



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Variaciones de la Transferencia de Hohmann: Segmentada y Bielíptica

Moraño Fernández, José A. ([jomofer@mat.upv.es](mailto:jomofer@mat.upv.es))

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID  
Universitat Politècnica de València

## Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>3. Transferencia de Hohmann Segmentada</b>	<b>3</b>
<b>4. Transferencia Bielíptica de Hohmann entre órbitas circulares</b>	<b>5</b>
4.1. Bielíptica Externa . . . . .	5
4.2. Bielíptica Interna . . . . .	8
4.3. Comparativa Bielíptica/Hohmann . . . . .	10
<b>5. Cierre</b>	<b>11</b>

## 1 Introducción

La transferencia de Hohmann es la maniobra biimpulsiva más eficiente entre dos órbitas circulares. Pero si permitimos más de dos impulsos aparecen otras posibilidades. En este artículo se presentan dos variantes de la transferencia de Hohmann: La Transferencia de Hohmann Segmentada y la Transferencia de Hohmann Bielíptica.

Tras cada exposición se presentan ejemplos para mostrar su aplicación a diferentes situaciones.

Además se hace una comparativa entre las transferencias de Hohmann estándar y bielíptica.

Para la aplicación de nuestras ecuaciones vamos a considerar algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante comparada con la del Sol o con la de un planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante  $\mu = G(M + m) = GM$  que para el caso de la Tierra resulta ser

$$\mu = 398\,600.5 \text{ km}^3/\text{s}^2.$$

- La aceleración de la gravedad en la Tierra varía con la altura pero en general se considera la gravedad al nivel del mar

$$g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2 = 0.00981 \text{ km/s}^2$$

También es necesario recordar que en las órbitas elípticas<sup>1</sup> se verifican las siguientes propiedades:

- El momento angular específico  $h$  es constante y en cualquier posición se verifica que  $h = r v_{\perp}$ , siendo  $r$  la distancia al foco y  $v_{\perp}$  la velocidad transversal en esa posición. Aplicando esa propiedad a las posiciones del apogeo  $r_a$  y del perigeo  $r_p$ , donde  $v = v_{\perp}$ , se obtiene:

$$v_a = \frac{h}{r_a} \quad \text{y} \quad v_p = \frac{h}{r_p}$$

- $e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$ ;  $a = \frac{r_a + r_p}{2}$ ;  $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ ;  $h = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_a r_p}{r_a + r_p}}$

Además como las maniobras empleadas son impulsivas hay que tener en cuenta que:

- Durante una maniobra impulsiva la posición de la nave es fija, solo varía el vector velocidad una cantidad  $\Delta v$  que puede originar un cambio en la magnitud (pumping) o en la dirección (cranking) del vector velocidad o en ambos. La magnitud  $\Delta v$  está relacionada con la cantidad de propelente consumido  $m_P$  en la maniobra. En el espacio libre, sin drag ni gravedad la ecuación del motor cohete de Tsiolkovski tiene la aproximación<sup>2</sup>

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad \rightarrow \quad \frac{m_i}{m_f} = e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \quad \rightarrow \quad \frac{m_P}{m_i} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}}$$

<sup>1</sup> $e$ : excentricidad,  $a$  semieje mayor y  $T$  periodo orbital

<sup>2</sup>Si la masa inicial es  $m_i = m_E + m_P + m_{PL}$  ( $E$ : Estructura,  $P$ : Propelente y  $PL$ : Carga de pago o Payload) e  $I_{sp}$  es el impulso específico del propulsor y la masa final tras el impulso es  $m_f = m_i - m_P$ .

## 2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de:**

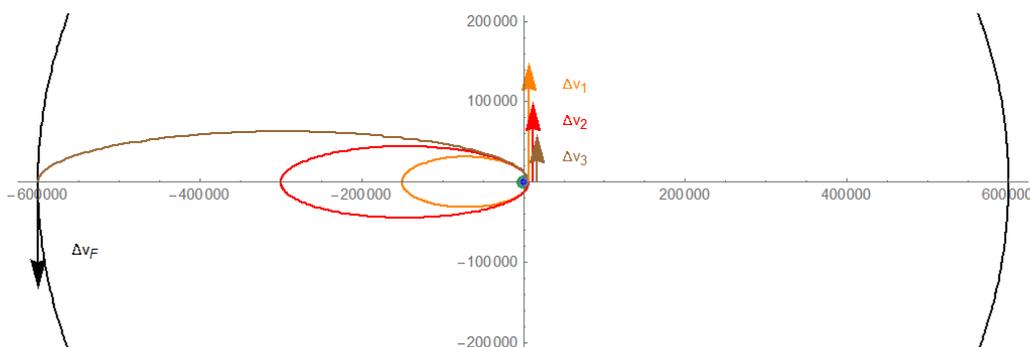
- Obtener que impulsos son necesarios para hacer una transferencia entre dos órbitas circulares mediante una maniobra de Hohmann segmentada o mediante una biéptica.
- Hallar el tiempo que se requiere para hacer cada una de esas transferencias.
- Analizar la conveniencia de utilizar la transferencia de Hohmann estándar o alguna de sus variantes para conseguir reducir el consumo o el tiempo necesario para la transferencia.

## 3 Transferencia de Hohmann Segmentada

En algunas situaciones el empuje en un solo impulso puede estar limitado por las características de nuestro propulsor haciendo que la transferencia de Hohmann no se pueda ejecutar con solo dos impulsos.

En estos casos se puede utilizar una **transferencia de Hohmann Segmentada** que consiste en alcanzar el apogeo de la órbita de transferencia con varios impulsos en vez de con un único primer impulso, es decir, se van dando **incrementos de velocidad en cada paso por el perigeo** para ir aumentando el apogeo progresivamente. Una vez se alcanza el apogeo con el radio deseado se aplica el impulso final para circularizar la órbita (que también puede ejecutarse en varios impulsos).

**Ejemplo 3.1** *Un satélite de  $m = 3000 \text{ kg}$  orbita alrededor de la Tierra en una órbita de parking circular de radio  $R_1 = 6578 \text{ km}$ . Calcula el coste del propelente y el tiempo necesario para situar el satélite en una órbita circular de radio  $R_2 = 600000 \text{ km}$  si el impulso específico del propulsor es de  $I_{sp} = 300 \text{ s}$  y, por limitaciones del propulsor, la segmentamos con apogeos intermedios de  $R_A = 150000 \text{ km}$  y  $R_B = 300000 \text{ km}$ . Ver figura 1.*



**Figura 1:** Transferencia de Hohmann segmentada: Tres impulsos en el mismo punto (perigeo) y un impulso final en el apogeo

**Solución:** Vamos a estimar primero los impulsos de la transferencia de Hohmann. Calculando los momentos de las órbitas inicial, destino y de Hohmann,  $h_1, h_2$  y  $h_H$ :

$$h_1 = \sqrt{\mu R_1} = \sqrt{398600.5 \cdot 6578} = 51205.4 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_3 = \sqrt{\mu R_2} = \sqrt{398600.5 \cdot 600000} = 489040 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_H = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{6578 \cdot 600000}{6578 + 600000}} = 72021.7 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

por lo que los impulsos de esta transferencia son

$$\Delta v_1 = \frac{h_H}{R_1} - \frac{h_1}{R_1} = \frac{72021.7}{6578} - \frac{51205.4}{6578} = 3.165 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_2 = \frac{h_2}{R_2} - \frac{h_H}{R_2} = \frac{489040}{600000} - \frac{72021.7}{600000} = 0.695 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 3.165 + 0.695 = 3.860 \text{ km/s}$$

que en consumo de combustible resulta:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v_T}{I_{sp} g_0}} = 1 - e^{-\frac{3.860}{300 \cdot 0.00981}} = 0.731 \quad \rightarrow \quad \Delta m = 0.731 \cdot 3000 = 2191.7 \text{ kg}$$

Por otra parte, el tiempo invertido en recorrer esta órbita de transferencia es:

$$t_H = \frac{T_H}{2} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{6578 + 600000}{2}\right)^3}{398600.5}} = 831124 \text{ s}$$

Si por ejemplo existiera la restricción de que ningún impulso supere los 3 km/s, esta maniobra no podría realizarse de esta forma. **Segmentando** la transferencia en dos apogeos intermedios como los propuestos en este ejemplo si podría realizarse:

Calculando los momentos de las tres órbitas intermedias

$$h_{1A} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{R_1 R_A}{R_1 + R_A}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{6578 \cdot 150000}{6578 + 150000}} = 70877.9 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_{AB} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{R_1 R_B}{R_1 + R_B}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{6578 \cdot 300000}{6578 + 300000}} = 71634.3 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_{B2} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = (h_H) = 72021.7 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

permitiendo calcular el valor de los impulsos

$$\Delta v_1^{seg} = \frac{h_{1A}}{R_1} - \frac{h_1}{R_1} = \frac{70877.9}{6578} - \frac{51205.4}{6578} = 2.991 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_2^{seg} = \frac{h_{AB}}{R_1} - \frac{h_{1A}}{R_1} = \frac{71634.3}{6578} - \frac{70877.9}{6578} = 0.115 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_3^{seg} = \frac{h_{B2}}{R_1} - \frac{h_{AB}}{R_1} = \frac{72021.7}{6578} - \frac{71634.3}{6578} = 0.0589 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_4^{seg} = \frac{h_2}{R_2} - \frac{h_{B2}}{R_2} = \frac{489040}{600000} - \frac{72021.7}{600000} = 0.695 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_T^{seg} = \Delta v_1^{seg} + \Delta v_2^{seg} + \Delta v_3^{seg} + \Delta v_4^{seg} = 2.991 + 0.115 + 0.0589 + 0.695 = 3.860 \text{ km/s}$$

Se observa que el impulso total coincide con el valor de  $\Delta v_T$  (Hohmann). Por tanto el consumo de combustible es el mismo para una transferencia de Hohmann estándar que para una segmentada.

El tiempo de transferencia, en cambio, será muy diferente. Evaluando los periodos de las dos primeras y el semiperiodo de la tercera, resulta

$$t_{1A} = T_{1A} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{R_1+R_A}{2}\right)^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{6578+150000}{2}\right)^3}{398600.5}} = 218003 \text{ s}$$

$$t_{AB} = T_{1B} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{R_1+R_B}{2}\right)^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{6578+300000}{2}\right)^3}{398600.5}} = 597279 \text{ s}$$

$$t_{B2} = \frac{T_{12}}{2} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{6578+600000}{2}\right)^3}{398600.5}} = 833113 \text{ s}$$

lo que nos da un tiempo total de casi el doble de la estándar

$$t^{seg} = T_{1A} + T_{1B} + \frac{T_{12}}{2} = 218003 + 597279 + 833113 = 1646414 \text{ s} = 198.1\% t_H.$$

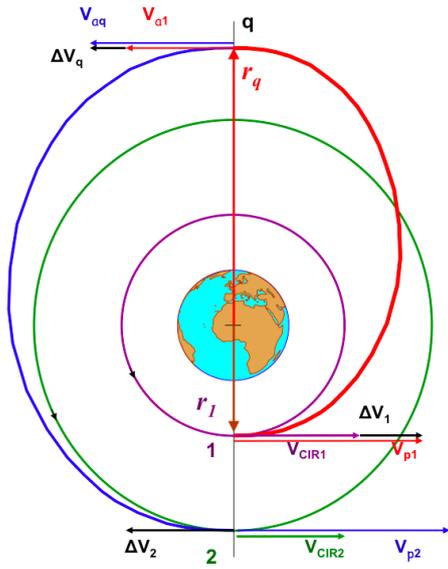
## 4 Transferencia Bielíptica de Hohmann entre órbitas circulares

Otra variante de la maniobra de Hohmann es la **transferencia bielíptica de Hohmann** o simplemente **Bielíptica** es una maniobra con tres impulsos que consiste en recorrer dos medias órbitas elípticas. En función de si el apogeo de la primera órbita está más alejado que el radio de la órbita objetivo o no se distinguen dos tipos de órbitas bielípticas: la **Externa** que puede llegar a ser más eficiente que la de **Hohmann** y la **Interna** que permite cambiar de órbita en menos tiempo.

### 4.1 Bielíptica Externa

La transferencia bielíptica externa consta de 3 maniobras simples (ver [figura 2](#)):

- Maniobra 1: Consiste en aplicar un impulso  $\Delta v_1$  que pone a la nave en una primera órbita de transferencia elíptica,  $O_{T_1}$ , cuyo apogeo está más alejado que la órbita objetivo ( $r_q > r_2$ ).
- Maniobra 2: Cuando la nave llega al apogeo de esta primera órbita intermedia se aplica un nuevo impulso  $\Delta v_q$  que incrementa el perigeo de esta primera órbita hasta igualarlo al radio de la órbita destino. Este impulso pone la nave en una segunda órbita elíptica de transferencia,  $O_{T_2}$ .
- Maniobra 3: Al alcanzar la nave este perigeo se aplica un tercer impulso  $\Delta v_2$  para reducir la velocidad hasta igualar la velocidad circular de la órbita final. Este impulso es negativo porque debe ser en dirección contraria al movimiento.



**Figura 2:** En la transferencia biéptica externa se ejecutan tres impulsos donde el primero de ellos consigue sobrepasar la órbita objetivo.

Las magnitudes de los impulsos se calculan con los momentos  $h_1, h_{O_{T_1}}, h_{O_{T_2}}, h_2$  de las cuatro órbitas y los radios de las tres posiciones  $r_1, r_q$  y  $r_2$ :

$$\Delta v_1 = v_{p1} - v_{circ1} = \frac{h_{O_{T_1}}}{r_1} - \frac{h_1}{r_1}$$

$$\Delta v_q = v_{aq} - v_{a1} = \frac{h_{O_{T_2}}}{r_q} - \frac{h_{O_{T_1}}}{r_q}$$

$$\Delta v_2 = v_{circ2} - v_{p2} = \frac{h_2}{r_2} - \frac{h_{O_{T_2}}}{r_2}$$

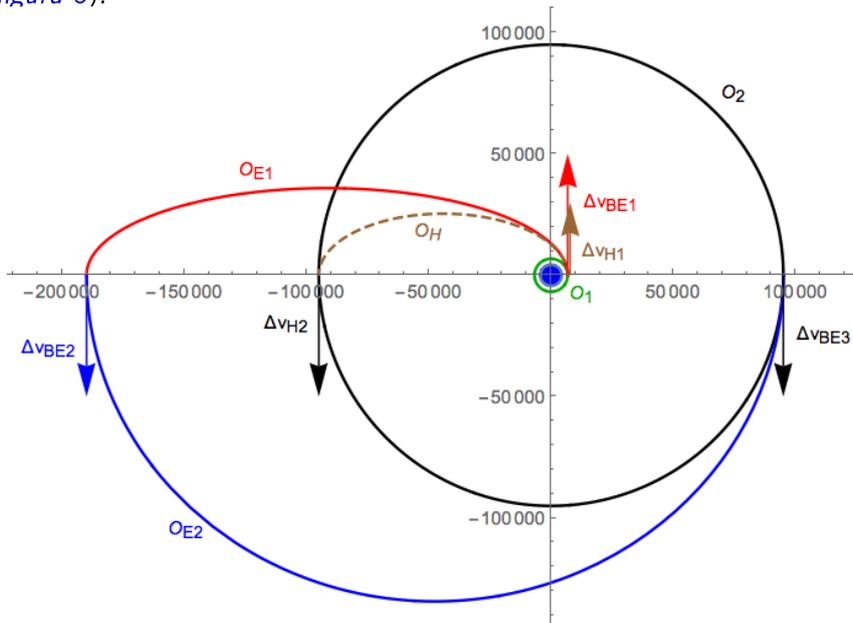
Este último impulso resultará ser negativo para la transferencia biéptica externa pero para calcular el total de la reserva de la maniobra debe considerarse su valor absoluto. De esta forma:

$$\Delta v_{BE} = \Delta v_1 + \Delta v_q + |\Delta v_2|$$

Se puede obtener una expresión que dependa sólo de los radios:

$$\Delta v_{BE} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left[ \sqrt{\frac{2r_q}{1 + \frac{r_q}{r_1}}} - 1 \right] + \sqrt{\frac{\mu}{r_q}} \left[ \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_q}{r_2}}} - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_q}{r_1}}} \right] + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left[ \sqrt{\frac{2r_q}{1 + \frac{r_q}{r_2}}} - 1 \right] \quad (1)$$

**Ejemplo 4.1** Encuentra la reserva de maniobra  $\Delta v_{BE}$  necesaria para hacer una transferencia biéptica desde una órbita circular de radio  $r_1 = 6778 \text{ km}$  a otra de radio  $r_2 = 95000 \text{ km}$  con un paso por un apogeo de radio de  $r_q = 190000 \text{ km}$ . Compara este  $\Delta v_{BE}$  y el tiempo de vuelo necesario para su ejecución con el  $\Delta v_H$  de la transferencia simple de Hohmann y su tiempo de vuelo (ver figura 3).



**Figura 3:** Transferencia biéptica ( $O_{E1} + O_{E2}$ ), externa ( $r_q > r_2$ ) y sus tres impulsos  $\Delta v_{BE1}, \Delta v_{BE2}$  y  $\Delta v_{BE3}$ . En discontinua la transferencia de Hohmann  $O_H$  con sus dos impulsos  $\Delta v_{H1}$  y  $\Delta v_{H2}$ .

### Solución:

Partiendo de los radios calculamos los momentos específicos de las órbitas:

$$h_{O_1} = \sqrt{\mu r_1} = \sqrt{398600.5 \cdot 6778} = 51978.0 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_{O_{E1}} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_1 r_q}{r_1 + r_q}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{6778 \cdot 190000}{6778 + 190000}} = 72230.9 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_{O_{E2}} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_q r_2}{r_q + r_2}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{190000 \cdot 95000}{190000 + 95000}} = 224698 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_{O_2} = \sqrt{\mu r_2} = \sqrt{398600.5 \cdot 95000} = 194594 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

que nos permiten calcular los  $\Delta v$  que necesitamos

$$\Delta v_{BE1} = \frac{h_{O_{E1}}}{r_1} - \frac{h_{O_1}}{r_1} = \frac{72230.9}{6778} - \frac{51978.0}{6778} = 2.988 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{BE2} = \frac{h_{O_{E2}}}{r_q} - \frac{h_{O_{E1}}}{r_q} = \frac{224698}{190000} - \frac{72230.9}{190000} = 0.802 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{BE3} = \frac{h_{O_2}}{r_2} - \frac{h_{O_{E2}}}{r_2} = \frac{194594}{95000} - \frac{224698}{95000} = -0.317 \text{ km/s}$$

que sumando sus valores absolutos nos da el impulso total necesario para la transferencia bielítica

$$\Delta v_{BE} = \Delta v_{BE1} + \Delta v_{BE2} + |\Delta v_{BE3}| = 2.988 + 0.802 + 0.317 = 4.107 \text{ km/s}$$

Para calcular el tiempo de vuelo  $TOF_{BE}$ , basta calcular los periodos de las dos órbitas de transferencia y sumar la mitad de cada uno de ellos pues solo se recorre la mitad de cada órbita

$$a_{O_{E1}} = \frac{r_1 + r_q}{2} = \frac{6778 + 190000}{2} = 98389 \text{ km} \rightarrow T_{O_{E1}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{O_{E1}}^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{98389^3}{398600.5}} = 307136 \text{ s.}$$

$$a_{O_{E2}} = \frac{r_q + r_2}{2} = \frac{190000 + 95000}{2} = 142500 \text{ km} \rightarrow T_{O_{E2}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{O_{E2}}^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{142500^3}{398600.5}} = 535344 \text{ s.}$$

$$TOF_{BE} = \frac{T_{O_{E1}} + T_{O_{E2}}}{2} = \frac{307136 + 535344}{2} = 421240 \text{ s.}$$

Para la transferencia de Hohmann

$$h_{O_H} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{6778 \cdot 95000}{6778 + 95000}} = 71018.2 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\Delta v_{H1} = \frac{h_{O_H}}{r_1} - \frac{h_{O_1}}{r_1} = \frac{71018.2}{6778} - \frac{51978}{6778} = 2.809 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{H2} = \frac{h_{O_2}}{r_2} - \frac{h_{O_H}}{r_2} = \frac{194595}{95000} - \frac{71018.2}{95000} = 1.301 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_H = \Delta v_{H1} + \Delta v_{H2} = 2.809 + 1.301 = 4.110 \text{ km/s}$$

y el tiempo de vuelo se calcula hasta la llegada al primer punto en común de  $O_2$ :

$$a_{O_H} = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{6778+95000}{2} = 50889 \text{ km} \rightarrow T_{O_H} = 2\pi\sqrt{\frac{a_{O_H}^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{50889^3}{398600.5}} = 114248 \text{ s.}$$

$$T_{O_2} = 2\pi\sqrt{\frac{a_{O_2}^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{95000^3}{398600.5}} = 291405 \text{ s.}$$

$$TOF_H = \frac{T_{O_H}+T_{O_2}}{2} = \frac{114248+291405}{2} = 202826 \text{ s.}$$

Si se compara el consumo y el tiempo de vuelo entre ambas maniobras resulta:

$$\frac{\Delta v_{BE}}{\Delta v_H} = \frac{4.107}{4.110} = 99.94\% \quad \frac{TOF_{BE}}{TOF_H} = \frac{421240}{202826} = 207.69\%$$

En consecuencia, el impulso total requerido en la Bielíptica es un 0.06 % menor que en la Hohmann, mientras que el tiempo de vuelo se ve incrementado en más de un 107 %.

## 4.2 Bielíptica Interna

La transferencia bielíptica anterior se dice externa porque el apogeo de la primera órbita de transferencia está más lejos que la órbita destino ( $r_q > r_2$ ). En este caso la transferencia puede llegar a ser ligeramente más eficiente que la transferencia de Hohmann tal y como se verá en la [subsección 4.3](#). A cambio, será necesario mucho más tiempo de vuelo.

Existe otra posible transferencia bielíptica llamada **Transferencia bielíptica interna**, en la que el apogeo de la primera órbita se encuentra entre las órbitas de partida y destino, es decir,  $r_q < r_2$  (ver [figura 4](#)).

En este caso los dos impulsos primeros son similares a la externa pero el tercero, en cambio, debe aplicarse en la dirección del movimiento, tal y como se puede ver en la figura. Esta maniobra siempre es menos eficiente que la de Hohmann pero necesita menos tiempo de vuelo.

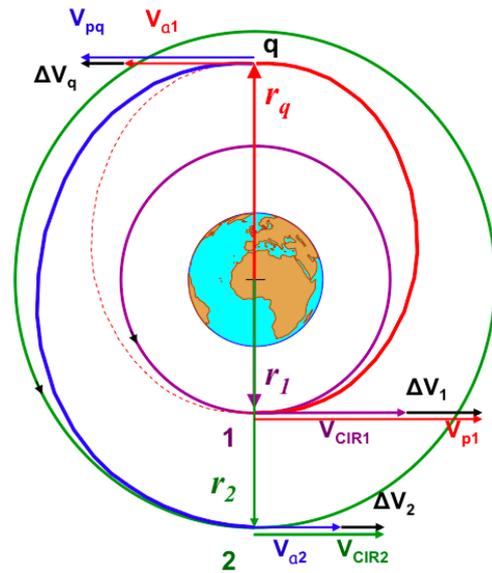


Figura 4: Transferencia bielíptica interna

**Ejemplo 4.2** *Calcula el  $\Delta v$  y el TOF de la transferencia del ejemplo anterior pero con una bielíptica en la que el radio del apogeo intermedio es  $r_q = 45000 \text{ km}$ , y por tanto, inferior al radio de la órbita objetivo.*

**Solución:**

Los valores de  $h_{O_1} = 51978 \text{ km}^2/\text{s}^2$  y  $h_{O_2} = 194594 \text{ km}^2/\text{s}^2$  se conocen del ejercicio anterior pero hay que recalcular los momentos específicos de las órbitas elípticas de transferencia:

$$h_{O_{E1}} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_1 r_q}{r_1 + r_q}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{6778 \cdot 45000}{6778 + 45000}} = 68528 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$h_{O_{E2}} = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_q r_2}{r_q + r_2}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5} \sqrt{\frac{45000 \cdot 95000}{45000 + 95000}} = 156022 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

lo que permite calcular los nuevos impulsos

$$\Delta v_{BE1} = \frac{h_{O_{E1}}}{r_1} - \frac{h_{O_1}}{r_1} = \frac{68528}{6778} - \frac{51978.0}{6778} = 2.442 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{BE2} = \frac{h_{O_{E2}}}{r_q} - \frac{h_{O_{E1}}}{r_q} = \frac{156022}{45000} - \frac{68528}{45000} = 1.944 \text{ km/s}$$

$$\Delta v_{BE3} = \frac{h_{O_2}}{r_2} - \frac{h_{O_{E2}}}{r_2} = \frac{194594}{95000} - \frac{156022}{95000} = 0.406 \text{ km/s}$$

que sumando sus valores (ahora todos positivos) resulta el impulso total necesario para esta transferencia bielíptica interna

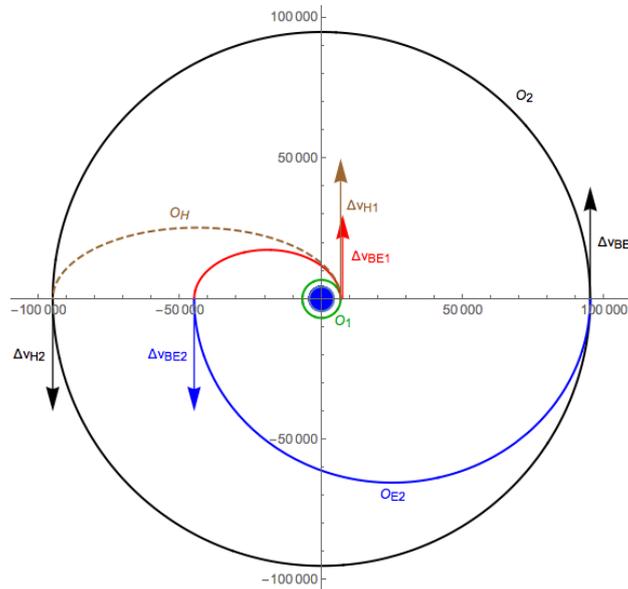
$$\Delta v_{BE} = \Delta v_{BE1} + \Delta v_{BE2} + \Delta v_{BE3} = 2.442 + 1.944 + 0.406 = 4.792 \text{ km/s}$$

En este caso el tiempo de vuelo es

$$a_{O_{E1}} = \frac{r_1 + r_q}{2} = \frac{6778 + 45000}{2} = 25889 \text{ km} \rightarrow T_{O_{E1}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{O_{E1}}^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{25889^3}{398600.5}} = 41455.7 \text{ s.}$$

$$a_{O_{E2}} = \frac{r_q + r_2}{2} = \frac{45000 + 95000}{2} = 70000 \text{ km} \rightarrow T_{O_{E2}} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{O_{E2}}^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{70000^3}{398600.5}} = 184314 \text{ s.}$$

$$TOF_{BE} = \frac{T_{O_{E1}} + T_{O_{E2}}}{2} = \frac{41455.7 + 184314}{2} = 112885 \text{ s.}$$



**Figura 5:** Transferencia bielíptica interna ( $r_q < r_2$ ) con los tres impulsos positivos y la transferencia de Hohmann  $O_H$  y sus dos impulsos.

Haciendo la comparativa con Hohmann se obtienen

$$\frac{\Delta v_{BE}}{\Delta v_H} = \frac{4.792}{4.110} = 116.60\% \quad \frac{TOF_{BE}}{TOF_T} = \frac{112885}{202826} = 55.66\%$$

En consecuencia el impulso se incrementa en un 16.6% mientras que el tiempo de vuelo se reduce casi a la mitad.

### 4.3 Comparativa Bielíptica/Hohmann

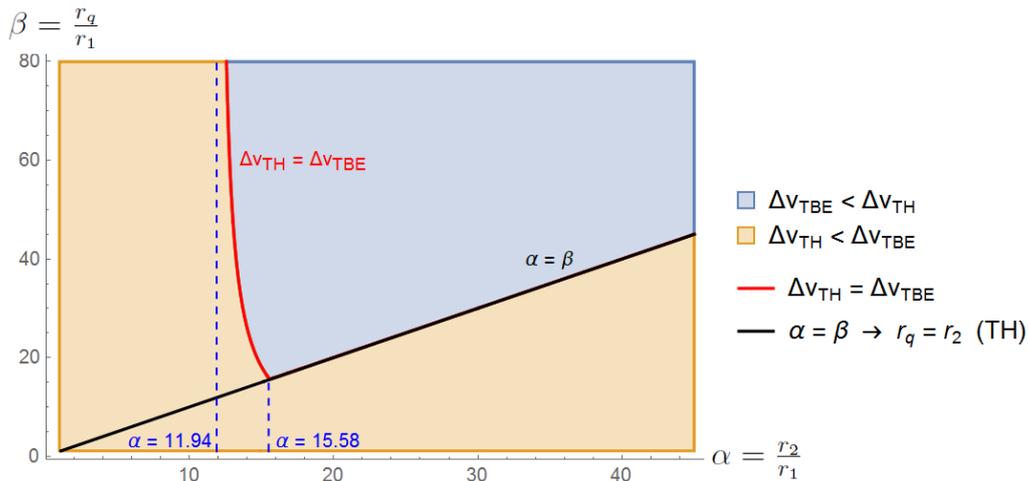
En el caso de la transferencia bielíptica externa el segundo impulso se aplica en el apogeo de la primera órbita de transferencia, por lo que si se elige lo suficientemente alejado podría darse la situación de que esta transferencia sea más eficiente, desde el punto de vista de consumo, que la transferencia de Hohmann. Para estudiar esta situación será conveniente hacer un estudio comparativo de ambas maniobras.

Si se denotan por  $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$  y  $\beta = \frac{r_q}{r_1}$ , dividiendo las expresiones del impulso de la transferencia de Hohmann<sup>3</sup> y de la transferencia bielíptica externa, (1), entre la velocidad circular de la órbita inicial,  $v_{circ1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$ , para obtener dos expresiones adimensionales, resultan:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_{TH}}{v_{circ1}} &= \sqrt{\frac{2\frac{r_2}{r_1}}{1+\frac{r_2}{r_1}} - 1} + \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \sqrt{\frac{2}{1+\frac{r_2}{r_1}}} \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\alpha(1+\alpha)}}(\alpha-1) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_{TBE}}{v_{circ1}} &\stackrel{(1)}{=} \left[ \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} - 1 \right] + \sqrt{\frac{1}{\beta}} \left[ \sqrt{\frac{2}{1+\frac{\beta}{\alpha}}} - \sqrt{\frac{2}{1+\beta}} \right] + \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \left[ \sqrt{\frac{2\frac{\beta}{\alpha}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}} - 1 \right] \\ &= \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} - 1 + \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}} - \sqrt{\frac{2}{\beta(1+\beta)}} - \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}} + \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ &= \boxed{\sqrt{\frac{2}{\beta(1+\beta)}}(\beta-1) - \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}}} \end{aligned}$$

Representando ambas expresiones en función de  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden distinguir las regiones donde la transferencia bielíptica es más eficiente que la de Hohmann y viceversa (ver figura 6).



**Figura 6:** Estudio comparativo de la eficiencia energética entre la transferencia bielíptica  $\Delta v_{TBE}$  y la estándar de Hohmann  $\Delta v_{TH}$

<sup>3</sup> $\Delta v_{TH} = \frac{h_H}{r_1} - \frac{h_1}{r_1} + \frac{h_2}{r_2} - \frac{h_H}{r_2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}$

En la figura se observa que cuando el radio de la órbita objetivo es menor que 11.94 veces<sup>4</sup> el de la órbita inicial,  $r_2 < 11.94 r_1$ , entonces la maniobra de Hohmann es más eficiente energéticamente. Si  $r_2 > 15.58 r_1$  resulta más eficiente la bielíptica<sup>5</sup>. Para valores de  $r_2$  que verifiquen  $11.94 r_1 < r_2 < 15.58 r_1$  valores grandes del apoapsis  $r_q$  son mejores para la bielíptica mientras que los valores pequeños lo son para la Hohmann.

## 5 Cierre

En este artículo se han definido dos variaciones de la transferencia de Hohmann utilizando 3 o más impulsos. Se han presentado las características de la transferencia de Hohmann segmentada y de la bielíptica. Se han descrito las aplicaciones o usos de cada una de ellas y se ha hecho una comparación con la transferencia de Hohmann estándar. Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

## Referencias

- [1] CURTIS, HOWARD D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.
- [2] BATE, ROGER R. ET AL., *Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.
- [3] BROWN, CHARLES D., *Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.
- [4] PRUSSING, JOHN E. AND CONWAY, BRUCE A., *Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.
- [5] CHOBOTOV, VLADIMIR A., *Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.

---

<sup>4</sup>Haciendo que  $r_q$ , y por tanto  $\beta$ , tiendan a  $\infty$  y considerando que  $\frac{\Delta v_{TBE}}{v_{circl}} = \frac{\Delta v_{TH}}{v_{circl}}$

<sup>5</sup>Pero, tal y como se ha observado en el ejemplo 4.1, pequeñas ahorros en energía requieren grandes tiempos de vuelo