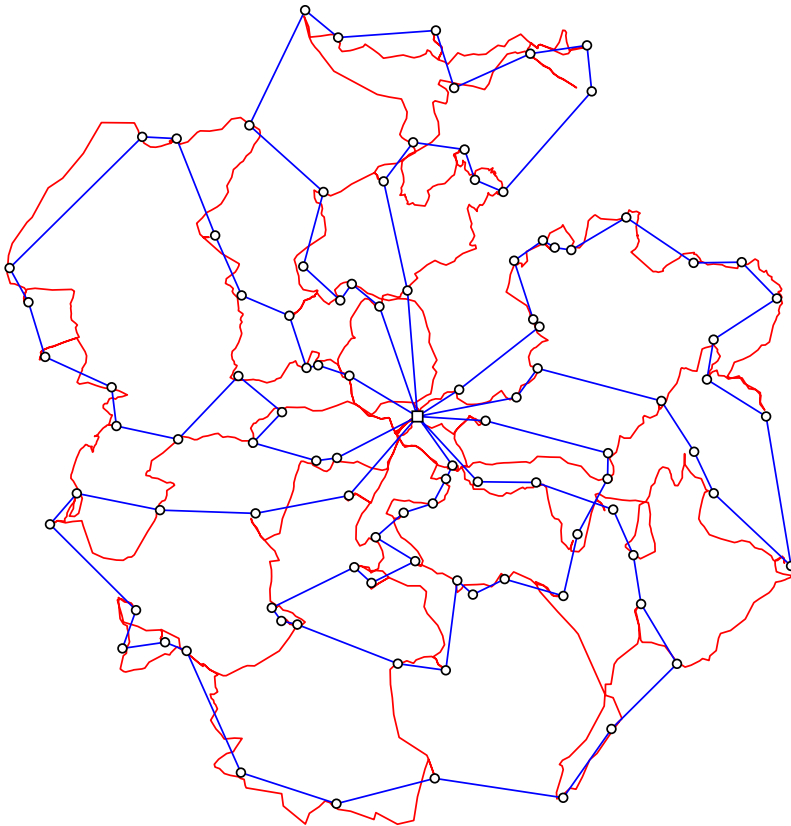


Figura 9.48: Comparación de soluciones para la instancia G-C-MR-1001 con Røpke.

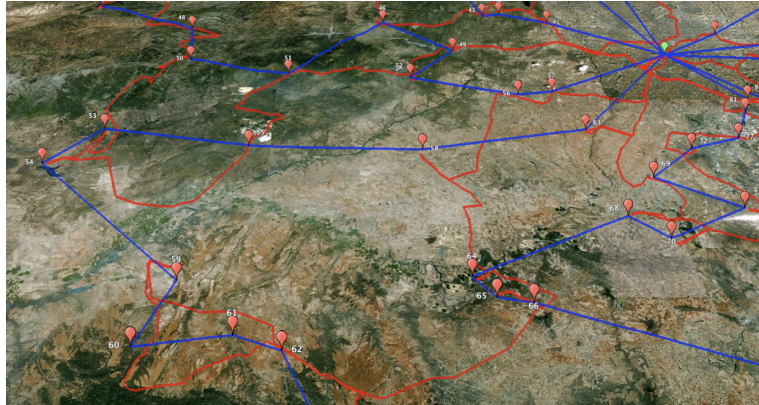


Figura 9.49: Detalle del mapa para la instancia G-C-MR-1001 con Røpke.

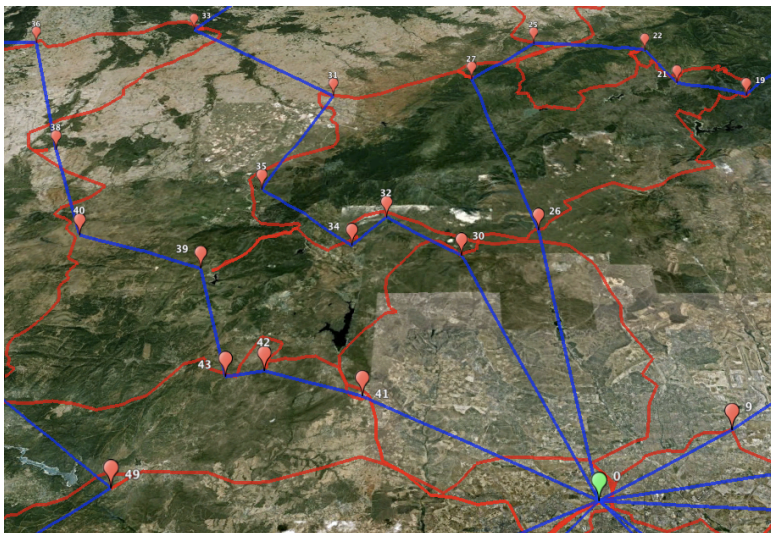


Figura 9.50: Detalle del mapa para la instancia G-C-MR-1001 con Røpke.

P-P-LR-4505

Son 450 nodos en un territorio de largas distancias distribuidos de forma radial. Con pequeña demanda-capacidad y el depósito en la periferia. En la Figura 9.51 se muestra las soluciones del algoritmo de Nagata. Las diferencias: distancia total de las rutas (los 22 898,02 km de la ortodrómica frente a los 33 448,21 km de la real asimétrica), con $\Delta ACVRRP = 46,07\%$; en las secuencias de las rutas de la solución, e incluso en el número de rutas (29 para la ortodrómica y 30 para la real con un envío directo al nodo 210).

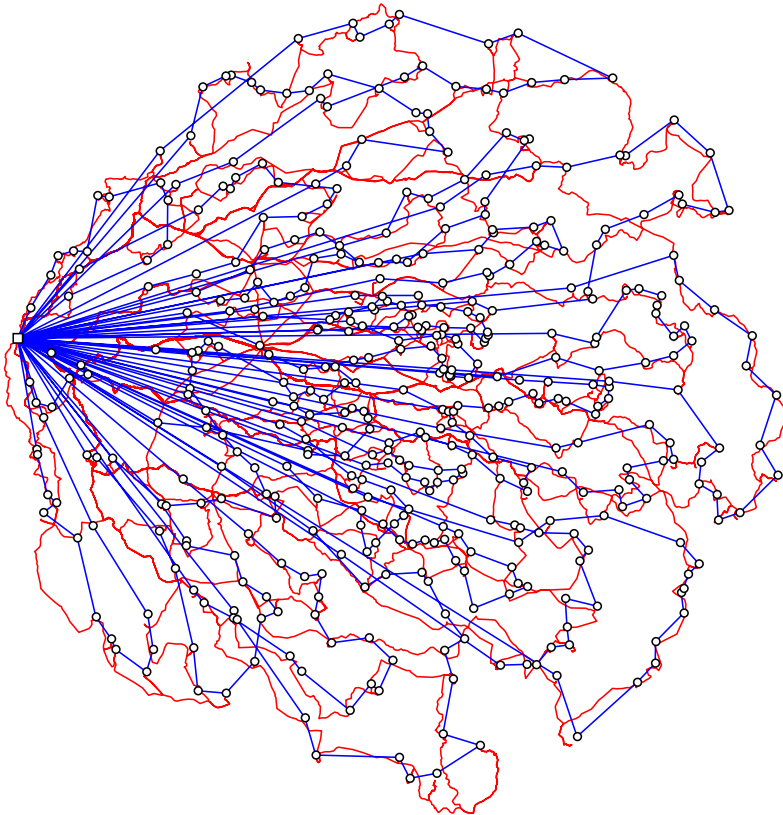


Figura 9.51: Comparación de soluciones para la instancia P-P-LR-4505 con Nagata.

P-A-CA-3502

El último ejemplo tiene 350 nodos en un territorio de cortas distancias distribuidos aleatoriamente. Una pequeña demanda-capacidad y un depósito localizado aleatoriamente. En la Figura 9.52 se superponen las dos soluciones con el algoritmo de Nagata cuyas diferencias son enormes: la distancia total (los 864,18 km de la ortodrómica frente a los 2 140,71 km de la asimétrica), con $\Delta ACVRP = 147,71\%$; en las secuencias de las rutas de la solución, y también en el número de rutas (17 para la ortodrómica y 16 para la real).

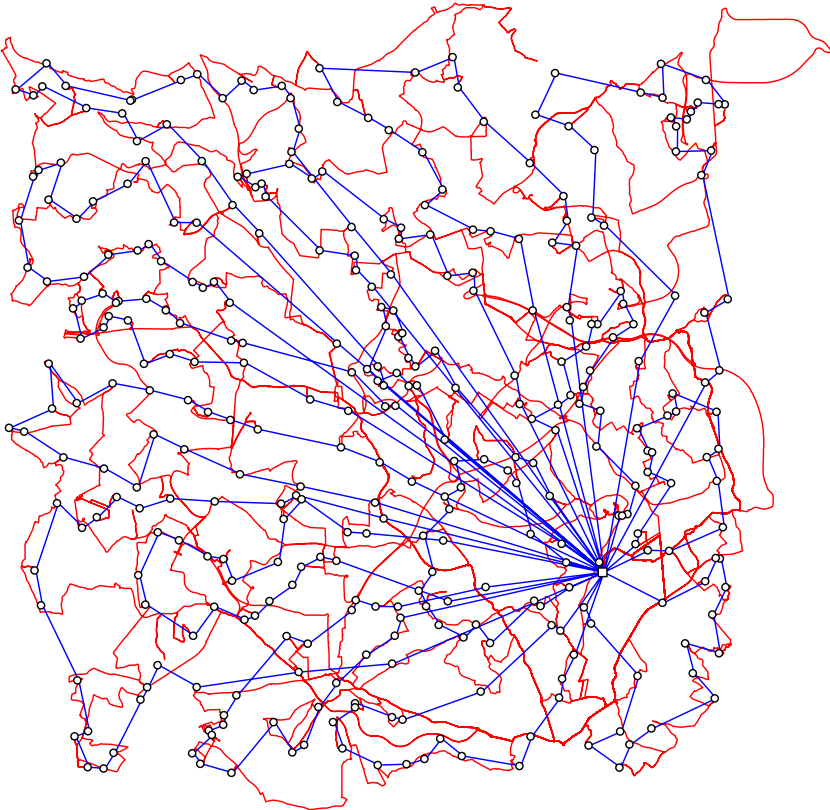


Figura 9.52: Comparación de soluciones para la instancia P-A-CA-3502 con Nagata.

9.5 Conclusiones

Como se ha podido observar, los resultados demostrados para el caso del CVRP, confirman y subrayan las conclusiones anteriormente expuestas para el caso del TSP. Aunque las técnicas avanzadas tienen criterios de convergencia y parada difíciles de comparar; la asimetría tiene un efecto negativo tanto en el tiempo de computación como en la bondad de las soluciones obtenidas. La asimetría incrementa el tiempo de computación e incrementa la desviación sobre el óptimo y la tasa de éxito de los algoritmos. Las soluciones simétricas y asimétricas no son extrapolables ni intercambiables.

Todo apunta a una idea muy sencilla, bajo la compleja realidad y la estructura de la red subyace siempre la asimetría (en menor o mayor medida). Se puede inferir, que dicho efecto estará siempre presente en todos los problemas de rutas, descendientes de los problemas básicos TSP y CVRP, y en los cuales siempre es necesaria la utilización de una matriz de distancias (tiempos, costes, etc.). Si bien, es presumible que los factores propios de un problema VRP particular pueda tener un efecto mayor que el observado para el factor asimetría (por ejemplo, las ventanas horarias, prioridad de servicio, recogida y entrega, etc.).

Si se pretende desarrollar técnicas y herramientas capaces de proporcionar soluciones eficaces y eficientes a los complejos problemas que las actuales empresas tienen en el actual entorno altamente competitivo: la asimetría debe ser siempre considerada y formar parte inteligente de la estrategia de resolución.

10 | Conclusiones

Los problemas de rutas de vehículos o de distribución física de mercancías desde almacenes a clientes aparecen en la literatura científica como *Vehicle Routing Problems* (VRP). Tratan de determinar la ruta o rutas para cada uno de los vehículos de la flota cumpliendo con todo el conjunto de restricciones e intentando alcanzar unos objetivos propuestos. Como se ha visto en esta Tesis Doctoral, los problemas de rutas son en realidad una familia cada vez más amplia de tipos de problemas.

La resolución práctica y aplicada a las empresas de este tipo de problemas ha sido estudiada ampliamente por numerosos científicos desde mediados del s.XX. Vale la pena recordar, que desde el problema más sencillo de formular: el TSP; todos los problemas VRP se inscriben en el campo de la optimización combinatoria y son del tipo NP-completo. Algunas variantes de los VRP incorporan todo un conjunto de restricciones (capacidad, ventanas de tiempo, prioridades de servicio, entrega y recogida, etc.) que unido a lo anterior hacen todavía más difícil encontrar soluciones factibles en un tiempo razonable. Por todo ello, no es de extrañar que desde el comienzo, uno de los objetivos principales de esta rama de la ciencia fuera el desarrollo de técnicas y algoritmos eficaces y eficientes capaces de encontrar soluciones próximas al óptimo en el menor tiempo posible.

En logística, y concretamente en los problemas de rutas de vehículos, es imprescindible contar con la matriz de distancias entre pares de localiza-

ciones. Esta matriz también puede estar valorada en tiempo, velocidad, y/o coste. Aunque en cualquier caso, suele ser una función de la distancia.

Existe la posibilidad de calcular la distancia euclidiana u ortodrómica entre cada par de localizaciones. Pero los investigadores han sido conscientes de que dicha distancia no se corresponde con la distancia real entre dos localizaciones que están comunicados por una red de transporte o carretera; siendo la distancia real del camino mínimo (más corto) que comunica dos puntos de una red de carreteras siempre igual o superior a la distancia euclidiana u ortodrómica.

Los investigadores han intentado ponderar la distancia euclidiana y desarrollar funciones de estimación de la distancia. Esta alternativa, ha demostrado no ser válida, depende del territorio, de la red de transporte e incluso implica disponer de la matriz de distancias reales que se pretende suplir. Estas estimaciones pueden ser útiles para las decisiones logísticas de carácter estratégico, donde la información se maneja de manera agregada y se puede asumir cierto error o aproximación de los datos; sin embargo, no en entornos operativos (empresariales reales).

Durante décadas, gran parte del esfuerzo científico se ha centrado en el desarrollo de técnicas y algoritmos para la resolución de problemas VRP simétricos. Persiguiendo un objetivo común: lograr algoritmos cada vez más rápidos y capaces de encontrar mejores soluciones. Sin duda, esto ha ayudado a mejorar las técnicas disponibles hoy en día, que compiten en y por márgenes de tiempo y bondad de la solución cada vez más estrechos. Al revisar la literatura científica, se percibe la idea de que dicho objetivo es casi un fin en sí mismo; y parece que existe la idea preconcebida de que lo único importante es que el algoritmo sea capaz de encontrar las mejores soluciones en un entorno controlado de laboratorio y en instancias de referencia (generalmente con matrices simétricas de distancias ortodrómicas).

Sin embargo, las empresas actuales realizan sus negocios y sus operaciones logísticas en un entorno altamente competitivo y complejo, las cuales

demandan soluciones eficaces y eficientes a sus problemas reales. Las cuestiones principales que despiertan esta investigación son: ¿qué impacto tiene la consideración de la realidad compleja y asimétrica propia de las redes de transporte sobre la eficiencia y eficacia de las técnicas en la frontera de la Ciencia? ¿es factible extrapolar la solución a un problema simétrico y ortodrómico como solución válida al problema real y asimétrico? ¿qué impacto tiene la asimetría en combinación con otros factores en la resolución de los problemas de rutas de vehículos?

10.1 Aspectos relevantes de la investigación

Para poder responder a las cuestiones planteadas, en primer lugar fue necesario realizar una revisión del estado del arte. En esta Tesis Doctoral se ha presentado una descripción de los problemas de rutas de vehículos, justificando su interés desde el punto de vista científico y práctico en diversas áreas o sectores económicos. Se ha descrito la tipología y los elementos que constituyen los problemas de rutas: la red de transporte, los clientes y el servicio, los almacenes o depósitos, la flota de vehículos y sus rutas. Se han descrito los modelos matemáticos para la resolución de los problemas de rutas de vehículos más conocidos: desde el problema del viajante de comercio, hasta los problemas más complejos con restricciones de ventanas de tiempo, capacidad y número de vehículos, y secuencia de entrega y recogida.

Un aspecto relevante de esta investigación, ha sido la utilización de los sistemas de información geográfica (GIS). Mediante su utilización ha sido posible determinar la ubicación de un conjunto de geo-localizaciones, para posteriormente realizar los cálculos de distancias ortodrómicas y de la distancia real del camino mínimo entre pares de localizaciones. Se abordó el proceso de caracterización y definición de los factores que definen el conjunto de experiencias. Ha sido relevante la consideración de algunos factores clave de la investigación como: el grado de asimetría, la localización (de clientes y del depósito), y el territorio, entre otros.

En esta investigación se ha creado un amplio conjunto de instancias: 450 ficheros de localizaciones, y 2 250 matrices de distancias (ortodrómica, asimétrica, pequeña, grande y transformada) para el caso del TSP. En su extensión al caso del CVRP fueron: 1 350 ficheros de localizaciones, 2 700 matrices de distancias (simétricas - ortodrómicas, asimétricas - reales) y 900 ficheros de demanda y capacidad máxima. Se proporciona a la comunidad científica un conjunto de instancias útil y de posible referencia para futuros trabajos científicos que sería complementario a los ya conocidos conjuntos de datos.

En esta investigación se ha valorado el alto coste en tiempo computacional que supone la obtención de datos de distancias reales, esto es, de las matrices asimétricas frente a la inmediatez de las ortodrómicas simétricas (con una relación de 800 000 a 1). En estos experimentos la localización también influye en los cálculos de las matrices. Se ha observado como una localización radial, que es acorde con la red de carreteras españolas, parece favorecer los tiempos de cálculo frente a otros tipos de localización como la aleatoria y la cuadrícula: los tiempos promedio, que en promedio y para localizaciones aleatorias son del orden de un 45 % más altos que en las radiales; y en cuadrícula del orden de un 20 % superiores a las radiales. Con estos análisis se ha pretendido aportar un conocimiento útil a la comunidad científica y a las empresas, que les ayude a romper la barrera computacional que en la actualidad existe.

El eje y principal objetivo de esta investigación ha sido el estudio del efecto que la asimetría provoca en la resolución de los problemas de rutas de vehículos. Por tanto la asimetría ha sido un concepto fundamental en toda la investigación. Se ha visto que la asimetría puede ser tratada y medida en una escala continua, y que algunas matrices pueden ser “más asimétricas” que otras. Se describió la relación entre la asimetría en las matrices de distancias y las redes de transporte por carretera propias del mundo real, demostrando que el teorema de la desigualdad triangular es una afirmación fuerte que

incluso se cumple con matrices de distancias reales calculadas con ayuda de un GIS.

Tras analizar el estado del arte en este sentido, se han propuesto diferentes indicadores para la medición del grado de asimetría en las matrices de distancias. Se pudo cuantificar el grado de asimetría de las matrices de las instancias y analizar la relación entre dicho grado de asimetría y los factores territorio y localización. Se ha confirmado que la localización de los nodos en el mundo real representa diferente grado de asimetría, lo que demostró tener un impacto tanto en el tiempo de computación de las matrices, como en la resolución de los algoritmos.

Se ha podido desacreditar la idea de que las matrices ortodrómicas son válidas para la resolución de problemas en entornos reales. Se ha podido cuantificar la relación inversa entre el territorio y el grado de asimetría. Esto anticipa implicaciones en los problemas de rutas o logística en entornos de cortas distancias o ciudades, donde hay que prestar especial atención a la asimetría de la red. En esta investigación, las localizaciones radiales (para todos los territorios) hacen descender el valor del peso promedio, y esto a vez incrementa el valor del grado de asimetría en un 30% respecto a las localizaciones aleatorias y en cuadrícula.

El objetivo de esta investigación no fue hacer un *benchmark* o ranking de los algoritmos, sino medir y comprender en qué medida la asimetría y el resto de los factores objeto de estudio condicionan la resolución de los VRP. Se seleccionaron para cada caso (TSP y CVRP) aquellos de mayor reconocimiento científico, bondad de las soluciones obtenidas en instancias científicamente reconocidas, desde las técnicas más simples y clásicas hasta las más actuales y avanzadas.

Otro aspecto relevante de esta investigación ha sido el gran esfuerzo computacional que ha supuesto, tanto en la utilización de recursos como en el tiempo de computación total. La generación de las matrices de distancias supuso 196 días de computación equivalente de 1 *blade* (con un máximo de

29 *blades* utilizados simultáneamente). En total, las experiencias computacionales realizadas (10 350 experiencias del caso del TSP y 124 200 experiencias correspondientes al caso CVRP) representaron 749 días de computación equivalente de 1 *blade*, o lo que es lo mismo 2,05 años de computación.

Gracias al detallado estudio estadístico del caso TSP se ha podido estudiar el efecto de la asimetría tanto desde el punto de vista cuantitativo como cualitativo, así como su relación con los otros factores de estudio: el territorio, la localización, el tamaño del problema. Dejando a un lado los detalles estadísticos, se ha confirmado que la asimetría tiene un efecto significativo sobre la eficiencia y eficacia de las heurísticas estudiadas, y que está relacionado con los otros factores. La asimetría incrementa el tiempo de computación e incrementa la desviación sobre el óptimo y la tasa de éxito de los algoritmos. Las soluciones simétricas poco o nada tienen que ver con las asimétricas, ni cuantitativa ni cualitativamente. No es posible extrapolar o intercambiar las soluciones obtenidas en ambos escenarios.

El estudio del caso CVRP no viene más que a confirmar y ayuda a generalizar las conclusiones obtenidas. Por otro lado, profundiza en algunos aspectos y factores particulares del CVRP como la localización del depósito o la relación entre la demanda y la capacidad máxima. Nuevamente, se demuestra que la asimetría condiciona el tiempo de computación y la bondad incluso de la solución, y que la asimetría se relaciona de forma importante con los otros factores significativamente.

Gracias a todo este conjunto de acciones fue posible demostrar y responder a las hipótesis de la investigación y cuantificar el efecto de la asimetría en los problemas de rutas de vehículos. Se puede inferir que la asimetría siempre tendrá un efecto a considerar en la resolución de los problemas de rutas (eficacia y eficiencia). Por ello, la asimetría debe ser abordada con toda su complejidad, sin presunciones o aproximaciones. En caso contrario, el desarrollo científico no será capaz de superar la barrera que hoy en día supone,

ni de desarrollar técnicas y herramientas capaces de dar a las empresas las soluciones reales que precisan a sus problemas complejos y cotidianos.

10.2 Publicaciones

Seguidamente se muestra el conjunto de publicaciones relativas a esta Tesis Doctoral y su línea de investigación (hasta la fecha, de más reciente a más antigua). En especial [Rodríguez y Ruiz \(2012b\)](#), [Rodríguez y Ruiz \(2012a\)](#) donde se describen gran parte de las aportaciones de esta Tesis.

Revistas

1. Rodríguez, A. y Ruiz, R. (2012a). A study on the effect of the asymmetry on real capacitated vehicle routing problems. *Computers and Operations Research*, 39(9), 2142–2151.
2. Rodríguez, A. y Ruiz, R. (2012b). The effect of the asymmetry of road transportation networks on the traveling salesman problem. *Computers and Operations Research*, 39(7), 1566–1576.
3. Puchades, V., Mula, F., y Rodríguez, A. (2008). Aplicación de la teoría de grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo en una empresa del sector de la distribución automática. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*. Universidad Pablo de Olavide. Sevilla. ISSN: 1886-516X
4. Rodríguez, A. (2007). Integración de un SIG con modelos de cálculo y optimización de rutas de vehículos CVRP y software de gestión de flotas. *Dirección y Organización*. Madrid. ISSN: 1132-175X

Congresos

1. Rodríguez, A. y Ruiz, R. (2010). Estudio de la relación entre la asimetría de las redes de transporte por carretera, el territorio y la localización. 4th International Conference on Industrial Engineering and Management. XIV Congreso de Ingeniería de Organización. San Sebastián.
2. Katragjini, K., Ruiz, R. y Rodríguez, A. (2010). Using real world distances in logistics management. 4th International Conference on Industrial Engineering and Management. XIV Congreso de Ingeniería de Organización. San Sebastián.
3. Rodríguez, A. y Ruiz, R. (2009). El impacto de la asimetría en la resolución de problemas de distribución y rutas. 3rd International Conference on Industrial Engineering and Management. XIII Congreso de Ingeniería de Organización. Barcelona-Terrassa. pags. 1645-1654. ISBN: 84-7653-388-8
4. Rodríguez, A. y Ruiz, R. (2009). Visualización avanzada de información logística SCM en GIS. 3rd International Conference on Industrial Engineering and Management. XIII Congreso de Ingeniería de Organización. Barcelona-Terrassa. pags. 1655-1663. ISBN: 84-7653-388-8
5. Rodríguez, A. (2007). Hacia la optimización del transporte. Desarrollo de un software para cálculo de rutas de vehículos y gestión de flotas. 1er Congreso de logística y gestión de la cadena de suministro. CNC-Logística. Zaragoza Logistics Center. ISBN: 84-611-9021-8
6. Rodríguez, A. (2007). Integración de un SIG con modelos de cálculo y optimización de rutas de vehículos CVRP y software de gestión de flotas. XI Congreso de Ingeniería de Organización. International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management. Universidad Politécnica de Madrid. ISBN: 84-611-8244-2

7. Rodríguez, A. (2006). VRP-XML: lenguaje de marcas extensible para los problemas de rutas de vehículos. X Congreso de Ingeniería de Organización. Universidad Politécnica de Valencia. ISBN: 84-9705-544-7
8. Rodríguez, A. (2006). Grafos: herramienta informática para el aprendizaje y resolución de problemas reales de teoría de grafos. X Congreso de Ingeniería de Organización. Universidad Politécnica de Valencia. ISBN: 84-9705-544-7

10.3 Líneas futuras de investigación

Si bien se ha respondido en la medida de lo posible a las cuestiones e hipótesis planteadas, esta investigación ha abierto más puertas de las que ha cerrado. Un mayor conocimiento sobre la complejidad de la realidad asimétrica, plantea nuevas cuestiones que abren nuevas líneas de investigación y desarrollo. La investigación aquí presentada, supone sólo el comienzo. El futuro espera con nuevos y fascinantes retos.

Cálculo eficiente de las matrices de distancias reales

En esta Tesis Doctoral, se ha valorado el tiempo necesario del cálculo de la obtención de las matrices asimétricas; este alto coste computacional supone una barrera de entrada para los investigadores y las empresas, frente al ínfimo tiempo requerido de la obtención de las matrices ortodrómicas. En este sentido, ya se ha iniciado una línea de investigación y desarrollo por los investigadores [Katrąjini, Ruíz y Rodríguez \(2010\)](#); que propone la utilización de la computación paralela con diferentes hilos (*threads*) en combinación con el uso inteligente del cálculo de caminos mínimos con múltiples puntos de parada.

Los resultados preliminares son muy satisfactorios y apuntan a que se pueden conseguir ahorros de tiempo del orden del 63 % con técnicas multi-hilo, y de hasta el 80 % en combinación con las peticiones multi-punto. El objetivo de esta línea de investigación y desarrollo es facilitar a la comunidad

científica y empresarial de un conjunto de técnicas que consigan ahorros de tiempo demostrables frente a los métodos tradicionales. De este modo, se ayudará a romper dicha barrera de entrada y finalmente será asumible el uso de matrices de distancias reales asimétricas.

Nuevos indicadores del grado de asimetría

Se han utilizado con éxito diversos indicadores del grado de asimetría: α , δ y $\overline{P_{eso}}$, que han ayudado a subrayar las notables diferencias que existen entre el camino de ida y el de vuelta entre los pares de localizaciones. Estos indicadores muestran que existe una relación significativa entre el grado de asimetría y los factores localización y territorio.

Podría ser interesante el estudio y desarrollo de nuevos indicadores del grado de asimetría que contemplaran dicha relación y ayudaran a medir y comprender mejor el grado de asimetría en relación al territorio, su red de transporte y la ubicación de los puntos de interés. Tal vez es posible desarrollar un indicador que combine varios de estos factores en un único marcador. ¿Qué relación existe entre la varianza de las longitudes de los arcos de la matriz de distancias y el grado de asimetría (y otros factores)? ¿influye la dispersión o agrupación de las localizaciones (atractores de demanda) en el grado de asimetría? ¿analizando la matriz de distancias y los indicadores de asimetría se pueden extraer algunas propiedades geométricas que ayuden en el proceso de resolución de problemas de rutas?

Extensión del estudio del efecto de la asimetría a otros VRP

Lógicamente, una futura línea de investigación consiste en extender el presente estudio de los casos TSP y CVRP a otros problemas de rutas. Será necesario definir nuevos factores y ámbitos del estudio en función del problema a tratar (por ejemplo: flota, ventanas de tiempo, multi-depot, etc.). Una cuestión importante es: ¿hasta que punto la asimetría es un factor importante a medida que se avanza en la complejidad y particularidad de los problemas

VRP? ¿pueden ser otros factores propios del problema a resolver más importantes, en qué casos y medida?

Software para el cálculo y optimización de rutas y la gestión de flotas

Un objetivo que ha transcurrido paralelo a esta investigación ha sido el desarrollo de un software para el cálculo y optimización de rutas y la gestión de flotas de vehículos. Desde el año 2000, los investigadores Alejandro Rodríguez y Rubén Ruiz tuvieron esa visión compartida. Cada uno de ellos fue persiguiendo este objetivo por separado hasta el año 2007, fue entonces cuando las ideas y el conocimiento adquirido por ambas líneas convergen, dando lugar a un equipo de desarrollo dentro del SOA (Sistemas de Optimización Aplicada) del Instituto Tecnológico de Informática. En la actualidad, esta visión es ya una realidad llamada RoutingMaps¹. El desarrollo de esta herramienta tiene como objetivo: facilitar la resolución de problemas reales de flotas de vehículos capacitados CVRP, el cálculo de rutas, y su gestión. En este desarrollo informático se integra inteligentemente tres elementos: el sistema de información geográfica GIS, la información del sistema logístico, los modelos matemáticos y técnicas de optimización combinatoria que conjuntamente permiten resolver los problemas de rutas para flotas de vehículos. El éxito en la gestión logística depende de la capacidad de integración (información y sistemas, proveedores y clientes, recursos y decisiones, etc.). Por ello, en este proyecto se ha prestado especial interés a la integración necesaria para la optimización del transporte, la toma de decisiones y la gestión de flotas. Seguidamente en la Figura 10.1, la Figura 10.3, y la Figura 10.2 se muestran algunas capturas de pantalla de RoutingMaps. En la actualidad el desarrollo de esta herramienta sigue su curso, incorporando nuevos algoritmos y funciones avanzadas. Como por ejemplo, la representación y análisis de los flujos logísticos de una cadena de suministros que muestra la Figura 10.4.

¹<http://www.routingmaps.es>



Figura 10.1: RoutingMaps - ejemplo de un TSP.

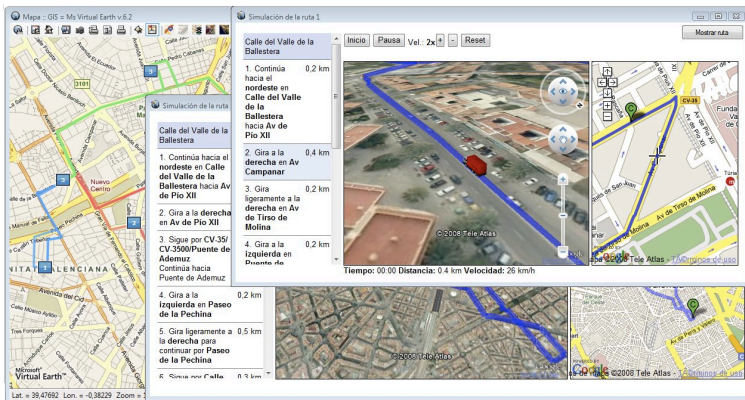


Figura 10.2: RoutingMaps - simulación de rutas calculadas.

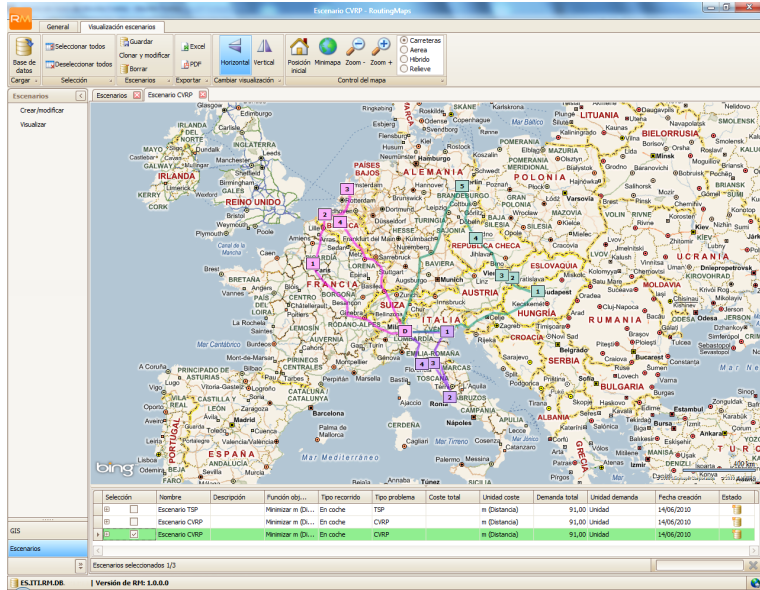


Figura 10.3: RoutingMaps - ejemplo de un CVRP.

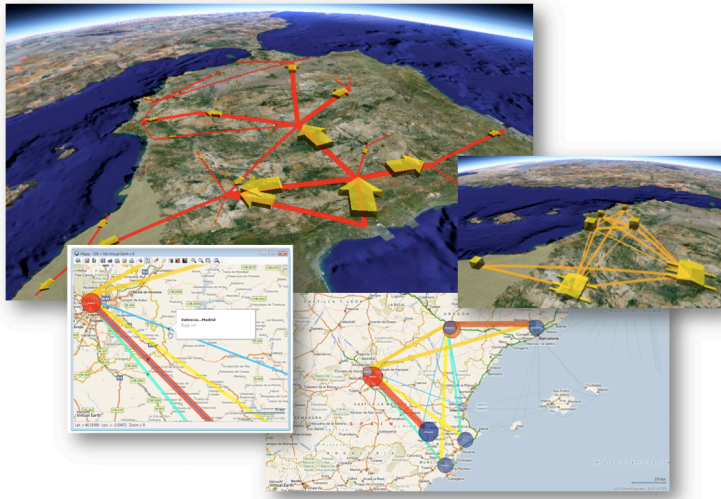


Figura 10.4: RoutingMaps - funciones avanzadas SCM.

Referencias

- Alba, E. (2006). *Parallel metaheuristics. A New Class of Algorithms*. Wiley, New York. [139](#)
- Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvátal, V., y Cook, W. J. (2006). *The Traveling Salesman Problem: A computational study*. Princeton University Press, New Jersey. [27](#), [151](#), [280](#)
- Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvátal, V., Cook, W. J., Espinoza, D. G., Goycoolea, M., y Helsgaun, K. (2009). Certification of an optimal TSP tour through 85,900 cities. *Operations Research Letters*, 37(1):11--15. [85](#)
- Applegate, D. L., Cook, W. J., Dash, S., y Rohe, A. (2002). Solution of a min-max vehicle routing problem. *INFORMS Journal on Computing*, 14(2):132--143. [50](#), [82](#)
- Arora, S. (1998). Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *Journal of the ACM*, 45(5):753--782. [263](#), [264](#)
- Asadpour, A., Goemans, M. X., Madry, A., Gharan, S. O., y Saberi, A. (2010). An $O(\log n / \log \log n)$ -approximation Algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem. En *Proc. of 21st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, volumen 135 de *Proceedings in Applied Mathematics*, páginas 379--389, Philadelphia. ACM; SIAM Activ Grp Discrete Math; SIGACT, SIAM. [263](#)
- Ashour, S., Vega, J., y Parker, R. (1972). Heuristic algorithm for travelling salesman problems. *Transportation Research*, 6(2):187--195. [32](#)

Referencias

- Baker, E. (1982). Vehicle-routing with time window constraints. *Logistics and Transportation Review*, 18(4):385--401. [61](#)
- Baldacci, R., Christofides, N., y Mingozzi, A. (2008). An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts. *Mathematical Programming*, 115(2):351--385. [280](#)
- Baldacci, R., Hadjiconstantinou, E., y Mingozzi, A. (2004). An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation. *Operations Research*, 52(5):723--738. [280](#)
- Ballou, R. (1999). *Business Logistics Management*. Prentice-Hall International, Upper Saddle River, NJ. [21](#)
- Barbarosoglu, G. y Ozgur, D. (1999). A tabu search algorithm for the vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 26(3):255--270. [32](#)
- Beasley, J. y Christofides, N. (1997). Vehicle routing with a sparse feasibility graph. *European Journal of Operational Research*, 98(3):499--511. [32](#)
- Bektas, T. (2006). The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures. *OMEGA - International Journal of Management Science*, 34(3):209--219. [50](#)
- Bellmore, M. y Hong, S. (1974). Transformation of multisalesmen problem to standard travelling salesman problem. *Journal of the ACM*, 21(3):500--504. [49](#)
- Berens, W. y Korling, F. (1985). Estimating road distances by mathematical functions. *European Journal of Operational Research*, 21(1):54--56. [99](#)
- Bock, F. (1958). An algorithm for solving Traveling Salesman and related network optimization problems. En *14th National Meeting of ORSA*, St. Louis, MO. Operational Research Society of America. [78](#)
- Bodin, L. y Golden, B. (1981). Classification in vehicle-routing and scheduling. *Networks*, 11(2):97--108. [28](#)

- Bollobás, B. (1979). *Graph Theory: An Introductory Course*. Springer-Verlag, New York. [24](#)
- Bontoux, B., Artigues, C., y Feillet, D. (2010). A Memetic Algorithm with a large neighborhood crossover operator for the Generalized Traveling Salesman Problem. *Computers & Operations Research*, 37(11):1844 -- 1852. *Metaheuristics for Logistics and Vehicle Routing*. [264](#)
- Bowers, M., Noon, C., y Thomas, B. (1996). A parallel implementation of the TSSP+1 decomposition for the capacity-constrained vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 23(7):723--732. [32](#)
- Bowman, K. O. y Kastenbaum, M. A. (1975). *Sample size requirement: Single and double classification experiments*, volumen 3 de *Selected Tables in Mathematical Statistics*, páginas 111--232. American Mathematical Society, Providence, RI. [143](#)
- Brimberg, J. y Love, R. (1991). Estimating travel distances by the weighted lp norm. *Naval Research Logistics*, 38(2):241--259. [99](#)
- Burrough, P. A. y McDonnell, R. A. (1998). *Principles of Geographical Information Systems*. Spatial Information Systems Series. Oxford University Press, Oxford, 2^a edición. [94](#)
- Cauvin, C. (2005). A systemic approach to transport accessibility. a methodology developed in strasbourg: 1982-2002. *Cybergeo: European Journal of Geography*, 311:1--24. [113](#), [115](#)
- Christofides, N. y Eilon, S. (1969). Expected distances in distribution problems. *Operations Research*, 20(4):437--443. [98](#)
- Christofides, N., Mingozzi, A., y Toth, P. (1979). *The vehicle routing problem*. Combinatorial Optimization. Wiley, Chichester, UK. [281](#), [291](#), [293](#)
- Clarke, G. y Wright, J. (1964). Scheduling of vehicles from central depot to number of delivery points. *Operations Research*, 12(4):568--581. [52](#), [97](#), [282](#)
- Cooper, J. (1983). The use of straight-line distances in solutions to the vehicle

Referencias

- scheduling problem. *Journal of the Operational Research Society*, 34(5):419--424. [99](#)
- Cordeau, J., Gendreau, M., Hertz, A., Laporte, G., y Sormany, J. (2005). *Logistics Systems: Design and Optimization*, capítulo New Heuristics for the Vehicle Routing Problem, páginas 279--297. Springer, New York. [292](#)
- Coy, S., Golden, B., y Wasil, E. (2000). A computational study of smoothing heuristics for the traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research*, 124(1):15--27. [32](#)
- Croes, G. (1958). A method for solving traveling-salesman problems. *Operations Research*, 6(6):791--812. [76](#), [77](#), [264](#)
- Daganzo, C. (1984). The length of tours in zones of different shapes. *Transportation Research Part B*, 18(2):135--145. [100](#)
- Dantzig, G., Fulkerson, R., y Johnson, S. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4):393--410. [25](#), [26](#), [44](#)
- Dantzig, G. y Ramser, J. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1):80--91. [52](#), [53](#)
- de Frias, M. (2006). La importancia del transporte de personas y mercancías. Technical report, Ministerio de Fomento, Madrid. [18](#)
- Dees, Jr., W. A. y Karger, P. G. (1982). Automated rip-up and reroute techniques. En *DAC '82: Proceedings of the 19th Design Automation Conference*, páginas 432--439, Piscataway, NJ, USA. IEEE Press. [290](#)
- Desrochers, M., Jones, C. V., Lenstra, J. K., Savelsbergh, M. W. P., y Stougie, L. (1999). Towards a model and algorithm management system for vehicle routing and scheduling problems. *Decision Support Systems*, 25(2):109--133. [34](#)
- Desrochers, M., Lenstra, J. K., y Savelsbergh, M. W. P. (1990). A classification scheme for vehicle-routing and scheduling problems. *European Journal of*

- Operational Research*, 46(3):322--332. [28](#)
- Dijkstra, E. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269--271. [103](#), [112](#), [149](#)
- Dorigo, M. y Gambardella, L. M. (1997). Ant colonies for the travelling salesman problem. *Biosystems*, 43(2):73--81. [23](#)
- Dubois, N. y Semet, F. (1995). Estimation and determination of shortest-path length in a road network with obstacles. *European Journal of Operational Research*, 83(1):105--116. [99](#)
- Dumas, Y., Desrosiers, J., y Soumis, F. (1991). The pickup and delivery problem with time windows. *European Journal of Operational Research*, 54(1):7--22. [69](#)
- Eco, U., Baranda, L., y Clavería, A. (2001). *Cómo se hace una tesis: Técnicas y procedimientos de estudio, investigación y escritura*. Gedisa, Barcelona. [121](#)
- Edmons, J. y Johnson, E. L. (1973). Matching, Euler tours, and the chinese postman. *Mathematical Programming*, 5:88--124. [24](#)
- Euclides (1991/1996). *Elementos. Obra completa*. Editorial Gredos, Madrid. [109](#)
- Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8:128--140. [24](#)
- Fagerholt, K. (2001). Ship scheduling with soft time windows: An optimisation based approach. *European Journal of Operational Research*, 131(3):559--571. [33](#)
- Fischetti, M. (1991). Facets of the asymmetric traveling salesman polytope. *Mathematics of Operations Research*, 16(1):42--56. [86](#)
- Fischetti, M., Lodi, A., y Toth, P. (2003). Solving real-world ATSP instances by branch-and-cut. En Junger, M and Reinelt, G and Rinaldi, G, editor, *Combinatorial Optimization - Eureka - Papers dedicated to Jack Edmonds*, volumen 2570 de *Lecture notes in Computer Science*, páginas 64--77. [86](#), [264](#)
- Fisher, M. (1994). Optimal solution of vehicle-routing problems using minimum k-trees. *Operations Research*, 42(4):626--642. [32](#)

Referencias

- Fisher, R. (1926). The arrangement of field experiments. *Journal of the Ministry of Agriculture of Great Britain*, 33:503--513. [141](#)
- Flood, M. (1956). The TSP. *Operations Research*, 4(1):61--75. [75](#), [264](#)
- Fomento y CNTC (2010). Observatorio del mercado de transporte de mercancías por carretera. Technical Report 19, Ministerio de Fomento, Madrid. [20](#)
- Fomento y Consultora Spim (2004). Estudio sobre las empresas de transporte internacional de mercancías por carretera. Technical report, Ministerio de Fomento, Madrid. [18](#)
- Fomento y Consultora Spim (2008). Estudio de costes del transporte de mercancías por carretera. Technical report, Ministerio de Fomento, Madrid. [19](#)
- Fomento y Consultrans (2001). Estudio socio-económico del sector del transporte por carretera. Technical report, Ministerio de Fomento, Madrid. [17](#)
- França, P. M., Gendreau, M., Laporte, G., y Muller, F. M. (1995). The m-traveling salesman problem with minmax objective. *Transportation Science*, 29(3):267--275. [50](#)
- Gaskell, T. (1967). Bases for vehicle fleet scheduling. *Operational Research Quarterly*, 18(3). [52](#)
- Gerns, R., Goldengorin, B., y Turkensteen, M. (2012). Lower tolerance-based Branch and Bound algorithms for the ATSP. *Computers & Operations Research*, 39(2):291--298. [264](#)
- Giaglis, G., Minis, I., Tatarakis, A., y Zeimpekis, V. (2004). Minimizing logistics risk through real-time vehicle routing and mobile technologies: Research to date and future trends. *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, 34(9):749--764. [31](#)
- Gillett, B. y Miller, L. (1974). Heuristic algorithm for vehicle-dispatch problem. *Operations Research*, 22(2):340--349. [32](#), [286](#)

- Glover, F., Gutin, G., Yeo, A., y Zverovich, A. (2001). Construction heuristics for the asymmetric TSP. *European Journal of Operational Research*, 129(3):555-568. [33](#)
- Golden, B., Magnanti, T., y Nguyen, H. (1977). Implementing vehicle routing algorithms. *Networks*, 7(2):113--148. [285](#)
- Golden, B., Wasil, E., Kelly, J., y Chao, I.-M. (1998). *Fleet Management and Logistics*, capítulo The Impact of Metaheuristics on Solving the Vehicle Routing Problem: Algorithms, Problems Sets, and Computational Results., páginas 33--56. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA. [281](#), [291](#), [293](#)
- Goldengorin, B., Jaeger, G., y Molitor, P. (2006). Tolerance based Contract-or-Patch heuristic-for the asymmetric TSP. En Erlebach, T, editor, *Combinatorial and Algorithmic aspects os Networking*, volumen 4235 de *Lecture notes in Computer Science*, páginas 86--97, Chester, England. [265](#)
- Goodchild, M. y Kemp, K. (1990). *NCGIA Core Curriculum in GIS*. National Center for Geographic Information and Analysis, University of California., Santa Barbara CA. [90](#)
- Gouveia, L. y Pires, J. (1999). The asymmetric travelling salesman problem and a reformulation of the Miller-Tucker-Zemlin constraints. *European Journal of Operational Research*, 112(1):134--146. [86](#), [264](#)
- Gutin, G. y Punnen, A. (2002). *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, volumen 12. Kluwer, Dordrecht, Dordrecht, Boston, London. [74](#)
- Gutin, G. y Punnen, A. (2006). The traveling salesman problem. *Discrete Optimization*, 3(1):1--94. [47](#), [86](#)
- Hamming, R. (1950). Error detecting and error correcting codes. *Bell System Technology Journal*, 29(2):147--160. [137](#)
- Haouari, M., Dejax, P., y Desrochers, M. (1990). Routing and scheduling problems with time constraints - state-of-the-art. *RAIRO-Recherche Opérationnelle-Operations Research*, 24(3):217--244. [64](#)

Referencias

- Helsgaun, K. (2000). An effective implementation of the Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic. *European Journal of Operational Research*, 126(1):106-130. [82](#), [85](#), [264](#), [265](#)
- Hindle, A. y Worthington, D. (2004). Models to estimate average route lengths in different geographical environments. *Journal of the Operational Research Society*, 55(6):662--666. [100](#)
- Ho, S. y Haugland, D. (2004). A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with time windows and split deliveries. *Computers & Operations Research*, 31(12):1947--1964. [33](#)
- Ioannou, G., Kritikos, M., y Prastacos, G. (2003). A problem generator-solver heuristic for vehicle routing with soft time windows. *OMEGA - International Journal of Management Science*, 31(1):41--53. [33](#)
- Johnson, D. y McGeoch, L. (1997). *Local Search in Combinatorial Optimization*, capítulo 8: The traveling salesman problem: a case study in local optimization, páginas 215--310. John Wiley and Sons, London. [74](#), [80](#)
- Johnson, D. y McGeoch, L. (2002). *Experimental analysis of heuristics for the STSP*, capítulo 9, páginas 369--444. Gutin and Punnen, Kluwer, London. [74](#), [75](#)
- Johnson, D., McGeoch, L., Bentley, J. L., y Rothberg, E. E. (2003). Near-optimal solutions to very large traveling salesman problems. Monografía. [82](#)
- Jonker, R. y Volgenant, T. (1983). Transforming asymmetric into symmetric traveling salesman problems. *Operations Research Letters*, 2(4):161--163. [88](#)
- Jonker, R. y Volgenant, T. (1986). Transforming asymmetric into symmetric traveling salesman problems: erratum. *Operations Research Letters*, 5(4):215--216. [88](#)
- Karp, R., Miller, R., y Thatcher, J. (1972). *Complexity of Computer Computations*, capítulo Reducibility among combinatorial problems, páginas 85--104. R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds. The IBM Research Symposia Series. Plenum Press, New York. [25](#), [44](#)

- Katragjini, K., Ruiz, R., y Rodríguez, A. (2010). Using real world distances in logistics management. En *4th International Conference on Industrial Engineering and Management. XIV Congreso de Ingeniería de Organización*, San Sebastián. 377
- Knight, K. y Hofer, J. (1968). Vehicle scheduling with timed and connected calls - a case study. *Operational Research Quarterly*, 19(3):299--310. 60
- Koksalan, M., Sural, H., y Kirca, O. (1995). A location distribution application for a beer company. *European Journal of Operational Research*, 80(1):16--24. 32
- Kruskal, J. (1964). Nonmetric multidimensional-scaling: A numerical-method. *Psychometrika*, 29(2):115--129. 113
- Kwan, M. K. (1962). Graphic programming using odd or even points. *Chinese Mathematics*, 1:273--277. 24
- Langevin, A., Soumis, F., y Desrosiers, J. (1990). Classification of traveling salesman problem formulations. *Operations Research Letters*, 9(2):127--132. 86
- Laporte, G. (2007). What you should know about the vehicle routing problem. *Naval Research Logistics*, 54(8):811--819. 279
- Laporte, G. y Nobert, Y. (1987). Exact algorithms for the vehicle routing problem. *Annals of Discrete Mathematics*, 31:147--184. 280, 281
- Larsen, J. (1999). Vehicle routing with time-windows, finding optimal solutions efficiently. Technical report, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, Lyngby. 33
- Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G., y Shmoys, D. B. (1985). *The Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons Ltd., New York. 25, 44
- Li, F., Golden, B., y Wasil, E. (2005). Very large-scale vehicle routing: new test problems, algorithms, and results. *Computers & Operations Research*, 32(5):1165--1179. 291

Referencias

- Lin, S. (1965). Computer solutions of the traveling-salesman-problem. *Bell System Technology Journal*, 44(1):2245--2269. [77](#), [78](#)
- Lin, S. y Kernighan, B. (1973). Effective heuristic algorithm for traveling-salesman problem. *Operations Research*, 21(2):498--516. [80](#), [82](#), [85](#), [151](#)
- Love, R. y Morris, J. (1972). Modeling inter-city road distances by mathematical functions. *Operational Research Quarterly*, 23(1):61--71. [98](#)
- Love, R. y Morris, J. (1988). On estimating road distances by mathematical functions. *European Journal of Operational Research*, 36(2):251--253. [99](#)
- Love, RF, R. y Morris, J. (1979). Mathematical-models of road travel distances. *Management Science*, 25(2):130--139. [98](#), [99](#)
- Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la Naturaleza*. Tusquets editores, Barcelona. [97](#)
- Martello, S. y Toth, P. (1990). An exact algorithm for large unbounded knapsack-problems. *Operations Research Letters*, 9(1):15--20. [54](#)
- Martín, J. (2002). *Historia de la cartografía y de la topografía*. Ministerio de Fomento, Centro Nacional de Información Geográfica, Madrid. [89](#)
- Martin, O., Otto, S., y Felten, E. (1992). Large-step Markov-chains for the TSP incorporating local search heuristics. *Operations Research Letters*, 11(4):219--224. [82](#)
- Maue, J., Sanders, P., y Matijevic, D. (2006). Goal directed shortest path queries using precomputed cluster distances. En Alvarez, C and Serna, M, editor, *Experimental algorithms*, volumen 4007 de *Lecture notes in Computer Science*, páginas 316--327, Berlin. Springer-Verlag. 5th International Workshop on Experimental Algorithms (WEA 2006), Menorca, Spain. [103](#), [149](#)
- Michalewicz, Z. y Fogel, D. (2000). *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer-Verlag, New York. [292](#)
- Miller, C., Tucker, A., y Zemlin, R. (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, 7(4):326--329. [45](#), [49](#), [62](#),

- Min, H., Jayaraman, V., y Srivastava, R. (1998). Combined location-routing problems: A synthesis and future research directions. *European Journal of Operational Research*, 108(1):1--15. [21](#)
- Modesti, P. y Sciomachen, A. (1998). A utility measure for finding multiobjective shortest paths in urban multimodal transportation networks. *European Journal of Operational Research*, 111(3):495--508. [32](#)
- Montgomery, D. C. (2009). *Design and Analysis of Experiments*. Wiley, New York, 7^a edición. [121](#)
- Montgomery, D. C. y Runger, G. C. (2006). *Applied Statistics and Probability for Engineers*. Student Solutions Manual. Wiley, New York, 4^a edición. [143](#)
- Muller, J. (1982). Non euclidean geographic spaces: mapping functional distances. *Geographical Analysis*, 14(3):189--203. [113](#)
- Nagata, Y. (2006). *New EAX Crossover for Large TSP Instances*, volumen 4193 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 372--381. Springer, Berlin. [292](#)
- Nagata, Y. (2007). Edge assembly crossover for the capacitated vehicle routing problem. En Cotta, C. y van Hemert, J. I., editores, *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization, 7th European Conference, EvoCOP*, Lecture Notes in Computer Science, páginas 142--153, Valencia. Springer. [292](#), [293](#)
- Nagata, Y. y Kobayashi, S. (1997). Edge assembly crossover: A high-power genetic algorithm for the travelling salesman problem. En Bäck, T., editor, *Proceedings of the 7th International Conference on Genetic Algorithms*, páginas 450--457, East Lansing, Michigan. Michigan State University, Morgan Kaufmann. [292](#)
- Nanry, W. y Barnes, J. (2000). Solving the pickup and delivery problem with time windows using reactive tabu search. *Transportation Research Part B*, 34(2):107--121. [33](#)
- Oncan, T., Altinel, I. K., y Laporte, G. (2009). A comparative analysis of se-

Referencias

- veral asymmetric traveling salesman problem formulations. *Computers & Operations Research*, 36(3):637--654. [74](#), [86](#)
- Ordoñez, F., Sungur, I., y Dessouky, M. (2005). Factors that impact solution run times of arc-based formulations of the vehicle routing problem. En *Industrial y Systems Engineering*, U. o. S. C., editores, *INFORMS Annual Meeting*, San Francisco, California. [57](#)
- Padberg, M. y Sung, T. (1991). An analytical comparison of different formulations of the traveling salesman problem. *Mathematical Programming*, 52(2):315--357. [74](#), [86](#)
- Parragh, S., Doerner, K., y Hartl, R. (2008). A survey on pickup and delivery problems. *Journal für Betriebswirtschaft*, 58(2):81--117. [67](#)
- Pisinger, D. y Røpke, S. (2007). A general heuristic for vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, 34(8):2403--2435. [289](#)
- Pullen, H. y Webb, M. (1967). A computer application to a transport scheduling problem. *Computer Journal*, 10(1):10--13. [60](#)
- Rego, C. (2001). Node-ejection chains for the vehicle routing problem: Sequential and parallel algorithms. *Parallel Computing*, 27(3):201--222. [33](#)
- Rego, C. y Glover, F. (2002). *Local search and metaheuristics*, capítulo 8, páginas 309--368. Gutin and Punnen, Kluwer, London. [76](#)
- Reinelt, G. (1991). A traveling salesman problem library. *ORSA Journal on Computing*, 3(4):376--384. [73](#)
- Renaud, J., Boctor, F., y Ouenniche, J. (2000). A heuristic for the pickup and delivery traveling salesman problem. *Computers & Operations Research*, 27(9):905--916. [33](#)
- Rinnooy Kan, A. H. G., Lawler, E. L., Lenstra, J. K., y Shmoys, D. B. (1985). *The Traveling Salesman Problem: A guided tour of combinatorial optimization*. John Wiley & Sons Ltd., New York. [47](#), [86](#)

- Robuste, F., Daganzo, C., y Souleyrette, R. (1990). Implementing vehicle-routing models. *Transportation Research Part B*, 24(4):263--286. [32](#)
- Rodríguez, A. y Ruiz, R. (2012a). A study on the effect of the asymmetry on real capacitated vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, 39(9):2142 -- 2151. [375](#)
- Rodríguez, A. y Ruiz, R. (2012b). The effect of the asymmetry of road transportation networks on the traveling salesman problem. *Computers & Operations Research*, 39(7):1566 -- 1576. [375](#)
- Røpke, S. y Pisinger, D. (2006). An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows. *Transportation Science*, 40(4):455--472. [290](#)
- Rosenkrantz, D. J. y Stearns, R. E. (1977). An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem. *SIAM Journal on Computing*, 6(3):563--581. [75](#)
- Rudich, S. y Wigderson, A. (2004). *Computational Complexity Theory*, volumen 10 de IAS / Park City Mathematics Series. The American Mathematical Society and Institute for Advanced Study, Providence, RI. [141](#)
- Ruiz, R. (2006). An overview of basic and advanced statistic techniques for calibrating and comparing algorithms. En Paquete, L., Chiarandini, M., y Basso, D., editores, *Empirical Methods for the Analysis of Algorithms, Workshop EMAA 2006, Proceedings*, Reykjavik, Iceland. [143](#)
- Saito, T. y Yadohisa, H. (2004). *Data analysis of asymmetric structures*. CRC Press, New York. [113](#)
- Savelsbergh, M. y Sol, M. (1998). Drive: Dynamic routing of independent vehicles. *Operations Research*, 46(4):474--490. [32](#)
- Savelsbergh, M. W. P. (1995). The general pickup and delivery problem. *Transportation Science*, 29(1):17--29. [65](#)
- Schiavinotto, T. y Stützle, T. (2007). A review of metrics on permutations for

Referencias

- search landscape analysis. *Computers & Operations Research*, 34(10):3143--3153. [139](#)
- Schrijver, A. (2005). On the history of combinatorial optimization (till 1960). *Discrete Optimization*, 12:1--68. [47](#), [86](#)
- Schrimpf, G., Schneider, J., Stamm-Wilbrandt, H., y Dueck, G. (2000). Record breaking optimization results using the ruin and recreate principle. *Journal of Computational Physics*, 159(2):139--171. [290](#)
- Secomandi, N. (2000). Comparing neuro-dynamic programming algorithms for the vehicle routing problem with stochastic demands. *Computers & Operations Research*, 27(11-12):1201--1225. [33](#)
- Sexton, T. y Bodin, L. (1985). Optimizing single vehicle many-to-many operations with desired delivery times. *Transportation Science*, 19(4):378--410. [60](#)
- Shaw, P. (1998). Using constraint programming and local search methods to solve vehicle routing problems. En *Four International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, volumen 1520 de *Lecture notes in Computer Science*, páginas 417--431, New York. Springer-Verlag. [290](#)
- Solomon, M. (1987). Algorithms for the vehicle-routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*, 35(2):254--265. [63](#)
- Solomon, M. y Desrosiers, J. (1988). Time window constrained routing and scheduling problems. *Transportation Science*, 22(1):1--13. [65](#), [67](#)
- Stokx, C. y Tilanus, C. (1991). Deriving route lengths from radial distances - empirical-evidence. *European Journal of Operational Research*, 50(1):22--26. [100](#)
- Tarantilis, C., Diakoulaki, D., y Kiranoudis, C. (2004). Combination of geographical information system and efficient routing algorithms for real life distribution operations. *European Journal of Operational Research*, 152(2):437-

- 453. [33](#)
- Tarantilis, C. y Kiranoudis, C. (2002). Using a spatial decision support system for solving the vehicle routing problem. *Information & Management*, 39(5):359--375. [33](#)
- Thompson, P. y Psaraftis, H. (1993). Cyclic transfer algorithms for multivehicle routing and scheduling problems. *Operations Research*, 41(5):935--946. [295](#)
- Toth, P. y Vigo, D. (2001a). *An overview of vehicle routing problems*, páginas 1-26. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. [21](#), [34](#), [40](#), [55](#), [113](#)
- Toth, P. y Vigo, D. (2001b). *An overview of vehicle routing problems*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. [65](#), [280](#), [281](#), [285](#), [289](#), [294](#), [349](#)
- Toth, P. y Vigo, D. (2002). Models, relaxations and exact approaches for the capacitated vehicle routing problem. *Discrete Applied Mathematics*, 123(1-3):487--512. [33](#)
- US Federal Highway Administration y ITE (2000). *Intelligent Transportation Primer*. Institute of Transportation Engineers, Washington DC. [20](#)
- Van der Poort, E., Libura, M., Sierksma, G., y van der Veen, J. (1999). Solving the k-best traveling salesman problem. *Computers & Operations Research*, 26(4):409--425. [32](#)
- Vanvliet, A., Boender, C., y Kan, A. (1992). Interactive optimization of bulk sugar deliveries. *Interfaces*, 22(3):4--14. [32](#)
- Vigo, D. (1996). A heuristic algorithm for the asymmetric capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 89(1):108--126. [285](#)
- Vincenty, T. (1976). Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. *Survey Review*, 176:88--93. [97](#)

Referencias

- Yang, J., Jaillet, P., y Mahmassani, H. (2004). Real-time multivehicle truckload pickup and delivery problems. *Transportation Science*, 38(2):135--148. [33](#)
- Yepes, V. (2002). *Optimización heurística económica aplicada a las redes de transporte del tipo VRPTW*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia. [21](#), [31](#)