LINEALIZANDO RELACIONES NO LINEALES

Contenido

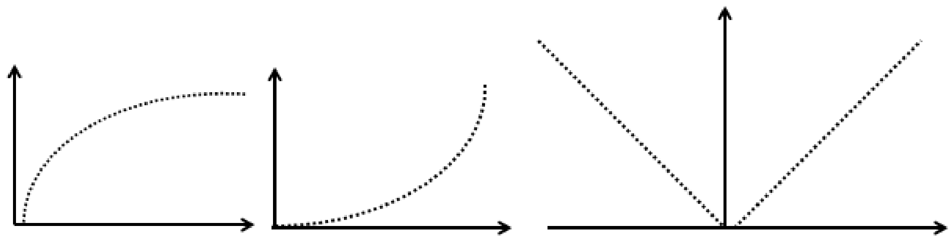
INTRODUCCIÓN

Cuando se trata de un modelo lineal los beneficios (o costes) son proporcionales a la cantidad vendida o fabricada. El uso de un recurso limitado depende linealmente de la cantidad fabricada y el uso total de un recurso. Este uso de un recurso es la suma de los consumos parciales del conjunto de actividades que se ejecutan en él. Todas estas expresiones configuran un modelo lineal.

Sin embargo, en realidad se dan, en ocasiones, circunstancias no-lineales (ver Figura 1).

Es fácil encontrar ejemplos sencillos de expresiones que, siendo aparentemente lineales, en el fondo no lo son, como por ejemplo el objetivo de minimizar el valor absoluto de una diferencia.

También es habitual encontrar relaciones entre variables cuya aproximación es difícilmente aproximable a un caso lineal.



Fuente: Elaboración propia

Figura 1. Casos de relaciones no-lineales entre variables

Así por ejemplo los beneficios asociados a la venta de un producto pueden depender de la cantidad vendida.

Ejemplo 1

Un modo bastante acertado de representar esta relación entre el precio de venta y la cantidad pedida es la denominada elasticidad de precios (la inelasticidad supone que un incremento en el precio supone incremento en los beneficios). El grado de elasticidad E_x de un producto se define en la ecuación (1.1). De este modo, asumiendo que E_x es constante dentro de un rango, se puede calcular el precio *p(x)* asociado a cada producto como en (1.2) donde *k* es el precio sobre el cual la demanda es unitaria. Por tanto, los beneficios esperados para una venta de *x* se pueden deducir con la ecuación (1.3).

$$E_x = \frac{\text{porcentaje de cambio en la cantidad x demandada}}{\text{porcentaje de cambio en el precio}} \quad (1.1)$$

$$p(x) = \frac{k}{x^{1/E_x}} \quad (1.2)$$

$$p(x) \cdot x = k \cdot x^{(1-1/E_x)} \quad (1.3)$$

Esto es un ejemplo típico de relación no-lineal que conduciría a un objetivo no-lineal. Existen también ejemplos de restricciones no-lineales. Por ejemplo, en la mezcla de componentes cuyas características mezcladas no tengan un comportamiento lineal o cuando se vean afectadas por un producto de variables (por ejemplo, mantener la presión de un gas por debajo de ciertos niveles, pudiendo alterar volumen y temperatura).

Más habituales aún son las restricciones de tipo lógico, que por su propia estructura no son lineales.

Los modelos de programación no-lineal son mucho más complejos de resolver que sus análogos lineales. Además, en muchos paquetes, aunque se encuentra una solución ésta no es necesariamente óptima. Sin embargo, es posible convertir relaciones no-lineales en aproximaciones lineales. Y ese es el objeto de este capítulo.

OBJETIVOS NO-LINEALES FÁCILMENTE LINEALIZABLES

En los siguientes apartados se relacionan algunos de los objetivos que más comúnmente se encuentran en la construcción de modelos pero que no son lineales en su definición. Dichos objetivos son:

- Minimizar un valor absoluto
- Minimizar el máximo
- Minimizar una ratio

OBJETIVO “MINIMIZAR UN VALOR ABSOLUTO”

Esta situación se da cuando se pretende minimizar una cierta discrepancia entre dos valores (*‘x’ e ‘y’* por ejemplo). La función objetivo (2.1) es un ejemplo.

$$[Minimize] \quad |x-y| \qquad (2.1)$$

La función “valor absoluto” no es una función lineal. Para convertirla en lineal es necesario establecer una tercera variable *z*, remplazar la función objetivo por (2.2) e incorporar las restricciones (2.3)- (2.4) en el modelo.

$$[Minimize] \quad \text{z} \qquad (2.2)$$

$Sujeto\, a:$

$$z \geq x - y \qquad (2.3)$$

$$z \geq y - x \qquad (2.4)$$

OBJETIVO “MINIMIZAR EL MÁXIMO” O “MAXIMIZAR EL MÍNIMO”

En ocasiones el objetivo que se persigue consiste en minimizar un máximo (ver (2.5)) o consiste en maximizar un mínimo como en la función objetivo (2.6):

$$[\text{Minimize}]\,\underset{i}{\text{Max}}\left\{\sum_j a_j \cdot x_{ij}\right\} \qquad (2.5)$$

$$[\text{Maximize}]\,\underset{i}{\text{Min}}\left\{\sum_j a_j \cdot x_{ij}\right\} \qquad (2.6)$$

Las funciones $\underset{i}{\max}\{\,\}$ y $\underset{i}{\min}\{\,\}$ no son funciones lineales y por tanto deben ser linealizada. El objetivo (2.6) se puede convertir en un objetivo lineal introduciendo una variable z que lo representa. La nueva formulación consiste en la función objetivo (2.7) y la restricción (2.8) que garantiza que z sea siempre superior a cualquier valor del sumatorio en j para todo i.

$$[\text{Minimize}]\ z \qquad (2.7)$$

Sujeto a:

$$\sum_j a_j \cdot x_{ij} - z \le 0 \quad \forall i \qquad (2.8)$$

Evidentemente, la función objetivo **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se puede representar también de un modo similar.

Sin embargo, los objetivos "maximizar el máximo" (ver (2.9)) y "minimizar el mínimo" (ver (2.10)) no se pueden representar mediante programación lineal, sino según programación entera (y se presentan en un apartado posterior).

$$[\text{Maximize}]\,\underset{i}{\text{Max}}\left\{\sum_j a_j \cdot x_{ij}\right\} \qquad (2.9)$$

$$[\text{Minimize}]\,\underset{i}{\text{Min}}\left\{\sum_j a_j \cdot x_{ij}\right\} \qquad (2.10)$$

OBJETIVOS DE RATIO

En ocasiones aparecen objetivos de ratio como por ejemplo maximizar la relación beneficios/inversión. Una función objetivo de ratio genérica es (2.11). Ese tipo de objetivo tampoco es lineal.

$$[\text{Maximize}]\ \frac{\sum_j a_j \cdot x_j}{\sum_j b_j \cdot x_j} \qquad (2.11)$$

Es posible transformar la función objetivo (2.11) de forma que se convierta en un objetivo lineal. Para ello hay que establecer una transformación de variables como en las restricciones (2.12) y (2.13) representadas a continuación.

$$w_j = x_j \cdot t \qquad (2.12)$$

$$t = \frac{1}{\sum_j b_j \cdot x_j} \qquad (2.13)$$

Con esta transformación el objetivo pasa a ser lineal y se transforma en (2.14). Para garantizar la transformación hay que incorporar la restricción (2.15).

$$[\text{Maximize}]\sum_j a_j \cdot w_j \qquad (2.14)$$

$$\sum_j b_j \cdot w_j = 1 \qquad (2.15)$$

Y además hay que convertir las restricciones originales de tipo (2.16) que utilizan las variables x_j que han sido transformadas en nuevas restricciones de tipo (2.17) que usan la variable w_j.

$$\sum_j d_j \cdot x_j \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} e \qquad (2.16)$$

$$\sum_j d_j \cdot w_j - e \cdot t \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} 0 \qquad (2.17)$$

Hay que destacar que esta transformación es válida si $\sum_j b_j \cdot x_j$ es siempre del mismo signo y no nula.

OBJETIVOS "MAXIMIZAR EL MÁXIMO" Ó "MINIMIZAR EL MÍNIMO"

Si el objetivo fuera del tipo (2.18) y que está sujeto a restricciones lineales convencionales, se puede modelar el problema considerando una nueva función objetivo (2.19) y unas restricciones del tipo (2.20).

$$[Maximize]\,\underset{\mathrm{i}}{\mathrm{Max}}\left\{\sum_j a_{ij} \cdot x_j\right\} \qquad (2.18)$$

$$[Maximize] \quad z \qquad (2.19)$$

$$(\sum_j a_{1j} \cdot x_j - z = 0) \vee (\sum_j a_{2j} \cdot x_j - z = 0) \vee \ldots (2.20)$$

Pero eso exige el uso de restricciones de tipo lógico que se analizarán más adelante.

EL USO DE VARIABLES DISCRETAS PARA REPRESENTAR RELACIONES CONDICIONALES

El uso de variables enteras en el proceso de modelado puede servir a diferentes propósitos como se ha indicado anteriormente. Pueden representar cantidades indivisibles y también variables de decisión.

Estas indican la decisión a tomar. Suelen ser variables de tipo binario $\{0;1\}$ (por ejemplo: δ = 1 abrir un nuevo centro de distribución y δ = 0 no abrir). Aunque nada impide que adopten más valores (α = 0 no abrir, α = 1 abrir el centro en Valencia, α = 2 abrir el centro en Alicante).

Sin embargo, en este apartado, se pretende establecer la utilidad de las variables enteras para establecer relaciones entre restricciones basadas en condiciones.

FUNCIONES NO CONTINUAS

La suposición de que la producción de un determinado artículo supone un coste fijo C_1 además de un coste variable C_2 que depende de la cantidad x, y que el coste fijo no se paga si la cantidad fabricada es 0 se puede representar con el valor de C_T como en (3.1).

$$C_T = \begin{cases} C_1 + C_2 \cdot x & \mathrm{x} > 0 \\ 0 & \mathrm{x} = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Sería interesante conocer, mediante una variable δ si x es mayor que 0 o es nulo (δ=*1* o δ=*0* respectivamente). De este modo, la función de costes totales sería la ecuación (3.2) asumiendo la restricción (3.3) dónde M es una cota superior conocida de x.

$$C_T = C_1 \cdot \delta + C_2 \cdot x \qquad (3.2)$$

$$x - M \cdot \delta \leq 0 \qquad (3.3)$$

RELACIÓN LÓGICA $\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j \cdot x_j \leq b$

Se puede utilizar variables binarias para conocer si una restricción es violada o no. Sea la restricción (3.4). Supóngase que se desea que δ = 1 represente que la restricción (3.4)se cumple. Esto se puede expresar como en la relación lógica (3.5).

$$\sum_j a_j \cdot x_j \leq b \qquad (3.4)$$

$$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j \cdot x_j \leq b \qquad (3.5)$$

Se puede mostrar que ésta condición se puede representar mediante la desigualdad lineal (3.6) que se presenta a continuación

$$\sum_j a_j \cdot x_j + M \cdot \delta \leq M + b \qquad (3.6)$$

donde M es una cota superior tal que $\sum_j a_j \cdot x_j - b \leq M$ en cualquier circunstancia.

RELACIÓN LÓGICA $\sum_j a_j \cdot x_j < b \rightarrow \delta = 1$

En algunos casos, puede resultar interesante representar la condición (3.7).

$$\sum_j a_j \cdot x_j < b \rightarrow \delta = 1 \qquad (3.7)$$

Esta condición se representa mediante la desigualdad lineal (3.8) considerando que *m* es una cota inferior de $\sum_j a_j \cdot x_j - b$.

$$\sum_j a_j \cdot x_j - m \cdot \delta \geq b \qquad (3.8)$$

RELACIÓN LÓGICA $\sum_j a_j \cdot x_j \leq b \rightarrow \delta = 1$

Podría interesar representar la condición (3.9).

$$\sum_j a_j \cdot x_j \leq b \rightarrow \delta = 1 \qquad (3.9)$$

Que es de hecho la misma que (3.9a).

$$\delta = 0 \rightarrow \sum_j a_j \cdot x_j > b \qquad (3.9a)$$

Esta condición se representa como en la ecuación (3.10) donde *m* es una cota inferior de $\sum_j a_j \cdot x_j - b$ y ε es la tolerancia a partir de la cual consideramos que $\sum_j a_j \cdot x_j > b$.

$$\sum_j a_j \cdot x_j - \delta \cdot (m - \varepsilon) \geq b + \varepsilon \qquad (3.10)$$

RELACIÓN LÓGICA $\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j \cdot x_j \geq b$

Sea ahora la restricción (3.11). Supóngase que se desea que $\delta=1$ represente que la restricción (3.11) se cumple.

$$\sum_j a_j \cdot x_j \geq b \qquad (3.11)$$

Esta condición se puede expresar con la relación lógica (3.12).

$$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j \cdot x_j \geq b \qquad (3.12)$$

Se puede mostrar que la relación lógica (3.12) se puede representar mediante la desigualdad lineal (3.13) donde *m* es una cota inferior de $\sum_j a_j \cdot x_j - b$.

$$\sum_j a_j \cdot x_j + m \cdot \delta \geq m + b \qquad (3.13)$$

RELACIÓN LÓGICA $\sum_j a_j \cdot x_j > b \rightarrow \delta = 1$

Podría interesar representar la condición (3.14).

$$\sum_j a_j \cdot x_j > b \rightarrow \delta = 1 \qquad (3.14)$$

Esta condición se representa mediante la ecuación (3.15) donde *M* es de nuevo una cota superior de $\sum_j a_j \cdot x_j - b$.

$$\sum_j a_j \cdot x_j - M \cdot \delta \leq b \qquad (3.15)$$

RELACIÓN LÓGICA $\sum_j a_j \cdot x_j \geq b \rightarrow \delta = 1$

Asimismo, podría interesar representar la condición (3.16).

$$\sum_j a_j \cdot x_j \geq b \rightarrow \delta = 1 \qquad (3.16)$$

Esta condición se representa mediante la ecuación (3.17) donde *M* es de nuevo una cota superior de $\sum_j a_j \cdot x_j - b$ y ε es la tolerancia a partir de la cual se considera que $\sum_j a_j \cdot x_j < b$.

$$\sum_j a_j \cdot x_j - \delta \cdot (M + \varepsilon) \leq b - \varepsilon \qquad (3.17)$$

MÁS RELACIONES LÓGICAS Y SU REPRESENTACIÓN

Para poder abordar este apartado es necesario establecer una cierta notación del Álgebra Booleana básica. En la Tabla 1, se presenta la nomenclatura usada a lo largo de este libro.

Tabla 0.1 Notación del Álgebra Booleana usado en este libro

Símbolo	Sentido en inglés	Sentido en castellano
$\vee$	OR	O INCLUSIVO: A, B, o ambos
$\wedge$	AND	Y
$\neg$	NO	NO
$\rightarrow$	IMPLIES	IMPLIES
$\leftrightarrow$	IF AND ONLY IF	SI Y SOLO SI

Estos elementos se denominan operadores y unen proposiciones como P,Q,R... *x>0*, δ*=1*, etc.

El par de operadores {¬ , V} sirve para representar cualquier combinación posible (lo que es especialmente interesante). Asumiremos que los símbolos por orden de importancia son '¬' , '∧' , '∨' y '→', lo cual evita el uso de excesivos paréntesis.

Así, por ejemplo:

$$(P \vee Q) \vee R \text{ se puede escribir como } P \wedge Q \vee R$$
$$P \rightarrow (Q \vee R) \text{ se puede escribir como } \mathrm{P} \rightarrow Q \vee R$$
$$\neg\neg P \text{ se puede escribir como P}$$
$$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q} \text{ se puede escribir como } \neg P \vee Q$$
$$\mathrm{P} \rightarrow Q \wedge R \text{ se puede escribir como } (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$
$$\mathrm{P} \rightarrow Q \vee R \text{ se puede escribir como } (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$$
$$\mathrm{P} \wedge Q \rightarrow R \text{ se puede escribir como } (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$$
$$\mathrm{P} \vee Q \rightarrow R \text{ se puede escribir como } (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$$
$$\neg(P \vee Q) \text{ se puede escribir como } \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) \text{ se puede escribir como } \neg P \vee \neg Q$$

Mediante estas reglas básicas es posible construir casi cualquier expresión y reducirla a otra que utilice distintos operadores.

Así por ejemplo si X_i es la proposición $\delta_i=1$, se puede decir que:

$$X_1 \vee X_2 \text{ es equivalente a } \delta_1 + \delta_2 \geq 1$$
$$X_1 \wedge X_2 \text{ es equivalente a } \delta_1 = 1, \delta_2 = 1$$
$$\neg X_1 \text{ es equivalente a } 1\text{-}\delta_1 = 1 \text{ ó } \delta_1 = 0$$
$$X_1 \rightarrow X_2 \text{ es equivalente a } \delta_1 - \delta_2 \leq 0$$
$$X_1 \leftrightarrow X_2 \text{ es equivalente a } \delta_1 - \delta_2 = 0$$

Ejemplo 2

Suponga que se quiere garantizar que si $x = 1$ entonces $y = 0$, siendo ambas variables binarias. Este caso se puede representar considerando las dos restricciones.

$$x, y \in \{0,1\} \qquad (4.1)$$

$$x + y \leq 1 \qquad (4.2)$$

Ejemplo 3

Suponga que se quiere garantizar que si $x \leq b$ y $x \geq 1$ entonces $y = z + 1$. Siendo x, y, z variables enteras. La expresión buscada es (4.3)

$$(x \leq b) \wedge (x \geq 1) \rightarrow (y = z + 1) \qquad (4.3)$$

Que puede ser escrita como:

$$(x \leq b) \wedge (x \geq 1) \rightarrow (\pi = 1) \rightarrow (y = z + 1) \qquad (4.4)$$

Si se descompone (4.4) puede ser substituida por (4.7) y (4.8).

$$(x \leq b) \rightarrow (\alpha = 1) \qquad (4.5)$$

$$(x \geq 1) \rightarrow (\beta = 1) \qquad (4.6)$$

$$(\alpha = 1) \wedge (\beta = 1) \rightarrow (\pi = 1) \qquad (4.7)$$

$$(\pi = 1) \rightarrow (y \geq z + 1) \qquad (4.8)$$

La relación lógica (4.5) se puede escribir como **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

$$x - m \cdot \alpha \geq b \qquad (4.9)$$

La relación lógica (4.6), por consecuencia, se puede escribir como **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

$$x - M \cdot \beta \leq 1 \qquad (4.10)$$

La relación lógica (4.7) se puede escribir como **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**
.

$$\alpha + \beta - \pi \leq 1 \qquad (4.11)$$

La relación lógica (4.8) se puede escribir como **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

$$y - z + m \cdot \pi \geq m + 1 \qquad (4.12)$$

La relación lógica (4.4) , por consecuencia, se puede escribir como **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**.

$$y - z + M \cdot \pi \leq M + 1 \qquad (4.13)$$

Donde m es una cota inferior de $y - z - 1$ y M es una cota superior de $y - z + 1$.

Ejemplo 4

En un caso de programación de producción, si cualquiera de los productos A o B se fabrican, entonces hay que fabricar C, D o E.

Sea X_i la cantidad de producto de tipo i que se fabrica. Esta condición se puede representar como en la relación (4.14).

$$(X_A \vee X_B) \rightarrow (X_C \vee X_D \vee X_E) \qquad (4.14)$$

Sea $\delta_i = 1 \leftrightarrow Se\ fabrica\ el\ producto\ i$. Sea θ una variable auxiliar tal que se respecta la condición (4.15). Por consecuencia, se puede considerar también la relación (4.16).

$$\delta_A + \delta_B \geq 1 \rightarrow \theta = 1 \qquad (4.15)$$

$$\theta = 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1 \qquad (4.16)$$

Se puede transformar las dos relaciones lógicas anteriores para obtener las desigualdades (4.17) y (4.18). Así pues, el ejemplo se puede representar como este par de restricciones.

$$\delta_A + \delta_B + 2\theta \leq 0 \qquad (4.17)$$

$$\theta - \delta_C - \delta_D - \delta_E \leq 0 \qquad (4.18)$$

Ejemplo 5

En ocasiones se admite como útil el uso de polinomios de variables indicadoras. Estas expresiones pueden ser siempre sustituidas por expresiones lineales. Así, por ejemplo, (4.19) es equivalente a (4.2) así como (4.21) es equivalente a (4.22).

$\delta_1 \cdot \delta_2 = 0$	(4.19)	$\delta_1 + \delta_2 \leq 1$	(4.20)
$\delta_1 \cdot \delta_2 = 1$	(4.21)	$\delta_1 + \delta_2 = 2$	(4.22)

De modo más general si el término $\delta_1 \cdot \delta_2$ ha de aparecer siempre podrá ser sustituido por una variable $\delta_3 = \delta_1 \cdot \delta_2$ que tiene la siguiente condición $\delta_3 = 1 \rightarrow (\delta_1 = 1 \wedge \delta_2 = 1)$. Lo cual se puede expresar mediante les restricciones *(4.23)- (4.24)- (4.25)*.

$$-\delta_1 + \delta_3 \leq 0 \qquad (4.23)$$

$$-\delta_2 + \delta_3 \leq 0 \qquad (4.24)$$

$$\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1 \qquad (4.25)$$

Es incluso posible linealizar términos en los que se multiplica el valor de una variable binaria δ con una variable real positiva x. Sea $y = x \cdot \delta$. Entonces, se asumen las relaciones *(4.26)* y *(4.27)*.

$$\delta = 0 \rightarrow y = 0 \qquad (4.26)$$

$$\delta = 1 \rightarrow y = x \qquad (4.27)$$

La relación *(4.26)* es equivalente a una única restricción como **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**. Por otra parte, la relación *(4.27)* es equivalente a las restricciones *(4.29)* y *(4.30)*.

$$y - M \cdot \delta \leq 0 \qquad (4.28)$$

$$y - x \leq 0 \qquad (4.29)$$

$$x - y + M \cdot \delta \leq M \qquad (4.30)$$

CONJUNTOS ESPECIALES DE VARIABLES ORDENADAS

Existen dos tipos de restricciones cuya presencia en problemas reales es habitual y que, además, están implementadas en múltiples paquetes porque facilitan la resolución. Estas son conjuntos de variables en que sólo una de entre todas puede adoptar un valor no nulo.

Estas variables se denominan:

- Conjuntos SOS1 (*Special Order Set 1* en inglés)
- Conjuntos SOS2 (*Special Order Set 2* en inglés)

El uso de estos dos tipos de conjuntos de variables es considerado explícitamente por algunos motores de resolución y facilita enormemente el proceso de ramificación y corte, y por tanto reduce el coste computacional.

CONJUNTOS SOS1

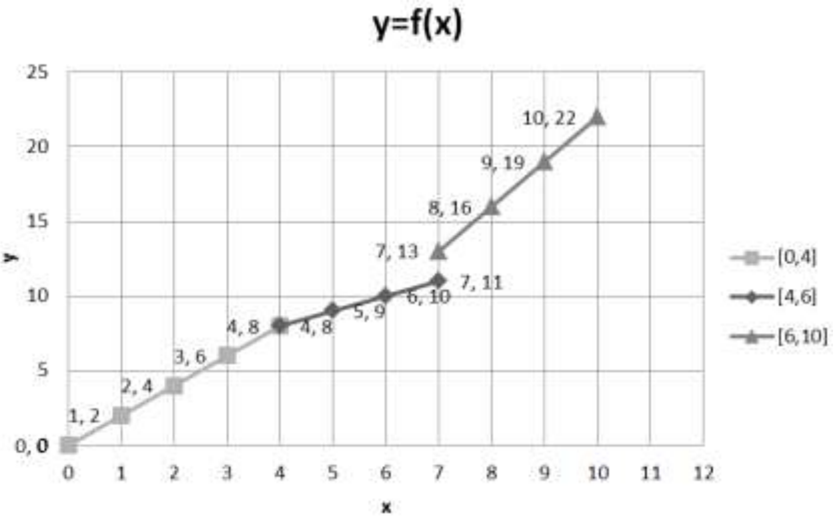
Un conjunto SOS1 es un conjunto de variables binarias dónde una y solamente una de estas variables debe valer 1. Una de las principales ventajas de los conjuntos SOS1 es que permite discretizar funciones no-lineales considerando solamente un número limitado de puntos. El tiempo de CPU que se ahorra con este tratamiento especial es importante.

Para definir los conjuntos SOS1, se propone a continuación un ejemplo.

Ejemplo 6

El modelado de una función y(x) tal que: $y = \begin{cases} 2x & x \in [0,4] \\ x+4 & x \in [4,6] \\ 3x-8 & x \in [6,10] \end{cases}$

La representación gráfica del espacio de soluciones de este modelo se presenta en la Figura 2.



Fuente: Elaboración propia

Figura 2. Representación de la función y=f(x)

Si se decide *discretizar* la función en cada uno de los vértices, se debe considerar 4 puntos. Sea z_i un punto de coordenada x_iy y_i.

Los puntos que se considerarán son los siguientes:

$z_1 = (0;0); z_2 = (4;8); z_3 = (6;10); z_4 = (10;22)$.

Usando estos 4 puntos, se puede escribir un modelo de programación lineal usando un conjunto SOS1.

Sea λ_i la variable binaria asociada al cada punto z_i. $\lambda_i = 1$ si el punto z_i es activo, 0 en caso contrario. A partir de esto, se puede definir el modelo con las restricciones (1)-(2)- (3)- (4).

$$x = \sum_i x_i \cdot \lambda_i = 4\lambda_2 + 6\lambda_3 + 10\lambda_4 \qquad (1)$$

$$y = \sum_i y_i \cdot \lambda_i = 8\lambda_2 + 10\lambda_3 + 22\lambda_4 \qquad (2)$$

$$\sum_i \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \qquad (3)$$

$$\lambda_i \in \{0,1\} \quad \forall i \qquad (4)$$

Otro ejemplo de uso de estas variables es la denominada formulación modal, citada en un apartado anterior.

Ejemplo 7

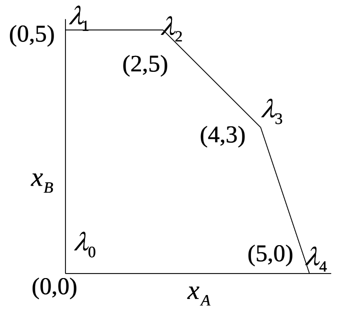
Sea el siguiente conjunto de 3 restricciones que se presentan a continuación:

$$x_A + x_B \leq 7 \qquad (5)$$

$$3x_A + x_B \leq 15 \qquad (6)$$

$$x_B \leq 5 \qquad (7)$$

Con la representación gráfica del espacio de soluciones de este modelo que se aprecia en la Figura 3, se puede observar que el espacio de solución tiene 5 vértices. Una posible discretización consistiría en considerar cada uno de ellos asociándole a cada uno una variable binaria λ_i. El conjunto de λ_i forma entonces un conjunto SOS1.



Fuente: Elaboración propia

Figura 3. Representación gráfica del espacio de soluciones

Esta situación se puede modelar representando exclusivamente los vértices o también se podría considerar más puntos. Usando por tanto más variables aunque menos restricciones (concretamente una), el modelo de programación matemática consideraría las restricciones (8)- (9)- (10)- (11).

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \qquad (8)$$

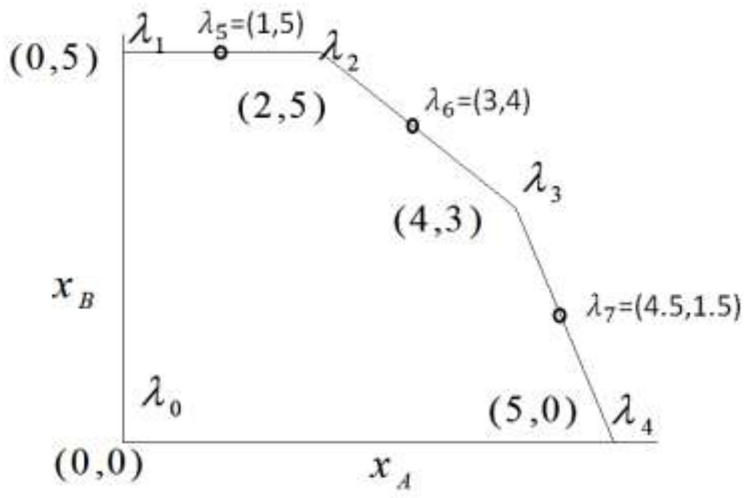
$$x_A = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 \qquad (9)$$

$$x_B = 5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 \qquad (10)$$

$$\lambda_i \in \{0,1\} \quad i = 1...4 \qquad (11)$$

Donde los coeficientes son las coordenadas x_ie y_i de cada uno de los puntos. Este tipo de formulación puede ahorrar gran cantidad de tiempo en la resolución del problema.

Si se necesita considerar más puntos, se podría discretizar con más puntos. En programación lineal, esto no tendría mucho sentido, pero en programación entera, esto podría resultar útil. Se propone en la Figura 4 considerar puntos intermedios entre los vértices.



Fuente: Elaboración propia

Figura 4. Representación gráfica del espacio de soluciones con más puntos

En este caso, el modelo de programación matemática consideraría las restricciones (12)-(13)- (14)- (15).

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 = 1 \qquad (12)$$

$$x_A = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 + 1\lambda_5 + 3\lambda_6 + 4.5\lambda_7 \qquad (13)$$

$$x_B = 5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 5\lambda_5 + 4\lambda_6 + 1.5\lambda_7 \qquad (14)$$

$$\lambda_i \in \{0,1\} \quad i = 1...7 \qquad (15)$$

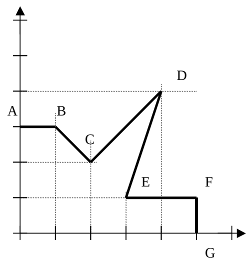
Esta formulación tendría un tiempo de resolución más importante al incorporar más variables binarias en el modelo. Es importante destacar que a más puntos (más variables dentro del conjunto SOS1), más precisa será la solución si el óptimo no se encuentra en un vértice, pero más complejo será el modelo.

CONJUNTOS SOS2

Cuando existen funciones separables convexas (y no-convexas) y se puede realizar otro tipo de discretización gracias a los denominados conjuntos SOS2. En ellos sólo dos variables binarias consecutivas pueden tener un valor no-nulo y la suma del conjunto tiene que ser unitario. El uso de los conjuntos SOS2 es útil para aproximar términos no-lineales por tramos (*piecewise* en inglés). Los conjuntos SOS2 se usan cuando es útil.

Ejemplo 8

Supóngase que la región de factibilidad de una variable es la OABCDEFG región no-convexa presente en la Figura



Fuente: Elaboración propia

Figura Región de factibilidad del conjunto de variables x1 y x2

Esta región se puede representar mediante relaciones lógicas considerando las variables binarias $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Las relaciones que se deben considerar son (16)- (17)- (18).

$$\delta_1 = 1 \rightarrow (x_2 \le 3) \wedge (x_1 + x_2 \le 4) \qquad (16)$$

$$\delta_2 = 1 \rightarrow (-x_1 + x_2 \le 0) \wedge (3x_1 - x_2 \le 8) \qquad (17)$$

$$\delta_3 = 1 \rightarrow (x_2 \le 1) \wedge (x_1 \le 5) \qquad (18)$$

Las tres relaciones lógicas anteriores equivalen a imponer las restricciones (19) a (27).

$$x_2 + \delta_1 \le 4 \qquad (19)$$

$$x_1 + x_2 + 5\delta_1 \le 9 \qquad (20)$$

$$-x_1 + x_2 + 4\delta_2 \le 4 \qquad (21)$$

$$3x_1 - x_2 + 7\delta_2 \le 15 \qquad (22)$$

$$x_2 + 3\delta_3 \le 4 \qquad (23)$$

$$x_1 \le 5 \qquad (24)$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \ge 1 \qquad (25)$$

$$0 \le \delta_i \le 1 \quad i = 1,2,3 \qquad (26)$$

$$\delta_i \in \mathbb{R}^+ \quad i = 1,2,3 \qquad (27)$$

Sin embargo, esto no es suficiente para que el modelo sea bueno. Por definición, en un conjuntos SOS2, solamente dos variables adyacentes $\delta_i \; y \; \delta_{i+1}$ pueden ser distintas de cero. En la mayoría de los programa existen (de pago o no), sobra con definir el conjunto $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \; como \; SOS2$. Sin embargo, la restricción SOS2 se puede implementar directamente con la ayuda de variables binarias en caso de no disponer de ella en el programa de optimización.

$$(\delta_1 + \delta_2 = 1) \vee (\delta_2 + \delta_3 = 1) \qquad (28)$$

Existe una formulación alternativa para una región no-convexa y conectada. En este caso, el conjunto $(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F)$ sería SOS2 y se consideraría las restricciones (29) a (31).

$$x_1 - \lambda_B - 2\lambda_C - 4\lambda_D - 3\lambda_E - 5\lambda_F - 5\lambda_G = 0 \tag{29}$$

$$x_2 - 3\lambda_A - 3\lambda_b - 2\lambda_C - 4\lambda_D - \lambda_E - \lambda_F = 0 \tag{30}$$

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F \leq 1 \tag{31}$$