

## Cinemática de un manipulador configurable por medio de la teoría de tornillos

Gallardo-Alvarado, J.\* , Tinajero-Campos, J.H., Sánchez-Rodríguez, A.

*Departamento de Ingeniería Mecánica, Tecnológico Nacional de México en Celaya, Av. Tecnológico y A. García Cubas, 38010 Celaya, Guanajuato, México.*

**To cite this article:** Gallardo-Alvarado, J., Tinajero-Campos, J.H., Sánchez-Rodríguez, A.. 2021. Kinematics of a configurable manipulator using screw theory. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 18, 58-67. <https://doi.org/10.4995/riai.2020.12793>

### Resumen

En este trabajo se aborda el análisis cinemático de un manipulador redundante con una plataforma configurable equipada con dos efectores finales. Las ecuaciones de clausura del análisis de posición generan un sistema de ecuaciones cuadráticas el cual se resuelve aplicando Newton-homotopía. Posteriormente, la cinemática instantánea del robot se resuelve recurriendo a la teoría de tornillos. La eficiencia del método es tal que no se requiere del cálculo de las velocidades articulares pasivas del robot para la determinación de la ecuación entrada-salida de velocidad del manipulador paralelo. Ejemplos numéricos se comparan con los resultados de un software comercial lo cual demuestra veracidad del método.

*Palabras clave:* Cinemática de robots, robot industrial y manipuladores robóticos, sistemas multicuerpo, sistemas robotizados.

### Kinematic of a configurable manipulator using screw theory

#### Abstract

This paper addresses the kinematic analysis of a redundant parallel manipulator with a configurable platform equipped with two end-effectors. The closure equations of the position analysis generate a system of quadratic equations which is solved by applying the Newton-homotopy method. Subsequently, the instantaneous kinematics of the robot is solved by resorting to the theory of screws. The efficiency of the method is such that the calculation of passive joint rates of the robot is not required for the determination of the input-output equation of velocity of the parallel manipulator. Numerical examples are compared with the outcome of a commercial software demonstrating the approach correctness.

*Keywords:* Industrial robotics and robotic manipulators, multibody systems, robot kinematics, robotic systems.

## 1. Introducción

La redundancia es un instrumento altamente confiable para mejorar en general la capacidad y desempeño de los manipuladores paralelos, por ejemplo al implementar grados de libertad redundantes es posible optimizar una función objetivo secundaria lo cual perfecciona el funcionamiento del robot. En ese sentido, como se enfatiza en Mohamed and Gosselin (2005) y se confirma en contribuciones más recientes (Qu et al., 2018; Schreiber and Gosselin, 2018; Baron et al., 2018; Landure and Gosselin, 2018; Fang et al., 2019), cabe mencionar que la gran mayoría de las investigaciones publicadas en el área de la redundancia de manipuladores paralelos se centran en el análisis y diseño de manipuladores paralelos redundantes con plataformas rígidas provistas de

pinzas con movimientos de cierre independientes. Sin embargo, las pinzas convencionales generalmente no son apropiadas para sujetar objetos irregulares o grandes. Más aún, muy pocos estudios se centran en la idea de utilizar una plataforma configurable como dispositivo de agarre (Lambert and Herder, 2019).

La movilidad de un manipulador es la clave para explicar su posible redundancia. Un manipulador cinemáticamente redundante es aquel en el que su movilidad excede a los grados de libertad requeridos, una ventaja apreciable sobre los manipuladores no redundantes. Por otra parte, cuando el número de actuadores es mayor que la movilidad misma del manipulador entonces se dice que se tiene un manipulador accionado redundantemente, lo cual implica que en ciertas tareas es necesario seleccionar a los servomotores que controlarán el movimiento del robot. El desarrollo de robots

reconfigurables, junto con la redundancia de los mismos, es una estrategia adecuada para superar las limitaciones de los manipuladores paralelos como lo son su limitado espacio de trabajo y pobre maniobrabilidad. En esa línea de investigación y desarrollo, la mayoría de los esfuerzos de los científicos se han enfocado a introducir manipuladores paralelos con extremidades reconfigurable o bien flexibilizar la funcionalidad de los pares cinemáticos de acuerdo a las tareas asignadas al robot, consulte por ejemplo (Zhang et al., 2013; Carbonari et al., 2014; Ye et al., 2014; Dai and Gogu, 2016; Aïmeedee et al., 2016; Ma et al., 2018). Esta tendencia es razonable si se toma en cuenta que el robot debe ser capaz de realizar tareas inesperadas. Más todavía, gracias a los grados de libertad excedentes, el manipulador paralelo es capaz no sólo de ejecutar la tarea de salida original sino que también será capaz de eliminar o escapar de configuraciones singulares, incrementar el espacio de trabajo, mejorar la destreza y evasión de obstáculos, optimizar la transmisión de fuerza, entre otras limitaciones atribuidas a los manipuladores paralelos. Recientemente un concepto innovador designado como plataforma configurable se ha introducido en la ya exitosa trayectoria del estudio de los manipuladores paralelos con el objetivo de incrementar el potencial bien probado de los robots reconfigurables (Lambert and Herder, 2016; Hoevenaars et al., 2017; Kang and Dai, 2019; Gallardo-Alvarado and Tinajero-Campos, 2019). Con dicha plataforma configurable, además de las ventajas de generar manipuladores paralelos cinemáticamente redundantes (Yi et al., 2002; Mohamed and Gosselin, 2005) debido a la inclusión de grados adicionales de libertad acreditados a una cadena cinemática interna cerrada, esta nueva clase de robots admite la instalación de múltiples efectores finales (Hoevenaars et al., 2017) superando en creatividad y capacidad a los manipuladores convencionales equipados con plataformas rígidas. El concepto es genuino y sus aplicaciones potenciales basadas en la sustitución de la plataforma móvil rígida convencional por una cadena cinemática cerrada interna hacen de este tipo de robots un campo de investigación sumamente atractivo que refresca el área de investigación de los manipuladores robóticos. Por otra parte vale la pena destacar que una deficiencia de los manipuladores paralelos no redundantes convencionales es la presencia inevitable de singularidades. En ese sentido las singularidades dentro de las limitantes del espacio de trabajo de manipuladores, como el que se aborda en la contribución, se anulan debido al exceso de elementos motrices y solo será necesario considerar en esta parte del diseño aspectos como la interferencia mecánica.

En este trabajo se presenta el análisis cinemático de un manipulador paralelo plano de cuatro grados de libertad provisto con una cadena cinemática cerrada la cual asume el rol de plataforma configurable. La redundancia del robot se basa en el grado de libertad adicional de la plataforma configurable. Gracias a la movilidad excedente, el robot puede soportar la instalación de dos efectores finales. El resto de la contribución se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se describe al robot seleccionado para el análisis, así como buena parte de la notación empleada en el trabajo. El análisis de posición, tanto directo como inverso, se desarrolla en la sección 3 donde las ecuaciones de clausura se obtienen con

base en vectores que describen la pose (posición y orientación) de la plataforma configurable. La versatilidad de las ecuaciones de clausura del análisis de posición permiten aplicar métodos diferentes de solución. En la sección 4, la cinemática instantánea del robot se lleva a cabo por medio de la teoría de tornillos infinitesimales. La efectividad del método de análisis cinemático se ilustra con diversos ejemplos numéricos en la sección 5. Finalmente, se proporcionan algunas conclusiones al final de la contribución.

## 2. El manipulador paralelo con plataforma configurable

La figura 1 muestra un manipulador paralelo redundantemente actuado pues está dotado de cuatro actuadores rotatorios, que deben trabajar sincronizadamente, para controlar la posición y orientación de un cuerpo rígido en el plano.

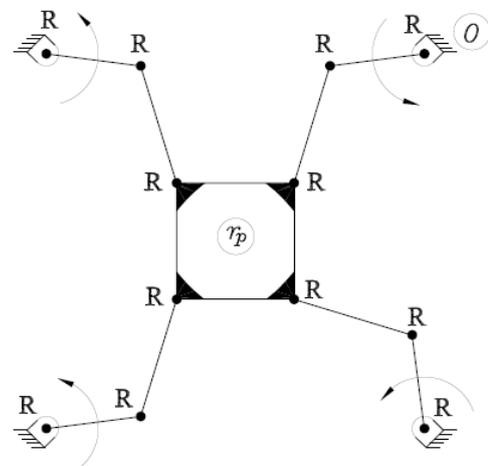


Figura 1: Manipulador paralelo plano convencional con cuatro grados de libertad. El robot está equipado con un actuador rotatorio adicional y por lo tanto es un mecanismo redundantemente actuado pues tres actuadores rotatorios serían suficientes para controlar la pose de un cuerpo rígido en el plano. Es decir, se dispone de cuatro actuadores rotatorios para controlar los tres grados de libertad de la plataforma rígida  $r_p$ .

El manipulador de la Figura 1 es un manipulador paralelo 4-RRR redundantemente actuado (Mueller, 2008; Liu et al., 2014). En este manipulador paralelo, la plataforma móvil es una placa rígida  $r_p$  que se conecta a la plataforma fija 0 por medio de cuatro extremidades del tipo RRR. Cada extremidad está provista de pares de revoluta cuyos ejes son perpendiculares al plano de la plataforma fija. Convenientemente, los pares de revoluta que conectan las extremidades a la plataforma fija son pares cinemáticos activos, es decir, están asociados a las coordenadas generalizadas  $q_i$  ( $i = 1; 2; 3; 4$ ) del robot. Por lo tanto, se dispone de cuatro grados de libertad para controlar el movimiento 2T1R de la plataforma móvil. La coordenada generalizada adicional permite obtener una infinidad de posibles soluciones para el problema cinemático inverso lo cual mejora el rendimiento del robot ya que se cuenta con un infinito de posibilidades para establecer la configuración de referencia del mismo. En ese sentido, considere por ejemplo que en el manipulador paralelo no redundante 3-RRR (Bonev et al., 2001), el análisis inverso de posición de dicho robot produce como máximo 8 soluciones y por lo tanto el abanico

de posibilidades de selección de la posición de referencia se reduce drásticamente. Por otra parte, a pesar de que en los manipuladores paralelos redundantemente actuados existe toda una metodología bien probada para controlar las fuerzas generadas sobre la plataforma móvil a través del control antagonístico de las unidades redundantes (Yi et al., 1994; Kock and Schumacher, 1998, 2000; Chakarov, 2004; Mueller, 2006), la alta sincronización del movimiento de los servomotores involucrados no deja de ser un inconveniente de este tipo de robots. Las limitaciones de los manipuladores paralelos redundantemente actuados equipados con plataformas móviles rígidas pueden disminuirse si se aplica el concepto de plataforma configurable (Yi et al., 2002; Mohamed and Gosselin, 2005). Con esta motivación en mente, el presente trabajo se enfoca al análisis del manipulador cinemáticamente redundante que se muestra en la Figura 2.

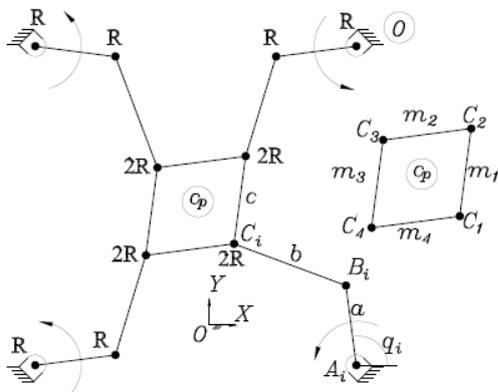


Figura 2: Manipulador paralelo cinemáticamente redundante equipado con una plataforma configurable cp. El mecanismo cuenta con cuatro grados de libertad para controlar la pose de un cuerpo rígido en el plano. Gracias a la redundancia cinemática del robot, la plataforma configurable es capaz de soportar la instalación de dos efectores finales. Por otra parte, la sincronización del movimiento de los cuatro actuadores rotatorios no es tan crítica como la que se requiere en el manipulador paralelo de la Figura 1.

A continuación, se explica la geometría del manipulador de la Figura 2. Considere que  $O_{XYZ}$  es un marco de referencia adjunto a la plataforma fija 0 con vectores unitarios asociados  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ . El robot se compone de una plataforma configurable cp formada con cuatro eslabones terminales  $m_i$  ( $i = 1; 2; 3; 4$ ) de longitud  $c$  que se conecta a la plataforma fija 0 por medio de cuatro cadenas cinemáticas articuladas por medio de pares de revoluta. Cada extremidad se compone a su vez de un brazo de longitud  $a$  y un antebrazo de longitud  $b$  donde, el brazo  $a$  se une a la plataforma fija por medio de un par de revoluta activo cuya posición nominal se designa por un punto  $A_i$  localizado por un vector  $a_i$ . El brazo y el antebrazo, por supuesto de una misma extremidad, se conectan por medio de una revoluta pasiva cuya posición nominal se denota por un punto  $B_i$  el cual se ubica por un vector  $b_i$ . Finalmente, cada extremidad se conecta a la plataforma configurable por medio de pares de revoluta pasivos cuyas posiciones nominales se denotan por puntos  $C_i$  ubicados por sus correspondientes vectores de posición  $c_i$ . La movilidad del robot es tal que es posible ensamblar dos órganos terminales o efectores finales  $e_1$  y  $e_2$  sobre la plataforma configurable.

### 2.1. Ubicación de los órganos terminales del robot

En esta subsección se describen tres posibles opciones de montaje de los efectores finales. La comparación del espacio máximo de trabajo de las mismas permite clarificar cual es la mejor opción de ensamble.

La primera opción de ensamble de los efectores finales consiste en montar los órganos terminales  $e_1$  y  $e_2$  en dos esquinas opuestas de la plataforma configurable, por ejemplo, los puntos  $C_1$  y  $C_3$  podrían elegirse para ensamblar los órganos la posición del efector final  $e_2 = C_3$  se ubica en el área de un círculo de radio  $2c$  y centro  $C_1$ . Por lo tanto, el máximo espacio de trabajo del efector final  $e_2$ , con respecto a la posición del efector final  $e_1$  es el área de un círculo de radio  $2c$ .

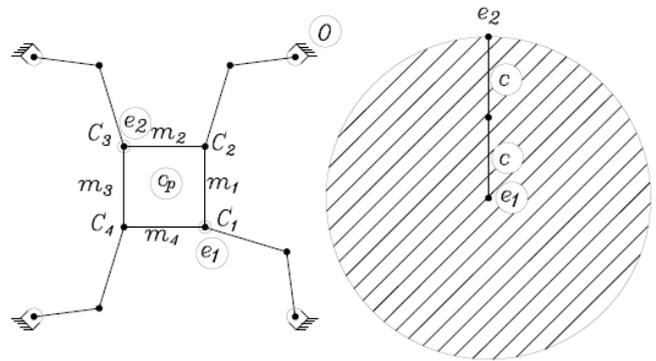


Figura 3: Opción 1 de ensamble de los efectores finales  $e_1$  y  $e_2$ : ensamble en dos esquinas opuestas  $C_1$  y  $C_3$  de la plataforma configurable.

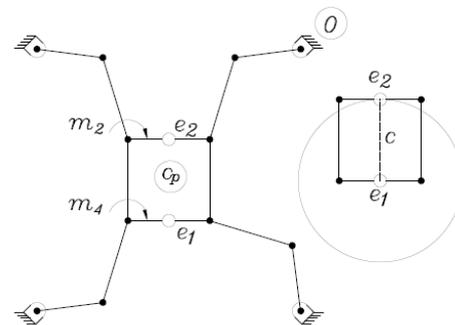


Figura 4: Opción 2 de ensamble de los efectores finales  $e_1$  y  $e_2$ : ensamble en dos eslabones opuestos  $m_2$  y  $m_4$  de la plataforma configurable.

La opción 2 consiste en ensamblar los efectores finales  $e_1$  y  $e_2$  en los eslabones terminales  $m_2$  y  $m_4$  de la plataforma configurable, tal y como se muestra en la Figura 4. En ese sentido debe tomarse en cuenta apropiadamente el movimiento de traslación curvilínea relativa entre los eslabones terminales opuestos. Es decir, dichos eslabones poseen la misma velocidad angular como se observa desde el eslabón fijo, una propiedad importante en el análisis de velocidad. Por lo tanto, desde el punto de vista geométrico el máximo espacio de trabajo del efector final  $e_2$ , una vez que fija la posición del efector  $e_1$ , es una circunferencia de radio  $c$ .

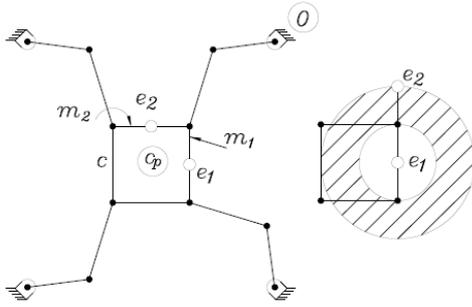


Figura 5: Opción 3 de ensamble de los efectores finales  $e_1$  y  $e_2$ : ensamble en dos eslabones terminales adyacentes  $m_1$  y  $m_2$  de la plataforma configurable. Los órganos terminales se ubican en la mitad de cada uno de sus respectivos eslabones terminales.

La última opción considerada en la contribución consiste en montar los efectores finales en dos eslabones terminales adyacentes, por ejemplo, considere que  $e_1$  se ubica en el centro del eslabón terminal  $m_1$  mientras que  $e_2$  se ubica en el centro del eslabón terminal  $m_2$ , Figura 5. Esta opción implica que una vez que se fija la posición de  $e_1$  entonces el espacio máximo de trabajo de  $e_2$  se ubica en el área delimitada por dos círculos concéntricos de acuerdo al punto  $e_1$ , uno de radio  $c/2$  y el otro de radio  $c$ .

Después de este breve análisis, la opción 1 resulta ser la más prometedora para el ensamble de los órganos terminales.

### 3. Análisis de posición

#### 3.1. Ecuaciones cinemáticas de restricción

Se sabe que, en manipuladores paralelos con plataformas configurables, el uso de topologías simétricas conduce a posturas óptimas de los mismos. Por lo tanto, en lo que sigue, las ecuaciones de restricción cinemáticas del robot en cuestión se formulan en base a una arquitectura simétrica del manipulador configurable.

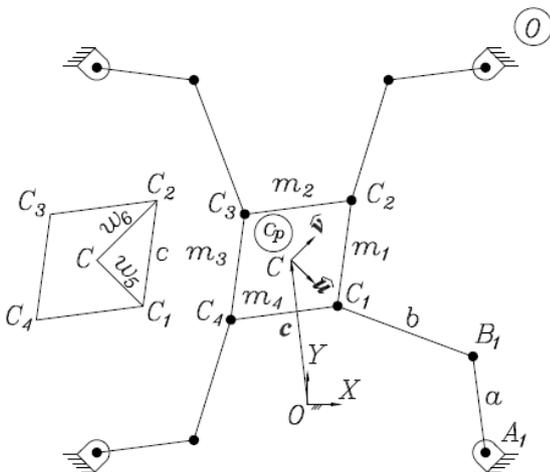


Figura 6: Parámetros geométricos del manipulador. La posición y orientación de la plataforma configurable  $c_p$ , están definidas, respectivamente, por el vector de posición  $c$  y el vector unitario  $\hat{u}$ . Para formular las ecuaciones de restricción cinemáticas, se considera un segundo vector unitario  $\hat{v}$  el cual es ortogonal al vector  $\hat{u}$ . Cualquier punto de la plataforma configurable puede expresarse en términos de los vectores  $c$ ,  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$ .

Con referencia a la Figura 6 considere que el vector  $c$  se expresa de la siguiente manera

$$c = w_1 \hat{i} + w_2 \hat{j} \tag{1}$$

donde  $w_1$  y  $w_2$  son dos parámetros que definen el centro geométrico  $C$  de la plataforma configurable mientras que el vector unitario  $\hat{u}$  se define como

$$\hat{u} = w_3 \hat{i} + w_4 \hat{j} \tag{2}$$

Es decir,  $\hat{u}$  es un vector unitario dirigido desde el punto  $C$  al punto  $C_1$ . Más aún, es evidente el que

$$w_3^2 + w_4^2 = 1 \tag{3}$$

Por su parte,

$$\hat{v} = -w_4 \hat{i} + w_3 \hat{j} \tag{4}$$

denota el vector unitario dirigido desde el punto  $C$  al punto  $C_2$ . En otras palabras, el vector  $\hat{v}$  es ortogonal al vector  $\hat{u}$  y, por lo tanto,  $\hat{u} \cdot \hat{v} = 0$ . Con estas condiciones en mente, los vectores asociados a las esquinas de la plataforma configurable se pueden escribir de la siguiente manera

$$c_1 = c + w_5 \hat{u}, \quad c_2 = c + w_6 \hat{v}, \quad c_3 = c - w_5 \hat{u}, \quad c_4 = c - w_6 \hat{v} \tag{5}$$

donde  $w_5$  denota la distancia entre los puntos  $C$  y  $C_1$  mientras que  $w_6$  denota la distancia entre los puntos  $C$  y  $C_2$ .

Bajo estas condiciones, con base en la longitud  $b$  cuatro ecuaciones de clausura vendrán dadas por

$$(c_i - b_i) \cdot (c_i - b_i) = b^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{6}$$

donde  $(\cdot)$  denota al producto interno usual del álgebra vectorial. Más aún,  $b_i$  denota al vector de posición del  $i$ -ésimo punto  $B_i$  el cual se determina como

$$b_i = a_i + a \cos(q_i) \hat{i} + a \sin(q_i) \hat{j} \tag{7}$$

De manera semejante, a partir del parámetro  $a$  es posible escribir otras cuatro ecuaciones de clausura como

$$(b_i - a_i) \cdot (b_i - a_i) = a^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{8}$$

mientras que a partir del parámetro  $c$  se tiene que

$$(c_i - c_{i+1}) \cdot (c_i - c_{i+1}) = c^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad c_5 = c_1 \tag{9}$$

Finalmente, de acuerdo con el triángulo rectángulo  $\Delta CC_1C_2$ , está claro que una ecuación cuadrática vendrá dada por

$$w_5^2 + w_6^2 = c^2 \tag{10}$$

Las expresiones (1)–(10) son suficientes para abordar el análisis de posición directo e inverso del robot. Sin embargo, con el objetivo de simplificar el análisis, es recomendable formular ecuaciones de clausura complementarias, por ejemplo, con referencia a la Figura 7 se pueden introducir los

ángulos  $\theta$  y  $\phi$  para describir la orientación de la plataforma configurable del robot en lugar del vector unitario  $\hat{u}$ . En ese sentido se debe tomar en cuenta que

$$\begin{aligned} \pi - \phi - \theta &= 2 \operatorname{arc} \cos(w_3) \\ \pi - \phi - \theta &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}(w_4) \\ \phi - \theta &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}(w_5/c) \end{aligned} \quad (11)$$

Para explorar los beneficios de incluir  $\theta$  y  $\phi$ , considere que el vector de posición  $c_4$  se expresa como

$$c_4 = x_4 \hat{i} + y_4 \hat{j} \quad (12)$$

y con ello los vectores de posición de las esquinas  $C_1$  y  $C_3$  de la plataforma configurable se pueden escribir de la siguiente manera

$$c_1 = c_4 + c(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}); \quad c_3 = c_4 + c(\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \quad (13)$$

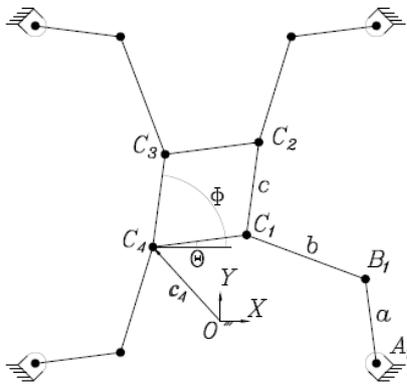


Figura 7: Caracterización de la orientación de la plataforma configurable  $c_p$  mediante dos ángulos,  $\theta$  y  $\phi$ . La pose de la plataforma configurable se complementa con el vector de posición  $c_4$ . Esta notación es muy apropiada para desarrollar el análisis de posición inverso del manipulador.

Además, a partir de la simetría de la plataforma configurable se deduce que el vector de posición de la esquina  $C_2$  se puede obtener en términos de los vectores de posición de las esquinas restantes de la siguiente manera

$$c = (c_1 + c_3)/2 = (c_2 + c_4)/2 \rightarrow c_2 = c_1 + c_3 - c_4 \quad (14)$$

Finalmente, es evidente que dos ecuaciones cuadráticas emergen si se toma en cuenta que

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1; \quad \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 \quad (15)$$

Las ecuaciones de restricción cinemática expuestas en esta subsección permiten resolver el análisis de posición directo e inverso del robot utilizando diferentes estrategias.

### 3.2. Solución del análisis de posición

El análisis de posición directo se aborda en primer lugar. El análisis consiste en encontrar la pose de la plataforma configurable dado un conjunto de coordenadas generalizadas  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Es decir, se requiere calcular el centro  $C$  de la

plataforma configurable, así como sus ángulos de orientación  $\theta$  y  $\phi$ . Las ecuaciones de clausura introducidas en la subsección 3.1 permiten resolver el análisis de posición directo empleando diferentes estrategias y en la contribución se proporcionan dos métodos de solución. El primer método considerado se compone de los siguientes pasos:

1. calcule los vectores  $b_i$  de acuerdo a las ecuaciones (7);
2. teniendo en cuenta que  $c = w_1 \hat{i} + w_2 \hat{j}$  mientras que  $\hat{u} = w_3 \hat{i} + w_4 \hat{j}$  y  $\hat{v} = w_4 \hat{i} + w_3 \hat{j}$ , reescriba los vectores de posición de las esquinas de la plataforma configurable tal y como se indica en las ecuaciones (5);
3. genere cuatro ecuaciones cuadráticas aplicando las expresiones (6);
4. considere dos ecuaciones cuadráticas recurriendo a las ecuaciones (10)–(3);
5. aplique el método de Newton–homotopía (Wu, 2005, 2006) para resolver las seis ecuaciones cuadráticas cuyas incógnitas son  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ );
6. determine el vector de posición  $c$  tomando en cuenta que  $c = w_1 \hat{i} + w_2 \hat{j}$ ;
7. calcule los ángulos de orientación  $\theta$  y  $\phi$  resolviendo simultáneamente las Ecuaciones (11).

La formulación de las seis ecuaciones cuadráticas mencionadas en el método 1 es una tarea fácil. Al contrario, resolver dichas ecuaciones es una tarea formidable, como ocurre en el análisis de posición directo de la mayoría de los manipuladores paralelos. Ante tal circunstancia es necesario recurrir a métodos especializados como lo son el método de eliminación algebraica, la eliminación dialítica de Sylvester, uso de software comercial (Maple, Mathematica), etc. Para los no expertos en robótica, la implementación de sensores así como la aplicación de software especializado (Bertini, PHCpack) son estrategias altamente recomendables.

El segundo método de solución considerado en la contribución se compone de los siguientes pasos:

1. calcule los vectores  $b_i$  de acuerdo con las Ecuaciones (7);
2. considere que  $c_4 = x_4 \hat{i} + y_4 \hat{j}$  y exprese los vectores de posición de las esquinas de la plataforma configurable de acuerdo con las Ecuaciones (13) y (14);
3. cuatro ecuaciones cuadráticas se obtienen aplicando las Ecuaciones (6);
4. genere dos ecuaciones cuadráticas recurriendo a las Ecuaciones (15);
5. los pasos anteriores conducen a seis ecuaciones cuadráticas cuyas incógnitas son precisamente  $\{x_4, y_4, \sin \theta, \cos \theta, \sin \phi, \cos \phi\}$ ;
6. resuelva el sistema de seis ecuaciones cuadráticas recurriendo al método de Newton–homotopía. Con este Paso se determinan los ángulos de orientación  $\theta$  y  $\phi$ , así como el vector de posición  $c_4$ ;
7. calcule los vectores unitarios  $e_1$  y  $e_3$  mediante las Ecuaciones (13);
8. calcule los vectores de posición de  $c$  y  $c_2$  recurriendo a la Ecuación (14).

Finalmente, el análisis de posición inverso consiste en determinar las coordenadas generalizadas  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) dada la pose de la plataforma configurable. En comparación con el análisis de posición directo, el análisis de posición inverso es hasta cierto punto trivial. En efecto, dados los ángulos de orientación  $\theta$  y  $\phi$  de la plataforma configurable, así como el vector de posición  $c$ , el análisis de posición inverso se realiza aplicando los siguientes pasos

1. determine  $w_3, w_4$  y  $w_5$  por medio de las Ecuaciones (11);
2. considere  $\hat{u} = w_3 \hat{i} + w_4 \hat{j}$  y  $\hat{v} = -w_4 \hat{i} + w_3 \hat{j}$ ;
3. determine  $w_6$  de la Ecuación (10);
4. aplique las Ecuaciones (5) para obtener los vectores de posición  $c_i$ ;
5. calcule los vectores de posición  $b_i$  resolviendo las Ecuaciones (6) y (8) para cada extremidad;
6. determine los dos valores posibles para cada actuador rotativo  $q_i$  o coordenada generalizada recurriendo a las Ecuaciones (7).

El análisis de posición inverso del robot muestra, de acuerdo al paso 6, que es posible obtener como máximo 16 posibles configuraciones del robot dada la pose de la plataforma configurable.

#### 4. Cinemática instantánea del robot manipulador

En esta sección, el análisis de velocidad del robot manipulador se aborda mediante la teoría de tornillos (Gallardo- Alvarado, 2016). Para este fin, los tornillos que representan los pares de revoluta del robot se muestran en la Figura 8.

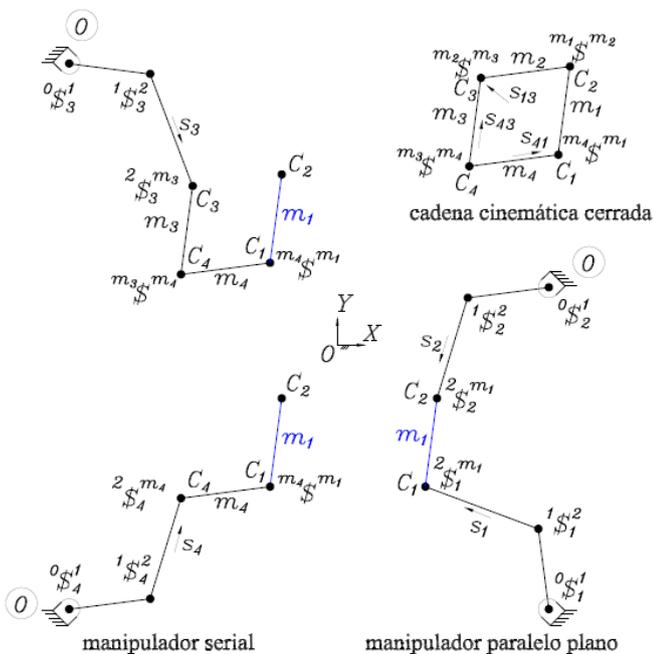


Figura 8: Los tornillos del robot manipulador. Mientras que la plataforma configurable  $c_p$  se modela como una cadena cinemática cerrada, el eslabón terminal  $m_1$  se modela ya sea como la plataforma móvil de un manipulador paralelo compuesto de dos extremidades o bien como el efector final de un manipulador tipo serie. Esta modelación de un eslabón terminal como si fuese parte de un manipulador tipo serie ofrece una ventaja importante en la simplificación del proceso de obtención de la ecuación entrada/salida de

velocidad de un manipulador configurable y, que por cierto, pasó inadvertida en Gallardo-Alvarado and Tinajero-Campos (2019). Por otra parte, la inclusión de líneas en coordenadas de Plücker en el interior de la plataforma configurable es un paso esencial en la generación de tornillos que sean recíprocos a los tornillos que representan los pares pasivos del manipulador.

El análisis de velocidad del robot consiste en determinar la relación que existe entre las velocidades articulares activas del robot y el estado de velocidad de los órganos terminales de interés de la plataforma configurable. La representación por medio de matrices Jacobianas hasta cierto punto libre de componentes redundantes es un logro elegante de la teoría de tornillos en el análisis de velocidad de manipuladores paralelos. La cancelación de velocidades articulares pasivas por aplicación de los tornillos recíprocos a través de la forma de Klein permite simplificar considerablemente el análisis de velocidad.

Sean  $\$1 = (\hat{s}_1, s_{01})$  y  $\$2 = (\hat{s}_2, s_{02})$  dos elementos del algebra de Lie  $se(3)$  del grupo Euclideo  $SE(3)$ . La forma de Klein, la cual se denota como  $[\$1; \$2]$  es una forma simétrica bilineal dada por

$$[\$1; \$2] = \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_{02} + \hat{s}_2 \cdot \hat{s}_{01} \quad (16)$$

El análisis de velocidad de manipuladores paralelos convencionales a menudo se vuelve una tarea tediosa dada la naturaleza misma de las cadenas cinemáticas cerradas involucradas. Esta complejidad se eleva si se toma en cuenta que la plataforma rígida se sustituye por una plataforma configurable (Hoevenaars et al., 2017). En la contribución, la estrategia para abordar el análisis de velocidad del manipulador involucra, en este orden riguroso, los siguientes pasos : i) exprese las velocidades articulares pasivas de la plataforma configurable en términos de una sola velocidad articular pasiva, ii) determine la ecuación entrada/salida de velocidad del eslabón terminal  $m_1$  aplicando la teoría de tornillos recíprocos, iii) determine el estado de velocidad del punto deseado de la plataforma configurable empleando la teoría de campos vectoriales helicoidales (Gallardo-Alvarado and Rico-Martínez, 1998).

Con este procedimiento en mente, la expresión de velocidad en forma de tornillo de la plataforma configurable puede escribirse considerándola como si fuese una cadena cinemática cerrada, es decir

$$m_1 \omega_{m_2} m_1 \$m_2 + m_2 \omega_{m_3} m_2 \$m_3 + m_3 \omega_{m_4} m_3 \$m_4 + m_4 \omega_{m_1} m_4 \$m_1 = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (17)$$

Por lo tanto, con base en la velocidad articular pasiva  $m_1 \omega_{m_2}$ , las velocidades articulares de la cadena cinemática cerrada pueden expresarse recurriendo a las propiedades de la forma de Klein de la siguiente manera

$$m_2 \omega_{m_3} = g_{23_{m_1}} \omega_{m_2, m_3} \omega_{m_4} = g_{34_{m_1}} \omega_{m_2, m_4} \omega_{m_1} = g_{41_{m_1}} \omega_{m_2} \quad (18)$$

donde, los coeficientes de primer orden (Gallardo-Alvarado and Rico-Martínez, 2001) están dados por

$$g_{23} = -\frac{\{s_{41}, m_1 \$m_2\}}{\{s_{41}, m_2 \$m_3\}}, g_{34} = -\frac{\{s_{13}, m_1 \$m_2\}}{\{s_{13}, m_3 \$m_4\}}, g_{41} = -\frac{\{s_{43}, m_1 \$m_2\}}{\{s_{43}, m_4 \$m_1\}} \quad (19)$$

Más aún,  $s_{41}$ ,  $s_{13}$  y  $s_{43}$  son líneas en coordenadas de Plücker orientadas como se indica en la Figura 8.

Posteriormente, con el propósito de determinar la ecuación entrada/salida de velocidad del eslabón terminal  $m_1$ , el estado de la velocidad de la plataforma móvil  $m_1$  puede escribirse en forma de tornillo a través de cualesquiera de las extremidades del manipulador paralelo de dos patas del cual se supone forma parte como

$${}^0V_O^{m_1} = 0\omega_1^i {}^0\mathcal{S}_i^1 + 1\omega_2^i {}^1\mathcal{S}_i^2 = 2\omega_{m_1}^i {}^2\mathcal{S}_i^{m_1} \quad i = 1, 2 \quad (20)$$

Por otra parte, considere que  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) son líneas en coordenadas de Plücker dirigidas desde los puntos  $B_i$  a los puntos  $C_i$ . De esta manera, la aplicación de las propiedades de la forma de Klein, como lo son la cancelación de términos, conduce a

$$\{s_i; {}^0V_O^{m_1}\} = 0\omega_1^i \{s_i; {}^0\mathcal{S}_i^1\} \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

Ahora bien, considerando al eslabón terminal  $m_1$  como el efector final de una cadena cinemática serial abierta, el estado de velocidad  ${}^0V_O^{m_1}$  puede escribirse en forma de tornillo de la siguiente manera

$${}^0V_O^{m_1} = {}_0\omega_1^{30}\mathcal{S}_3^1 + {}_1\omega_2^{31}\mathcal{S}_3^2 + {}_2\omega_{m_3}^{32}\mathcal{S}_3^{m_3} + {}_{m_3}\omega_{m_4}^{m_3}\mathcal{S}_4^{m_4} + {}_{m_4}\omega_{m_1}^{m_4}\mathcal{S}_4^{m_1} \quad (22)$$

Por lo tanto, la aplicación de la forma de Klein entre la línea  $s_3$  con ambos lados de la Ecuación (22) conduce a

$$\{s_3; {}^0V_O^{m_1}\} = k_1 {}_0\omega_1^3 + k_2 {}_{m_1}\omega_1 \quad (23)$$

donde  $k_1 = \{s_3; {}^0\mathcal{S}_3^1\}$  mientras que  $k_2 = \{s_3; g_{34}^{m_3}\mathcal{S}_4^{m_4} + g_{41}^{m_4}\mathcal{S}_4^{m_1}\}$ . Similarmente, es evidente el que

$$\{s_4; {}^0V_O^{m_1}\} = k_3 {}_0\omega_1^4 + k_4 {}_{m_1}\omega_{m_1} \quad (24)$$

donde  $k_3 = \{s_4; {}^0\mathcal{S}_4^1\}$  mientras que  $k_4 = \{s_4; g_{41}^{m_4}\mathcal{S}_4^{m_1}\}$ . Al resolver las Ecuaciones (23) y (24) se obtiene que

$$\{s_4 - k_4 s_3 / k_2; {}^0V_O^{m_1}\} = -k_1 k_4 {}_0\omega_1^3 / k_2 + k_3 {}_0\omega_1^4 \quad (25)$$

Finalmente, agrupando matricialmente las expresiones (21) y (25), la ecuación entrada/salida de velocidad del eslabón terminal  $m_1$  se obtiene de manera compacta, y elegante, como

$$\mathbf{J}_1^T \Delta {}^0V^{m_1} = \bar{\mathbf{J}}_1 \dot{q} \quad (26)$$

donde las matrices Jacobianas directa e inversa de la Ecuación (26), designadas como  $\mathbf{J}_1$  y  $\bar{\mathbf{J}}_1$  respectivamente, están dadas por

$$\mathbf{J}_1 = [s_1 \quad s_2 \quad s_4 - k_4 s_3 / k_2]$$

y

$$\bar{\mathbf{J}}_1 = \begin{bmatrix} \{s_1; {}^0\mathcal{S}_1^1\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{s_2; {}^0\mathcal{S}_2^1\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 k_4 / k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Por su parte,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es un operador de polaridad mientras que

$$\dot{q} = [{}_0\omega_1^1 \quad {}_0\omega_1^2 \quad {}_0\omega_1^3 \quad {}_0\omega_1^4]^T$$

es el vector de velocidades articulares activas del robot manipulador.

Una vez que el estado de velocidad del eslabón terminal  $m_1$  se determina en base a la Ecuación (26), con el propósito de determinar el estado de velocidad del eslabón terminal  $m_3$  es interesante notar que el movimiento de éste como se observa desde el eslabón terminal  $m_1$  es una traslación curvilínea. Por lo tanto, el vector de velocidad angular de ambos eslabones terminales es el mismo como se observa desde la plataforma fija  $o$  y por lo tanto

$$p({}^0V_O^{m_3}) = p({}^0V_O^{m_1}) \quad (27)$$

y con ello la parte dual del estado de velocidad  ${}^0V_O^{m_3}$  puede calcularse resolviendo las siguientes ecuaciones

$$\{s_i; {}^0V_O^{m_3}\} = {}_0\omega_1^i \{s_i; {}^0\mathcal{S}_i^1\} \quad i = 3, 4 \quad (28)$$

Si se desea calcular el estado de velocidad de cualquier punto  $P$  de la plataforma configurable, se puede recurrir al concepto de campo vectorial helicoidal. En efecto

$${}^0V_P^{m_i} = \begin{bmatrix} p({}^0V_O^{m_i}) \\ d({}^0V_O^{m_i}) + p({}^0V_O^{m_i}) \times \mathbf{r}_{p/o} \end{bmatrix} \quad i = 1, 3 \quad (29)$$

donde,  $\mathbf{r}_{p/o}$  es el vector de posición del punto  $P$  con respecto al punto  $O$ . Finalmente, la velocidad del punto  $P$  se obtiene como la parte dual del estado de velocidad  ${}^0V_P^{m_i}$ .

## 5. Aplicaciones

En esta sección se proporcionan ejemplos numéricos que cubren la mayoría de los temas tratados en la contribución. Para este fin, los parámetros del robot manipulador se eligen como  $a = 80\text{mm}$ ,  $b = 120\text{mm}$ ,  $c = 120\text{mm}$ ,  $A_1 = (200, 0)\text{mm}$ ,  $A_2 = (0, 200)\text{mm}$ ,  $A_3 = (-200, 0)\text{mm}$  y  $A_4 = (0, -200)\text{mm}$ . La selección de los parámetros del ejemplo no tiene nada de particular, simplemente se tomaron en cuenta elementos básicos como lo son la rotabilidad de los eslabones, por ejemplo,  $a < b$ , así como la simetría de la plataforma configurable.

La primera parte del ejemplo numérico se enfoca al análisis de posición inverso, una tarea hasta cierto punto trivial en los manipuladores paralelos. Considere que los ángulos de orientación de la plataforma configurable están dados por  $\theta = 75^\circ$  y  $\phi = 100^\circ$  mientras que el centro  $C$  de la plataforma configurable está dado por  $C = (20, -30)\text{mm}$ . La aplicación del análisis de posición inverso determina que existen 16 configuraciones factibles del manipulador las cuales se muestran en la Figura 9.

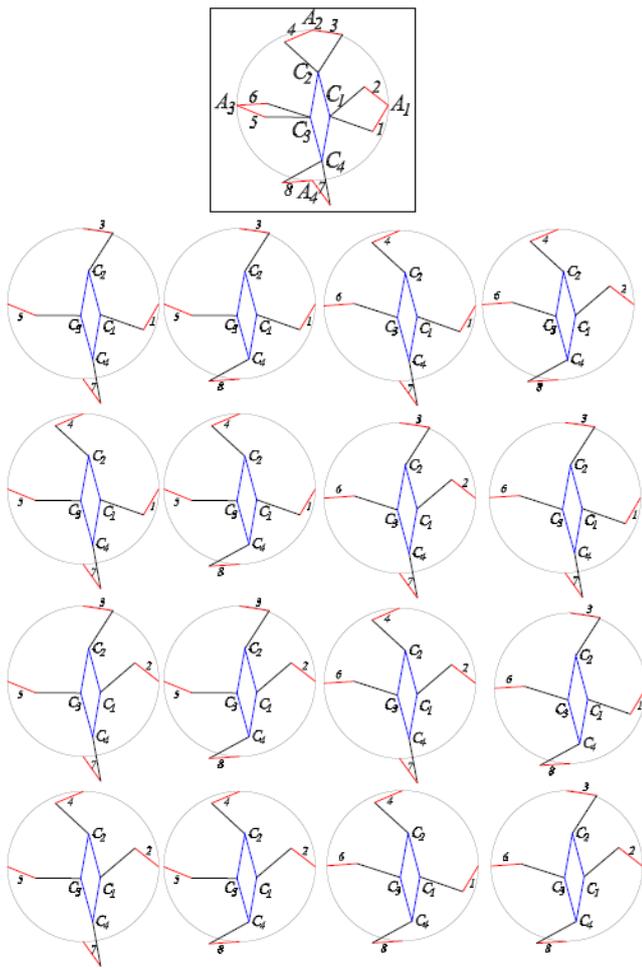


Figura 9: Configuraciones del robot manipulador que satisfacen el análisis de posición inverso. Cada extremidad admite dos configuraciones simétricas y por lo tanto es posible obtener 16 soluciones del análisis de posición inverso. Es decir, es posible disponer de 16 conjuntos diferentes de coordenadas generalizadas  $q_i (i = 1; 2; 3; 4)$ .

Una solución del análisis de posición inverso arroja las siguientes coordenadas generalizadas:  $q_1 = 141;956^\circ$ ,  $q_2 = 203;366^\circ$ ,  $q_3 = 337;773^\circ$  y  $q_4 = 305;499^\circ$ . Para probar la formulación del análisis de posición directo, suponga que las coordenadas generalizadas tienen estos valores y con ello se desean determinar las configuraciones del robot que satisfacen dicho conjunto de coordenadas generalizadas. En la mayoría de los manipuladores paralelos el análisis de posición directo es una tarea sumamente complicada. Por lo tanto, para el robot bajo estudio a continuación se describe paso a paso como se generaron las ecuaciones de clausura y su solución. El método 2 fue el utilizado en esta tarea y a continuación se proporcionan los resultados generados.

1. aplique las Ecuaciones (7) para obtener:  $B_1 = (136,996, 49,301, 0,0)$ ,  $B_2 = (-73,439, 168,271, 0,0)$ ,  $B_3 = (-125,944, -30,262, 0,0)$  y  $B_4 = (46,455, -265,130, 0,0)$ ;
2. tome en cuenta que  $c_4 = x_4 i + y_4 j$  y aplique las Ecuaciones (13) y (14) para generar:  $C_1 = (x_4 + 120,0 \cos \theta, y_4 + 120,0 \sin \theta, 0,0)$ ,  $C_2 = (x_4 + 120,0 \cos \theta + 120,0 \cos \phi, y_4 + 120,0 \sin \theta + 120,0 \sin \phi, 0,0)$  y  $C_3 = (x_4 + 120,0 \cos \theta, y_4 + 120,0 \sin \theta, 0,0)$ ;

3. cuatro ecuaciones cuadráticas se obtienen aplicando las Ecuaciones (6) como

$$f_1 = 6798,792 - 273,993x_4 - 32879,275 \cos \theta + x_4^2 + 240,0x_4 \cos \theta + 14400,0 \cos^2 \theta - 98,602y_4 - 11832,315 \sin \theta + y_4^2 + 240,0 y_4 \sin \theta + 14400,0 \sin^2 \theta$$

$$f_2 = 19308,697 + 146,878 x_4 + 17625,410 \cos \theta + 17625,410 \cos \phi + x_4^2 + 240,0x_4 \cos \theta + 240,0x_4 \cos \phi + 14400,0 \cos^2 \theta + 28800,0 \cos \theta \cos \phi + 14400,0 \cos^2 \phi - 336,543y_4 - 40385,218 \sin \theta - 40385,218 \sin \phi + y_4^2 + 240,0 y_4 \sin \theta + 240,0 y_4 \sin \phi + 14400,0 \sin^2 \theta + 28800,0 \sin \theta \sin \phi + 14400,0 \sin^2 \phi$$

$$f_3 = 2377,842 + 251,889x_4 + 30226,705 \cos \phi + x_4^2 + 240,0x_4 \cos \phi + 14400,0 \cos^2 \phi + 60,524y_4 + 7262,919 \sin \phi + y_4^2 + 240,0y_4 \sin \phi + 14400,0 \sin^2 \phi$$

$$f_4 = 58052,020 - 92,910x_4 + x_4^2 + 530,260y_4 + y_4^2$$

4. genere dos ecuaciones cuadráticas recurriendo a las Ecuaciones (15);

$$f_5 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1,0, f_6 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi - 1,0$$

5. los pasos anteriores conducen a seis ecuaciones cuadráticas cuyas incógnitas son precisamente  $\{x_4, y_4; \sin \theta, \cos \theta, \sin \phi, \cos \phi\}$ ;
6. resuelva el sistema de seis ecuaciones cuadráticas recurriendo al método de Newton-homotopía. Con este paso se determinan los ángulos de orientación  $\theta$  y  $\phi$ , así como el vector de posición  $c_4$ . El proceso iterativo de una solución se resume en la Tabla 1.

Tabla 1: Una solución del análisis directo de posición aplicando el método Newton-homotopía. Las funciones auxiliares de homotopía  $g$  se seleccionaron como simples combinaciones lineales de la forma  $g_i = \sum_{j=1}^6 \lambda_j w_j + \delta_i$  donde  $w_j (j = 1, 2, \dots, 6)$  son las variables por determinar mientras que  $\lambda$  y  $\delta \in \mathfrak{R}$ .

iteración	$x_4$ (mm)	$y_4$ (mm)	$\theta$ ( $^\circ$ )	$\phi$ ( $^\circ$ )
1	-10.0	-160.0	70.0	90.0
2	15.330	-145.634	79.239	99.791
3	24.028	-146.916	79.839	104.419
4	25.090	-147.042	79.998	104.988
5	25.112	-147.043	79.999	105.000

Con esta solución las coordenadas del punto  $C_4$  vendrán dadas por  $C_4 = (25,112, -147,043)$ ;

7. con la aplicación de las Ecuaciones (13) se determinan las coordenadas de los puntos  $C_1$  y  $C_3$  como  $C_1 = (45,949, -28,866, 0,0)$  y  $C_3 = (-5,947, -31,133, 0,0)$ ;
8. por su parte, las coordenadas del punto  $C_2$  se obtienen de la Ecuación (14) como  $C_2 = (14,889, 87,042, 0,0)$

Esta solución se validó aplicando el programa PHCpack (Verschelde, 1999). En efecto con dicho software especializado se obtuvo la solución  $C_1 = (45,949, -28,862, 0,0)$ ,  $C_2 = (14,890, 87,048, 0,0)$ ,  $C_3 = (-5,947, -31,128, 0,0)$  y  $C_4 = (25,111, -147,042, 0,0)$ , la cual concuerda razonablemente con

el método Newton-homotopía. En total se generaron dos soluciones reales para el análisis de posición directo las cuales se proporcionan en la Figura 10.

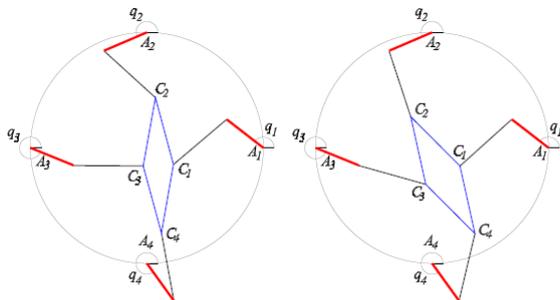


Figura 10: Análisis de posición directo. Las ecuaciones de clausura correspondientes se resuelven por medio del método Newton-homotopía generando dos soluciones reales. Las mismas soluciones se obtienen con la aplicación de software especializado como lo es el programa PHCpack (Verschelde, 1999).

La siguiente parte del ejercicio se dedica a ejemplificar el cálculo de la cinemática instantánea del manipulador. Suponga que el manipulador se encuentra en la configuración que se muestra en la Figura 11, la cual corresponde a una de las dos soluciones del análisis directo de posición. Para mayor exactitud, las coordenadas de los pares de revoluta del robot se detallan en la Tabla 2.

Tabla 2: Coordenadas de los pares de revoluta del robot en su configuración de referencia.

$i$	$A_i$	$B_i$	$C_i$
1	(200.0,0.0,0.0)	(136.996,49.301,0.0)	(45.949,-28.866,0.0)
2	(0.0,200.0,0.0)	(-73.439,168.271,0.0)	(14.889,87.042,0.0)
3	(-200.0,0.0,0.0)	(-125.944,-30.262,0.0)	(-5.947,-31.133,0.0)
4	(0.0,-200.0,0.0)	(46.455,-265.130,0.0)	(25.112,-147.043,0.0)

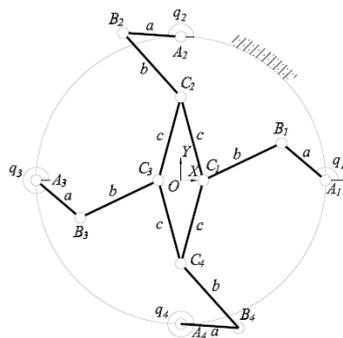


Figura 11: Cinemática instantánea. Configuración de referencia del manipulador.

A partir de la configuración del robot, las coordenadas generalizadas deben regirse por funciones periódicas dadas por  $q_1 = 2.477 - 1,5 \sin(t) \cos(t)$ ,  $q_2 = 3,549 - 1,25 \sin(t) \cos(t)$ ,  $q_3 = 5,895 - 2 \sin(t) \cos(t)$  y  $q_4 = 5,331 + 1,5 \sin(t) \cos(t)$  donde, el tiempo  $t$  se da en el intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$  (s). Con esta información se requiere calcular la velocidad de los puntos  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de la plataforma configurable. Con la aplicación del método de análisis desarrollado en la contribución se obtienen los resultados numéricos que se proporcionan en la Figura 12. Más aún, los resultados obtenidos por medio de la teoría de tornillos se validan usando un método alternativo

como lo es el uso del programa de simulación dinámica ADAMS.<sup>TM</sup>

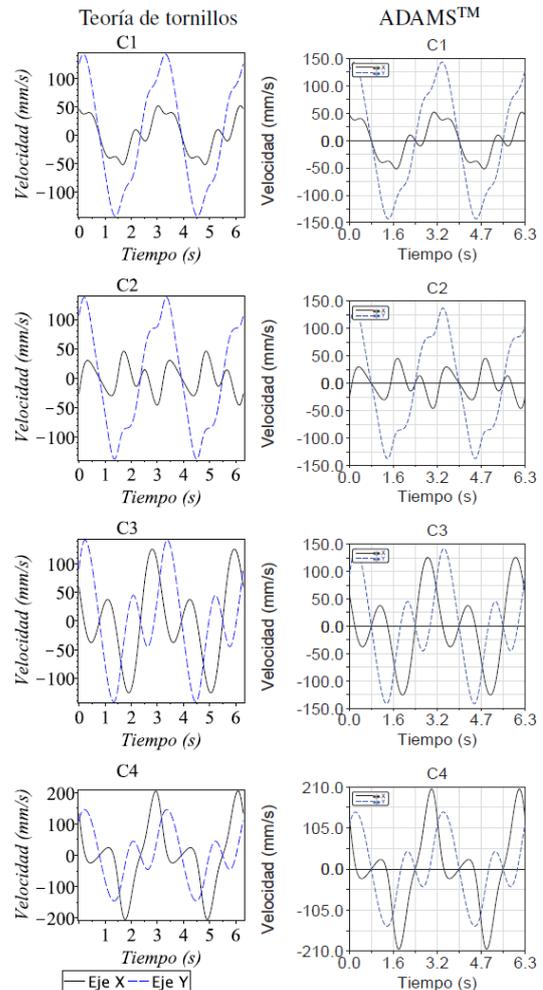


Figura 12: Cinemática instantánea de la plataforma configurable. El análisis se centra en el cálculo de las velocidades de los puntos  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Finalmente, vale la pena destacar que los resultados numéricos obtenidos por medio de la teoría de tornillos se encuentran en excelente concordancia con los generados con el programa ADAMS.<sup>TM</sup>

### 6. Conclusiones

En este trabajo se proporciona el análisis cinemático de un manipulador paralelo de 4 grados de libertad equipado con una plataforma móvil configurable. La movilidad del robot es tal que es posible considerar dos efectores con movimientos planares independientes sobre la plataforma configurable. Esta es una ventaja notable sobre el manipulador paralelo convencional plano 4-RRR provisto con una plataforma rígida y que por lo tanto es actuado redundante. Al contrario, el robot bajo estudio es cinemáticamente redundante y por lo tanto su capacidad de operación es mayor. El análisis de posición directo/inverso del robot se resuelve planteando simples ecuaciones de clausura que conducen a ecuaciones cuadráticas las cuales se resuelven aplicando el método Newton-homotopía. Por su parte, la ecuación entrada/salida del robot se obtiene de manera sistemática por medio de la

teoría de tornillos. En ese sentido las expresiones son compactas y las matrices Jacobianas correspondientes se expresan claramente gracias a las propiedades de la forma de Klein. Más aún, la mayoría de las velocidades articulares pasivas del manipulador se cancelan por virtud de los tornillos recíprocos del robot. Finalmente, la contribución incluye ejemplos numéricos que ilustran detalladamente el método de análisis cinemático desarrollado. Los resultados del análisis de posición con el software de acceso libre PHCpack (Verschelde, 1999) mientras que los resultados numéricos del análisis de velocidad se verifican con el programa de análisis dinámico ADAMS™.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, Conacyt, a través de la membresía del Dr. Jaime Gallardo-Alvarado al Sistema Nacional de Investigadores.

## Referencias

- Aimedee, F., Gogu, G., Dai, J. S., Bouzgarrou, C., Bouton, N., 2016. Systematization of morphing in reconfigurable mechanisms. *Mechanism and Machine Theory* 96, 215–224.
- Baron, N., Philippides, A., Rojas, N., 2018. A novel kinematically redundant planar parallel robot manipulator with full rotatability. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics* 11, 1–8.
- Bonev, I. A., Zlatanov, D., Gosselin, C. M., 2001. Singularity analysis of 3-dof planar parallel mechanisms via screw theory. *ASME Journal of Mechanical Design* 125, 573–581.
- Carbonari, L., Callegari, M., Palmieri, G., Palpacelli, M. C., 2014. A new class of reconfigurable parallel kinematic machines. *Mechanism and Machine Theory* 79, 173–183.
- Chakarov, D., 2004. Study of the antagonistic stiffness of parallel manipulators with actuation redundancy. *Mechanism and Machine Theory* 39, 583–601.
- Dai, J. S., Gogu, G., 2016. Special issue on reconfigurable mechanisms: morphing, metamorphosis and reconfiguration through constraint variations and reconfigurable joints. *Mechanism and Machine Theory* 96, 213–214.
- Fang, H., Tang, T., Zhang, J., 2019. Kinematic analysis and comparison of a 2r1t redundantly actuated parallel manipulator and its non-redundantly actuated forms. *Mechanism and Machine Theory* 142, 1–23.
- Gallardo-Alvarado, J., 2016. *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Springer International Publishing Switzerland, Switzerland.
- Gallardo-Alvarado, J., Rico-Martínez, J. M., 1998. Screw theory and helicoidal fields. *Proceedings of the ASME 1998 Design Engineering Technical Conferences, ASME, cD rom*.
- Gallardo-Alvarado, J., Rico-Martínez, J. M., 2001. Jerk influence coefficients, via screw theory, of closed chains. *Meccanica* 36, 213–228.
- Gallardo-Alvarado, J., Tinajero-Campos, J. H., 2019. A parallel manipulator with planar configurable platform and three end-effectors. *Mathematical Problems in Engineering Paper 7972837*.
- Hovenaars, A. G. L., Gosselin, C., Lambert, P., Herder, J. L., 2017. A systematic approach for the jacobian analysis of parallel manipulators with two end-effectors. *Mechanism and Machine Theory* 109, 171–194.
- Kang, X., Dai, J. S., 2019. Relevance and transferability for parallel mechanisms with reconfigurable platforms. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics* 11, 031012 (9 pages).
- Kock, S., Schumacher, W., 1998. A parallel x–y manipulator with actuation redundancy for high-speed and active-stiffness applications. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, Leuven*, pp. 2295–2300.
- Kock, S., Schumacher, W., 2000. A mixed elastic and rigid-body dynamic model of an actuation redundant parallel robot with high-reduction gears. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, San Francisco*.
- Lambert, P., Herder, J. L., 2016. Parallel robots with configurable platforms: fundamental aspects of a new class of robotic architectures. *Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 230, 463–472.
- Lambert, P., Herder, J. L., 2019. A 7-DOF redundantly actuated parallel haptic device combining 6-DOF manipulation and 1-DOF grasping. *Mechanism and Machine Theory* 134, 349–364.
- Landure, J., Gosselin, C., 2018. Kinematic analysis of a novel kinematically redundant spherical parallel manipulator. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics* 10, 1–10.
- Liu, F., Wu, J., Wang, L., Wang, J., 2014. Determination of the maxima singularity-free zone of 4-rrr redundant parallel manipulators and its application on investigating length ratios of links. *Robotica* 1, 1–17.
- Ma, X., Zhang, K., Dai, J. S., 2018. Novel spherical-planar and bennett-spherical 6r metamorphic linkages with reconfigurable motion branches. *Mechanism and Machine Theory* 128, 628–647.
- Mohamed, M. G., Gosselin, C., 2005. Design and analysis of kinematically redundant parallel manipulators with configurable platforms. *IEEE Transactions on Robotics* 21, 277–287.
- Mueller, A., 2006. Stiffness control of redundantly actuated parallel manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, Orlando*.
- Mueller, A., 2008. Redundant actuation of parallel manipulators. In: Wu, H. (Ed.), *Parallel Manipulators, Towards New Applications*. INTECH.
- Qu, H., Zhang, C., Guo, S., 2018. Structural synthesis of a class of kinematically redundant parallel manipulators based on modified G-K criterion and RDOF criterion. *Mechanism and Machine Theory* 130, 47–70.
- Schreiber, L. T., Gosselin, C., 2018. Kinematically redundant planar parallel mechanisms: Kinematics, workspace and trajectory planning. *Mechanism and Machine Theory* 119, 91–105.
- Verschelde, J., 1999. Algorithm 795: Phcpack: a general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Transactions on Mathematical Software* 25, 251–276.
- Wu, T.-M., 2005. A study of convergence on the newton-homotopy continuation method. *Applied Mathematics and Computation* 168, 1169–1174.
- Wu, T.-M., 2006. The inverse kinematics problem of spatial 4pr robot manipulator by the homotopy continuation method with an adjustable auxiliary homotopy function. *Nonlinear Analysis* 64, 2373–2380.
- Ye, W., Fang, Y., Zhang, K., Guo, S., 2014. A new family of reconfigurable parallel mechanisms with diamond kinematotropic chain. *Mechanism and Machine Theory* 74, 1–9.
- Yi, B.-J., Na, H. Y., Lee, J. H., Hong, Y.-S., Oh, S.-R., Suh, I.-H., Kim, W. K., 2002. Design of a parallel-type gripper mechanism. *International Journal of Robotics Research* 21, 661–676.
- Yi, B. Y., Freeman, R. A., Tesar, D., 1994. Force and stiffness transmission in redundantly actuated mechanisms: the case for a spherical shoulder mechanism. *Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems* 45, 163–172.
- Zhang, K., Dai, J. S., Fang, Y., 2013. Geometric constraint and mobility variation of two 3svpsv metamorphic parallel mechanisms. *ASME Journal of Mechanical Design* 135, paper 011001.