

## Un enfoque interactivo para el análisis y diseño de sistemas de control utilizando el método del lugar de las raíces

Díaz, J.M.<sup>a,\*</sup>, Costa-Castelló, R.<sup>b</sup>, Dormido, S.<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Informática y Automática, Universidad Nacional de Educación a Distancia, C/Juan del Rosal, n° 16, 28040 Madrid, España.

<sup>b</sup> Departamento de Control Automático, Universidad Politécnica de Cataluña, C/Pau Gargallo, n° 14, 08028, Barcelona, España.

**To cite this article:** Díaz, J.M., Costa-Castelló, R., Dormido, S., 2021. An interactive approach to control systems analysis and design by the root locus technique. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 18, 176-192. <https://doi.org/10.4995/riai.2020.13811>

### Resumen

El lugar de las raíces es un método clásico para el análisis y diseño de sistemas lineales de control que ha formado parte desde su irrupción en los años cincuenta de los programas de los cursos básicos de control automático. La aparición de herramientas software de diseño interactivo de sistemas de control, que dibujan fácilmente el lugar de las raíces, permite a los docentes centrarse en explicar cómo afecta al lugar de las raíces la introducción de nuevos polos/ceros en la función de transferencia en lazo abierto, en vez de en explicar sus reglas de construcción. En este trabajo se presenta una nueva metodología docente para introducir la técnica del lugar de las raíces en cursos básicos de control que fomenta la utilización de una herramienta interactiva, como por ejemplo la herramienta LCSD desarrollada por los autores, para reforzar su aprendizaje.

*Palabras clave:* Educación del control, Diseño de sistemas de control asistido por ordenador, Diagramas del lugar de las raíces, Aproximaciones interactivas.

### An interactive approach to control systems analysis and design by the root locus technique

#### Abstract

The root locus is a classic method for linear control systems analysis. Since its irruption in the fifties, it has been included in introductory undergraduate courses on control systems. The emergence of interactive control system design software tools, which easily draw the root locus, allows teachers to focus on explaining how the introduction of new poles/zeros in the open-loop transfer function affects the root locus, instead of explaining its building rules. In this work, a new teaching methodology is presented to introduce the root-locus technique in introductory undergraduate courses on control systems that encourages the use of an interactive tool, such as the LCSD tool developed by the authors, to reinforce its learning.

*Keywords:* Control education, Computer-aided control system design, Root locus diagrams, Interactive approaches.

### 1. Introducción

En 1948 y 1950 Walter R. Evans publicó dos trabajos claves (Evans, 1948), (Evans, 1950) en la historia del control automático donde introdujo la técnica del lugar de las raíces (el nombre como tal lo dio en el segundo trabajo). Posteriormente en 1954 publicaba un libro de texto (Evans, 1954) donde desarrollaba completamente el método y mostraba su aplicación de forma generalizada en el diseño de

los sistemas lineales de control. El método del lugar de las raíces es esencialmente un método gráfico para encontrar las raíces de una ecuación de la forma  $1 + KF(s) = 0$ , cuando se varía el parámetro  $K$ .  $F(s)$  es una función racional de dos polinomios  $N(s)$  y  $D(s)$  que están dados en forma factorizada y por lo tanto se conocen sus raíces. Para el sistema de control en lazo cerrado que se representa en la Figura 1,  $F(s)$  es igual a  $C(s)G(s)$ , donde  $C(s)$  es la función de transferencia del controlador, que es lo que hay que determinar para que se

\*Autor para correspondencia: josema@dia.uned.es

cumplan las especificaciones dadas, y  $G(s)$  es la función de transferencia de la planta, que está fija.

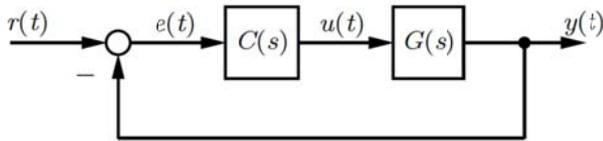


Figura 1: Sistema de control realimentado.

En la representación de polos-ceros la función de transferencia en lazo abierto es:

$$L(s) = KF(s) = KC(s)G(s) = K \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad m \leq n \quad (1)$$

donde  $z_1, z_2, \dots, z_m$  ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ), son los ceros (polos) en lazo abierto y  $K$  es una ganancia variable. El objetivo del lugar de las raíces es estudiar cómo se modifican los polos del sistema en lazo cerrado cuando  $K$  varía de 0 a  $\infty$ . La función de transferencia en lazo cerrado que relaciona la salida  $Y(s)$  con la entrada  $R(s)$  es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K \prod_{i=1}^m (s - z_i)} \quad (2)$$

De (2) se observa que los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado coinciden con los ceros de la función de transferencia en lazo abierto. Esto implica que el controlador  $C(s)$  sólo puede introducir nuevos ceros y/o cancelar un cero de la planta con un polo del controlador (lo que está permitido siempre que el cero tenga una parte real negativa) sin embargo no se pueden cambiar directamente los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado.

Si la ganancia proporcional,  $K$ , del sistema de control se incrementa a partir de cero, la localización de los polos en lazo cerrado se moverá, comenzando desde la posición de los polos en lazo abierto, y a medida que la ganancia proporcional se aproxima a infinito la localización de los polos en lazo cerrado se aproximará a los ceros en lazo abierto o a infinito. De (2) se sigue también que los polos de la función de transferencia en lazo cerrado son los mismos que los polos de la función de transferencia en lazo abierto cuando  $K = 0$ , y que son iguales a los ceros de la función de transferencia en lazo abierto cuando  $K \rightarrow \infty$ . Cada uno de los polos en el sistema se mueve hacia un cero distinto, con los  $(n-m)$  polos adicionales moviéndose para encontrar  $(n-m)$  ceros en el infinito a medida que la ganancia,  $K$ , se acerca también al infinito.

El lugar de las raíces viene dado por el conjunto de puntos del plano  $s$  que satisface:

$$L(s) = -1 \quad (3)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma equivalente como las dos ecuaciones siguientes:

- Condición de magnitud:

$$|L(s)| = 1 \quad (4)$$

- Condición de fase:

$$\arg(L(s)) = (2k + 1)180^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

El método del lugar de las raíces es un método clásico para diseñar el controlador  $C(s)$  de manera que se obtenga un comportamiento deseado. Se basa en la consideración de que el comportamiento dinámico de un sistema lineal e invariante en el tiempo sólo depende de la ubicación de sus polos y ceros en el plano complejo (y de su ganancia estática). Por lo tanto, si se desea que el sistema en lazo cerrado cumpla unas especificaciones dadas, el controlador debe asegurar que los polos y los ceros del sistema en lazo cerrado estén en posiciones apropiadas.

A diferencia de los ceros en lazo cerrado, el controlador puede influir directamente en los polos de lazo cerrado mediante el término  $1 + KC(s)G(s)$  que tienen un efecto más dominante sobre la característica general del comportamiento del sistema que los ceros (lo que puede reconocerse en el hecho de que la estabilidad de un sistema realimentado sólo depende de los polos en lazo cerrado, pero no de los ceros). Es así particularmente importante saber cómo las posiciones de los polos en lazo cerrado dependen de los parámetros del controlador y específicamente de su ganancia  $K$ . En cualquier caso, los ceros de lazo cerrado, si tienen parte real negativa, se pueden compensar en cierta medida con una estructura de dos grados de libertad en la que el filtro que actúa sobre la señal de referencia posee ganancia estática unidad y tiene como polos los ceros del sistema en lazo cerrado.

Su estudio da una idea de si se pueden obtener las posiciones deseadas de los polos con una determinada configuración del controlador y, si fuera necesario, cómo se debería cambiar su estructura dinámica para conseguirlo. Es decir, si se conoce la parte dinámica del controlador, se puede dibujar el lugar de las raíces para evaluar si se puede (potencialmente) lograr un conjunto deseado de polos en lazo cerrado con esta estructura de controlador. De lo contrario, la parte dinámica del controlador se puede adaptar introduciendo más ceros y/o polos que modifiquen el lugar de las raíces de la manera deseada. Por lo tanto, el procedimiento básico de diseño es el siguiente:

1. Determinar las posiciones deseadas de los polos en lazo cerrado que satisfacen las especificaciones dadas. Esto a menudo se logra suponiendo que el sistema en lazo cerrado posee una cierta configuración de polos dominantes.
2. Escoger  $C(s)$  de modo que todas las ramas del lugar de las raíces
  - Estén en el semiplano izquierdo para al menos algún valor de la ganancia  $K$  (ésta es una

condición necesaria para que exista un controlador estabilizante).

- Atraviesen las zonas respectivas de las localizaciones deseadas para los polos (ésta es una condición necesaria para lograr el rendimiento deseado).
3. Elegir  $K$  para que los polos en lazo cerrado tomen los valores deseados en el lugar de raíces.

Dado que el lugar de las raíces es la herramienta principal en este proceso de diseño iterativo, este procedimiento se denomina *método del lugar de raíces*. Puede usarse para obtener un comportamiento deseado tanto para seguimiento del punto de consigna como de rechazo de perturbaciones. El comportamiento en estado estacionario también puede garantizarse mediante otras consideraciones tales como una ganancia estática suficiente, una estructura de controlador adecuada, que por ejemplo incremente el tipo del sistema, o la utilización de una compensación por adelantado o una compensación *feedforward*.

Desde su aparición el método del lugar de las raíces ha sido un tema central en los contenidos de los textos introductorios de fundamentos de control automático (Golnaraghi and Kuo, 2017), (Ogata, 2010), (Franklin et al., 2015), (Dorf and Bishop, 2011), (Nise, 2015), donde se dedicaba un esfuerzo importante a explicar y justificar el conjunto de reglas que permitían dibujarlo. Se puede pues decir que su estudio está bien cubierto en la literatura, ya que cualquier texto sobre la teoría clásica del control tiene un capítulo o sección dedicado a esta metodología de diseño. Uno de los problemas detectados, que dificulta su aplicación, reside en cómo explicar cuál es la mejor manera de utilizar la técnica del lugar de las raíces para lograr diseños de sistemas de control que sean relativamente fáciles de implementar y que también cumplan las especificaciones con un buen rendimiento, incluido un alto rechazo a las perturbaciones y buenos márgenes de estabilidad.

Con frecuencia los estudiantes aprenden las reglas y son capaces de dibujar razonablemente el lugar de las raíces, pero en muchos casos esto no implica que entiendan claramente su concepto y utilidad (Arévalo et al., 2020), (Lerma et al., 2020). Con la aparición de numerosos paquetes de software, como Matlab, SciLab, Octave o Sysquake, que resuelven de una manera sencilla el problema de la representación gráfica del lugar de las raíces, resulta al menos debatible si no se debería cambiar la forma en cómo se aborda este tema desde un punto de vista docente. De hecho, si se analiza la evolución de las distintas ediciones de los libros de textos más populares en la enseñanza de un curso básico sobre los fundamentos del control automático se observa como se ha ido adaptando la presentación de este tema a lo largo del tiempo.

La visualización que proporcionan estos paquetes informáticos de dibujo del lugar de las raíces facilita su aprendizaje de una forma mucho más natural y al mismo tiempo permite que el profesor concentre su esfuerzo en aquellos otros aspectos que son fundamentales en su estudio. Entre estos temas merece destacarse el concepto de *polos dominantes* que juega un papel central en la mayoría de los métodos de diseño basados en el lugar de las raíces que se caracterizan básicamente por utilizar controladores de

complejidad restringida (típicamente PIDs y redes de adelanto y/o retardo de fase). Es importante en este caso garantizar que el controlador diseñado satisface la condición de dominancia de polos.

También la *interactividad* que proporcionan estos entornos gráficos, para modificar directamente sobre el propio diagrama la posición de los polos/ceros de  $L(s)$ , es una característica muy importante que se debe resaltar como parte de la propia metodología de diseño. Desde esta perspectiva la idea de un *diseño interactivo* presenta dos diferencias importantes en relación con el esquema convencional (*diseño no interactivo*). En primer lugar, el enfoque interactivo introduce un lazo de realimentación de diseño iterativo desde el principio. De esta manera, el estudiante puede identificar el compromiso de sus diseños de forma sistemática y modificar el controlador para satisfacer las especificaciones dadas. En segundo lugar, no solo se visualiza el efecto de la manipulación de los parámetros de diseño, sino que también se hace inmediatamente claro el gradiente de los cambios. Se detecta así rápidamente qué parámetro usar y cómo llevar el diseño en la dirección adecuada para cumplir las especificaciones. Esto permite poner de manifiesto las limitaciones fundamentales tanto del sistema como del tipo de controlador (Åström and Murray, 2014), lo que proporciona una forma más natural de encontrar una solución aceptable que cumpla todas las especificaciones impuestas.

El conocimiento de los compromisos entre los diferentes tipos de representaciones gráficas que se utilizan en el análisis y diseño de sistemas de control se considera un aspecto fundamental en el aprendizaje de los principios básicos que se introducen en un curso básico de fundamentos de control. Desde un punto de vista pedagógico, es un hecho constatable que bastantes estudiantes tienen dificultades para comprender estos conceptos fundamentales. Nuestra experiencia docente en la enseñanza de cursos sobre sistemas de control ha demostrado que la mejor manera de enseñar y aprender estas dependencias es mediante el uso de herramientas de software interactivas (Díaz et al., 2007), (Díaz et al., 2016), (Dormido et al., 2002), (Dormido, 2002), (Dormido et al., 2005), (Guzmán et al., 2008), (Guzmán et al., 2012), (Guzmán et al., 2016). Sin embargo, el tipo de interactividad que debe tener una herramienta de software es importante para que sea útil desde un punto de vista pedagógico. La interactividad se puede definir (Guzmán et al., 2013), como una acción realizada mutuamente por dos o más objetos que permite el intercambio de información entre sí. A diferencia de visualizar una figura o leer un libro, la interactividad implica un flujo de información bidireccional que mejora el proceso de aprendizaje de los agentes involucrados.

Desde esta perspectiva el objetivo de este trabajo es revisar las ideas y conceptos que son básicos para llevar a cabo el diseño de un sistema de control utilizando el método del lugar de las raíces y establecer una metodología sencilla para su diseño basada en la utilización de herramientas interactivas que promuevan de forma activa su aprendizaje por parte de los estudiantes. El enfoque que se presenta aquí trata de mantener la simplicidad y la practicidad, de modo que el proceso de diseño pueda ser más fácil y ampliamente utilizable. En su formulación inicial Evans definió el lugar de

las raíces para el caso  $K \geq 0$  sin embargo también puede aplicarse cuando  $K \leq 0$ \* modificando ligeramente algunas de las reglas para su construcción. En este trabajo básicamente solo se van a utilizar tres de esas reglas que se darán para ambas situaciones y aunque en su mayor parte se va a considerar solo el primer caso se analizará en un ejemplo la situación cuando  $L(s)$  es de fase no mínima (es decir tiene algún cero en el semiplano derecho). Dependiendo de cómo se factorice la función de transferencia en lazo abierto puede ocurrir que la ganancia  $K$  sea positiva o negativa y cambie el criterio del lugar.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la sección 2 se presentan las características de la herramienta interactiva LCSD (Linear Control Systems Design) de diseño de Sistemas de Control Lineal que ha sido desarrollada por los autores y que permite de una parte utilizar la técnica de conformación del lazo abierto o *loop-shaping* (Díaz et al., 2017) y de otra el diseño mediante el lugar de las raíces que es el objeto de este trabajo. El concepto de polos dominantes y su importancia en el diseño de sistemas de control mediante el lugar de las raíces se ilustra en la sección 3. En la sección 4 se analiza cómo se lleva a cabo el diseño de un sistema de control utilizando el método del lugar de las raíces. Implica básicamente dos acciones: a) Determinar la región del plano  $s$  donde hay que situar los polos dominantes del sistema en lazo cerrado para garantizar las especificaciones dadas. b) Determinar el controlador  $C(s)$  para garantizar que los polos dominantes del sistema en lazo cerrado se sitúen en la región definida en el paso anterior. En la sección 5 se presentan dos ejemplos ilustrativos de diseño de sistemas de control utilizando el lugar de las raíces con la metodología propuesta. Finalmente, en la sección 6 se sintetizan las conclusiones que se pueden extraer de este trabajo. Como resumen se puede decir que la principal contribución es el desarrollo de una nueva metodología docente para introducir la técnica del lugar de las raíces en cursos básicos de control que fomenta la utilización de una herramienta interactiva, como LCSD, para reforzar su aprendizaje.

## 2. Una herramienta interactiva de diseño de sistemas de control lineales

De forma sintética, las características distintivas del procedimiento de diseño de un sistema de control mediante un enfoque interactivo son las siguientes:

1. Las modificaciones de los parámetros u otros elementos, como el diagrama de polos-ceros, producen inmediatamente una actualización de todos los elementos gráficos representados en la interfaz.
2. El proceso de diseño es completamente dinámico.
3. Los estudiantes perciben de manera muy natural cómo hay que modificar el diseño con los objetos interactivos que tiene a su disposición para tratar de cumplir las especificaciones del problema planteado.
4. Esta interactividad facilita la identificación de los compromisos de diseño que se pueden alcanzar.

Esta interactividad permite a los usuarios percibir visualmente los efectos de sus acciones, por lo que resulta muy útil para comprender los conceptos que quieren ser enseñados/aprendidos. Usando este enfoque interactivo los estudiantes pueden aprender a reconocer cuándo un sistema es fácil o difícil de controlar.

Teniendo en cuenta estas ideas se ha desarrollado, utilizando Sysquake (Piguet, 2017), la herramienta LCSD de diseño de sistemas de control lineal, que es un software interactivo para enseñar y aprender el diseño de controladores lineales para sistemas con una entrada y una salida. LCSD es un ejecutable gratuito<sup>†</sup> que funciona bajo sistemas operativos Windows y Mac OS.

Las características principales de LCSD son simplicidad, facilidad de uso e interactividad. Los usuarios pueden interactuar con la herramienta mediante menús, campos de texto, barras deslizantes, botones y diferentes elementos de las figuras que se muestran en la ventana principal de la herramienta. Cualquier acción realizada sobre estos elementos se refleja inmediatamente en todas las figuras de la pantalla. Obviamente, las capacidades interactivas de la herramienta solo se pueden apreciar probándolas y no se pueden transmitir completamente a través del texto. La mejor manera de hacerlo es descargar y probar la herramienta.

Debido a su potencia y versatilidad, el software más popular en la educación de sistemas de control es Matlab que incorpora, en sus últimas versiones, aplicaciones específicas con interfaces gráficas de usuario flexibles y con capacidades interactivas. RLTOOL (Root Locus Tool) es una de estas herramientas que se utiliza para realizar el análisis y el diseño mediante la técnica del lugar de las raíces de sistemas lineales e invariantes de una única entrada y salida. Esta aplicación proporciona los elementos adecuados para llevar a cabo la síntesis de controladores que cumpla las especificaciones impuestas en el problema de diseño. De esta manera, es posible cambiar la ganancia o agregar polos/ceros al controlador y ver directamente los resultados de la respuesta del sistema cuando los polos del sistema en lazo cerrado se mueven a lo largo de su lugar de raíces. RLTOOL tiene capacidades similares a LCSD, aunque requiere la instalación del software principal y las licencias correspondientes.

Por su parte Sysquake, donde se ha desarrollado LCSD, es un entorno de desarrollo integrado, que tiene un lenguaje de programación similar al que se usa en Matlab, pero con determinadas funcionalidades que reduce tanto el tiempo como mejora las capacidades de programación necesarias para desarrollar herramientas de software interactivas y que se pueden usar libremente tanto por profesores como por estudiantes como aplicaciones independientes que no necesitan disponer de licencia de uso.

LCSD dispone de un manual de referencia que explica todas sus características y posibilidades de uso. La ventana principal de LCSD (ver Figura 2) está organizada en seis zonas: diagrama de bloques, configuración de parámetros, comportamiento/especificaciones, mapa de polos-ceros, lugar de las raíces y respuesta temporal. Conviene advertir que se ha desarrollado sólo la versión en inglés de la herramienta,

\* El caso  $K \leq 0$  se conoce en la literatura como lugar de las raíces de sistemas con realimentación positiva

<sup>†</sup> Disponible en: <http://www2.uned.es/itfe/LCSD/LCSD.html>

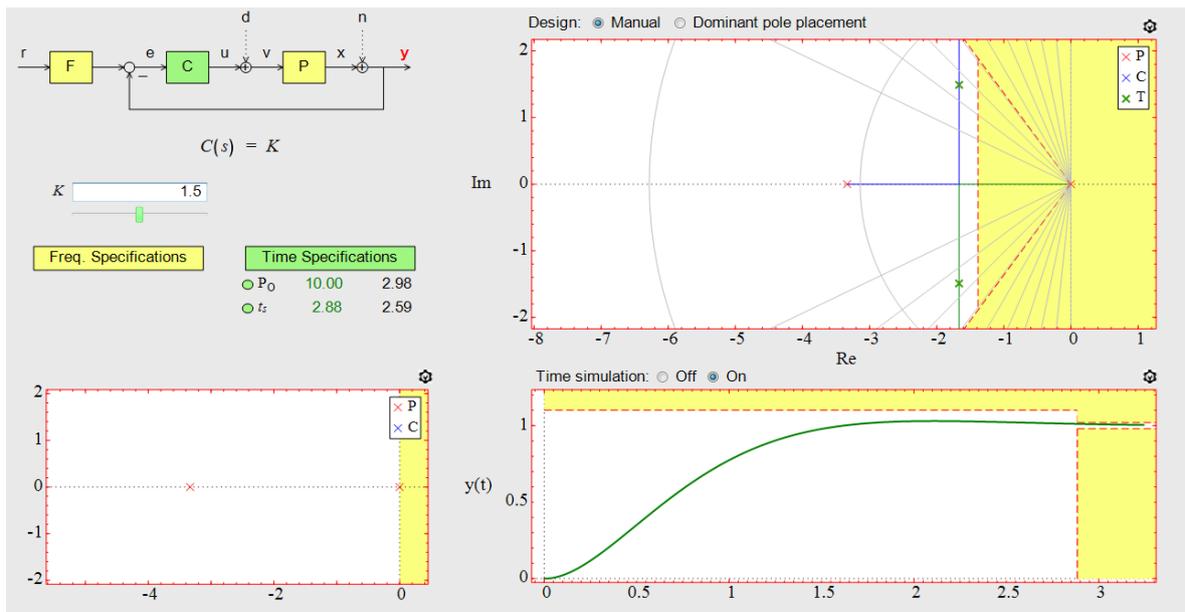


Figura 2: Interfaz de usuario gráfica de la herramienta interactiva LCS D.

pero las denominaciones que se han utilizado son de uso común en el ámbito del control.

La zona del diagrama de bloques incluye un esquema de control de dos grados de libertad que consta de tres bloques (prefiltro  $F$ , controlador  $C$  y planta  $P$ ), tres entradas (referencia  $r$ , perturbación a la entrada de la planta  $d$  y perturbación a la salida de la planta  $n$ ), una salida  $y$  y cuatro señales intermedias (señal de error  $e$ , salida del controlador  $u$ , entrada a la planta  $v$  y salida de la planta  $x$ ). En esta zona, los usuarios pueden realizar las siguientes acciones:

- Seleccionar el bloque o la entrada cuya estructura y parámetros desea configurar en el resto de las áreas de la herramienta. El bloque o entrada seleccionada se representa en color verde. LCS D tiene implementada varias estructuras predefinidas de funciones de transferencia: primer orden, primer orden con un integrador, segundo orden, etc. La herramienta también permite al usuario definir la estructura de su propia función de transferencia. Además, LCS D dispone de seis tipos de entradas: pulso, escalón, rampa, parábola, senoide y ruido blanco.
- Seleccionar las señales que están representadas en la zona de respuesta temporal. Las señales seleccionadas se representan en color rojo.
- Habilitar la señal de realimentación. Si está habilitada, la línea asociada del diagrama de bloques se traza en línea continua; de lo contrario en línea punteada.
- Habilitar las perturbaciones  $d$  y/o  $n$ . La flecha asociada a una perturbación habilitada se traza en línea continua. Si la perturbación está desactivada, se traza en línea punteada.

La zona de configuración de parámetros contiene varios campos de texto y barras deslizantes para configurar los parámetros del bloque o entrada seleccionada en la zona del diagrama de bloques.

Además, muestra la función de transferencia simbólica del bloque o la expresión matemática de la entrada seleccionada.

Esto ayuda al usuario a recordar el significado de los parámetros configurables.

La zona de especificaciones contiene dos botones (especificaciones de frecuencia y especificaciones temporales) que permiten seleccionar y configurar las especificaciones en ambos dominios: temporal y frecuencial. Cuando no hay especificaciones habilitadas en un determinado dominio, el botón asociado se representa en color amarillo. Si se cumplen todas las especificaciones seleccionadas, el botón se representa en color verde; de lo contrario, el botón se representa en color rojo.

El área central de esta zona contiene una tabla con las características principales del sistema en el dominio frecuencial (margen de ganancia, frecuencia de cruce de fase, margen de fase y frecuencia de cruce de ganancia) y en el dominio temporal (porcentaje de sobreelongación, tiempo de subida, tiempo de establecimiento y error en estado estacionario). Si hay alguna especificación activada, esta tabla se reemplaza con las especificaciones habilitadas y los valores del sistema para estas especificaciones. Cada especificación tiene asociado un pequeño círculo cuyo color indica si (color verde) o no (color rojo) se cumple la especificación para el sistema.

La zona del mapa de polos-ceros representa los polos ('x') y ceros ('o') del prefiltro (color azul claro), controlador (color azul) y planta (color rojo). Para el bloque seleccionado en la zona del diagrama de bloques, el usuario puede fijar la posición de un polo o un cero arrastrando el elemento interactivo asociado. Cuando termina de arrastrar un elemento, se actualiza toda la información y los gráficos de la ventana principal.

La zona del lugar de las raíces/respuesta en frecuencia muestra uno de los siguientes diagramas interactivos: lugar de las raíces, diagrama de Bode, diagrama polar y diagrama de Nichols. Los diferentes diagramas aparecen pulsando la tecla de acceso directo "R", "B", "P" y "N", respectivamente. Las especificaciones habilitadas también se representan en los diagramas. En el caso del lugar de las raíces, el usuario puede configurar la posición de los polos en lazo cerrado. Del

mismo modo, en el caso de los diagramas de respuesta en frecuencia (Bode, Polar o Nichols), el usuario puede configurar las frecuencias esquina de los polos y ceros para el bloque seleccionado. Además, LCS D permite al usuario agregar y eliminar polos y ceros en la zona del mapa de polos-ceros, y en la zona del lugar de las raíces/respuesta en frecuencia.

La zona de respuesta temporal contiene una o dos gráficas con la evolución en el tiempo de las señales que se han seleccionado en el diagrama de bloques. Las especificaciones temporales activadas también se representan en esta zona (para lo cual se deben haber seleccionado previamente).

El instructor puede usar LCS D para enseñar el diseño de controladores lineales SISO utilizando la metodología del lugar de las raíces. Una vez que se ha definido la planta y se han establecido las especificaciones, LCS D permite seleccionar el tipo de controlador: ganancia, compensador por adelanto, compensador por retardo, compensador por retardo/adelanto, compensador PID o un compensador definido por el usuario. Luego, sobre el propio lugar de las raíces se pueden modificar los polos y ceros del compensador escogido para modificar la forma del lugar. Esta característica es particularmente útil porque permite analizar estructuras básicas de control que ayudan a la resolución del problema. De esta forma se puede ver inmediatamente qué especificaciones se cumplen ya que LCS D valida las especificaciones cada vez que el usuario las modifica. En la ventana principal, hay indicadores circulares asociados a cada especificación. Si un indicador está en color verde, significa que se cumple su especificación asociada; de lo contrario, el indicador está en color rojo.

Además, el profesor puede utilizar LCS D para generar ejercicios (y sus soluciones) de diseño de sistemas de control mediante el método del lugar de las raíces ya que la herramienta permite guardar y cargar sesiones de trabajo. También es posible formular un problema y su solución correspondiente como una imagen visual que contiene todas las especificaciones dadas (frecuencial y/o temporal) y mostrar si se verifica cada especificación. Los estudiantes pueden usar LCS D para resolver los ejercicios propuestos. La herramienta tiene implementada una verificación automática del cumplimiento de las especificaciones que ayudan a los usuarios a saber si el diseño es correcto o no. Cuando un estudiante termina un ejercicio, tiene la capacidad de generar un informe del diseño realizado y guardar la sesión de trabajo. Estos archivos pueden enviarse directamente al profesor para que los evalúe o el estudiante puede usarlos como ejercicio de autocorrección si se les proporciona la solución correcta. Esta idea ya se ha utilizado en (Díaz et al., 2017) donde hay ejemplos de diseño de loop-shaping en el dominio de la frecuencia.

Resulta relevante señalar que no se ha validado la eficacia real de la utilización de estas herramientas de aprendizaje interactivo en la mayoría de los casos. Este problema ha sido señalado por varios autores (Nickerson et al., 2007), (Kasser et al., 2015), (Heradio et al., 2016), quienes afirman que la toma de decisiones sobre intervenciones pedagógicas para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes debe estar respaldada por evidencias empíricas.

En este sentido se ha desarrollado una metodología para estudiar la efectividad de la utilización de estas aplicaciones interactivas para mejorar la educación en ingeniería de control (Vargas et al., 2020). En esta metodología los datos se organizan jerárquicamente en un modelo basado en competencias (Moon, 2002), (Gasmi and Bouras, 2018), (Vargas et al., 2020), para permitir a los instructores analizar la información en diferentes niveles de abstracción. Mientras que los niveles más altos proporcionan una visión panorámica de los resultados, los análisis detallados ayudan a identificar con precisión los efectos de la innovación.

Su uso ha permitido evaluar el valor educativo de LCS D en un curso básico de ingeniería de control. La evaluación se realizó en dos grupos de 44 y 57 estudiantes que cursaban un curso de control automático en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, en Chile. El primer grupo utilizó LCS D y el segundo Matlab. Los resultados alcanzados muestran que LCS D resulta tan apropiado como el Control System Toolbox de Matlab y validan a LCS D como una herramienta adecuada para la enseñanza de los conceptos básicos de control, especialmente en los temas relacionados con la interpretación y verificación de resultados. También se han identificado algunos aspectos que necesitan ser mejorados en futuras versiones como son la documentación que se proporciona y la flexibilización de la interfaz de usuario.

### 3. Sobre el concepto de polos dominantes

Se supone en esta sección que las especificaciones de control que se formulan y que tienen como objetivo el seguimiento del punto de consigna, se han traducido en requisitos apropiados sobre la respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada en escalón. El mismo esquema, con solo cambios menores, se aplicaría también al diseño de un controlador para rechazo de perturbaciones.

La tarea es entonces encontrar posiciones de los polos del sistema en lazo cerrado que conduzcan a una respuesta del sistema que satisfaga estos requisitos. Esto no es trivial, incluso con la ayuda de las herramientas informáticas ya mencionadas. Se van a analizar brevemente estrategias simples que ayudan a elegir las posiciones deseadas de los polos en lazo cerrado de un sistema de orden elevado para satisfacer los requisitos dados a través de sus polos dominantes que definen un sistema mucho más simple. La idea se basa en la observación de que, por lo general, no todos los polos del sistema en lazo cerrado tienen el mismo impacto sobre la salida del sistema. Las características principales de un sistema a menudo solo están determinadas por un pequeño subconjunto de polos, a los que se conocen como polos dominantes. Despreciar todos los polos menos los polos dominantes produce en general una buena aproximación y suele ser el punto de partida de la mayoría de las técnicas de diseño propuestas que utilizan el lugar de las raíces. Para cuantificar la dominancia de los polos en lazo cerrado de una función de transferencia dada se puede calcular su respuesta a un escalón unitario. Se va a suponer, sin pérdida de generalidad, que todos los polos tienen multiplicidad simple:

$$Y(s) = G_{lc}(s)R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j^*)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i^*)} \frac{1}{s} \quad (6)$$

donde  $p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*$  ( $z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*$ ) son los polos (ceros) del sistema en lazo cerrado. Estos últimos coinciden con los polos del sistema en lazo abierto. Como los polos de  $Y(s)$  son distintos, se puede desarrollar en suma de fracciones simples tal como sigue:

$$Y(s) = \frac{D_0}{s} + \frac{D_1}{s - p_1^*} + \frac{D_2}{s - p_2^*} + \dots + \frac{D_n}{s - p_n^*} \quad (7)$$

Donde  $D_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) son constantes. El coeficiente  $D_i$  se llama el residuo asociado al polo  $s = p_i^*$ . El valor de  $D_i$  se puede determinar multiplicando ambos lados de la expresión anterior por  $(s - p_i^*)$  y evaluándola para  $s = p_i^*$  se obtiene:

$$D_i = \left[ (s - p_i^*) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=p_i^*} = \frac{K \prod_{j=1}^m (p_i^* - z_j^*)}{|p_i^*| \prod_{j=1, j \neq i}^n (p_i^* - p_j^*)} \quad (8)$$

Una medida que se ha demostrado útil en la práctica para juzgar si un polo  $p_i^*$  debe considerarse como un polo dominante o no viene dada por el valor que toma  $D_i$ . El residuo  $D_i$  es el factor por el cual el término  $e^{p_i^* t}$  contribuye al valor en estado estacionario de la respuesta a una entrada en escalón. Por lo tanto, cuanto mayor sea  $|D_i|$ , mayor será la influencia de  $p_i^*$  en comparación con los otros polos. De este análisis, se pueden sacar varias conclusiones:

1. Los polos aparecen en el denominador de  $D_i$  y, por lo tanto, tienen un mayor impacto que los ceros. Esto justifica considerar solo los polos del sistema y no los ceros.
2. Del término  $|1/p_i^*|$  se desprende que los polos que están más cerca del origen son más dominantes que los polos que están más lejos.
3. Una primera excepción a 2) se produce si dos polos  $p_i^*$  y  $p_j^*$  están muy cerca uno del otro ya que entonces la diferencia  $|p_i^* - p_j^*|$  puede hacerse muy pequeña y, por lo tanto, estos polos pueden ser dominantes incluso aunque otros polos están más cerca del origen.
4. Una segunda excepción a 2), también se produce si un polo  $p_i^*$  y un cero  $z_i^*$  están muy cerca uno del otro, ya que la diferencia  $|p_i^* - z_i^*|$  puede hacerse muy pequeña y entonces el polo  $p_i^*$  casi no tiene impacto sobre la respuesta a una entrada en escalón.

De estas consideraciones se puede concluir que, si no hay polos próximos entre sí (condición 3), los polos cercanos al origen son dominantes a menos que un cero esté cerca de un polo (condición 4). En este último caso este polo no sería dominante. Además, los polos que están estrictamente en el semiplano derecho (polos inestables) son siempre dominantes ya que en el desarrollo en fracciones simples contribuyen a la respuesta del sistema con una exponencial positiva.

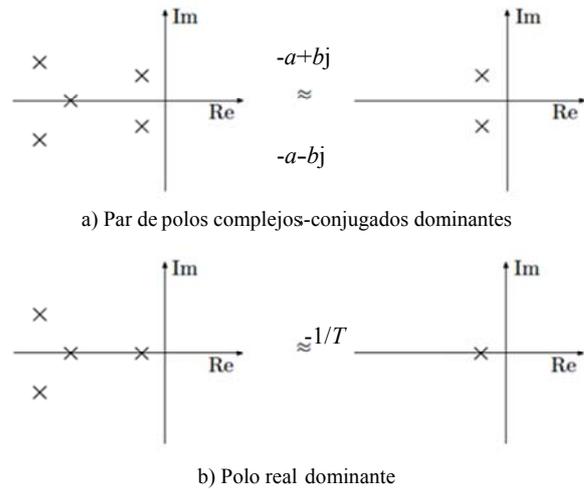


Figura 3: Configuraciones básicas de polos dominantes.

En la Figura 3 se muestran dos de las configuraciones de polos dominantes más comunes y utilizadas. Son las siguientes: a) Par de polos complejos-conjugados dominantes (aproximación de un sistema de segundo orden) y b) Polo real dominante (aproximación de un sistema de primer orden).

La primera configuración (Figura 3a) corresponde a un sistema de segundo orden que viene descrito por:

$$G_{lc}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (9)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural y  $\zeta$  es la razón de amortiguamiento. Se supone, sin pérdida de generalidad, que la ganancia  $K$  es la unidad. La forma práctica de asegurar en la Figura 3a que el par de polos complejos conjugados  $p_{1,2} = -a \pm j b$  situados más próximos al eje imaginario son dominantes es que la relación de la parte real de cualquiera de los otros polos a  $-a$  es mayor que  $m$  ( $3 \leq m \leq 10$ ) y no hay ceros cerca. Dicho de otra forma, esos dos polos serán dominantes si todos los restantes polos se ubican a la izquierda de la línea de  $s = -ma$ . Para el caso de un sistema subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ) en la Figura 4 se muestra la relación que hay entre los polos y los parámetros del sistema:

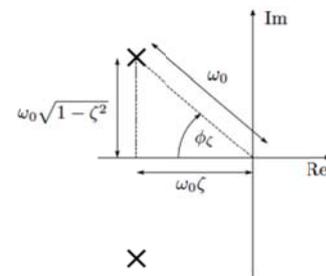


Figura 4. Relación entre los polos y los parámetros de un sistema de 2º orden ( $0 < \zeta < 1$ ).

En la mayoría de los libros de texto se analizan diversas características de la respuesta a una entrada en escalón de un

sistema de segundo orden y cómo se pueden aproximar de manera sencilla.

El siguiente ejemplo ilustra la aproximación de polos dominantes y cómo se modifica la respuesta cuando hay un cero muy cercano de un polo (en este caso ambos complejos conjugados). En la Figura 5 en trazo rojo se representa la respuesta a escalón unitario del sistema original que tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{5}{(s+5)(s^2+0,4s+1)} \quad (10)$$

En trazo negro se representa la respuesta asociada al par de polos complejos conjugados dominantes que se obtiene de la función de transferencia anterior eliminando el polo simple en  $s = -5$ . Se observa que ambas respuestas son muy similares y que el efecto del polo simple en la respuesta del sistema no tiene una gran influencia. Finalmente, en trazo azul se representa la respuesta del sistema original cuando se le añade un par de ceros complejos conjugados que se localizan muy próximos al par de polos complejos.

$$G(s) = \frac{5(s^2+0,39s+1)}{(s+5)(s^2+0,4s+1)} \quad (11)$$

El par de polos complejos conjugados deja de ser ahora dominante por la cuasi-cancelación de estos mediante los ceros complejos conjugados que se localizan en posiciones muy próximas. La dinámica que domina ahora es la del polo simple en  $s = -5$ .

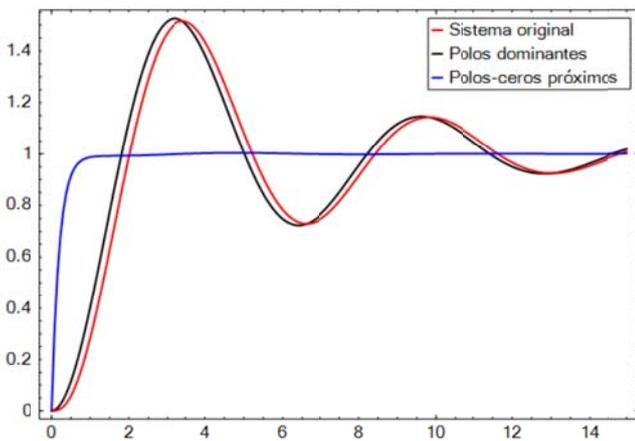


Figura 5: Cambio de dominancia cuando hay un par de ceros complejos cerca del par de polos complejos.

Si se trata de un sistema críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ ), los polos son reales y satisfacen que  $s_1 = s_2 = s_{1/2} = -\omega_0$  y no hay sobreelongación. Consideraciones similares a las dadas para el caso del par de polos complejos-conjugados producen la siguiente aproximación para el tiempo de subida  $t_r^*$ :

\*  $t_r$ : Es el tiempo requerido para que la respuesta  $y(t)$  a una entrada en escalón cambie del 10% al 90% de su valor final.

$$t_r \approx \frac{3,36}{|s_{1/2}|} \quad (12)$$

El tiempo de asentamiento  $t_{s(5\%)}^\dagger$  puede aproximarse evaluando cuándo la envolvente  $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t}$  alcanza 0,05 (asumiendo como entrada un escalón unitario). Esto da:

$$t_{s(5\%)} \approx \frac{4,8}{|s_{1/2}|} \quad (13)$$

La segunda configuración (Figura 3b) con un único polo dominante sucede menos frecuentemente que la de un par de polos complejos-conjugados dominantes. En este caso la función de transferencia del sistema se aproxima por un sistema de primer orden:

$$G(s) \approx \frac{1}{1+Ts} \quad (14)$$

En este caso la respuesta a una entrada en escalón no tiene sobreelongación y el tiempo de asentamiento  $t_{s(5\%)}$  y el tiempo de subida  $t_r$  pueden aproximarse por:

$$t_{s(5\%)} \approx \frac{3}{|s_1|} \quad t_r \approx \frac{2,2}{|s_1|} \quad \text{con } s_1 = -\frac{1}{T} \quad (15)$$

Si las especificaciones de control se formulan en términos de valores mínimos y máximos de las características de la respuesta a una entrada en escalón, se pueden usar las reglas generales que se acaban de deducir para determinar una zona en el plano  $s$  donde deberían colocarse los polos en lazo cerrado. En la Figura 6 se muestra un ejemplo. Debe tenerse en cuenta que las reglas obtenidas, así como el concepto de un par de polos dominantes, se basan en aproximaciones. Por lo tanto, las localizaciones de los polos encontrados deben considerarse como un punto de partida razonable para un diseño más refinado.

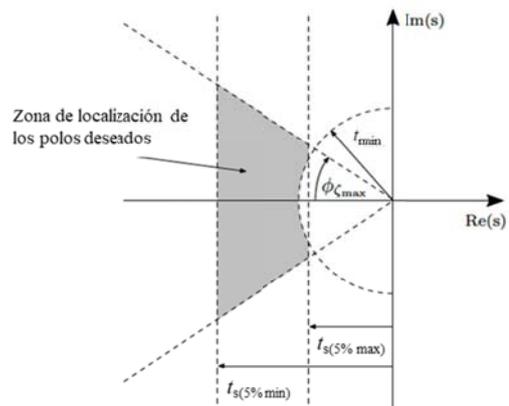


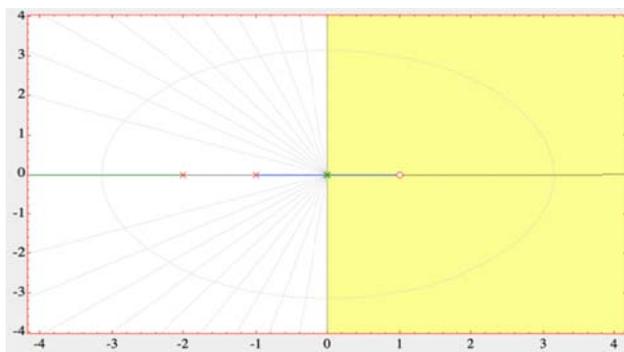
Figura 6: Zona de los polos en lazo cerrado según los requisitos de la respuesta a una entrada en escalón.

†  $t_s$ : Es el instante en que la respuesta  $y(t)$  a una entrada en escalón entra por última vez en una envolvente de  $2 \times 2\%$  ( $2 \times 5\%$ ) alrededor del valor en estado estacionario.

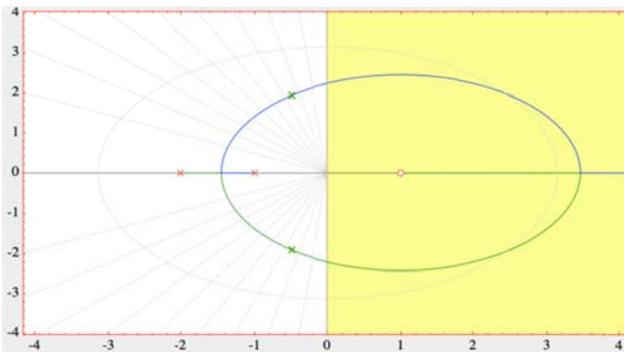
#### 4. Una metodología práctica para el diseño de sistemas de control utilizando la técnica del lugar de las raíces

Las tres reglas básicas de construcción del lugar de las raíces que son esenciales para comprender la metodología de diseño que se va a exponer son las siguientes:

1. El lugar de las raíces siempre es simétrico con respecto al eje real del plano  $s$ .
2. La parte del lugar de las raíces sobre el eje real comienza a la izquierda de un número impar de polos y ceros si  $K \geq 0$  (par si  $K \leq 0$ ).
3. El número de ramas del lugar de las raíces es igual al número de polos y comienza en la posición de los polos de la función de transferencia en lazo abierto (para  $K = 0$ ) y finaliza en los ceros (para  $K \rightarrow \pm\infty$ ); los polos restantes ( $n - m$ ) van al infinito a lo largo de las asíntotas (Dorf y Bishop, 2011).



a)



b)

Figura 7: Ejemplo de lugar de las raíces de un sistema de fase no mínima con la siguiente configuración de ceros y polos:  $Z = \{1\}$ ,  $P = \{-1, -2\}$ . Expresado en la forma a) (16) y en la forma b) (17).

Para cada cero en el infinito, el lugar de raíces tendrá una rama que va desde uno de los polos hacia ese cero a lo largo de una asíntota. El ángulo de las asíntotas con respecto al eje real si  $K \geq 0$  ( $K \leq 0$ ) es:  $(2k+1)\pi/(n-m)$ ,  $k = 0, 1, \dots, (n-m-1)$  ( $2k\pi/(n-m)$ ,  $k = 0, 1, \dots, (n-m-1)$ ). Debe observarse que si  $n-m > 2$ , necesariamente alguna(s) de las ramas del lugar de las raíces penetrará en el semiplano derecho y en consecuencia el sistema será inestable para valores suficientemente grandes de  $K$ .

El siguiente ejemplo ilustra la construcción del lugar de las raíces utilizando las tres reglas enunciadas para el caso de un sistema de fase no mínima que presenta una de las

problemáticas con este tipo de sistemas que con frecuencia plantea dificultades a los estudiantes si no se les pone de manifiesto en las explicaciones. Sea un sistema de fase no mínima que posee la siguiente configuración de ceros y polos:  $Z = \{1\}$ ,  $P = \{-1, -2\}$ . La función de transferencia  $G(s)$  que representa a este sistema se puede escribir de una de las dos formas siguientes:

a)

$$KG(s) = K \frac{(1-s)}{(1+s)(1+0,5s)} \quad (16)$$

b)

$$KG(s) = K \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)} \quad (17)$$

Ambas tienen el mismo conjunto de polos y ceros dados, pero si se representa su lugar de las raíces se obtienen dos lugares totalmente diferentes. En la Figura 7 se muestran ambos lugares. La diferencia está en la ganancia estática  $KG(0)$  que en el caso a) es positiva y en el caso b) es negativa. De este modo el primero corresponde al lugar de las raíces de un sistema convencional y el segundo representa el lugar de las raíces de un sistema con realimentación positiva.

Tal como ya se ha comentado, el procedimiento de diseño por el método del lugar de las raíces implica los siguientes dos pasos:

1. *Determinar la región del plano  $s$  donde hay que situar los polos del sistema en lazo cerrado para garantizar las especificaciones dadas.* Esto puede hacerse traduciendo las especificaciones dadas de la aplicación de control en restricciones sobre la respuesta a una entrada en escalón o la respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado. Esto significa que los requisitos se reformulan en términos de límites, por ejemplo, tiempo de subida, tiempo de asentamiento, sobreelongación, pico de resonancia, margen de ganancia o margen de fase. A partir de estas especificaciones se determinan las regiones en el plano  $s$  donde deben situarse los polos en lazo cerrado para satisfacer estos requisitos.
2. *Determinar el controlador  $C(s)$  para garantizar que los polos dominantes del sistema en lazo cerrado se sitúan en la región definida.* En primer lugar, se elige la estructura dinámica del controlador, es decir, sus polos y ceros, de modo que el lugar de las raíces pase por la región donde se sitúan los polos en lazo cerrado deseados y que se ha especificado en el paso 1. A continuación, se determina la ganancia del controlador de tal manera que los polos en lazo cerrado se posicionen en el lugar deseado del lugar de las raíces. Por supuesto, debe verificarse mediante simulación si realmente se cumplen los requisitos de control con el controlador obtenido, ya que el paso 1 generalmente incluye varias aproximaciones.

##### 4.1. Cómo influye la adición de polos y ceros en la forma del lugar de las raíces

En la Figura 8 se muestran los lugares de las raíces de algunos sistemas característicos. Un análisis de éstos permite

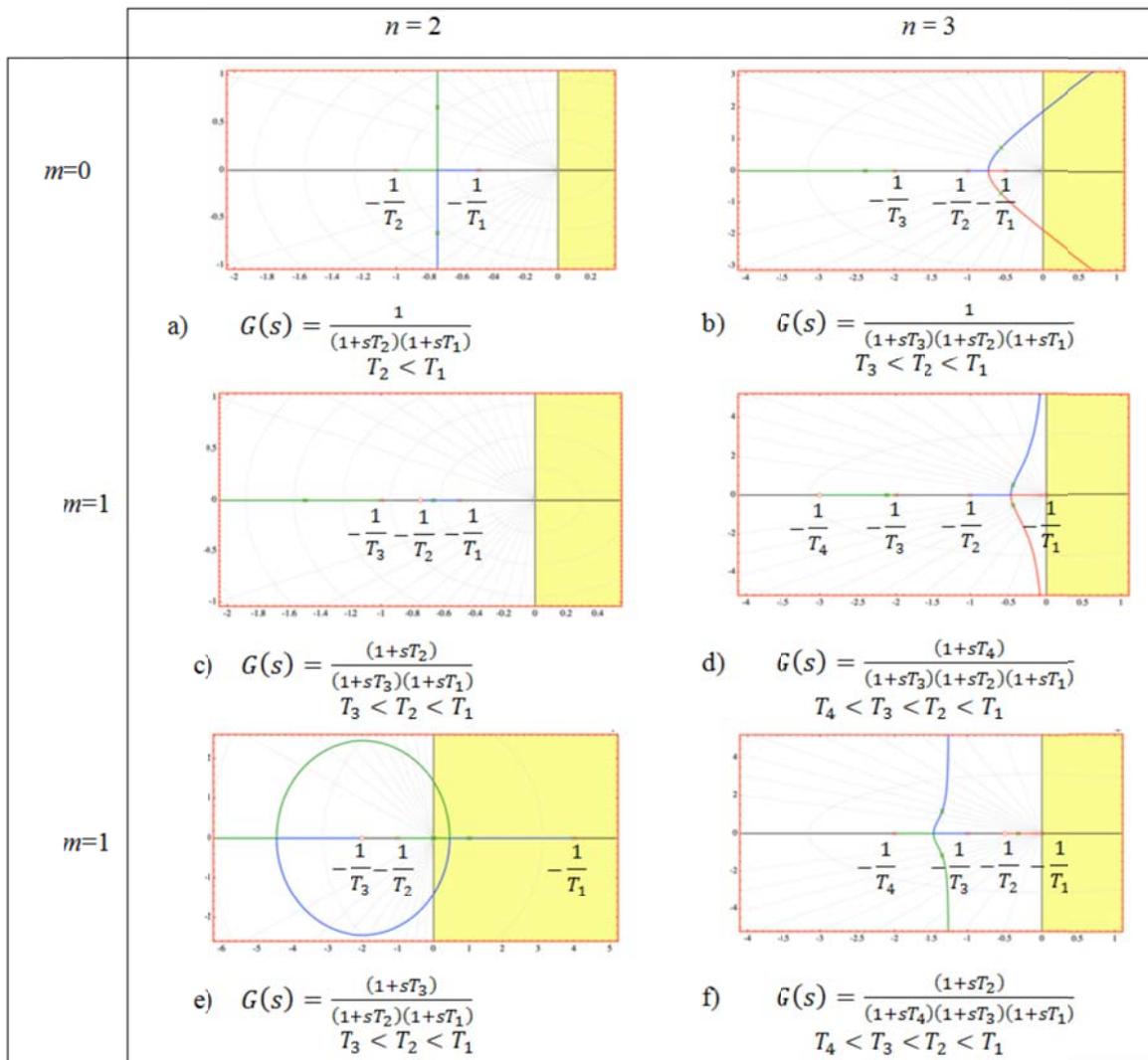


Figura 8: Lugar de las raíces de sistemas típicos ( $n$  es el número de polos y  $m$  el número de ceros).

sacar conclusiones de carácter general de cómo afecta a la propia estructura del lugar de las raíces la inclusión de polos y/o ceros en la función de transferencia en lazo abierto  $L(s)$ .

El lugar de las raíces permite visualizar de forma gráfica como afecta a la estabilidad del sistema la variación de su ganancia  $K^*$  cuando va desde  $0$  a  $\infty$ . Si existe alguna rama del lugar que penetra en el semiplano derecho podemos asegurar que el sistema se hace inestable. La idea central del diseño de un compensador  $C(s)$  utilizando el lugar de las raíces consiste en tratar de curvar las ramas del lugar de las raíces del sistema sin compensar hacia el semiplano izquierdo para garantizar que el sistema será estable.

En la Figura 8a se muestra el lugar de las raíces de un sistema en lazo abierto que tiene solo dos polos, situados en cualquier parte del eje real en el semiplano izquierdo. Se

concluye que el sistema es estable para cualquier valor de la ganancia  $K$  y que a medida que aumenta ésta disminuye el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  y aumenta la sobreelongación.

Si se agrega otro polo en el eje real situado también en el semiplano izquierdo, el lugar de las raíces será el que se muestra en la Figura 8b. Se puede observar que, con tres polos, las dos ramas que nacen en los dos polos situados más a la derecha se unirán y se dividirán para cruzar el eje imaginario hacia el semiplano derecho, mientras que el tercer polo va hacia un cero en  $-\infty$ . Como el lugar de las raíces penetra en el semiplano derecho esto significa que, al aumentar la ganancia,  $K$ , más allá de un cierto valor, hará que la respuesta del sistema en lazo cerrado se haga inestable.

En la Figura 8c se muestra qué sucede si se agrega un cero en lugar de un tercer polo, y este se encuentra localizado entre los dos polos. En este caso un polo irá hacia el cero (a medida que  $K$  aumenta de  $0$  a  $\infty$ ), mientras que el otro polo se moverá a lo largo del eje real hacia el cero en  $-\infty$ . Una vez más, esto se puede determinar fácilmente sin necesidad de hacer ningún cálculo sabiendo solamente que la trayectoria del lugar de las raíces en el eje real comienza a la izquierda de un número impar de polos y ceros.

\* La técnica del lugar de las raíces se puede aplicar con respecto a cualquier parámetro  $\alpha$  que aparezca linealmente en la ecuación característica que se puede transformar al formato siguiente  $1 + \alpha H(s) = 0$ . A este diagrama se le denomina *contorno de las raíces* y le son aplicables las mismas reglas.

Por otro lado, si el cero se encuentra localizado a la izquierda de ambos polos, el lugar de las raíces será el que se muestra en la Figura 8e. Debido a que un polo tiene que ir hacia un cero en  $-\infty$ , y como el lugar de las raíces necesita permanecer simétrico con respecto al eje real, finalmente se volverá a unir sobre el eje real, en algún punto a la izquierda del cero que está situado más a la izquierda, y luego se separará en dos ramas con una yendo hacia la posición del cero y la otra hacia  $-\infty$ . A estos puntos se les denominan *puntos de ruptura\** del lugar de las raíces. Como uno de los polos de  $L(s)$  está situado en el eje real en el semiplano derecho, el sistema será estable por encima de un valor mínimo de la ganancia,  $K$ , ya que para valores de la ganancia que sean pequeños, parte del lugar de las raíces permanecerá en el semiplano derecho (sistema inestable).

Se puede calcular exactamente con qué ángulo(s) se separan los polos y en qué posición se vuelven luego a unir, pero el objetivo principal que aquí se persigue es desarrollar una intuición de cómo se comporta el lugar de las raíces mediante la adición de polos y/o ceros, en lugar de determinar con precisión su forma exacta. La forma general del lugar de las raíces que se muestra en la Figura 8e será crucial para el diseño de sistemas de control más complicados. Conociendo cómo se curva y se modifica el lugar de las raíces hacia la izquierda, se puede asegurar que el sistema se mantendrá estable para cualquier valor de la ganancia,  $K$ , a partir de un cierto valor que dependerá de la posición del polo localizado más a la derecha.

Si se selecciona la ganancia de forma que los polos en lazo cerrado se posicionen más próximos al eje real entonces la respuesta del sistema de control será más amortiguada.

La distancia desde el origen hasta el lugar de las raíces determina cuán rápida será la respuesta del sistema (al menos la respuesta inicial). De la Figura 8e se puede deducir la siguiente observación importante: *dos polos localizados en el eje real sobre el semiplano izquierdo y un cero posicionado a la izquierda de esos polos, es suficiente para hacer que el lugar de las raíces se curve hacia la izquierda*. Esto según se ha analizado es una característica muy deseable.

Si el sistema en lazo abierto tiene tres polos sobre el eje real en el semiplano izquierdo, un cero solo no sería suficiente para curvar el lugar de las raíces hacia la izquierda, tal como se muestra en la Figura 8d.

Si el cero se encuentra localizado entre los dos polos que están más a la derecha, el lugar de las raíces se vería casi igual que en la Figura 8d pero desplazado hacia la izquierda y con el polo que está situado en el origen moviéndose hacia ese cero tal como se observa en la Figura 8f.

Sin embargo, si se utilizan dos ceros para dar forma al lugar de las raíces, con un cero posicionado a la izquierda de los polos y el otro cero entre los polos más a la izquierda, se obtiene el lugar de las raíces que se muestra en la Figura 9a.

Esta forma del lugar de las raíces es la que se busca, porque para cualquier valor de la ganancia proporcional, el sistema de realimentación se mantendrá estable. En la Figura 9b se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado a un

escalón unitario para diferentes valores de la ganancia en lazo abierto, que se corresponden con puntos en la región circular del lugar de las raíces de la Figura 9a. Se observa que, el sistema no se vuelve menos estable a medida que aumenta la ganancia que es lo que normalmente cabría esperar cuando se cumple esta condición. De hecho, para este caso en particular el sistema se hace más amortiguado a medida que aumenta la ganancia y el lugar de las raíces se acerca al eje real, mientras que al mismo tiempo la respuesta se vuelve más rápida.

A partir de este análisis, se puede concluir que es conveniente lograr una forma del lugar de las raíces que se curve hacia la izquierda (a medida que aumenta la ganancia,  $K$ ), con un patrón circular tales como los que se dan en la Figura 9a. Además, *para lograr esta forma, el número de ceros requeridos en la función de transferencia en lazo abierto debe ser igual al número de polos menos uno*. También se ha colocado un polo en el origen (un integrador) para que frente a una entrada en escalón el sistema en lazo cerrado tenga error en estado estacionario nulo. Si el diseño del controlador se restringiera a un controlador PI, esta forma del lugar de las raíces no sería posible, ya que el controlador PI tiene un cero y un polo en el origen. Sin embargo, se conseguiría si se utiliza un controlador PID (dos ceros y un polo en el origen). Se podría, pues concluir de este análisis que para una función de transferencia en lazo abierto con al menos tres polos más que el número de ceros, incluso un diseño con un controlador PID que esté bien ajustado no sería capaz de lograr la forma que tiene el lugar de las raíces de la Figura 9a.

La situación seguiría siendo análoga si uno de los polos se encuentra sobre el eje real en el semiplano de la derecha. La forma del lugar de las raíces será aproximadamente la misma, tal como se observa en la Figura 9b. También se observa que, en este caso, la ganancia,  $K$  del controlador necesita estar por encima de un valor mínimo para que el sistema se estabilice.

En el caso de que los dos polos fueran un par de polos complejos conjugados la forma del lugar de las raíces sería aproximadamente la misma en términos del patrón circular que se dobla hacia la izquierda tal como se muestra en la Figura 9c. Que también muestra la respuesta a una entrada en escalón para diferentes valores de la ganancia proporcional. Para valores pequeños de la ganancia, este sistema está un poco más amortiguado en comparación con el de la Figura 9a, porque el lugar de las raíces inicialmente se dobla más lejos sobre el eje real.

El objetivo se ha centrado en conseguir que el lugar de las raíces se vuelva hacia el eje real en algún punto a la izquierda del cero más a la izquierda. Por lo tanto, se puede asegurar que la colocación del cero más a la izquierda tiene una importancia sustancial sobre cuán lejos puede doblarse el lugar de las raíces hacia la izquierda, lo que a su vez tiene una influencia directa sobre el ancho de banda potencial del sistema. En los ejemplos mostrados, este cero se ha colocado a la izquierda (frecuencias más altas) de todos los polos, pero también se puede colocar a la derecha del polo más a la izquierda.

\* También denominados *puntos de entrada-salida* o *puntos singulares*, indican la presencia de raíces múltiples de la ecuación característica.

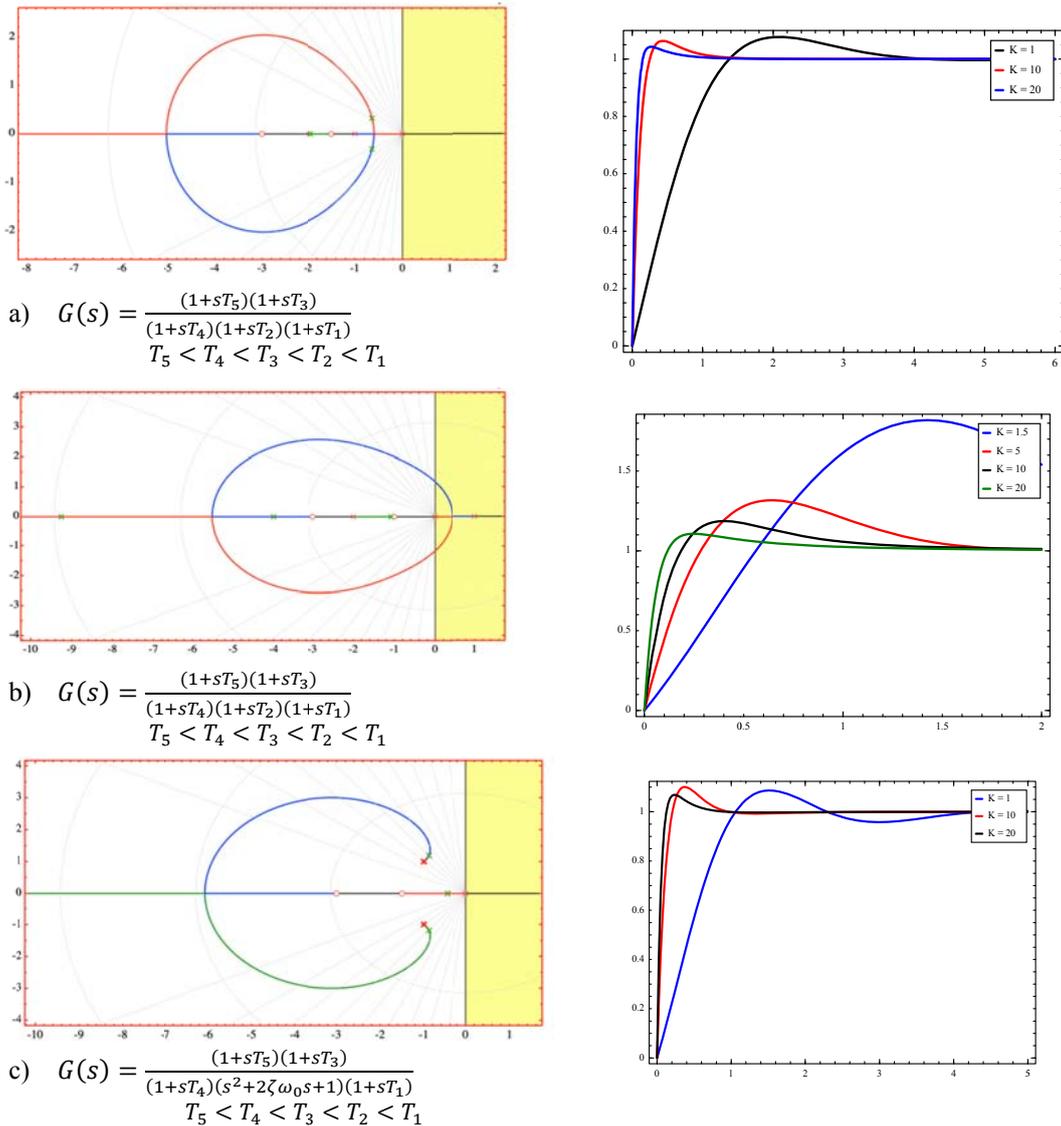


Figura 9: Lugar de las raíces con tres polos y dos ceros.

#### 4.2. Pautas generales en el diseño del lugar de las raíces

Una cuestión natural que con frecuencia surge es cómo se decide qué tipo de controlador específico debería utilizarse para un problema de diseño de un sistema de control dado. Se dan a continuación algunas pautas sencillas de cómo proceder en esta situación:

1. De los requisitos dados sobre la respuesta transitoria, se determinan las regiones donde deben situarse los polos dominantes del sistema en lazo cerrado.
2. De las especificaciones de seguimiento en estado estacionario se calculan las constantes de error en estado estacionario.
3. De las especificaciones dadas en el diseño, se decide si es preciso aumentar el tipo del sistema. En este caso deberían utilizarse controladores PI o PID, o cualquier otro controlador con un polo en el origen.
4. Representar el lugar de las raíces de  $KG(s)$ .

5. Comprobar si los polos dominantes deseados se pueden seleccionar en el lugar de las raíces dibujado.

#### 5. Ejemplos de diseño utilizando la técnica del lugar de las raíces

En esta sección se presentan dos casos sencillos de utilización del lugar de las raíces. En ambos se emplea la herramienta de diseño LCSD que se ha introducido en la sección 2. El primero es un ejemplo clásico en los cursos de fundamentos de control: el diseño de un controlador para el modelo linealizado de un péndulo invertido. Se trata de un sistema inestable con un polo en el semiplano derecho. Para su solución se sigue el esquema que se ha presentado, que consiste en primer lugar en determinar la región del plano  $s$  que cumple las especificaciones impuestas en el problema, para a continuación diseñar un controlador de baja complejidad que cumpla los requisitos impuestos.

El segundo ejemplo es algo más elaborado pues mezcla especificaciones tanto en el dominio temporal como

frecuencial y necesita utilizar también la representación en el diagrama de Bode para obtener una solución.

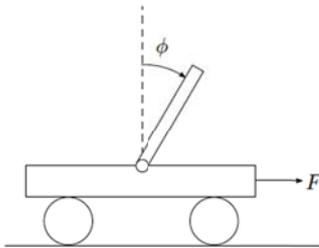


Figura 10: Péndulo invertido.

### 5.1. Diseño de un controlador para un péndulo invertido

Considérese el péndulo invertido que se muestra en la Figura 10, donde la entrada  $u(t)$  es la fuerza  $F$  aplicada al carro y la salida  $y(t)$  es el ángulo  $\phi(t)$  entre la barra y el eje vertical. Se desprecia cualquier influencia debida al rozamiento y se supone que se han normalizado convenientemente los parámetros del sistema. En estas condiciones la ecuación linealizada del péndulo invertido alrededor del punto de equilibrio superior  $\phi(t) = 0^\circ$  produce la siguiente función de transferencia (Keviczky et al., 2019):

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \quad (18)$$

El péndulo invertido es inestable debido al polo localizado en  $s = 1$ . El objetivo es estabilizar el sistema en lazo cerrado mediante un controlador adecuado que cumpla las siguientes especificaciones con respecto a la respuesta a una entrada en escalón:

1. Sobreelongación  $\Delta h \leq 5\%$ .
2. Tiempo de asentamiento máximo  $t_{(5\%)} \leq 1,5$  s.

Usando las reglas heurísticas dadas en la sección anterior, se deduce de  $\Delta h < 5\%$  que  $\phi_{\text{max}} < 45^\circ$  y de  $t_{(5\%)} < 1,5$  segundos que  $\omega_0 \zeta = |\text{Real}\{s_{1/2}\}| > 2$ . Las posiciones deseadas resultantes de los polos en lazo cerrado se representan en la Figura 11.

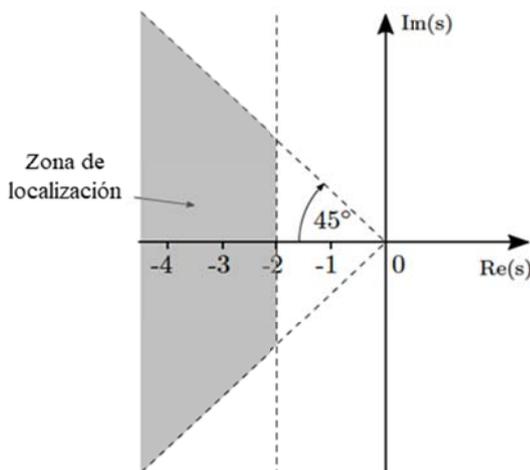


Figura 11: Área de ubicación de las raíces para el ejemplo del péndulo invertido.

En primer lugar, se va a intentar ver si con un controlador proporcional  $C(s) = K$  con  $K > 0$  es suficiente para satisfacer las especificaciones. En la Figura 12 se muestra el lugar de las raíces del sistema de control con un controlador proporcional. Contiene dos asíntotas que irradian desde el origen con ángulos de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ . Por lo tanto, la rama del lugar de las raíces que pertenece al polo 1 está en el semiplano derecho o en el eje imaginario, lo que implica que el sistema será inestable para cualquier ganancia del controlador. Esto significa que se tiene que cambiar la parte dinámica del controlador.

Analizando el diagrama del lugar de las raíces de la Figura 12, se puede observar que, si se pudieran mover las asíntotas hacia la izquierda, el sistema sería estable para una ganancia del controlador suficientemente alta.

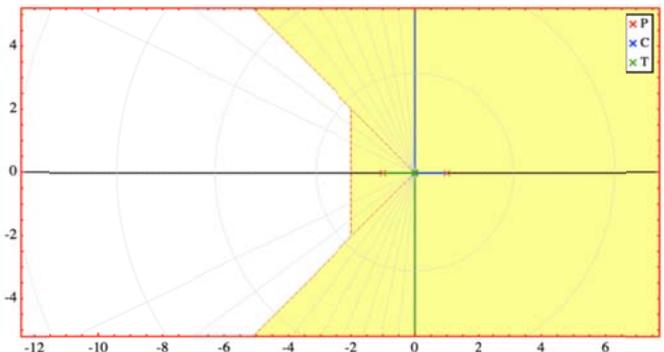


Figura 12: Lugar de las raíces del péndulo invertido con un controlador proporcional.

En particular, si se mueven las asíntotas al punto -2, el requisito del tiempo de asentamiento se cumplirá automáticamente (para una ganancia suficientemente alta) y el requisito de la sobreelongación puede garantizarse eligiendo la ganancia suficientemente baja. Una estrategia natural para mover las asíntotas para que se crucen en el punto -2, es usar un compensador de adelanto de fase

$$C(s) = K \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad \alpha < 1 \quad (19)$$

con los parámetros  $K > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $T > 0$ . El cero del compensador por adelanto de fase se puede elegir de forma que cancele al polo estable de la planta ( $s = -1$ ) y el polo del compensador por adelanto se puede colocar a la izquierda del polo cancelado. Como consecuencia de esto, el “centro de masas” de los polos se mueve hacia la izquierda, al igual que las asíntotas. Se debe observar que los ángulos de las asíntotas ( $90^\circ$  y  $270^\circ$ ) no cambian por introducir un compensador de adelanto, ya que tiene el mismo número de polos y ceros. Para implementar esta idea, se fija  $T = 1$  para que el cero del compensador cancele al polo estable de la planta y se calcula  $\alpha$  de la condición de intersección de las asíntotas lo que implica que  $\alpha = 0,2$ .

En la Figura 13 se muestra el lugar de las raíces del sistema con compensador de adelanto. Se puede ver que las asíntotas se cruzan con el eje real en el punto que tiene de abscisa  $x = -2$ .

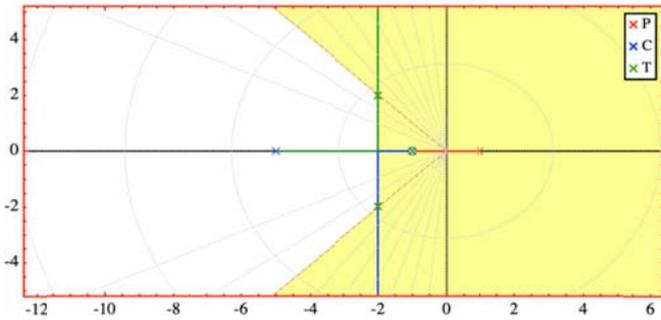


Figura 13: Lugar de las raíces del péndulo invertido con un controlador por adelanto de fase.

Finalmente, hay que elegir la ganancia del controlador  $K$  para que se cumpla la especificación de sobreelongación. Por simplicidad se elige que el requisito debe cumplirse exactamente, es decir, se obtiene un ángulo del polo  $\phi_i$  de  $45^\circ$  exactos. Esto implica que los polos complejos-conjugados están en las posiciones  $-2 \pm 2j$ . Marcando el punto  $(-2 + 2j)$  con el cursor en el diagrama del lugar de las raíces se calcula la ganancia del controlador ( $K = 1$ ). Por lo tanto, el controlador para este ejemplo viene dado por la siguiente función de transferencia:

$$C(s) = \frac{1 + s}{1 + 0,2s} \quad (20)$$

### 5.2. Diseño con especificaciones en el dominio temporal y frecuencial

Las consideraciones que se han expuesto anteriormente permiten establecer un cierto esquema o metodología con el cual se pueden abordar problemas de diseño de sistemas de control más complicados. A título ilustrativo se va a considerar una planta con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{(s + 30)(s^2 + 30s + 709)} \quad (21)$$

que tiene un polo real en  $s = -30$  y un par de polos complejos conjugados en  $s = -15 \pm 22j$ . Se desea diseñar un compensador  $C(s)$  que cumpla las siguientes especificaciones de diseño:

1. Error en estado estacionario nulo para una entrada en escalón.
2. Ancho de banda,  $\omega_b \leq 100$  rad/s.
3. Margen de fase,  $\phi_m \geq 50^\circ$ .
4. Margen de ganancia,  $MG \geq 10$  dB.
5. Sobreelongación,  $\Delta h \leq 20\%$ .
6. Tiempo de asentamiento,  $t_s \leq 0,3s$ .
7.  $|L(j0,1\omega_b)| \geq 17$  dB.

Para sistemas con ganancia finita a frecuencia cero, el ancho de banda  $\omega_b$  es la frecuencia en la que la ganancia ha disminuido en  $1/\sqrt{2}$  la ganancia a frecuencia cero. La razón por la que se limita el ancho de banda o el tiempo de asentamiento del sistema es porque los procesos físicos y los sistemas de actuación tienen restricciones de velocidad, ya sean físicas u operativas, que limitan la rapidez con la que se

pueden manejar los sistemas. Si el diseñador de un sistema de control aprovecha al máximo que pueda el ancho de banda del sistema de control, se pueden obtener beneficios en términos del rendimiento que se puede alcanzar y un mejor rechazo de las perturbaciones.

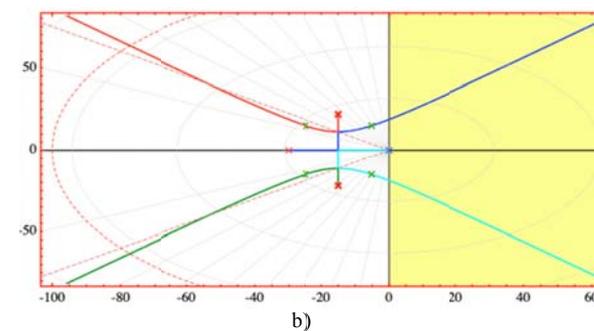
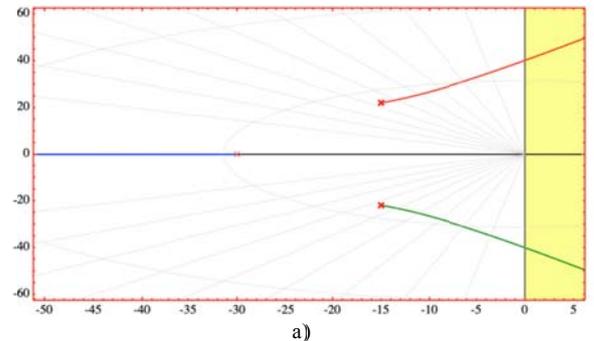


Figura 14: Lugar de las raíces de la planta dada con: a) un controlador P. b) un controlador I.

La Figura 14a muestra el lugar de las raíces de  $G(s)$  con un controlador proporcional  $C(s)$  con ganancia igual a 1 y la Figura 14b cuando se le añade un integrador al controlador (controlador I) que es necesario para conseguir un error en estado estacionario nulo frente a una entrada en escalón.

Los rayos de la rejilla que se han dibujado sobre el lugar de las raíces significan líneas de amortiguamiento constante y los semicírculos centrados en el origen muestran la frecuencia de los polos complejos del sistema en lazo cerrado, si se selecciona la ganancia del controlador de modo que los polos del sistema en lazo cerrado se colocan sobre uno de estos semicírculos.

Tal como ya se ha visto el amortiguamiento del sistema en lazo cerrado también se puede calcular para una ganancia proporcional seleccionada (un punto en el lugar de las raíces) reduciendo la función de transferencia en lazo cerrado a un par dominante de polos complejos conjugados. Entonces la razón de amortiguamiento,  $\zeta$ , se puede calcular dividiendo la magnitud de la parte real por la frecuencia  $\omega_n$  asociada a ese punto.

Como muestra la Figura 14b, al agregar un integrador se consigue que los polos en lazo cerrado se junten a medida que aumenta la ganancia y luego se dividen hacia  $\pm \infty$ . Debido a las especificaciones de diseño para la sobreelongación y el ancho de banda, si se selecciona  $\zeta = 0.8$  y  $\omega_b = 100$  rad/s, la trayectoria del lugar de las raíces pasa próxima a este punto tal como se observa con el cruce de las dos líneas roja de trazo discontinuo. Por lo tanto, este comportamiento se puede lograr si se elige la ganancia de forma que se coloquen las

raíces en este punto. Sin embargo, dicho punto (con la misma ganancia), también existe en el lugar de las raíces en el semiplano derecho, lo que haría que el sistema fuera inestable (incluso para una ganancia menor). Por lo tanto, se deben volver a reexaminar las consideraciones metodológicas analizadas anteriormente para diseñar un controlador para este sistema que satisfaga las especificaciones dadas.

La función de transferencia en lazo abierto para este sistema tiene hasta ahora cuatro polos en  $s_1 = 0$ ,  $s_{2,3} = -15 \pm 22j$  y  $s_4 = -30$ . Análogamente a lo que se comentó con el lugar de las raíces de la Figura 9a, también sería conveniente aquí colocar adecuadamente el cero más a la izquierda en el eje real para hacer que dos de los polos formen un bucle hacia la izquierda, que se vuelve a encontrar sobre el eje real, con uno de los polos moviéndose hacia el cero, mientras que el otro va hacia un cero en  $-\infty$ . Para los otros dos polos (los polos en el eje real), la estrategia consiste en colocar dos ceros cercanos (preferiblemente en el eje real) para hacer que estos polos se muevan hacia los ceros. En este caso, será necesario colocar el cero más a la izquierda en algún lugar a la izquierda del polo en  $s = -30$ , para cumplir con la especificación de ancho de banda de 100 rad/s y con un amortiguamiento suficiente para cumplir también con la especificación de sobreelongación. A menos que se realicen los cálculos de los puntos de ruptura utilizando la regla correspondiente del lugar de las raíces (Dorf and Bishop, 2011) la colocación de este cero implica una cierta estrategia de prueba y error para que la ruptura de los polos en el eje real ocurra suficientemente cerca de 100 rad/s. En este sentido una herramienta interactiva para dibujar el lugar de las raíces, tal como la que se está utilizando, facilita enormemente esta tarea y permite evaluar de una forma muy directa los compromisos que imponen las especificaciones dadas en el problema sobre la colocación interactiva de los ceros y polos de la función de transferencia en lazo abierto. Como se mencionó anteriormente, la posición del cero con frecuencia más baja puede afectar al tiempo de asentamiento. Sin hacer ningún cálculo, el cero con la frecuencia más baja, después de alguna interacción con la herramienta, se va a colocar en  $s = -20$ , y el siguiente cero en  $s = -25$  (es decir, entre el cero de la frecuencia más baja y el polo situado en  $s = -30$ ). Sin embargo, si no se cumple la especificación del tiempo de asentamiento, el primer cero también puede ajustarse otra vez mediante mecanismos de prueba y error de forma interactiva.

Basándose en estas consideraciones de diseño, la localización de los ceros se selecciona en  $s = -20$ ,  $s = -25$  y  $s = -55$ , lo que da como resultado la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$L(s) = \frac{K(s+20)(s+25)(s+55)}{s(s+30)(s^2+30s+709)} \quad (22)$$

En la Figura 15 se muestra el lugar de las raíces de este diseño, junto con la línea de amortiguamiento  $\zeta = 0.77$  y con una frecuencia del par de polos complejos conjugado en lazo cerrado de  $\omega = 100$  rad/s.

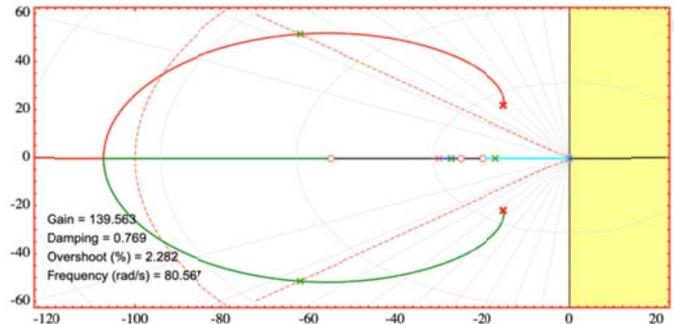


Figura 15: Lugar de las raíces de la función de transferencia en lazo abierto  $L(s)$ .

Las especificaciones que corresponden a la intersección de la línea de amortiguamiento  $\zeta = 0.77$  con el lugar de las raíces de la Figura 17 que determinan los polos en lazo cerrado de este diseño son las siguientes:

- Ganancia de la FT en lazo abierto en ese punto:  $K = 140$ .
- Polos complejos conjugados en lazo cerrado:  $-62 \pm 51j$ .
- Amortiguamiento:  $\zeta = 0.772$ .
- Sobreelongación: 2.2 %.
- Frecuencia: 80,6 rad/s.

Debe observarse que, si la respuesta temporal del sistema en lazo cerrado no está de acuerdo con lo que se espera de esta selección, es porque existe otro punto en la trayectoria del lugar de las raíces con la misma ganancia a una frecuencia más baja que domina la respuesta temporal.

La frecuencia natural resultante de los polos complejos en este diseño,  $\omega_n$ , es inferior a 100 rad/s, pero la frecuencia de cruce resultante,  $\omega_c$ , debe verificarse en el diagrama de Bode. La frecuencia de cruce es la frecuencia en la que el diagrama de Bode cruza la magnitud de 0 dB. El sistema puede responder a perturbaciones hasta la frecuencia de cruce. Sin embargo, ajustando la frecuencia del cero más a la izquierda permite que el lugar de las raíces se bifurque más a la derecha para valores (frecuencias) más pequeños de este cero, o más a la izquierda para valores más grandes. Esto consigue, si fuera necesario, tanto un amortiguamiento más deseable (localización del polo más cercano al eje real para un amortiguamiento más elevado) como seleccionar al mismo tiempo la frecuencia del par de polos complejos conjugados que tienen influencia sobre la velocidad del sistema de control. Conviene observar que si se elige un punto en el lugar de las raíces que se muestra en la Figura 15 a la izquierda de la línea  $\omega = 100$  rad/s, la respuesta del sistema se hace más rápida. Mientras que si se seleccionan puntos dentro del sector que delimita la línea de amortiguamiento de  $\zeta = 0.77$  que están más próximos al eje real, entonces la respuesta del sistema se hace más amortiguada. En la Figura 16 se muestra el diagrama de Bode (en trazo continuo) de esta función de transferencia con una ganancia  $K = 140$ .

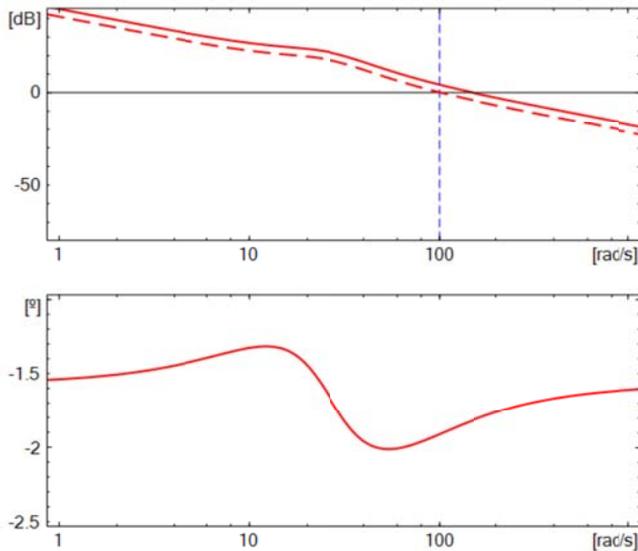


Figura 16: Diagrama de Bode de  $L(s)$ : a)  $K=140$  (línea continua), b)  $K=109$  (línea discontinua).

Para esta ganancia, la frecuencia de cruce excede el límite de 100 rad/s establecido por la especificación ( $\omega_c = 121,3$  rad/s). Para hacer un ajuste rápido (sin cambiar la función de transferencia en lazo abierto ni el diagrama del lugar de las raíces) se propone lo siguiente:

1. Determinar la magnitud en dB en ese punto ( $y=|L(j100)|_{dB}$ ).
2. Calcular,  $10^{y/20}$  para encontrar la relación de las ganancias que proporcionan el cruce por cero a 100 rad/s, y dividir  $K = 140$  por este factor  $x$ .

Siguiendo estos pasos, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x &= 10^{y/20} = 102,1/20 = 1,273 \\ K' &= K/x = 109 \end{aligned} \quad (23)$$

Es decir, la ganancia resultante resulta ser  $K = 109$ . En la Figura 16 se muestra el diagrama de Bode (en trazo discontinuo) de la función de transferencia con esta ganancia revisada que de hecho cruza por 0dB a 100 rad/s. Con la ganancia reducida, la posición del polo en el lugar de las raíces se moverá un poco hacia la izquierda desde la localización anterior y, por lo tanto, el sistema en lazo cerrado resultante se volvería un poco menos amortiguado. Si el amortiguamiento o la sobreelongación resultante no fueran satisfactorios, entonces se necesitaría ajustar el lugar de las raíces, modificando la posición del cero más a la izquierda e iterando el procedimiento reseñado otra vez.

Si se coloca el cursor en la fase de este diagrama de Bode, se puede comprobar que aproximadamente es de 91 rad/s (cerca de 100 rad/s) la fase es de  $-111^\circ$  y con la fase creciente en ese punto. Por lo tanto, el margen de fase de este diseño sería de  $180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$ . Además, este diseño tendrá un margen de ganancia infinito (la fase no cruza  $-180^\circ$ ). Así pues, tanto el margen de fase ( $50^\circ$ ) como el margen de ganancia (10 dB) se satisfacen con este diseño. También, el cursor a 10 rad/s muestra que la ganancia a esa frecuencia es

de aproximadamente 22,3 dB, que cumple o excede la especificación de diseño en el rango de frecuencias medias. La magnitud de la ganancia de la función de transferencia en lazo abierto a una frecuencia determinada antes del cruce significa la magnitud por la cual el sistema de control atenúa las perturbaciones a esa frecuencia para las perturbaciones que entran en el sistema a la salida de la planta. Por ejemplo, si la ganancia a una frecuencia determinada es de 26 dB, el controlador reducirá las perturbaciones a esa frecuencia en un factor  $x$ , donde  $x = 10^{(26/20)} = 20$ .

Este ejemplo pone de manifiesto también un hecho bastante normal en el diseño de un controlador y es que con frecuencia hay necesidad de utilizar más de una representación. En concreto el lugar de las raíces no es el marco idóneo para ver las características asociadas con la respuesta en frecuencia que se visualizan de forma más natural en un diagrama de Bode. LCS D es una herramienta que permite de manera muy sencilla realizar diseños que utilizan más de una representación.

## 6. Conclusiones

El lugar de las raíces es un método clásico para el análisis de sistemas lineales de control que ha formado parte desde su irrupción de los programas de los cursos básicos de la disciplina. Con la aparición de los paquetes gráficos de diseño interactivo de sistemas de control se ha ido trasladando el énfasis inicial que estaba centrado en explicar de forma exhaustiva las reglas de construcción y dibujo del lugar de las raíces. En su lugar se adopta un enfoque más conceptual donde se relajan los aspectos mecánicos de la representación gráfica del lugar, que se dejan en manos de la herramienta informática, para concentrarse en comprender cómo afecta a la forma del lugar la introducción de nuevos polos/ceros en la función de transferencia en lazo abierto.

El lugar de las raíces muestra directamente si el sistema puede ser estabilizado por un controlador proporcional y, si no, permite evaluar qué componentes dinámicos deben insertarse para compensar al sistema de forma que cumpla las especificaciones dadas. Este trabajo representa una aproximación hacia esta filosofía de enseñanza/aprendizaje del lugar de las raíces utilizando la herramienta LCS D desarrollada por los autores.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades bajo los proyectos ECoDiC ref. RTI2018-094665-B-I00 y DOVELAR ref. RTI2018-096001-B-C32.

## Referencias

- Arévalo, V., Vicente-del-Rey, J.M., García-Morales, I., Rivas-Blanco, I., 2020. Minivideos tutoriales como apoyo al aprendizaje de conceptos básicos para un curso de Fundamentos de Control Automático, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 17, 107-115.
- Åström, K. J., Murray, R. M., 2014. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers 2<sup>nd</sup> Edition. Princeton University Press.

- Díaz, J. M., Dormido, S., Aranda, J., 2007. SISOQFTIT: An interactive software tool for robust control design using the QFT methodology, *Int. J. Eng. Educ.*, 23, 5, 1011–1023.
- Díaz, J. M., Dormido, S., Rivera, D. E., 2016. ITTSAE: A set of interactive software tools for time series analysis education, *IEEE Control Syst. Mag.*, 36, 3, 112–120.
- Díaz, J. M., Costa, R., Muñoz, R., Dormido, S., 2017. An interactive and comprehensive software tool to promote active learning in the loop shaping control system design. *IEEE Access* 5, 10533–10546.
- Dorf, R. C., Bishop, R. H., 2011. *Modern Control Systems* 12<sup>th</sup> Edition. Prentice Hall.
- Dormido, S., Gordillo, F., Dormido-Canto, S., Aracil, J., 2002. An interactive tool for introductory nonlinear control systems education, *Proc. IFAC 15th World Congress*, 35, 1, 255–260.
- Dormido, S., 2004. Control learning: Present and future, *Annu. Rev. Control*, 28, 1, 115–136.
- Dormido, S., Dormido-Canto, S., Dormido-Canto, R., Sánchez, J., Duro, N., 2005. The role of interactivity in control learning, *Int. J. Eng. Educ.*, 21, 6, 1122–1133.
- Evans, W. R., 1948. Graphical analysis of control systems. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 67, 547–551.
- Evans, W. R., 1950. Control systems synthesis by root-locus method *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 69, 66–69.
- Evans, W. R., 1954. *Control System Dynamics*. McGraw-Hill, New York.
- Franklin, G. F., Powell, J. D., Emami-Naeini, A., 2015. *Feedback Control of Dynamic Systems* 7<sup>th</sup> Edition. Pearson.
- Gasmi, H., Bouras, A., 2018. Ontology-based education/industry collaboration system, *IEEE Access*, 6, 1362–1371.
- Golnaraghi, F., Kuo, B. C., 2017. *Automatic Control Systems* 10<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill.
- Guzmán, J. L., Åström, K. J., Dormido, S., Haggglund, T., Berenguel, M., Piguet, Y., 2008. Interactive learning modules for PID control, *IFAC Proc.* 39, 6, 7–12.
- Guzmán, J. L., Rivera, D. E., Dormido, S., Berenguel, M., 2012. An interactive software tool for system identification, *Adv. Eng. Softw.*, 45, 1, 115–123.
- Guzmán, J. L., Dormido, S., Berenguel, M., 2013. Interactivity in education: An experience in the automatic control field, *Comput. Appl. Eng. Educ.*, 21, 2, 360–371.
- Guzmán, J. L., Costa, R., Dormido, S., Berenguel, M., 2016. An interactivity based methodology as support to control education, *IEEE Control Syst. Mag.*, 35, 1, 11–25.
- Keviczky, L., Bars, R., Hetthéssy, J., Bányász, C., 2019. *Control Engineering*. Springer.
- Lerma, E., Costa-Castelló, R., Griño Cubero, R., Sanchis, C., 2020. Herramientas para la docencia de control digital en grados de ingeniería, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. [Online] <https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/view/13756>
- Moon, Y. L., 2007. Education reform and competency-based education, *Asia Pacific Education Review*, 8, 2, 337–341.
- Nickerson, J. V., Corter, J. E., Esche, S. K., Chassapis, C., 2007. A model for evaluating the effectiveness of remote engineering laboratories and simulations in education, *Computers & Education*, 49, 3, 708–725.
- Kasser, J., Hitchins, D., Frank, M., Zhao, Y. Y., 2013. A framework for benchmarking competency assessment models, *Systems Engineering*, 16, 1, 29–44.
- Heradio, R., de la Torre, L., Dormido, S., 2016. Virtual and remote labs in control education: A survey, *Annual Reviews in Control*, 42, 1–10.
- Nise, N. S., 2015. *Control Systems Engineering* 7<sup>th</sup> Ed. John Wiley and Sons.
- Ogata, K., 2010. *Modern Control Engineering* 5<sup>th</sup> Edition. Prentice Hall.
- Piguet, Y., 2017. *Sysquake 6 User Manual*. Calerga, Lausanne.
- Vargas, H., Heradio, R., Chacon, J., de La Torre, L., Farias, G., Galan, D., Dormido, S., 2019. Automated Assessment and Monitoring Support for Competency-Based Courses, *IEEE Access*, 7, 41043–41051.
- Vargas, H., Marín, L., de la Torre, L., Heradio, R., Díaz, J. M., Dormido, S., 2020. Evidence-based control engineering education: evaluating the LCS simulation tool, *IEEE Access*, 8, 170183–170194, 2020