



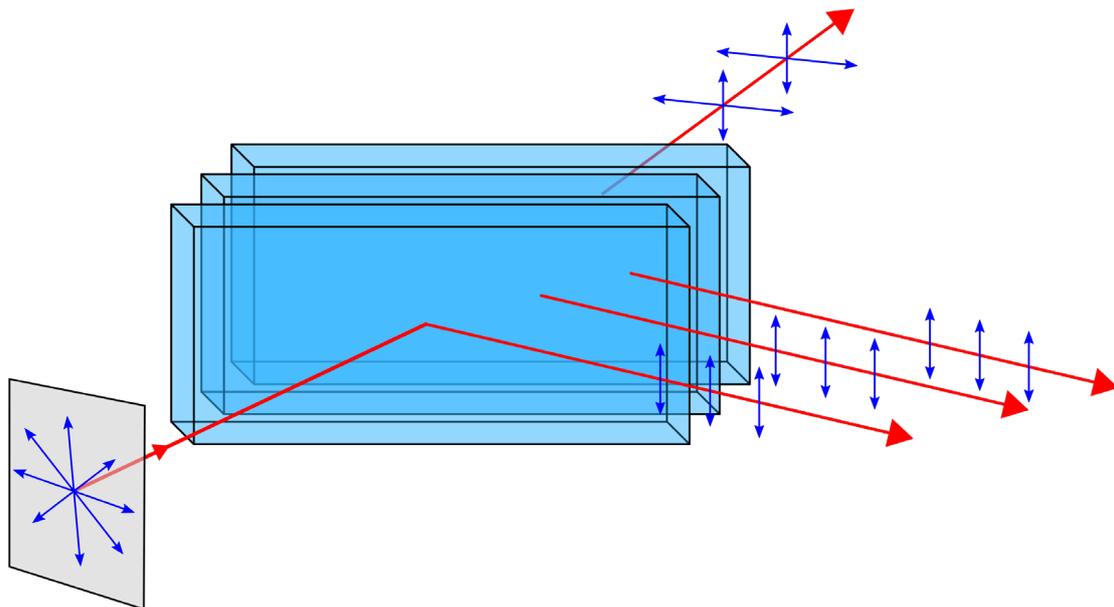
UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA ÓPTICA DE MULTICAPAS

Amparo Pons Martí
Juan Antonio Monsoriu Serra
Vicente Ferrando Martín



EDITORIAL

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

ISBN: 978-84-09-29490-9

Fundamentos Físicos de la Óptica de Multicapas

Amparo Pons Martí
Juan Antonio Monsoriu Serra
Vicente Ferrando Martín

2021

EDITORIAL

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

ISBN: 978-84-09-29490-9



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Pons Martí, Amparo; Monsoriu Serra, Juan Antonio; Ferrando Martín, Vicente. (2021). *Fundamentos Físicos de la Óptica de Multicapas*. Valencia: Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño.

© Amparo Pons Martí
Juan Antonio Monsoriu Serra
Vicente Ferrando Martín

© 2021, Editorial Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño
Universitat Politècnica de València.
Camino de Vera, s/n
46022 – Valencia – España
www.etsid.upv.es

ISBN: 978-84-09-29490-9

La Editorial ETSID autoriza la reproducción, traducción y difusión de la presente publicación con fines científicos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial ETSID, la publicación y los autores.

ÍNDICE

Tema 1. Introducción.	3
Tema 2. Interfase dieléctrico-dieléctrico.	7
2.1. Condiciones en la frontera.	7
2.2. Leyes de la reflexión y de la refracción.	9
2.3. Relaciones entre amplitudes: Fórmulas de Fresnel.	10
2.4. Interpretación de las fórmulas de Fresnel.	14
2.5. Reflectancia y transmitancia.	15
2.6. Ley de Brewster.	18
2.7. Reflexión total interna.	20
2.8. Impedancia.	24
3. Óptica de multicapas.	25
3.1. Lámina delgada.	25
3.2. Formulación matricial.	29
3.3. Aplicaciones.	36
4. Laboratorios virtuales.	43
4.1. Multicapas periódicas.	43
4.2. Multicapas aperiódicas.	45

Tema 1

Introducción

Cuando una onda plana llega a la superficie de separación (interfase o frontera) de dos medios homogéneos lineales e isotrópicos con diferentes propiedades ópticas (diferente índice de refracción) da lugar a:

- Una onda que se propaga en el segundo medio (onda transmitida).
- Una onda que se propaga, de vuelta, en el primer medio (onda reflejada).

Si se considera una frontera plana, la simetría del problema impone que estas dos ondas, transmitida y reflejada, sean también planas.

El estudio completo del problema de la reflexión/refracción implica la obtención de las expresiones que determinan:

- las direcciones de propagación (propiedades *cinemáticas*).
- las amplitudes, cambios de fase y polarización (propiedades *dinámicas*) de las ondas reflejada y transmitida.

Para realizar este estudio se utilizarán las *condiciones de continuidad* de los campos en la frontera entre los dos medios materiales. Estas relaciones, que se derivan de las ecuaciones de Maxwell, establecen que las componentes tangenciales de **E** y **H** toman el mismo valor a ambos lados de la frontera. Aplicando estas condiciones de continuidad deduciremos, en primer lugar, las direcciones de propagación de las ondas reflejada y transmitida que se expresan mediante las *leyes de la reflexión y de la refracción*. A continuación, se estudiarán las relaciones entre las amplitudes (coeficientes de reflexión y transmisión) e intensidades (reflectancia y transmitancia) de las ondas obteniendo las expresiones conocidas como *fórmulas de Fresnel*. El análisis de estas fórmulas pone de manifiesto la existencia del *ángulo de Brewster* (o de polarización) y del ángulo límite del que se deriva el fenómeno de *reflexión total interna* (TIR). Para concluir esta parte del tema se verán algunas aplicaciones.

En la segunda parte del tema se utilizarán las fórmulas de Fresnel para abordar el estudio de las *películas delgadas* que se utilizan, ya sea como una sola capa o como elementos multicapa, en muchas aplicaciones de óptica y optoelectrónica.

Comenzaremos por estudiar el caso más sencillo de una sola lámina delgada, o capa, de un cierto índice de refracción rodeada de un sustrato y un recubrimiento de índices distintos. Para ello aplicaremos las fórmulas de Fresnel en cada una de las dos fronteras de la lámina obteniendo las expresiones de los coeficientes de reflexión y transmisión de la película. El procedimiento anterior no es viable en el caso de una película multicapa, sobre todo si el número de capas es elevado, por el gran número de ecuaciones que es necesario manejar. Por esta razón se introducirá un *método matricial* que aborda de modo más sencillo y sistemático el estudio de las películas multicapa. Este método permite describir el comportamiento de una lámina mediante su *matriz característica*. Para concluir se verán algunos ejemplos de aplicación de las películas delgadas tanto sencillas como multicapas periódicas y aperiódicas (fractales, Fibonacci, etc...). Para la caracterización de estos sistemas se han desarrollado unos laboratorios virtuales de libre acceso a través de la plataforma RiuNet de la UPV.

Interfase dieléctrico-dieléctrico

2.1. Condiciones en la frontera.

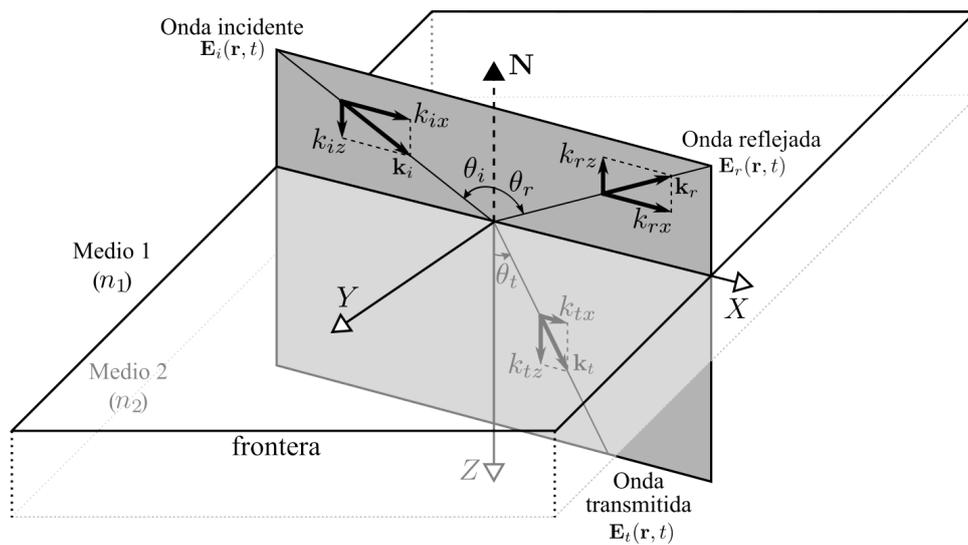


Figura 1. Condiciones en la frontera.

- Elección del sistema de coordenadas:
- * origen O en la superficie de separación (frontera) de los dos medios;

- * eje Z en la dirección de la normal \mathbf{N} a esta superficie y dirigido desde el medio 1 al medio 2;
- * plano de incidencia coincidente con el plano XZ.

$$\begin{aligned}
 \text{Onda INCIDENTE:} \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{oi} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \\
 \text{Onda REFLEJADA:} \quad \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{or} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} \\
 \text{Onda TRANSMITIDA:} \quad \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{ot} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}
 \end{aligned} \tag{1}$$

NOTACIÓN: a partir de ahora, el superíndice indica la componente — tangencial (tg) o normal (n)— y el subíndice el medio —1 ó 2— en el que nos encontramos.

- Continuidad del campo eléctrico:

$$[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} = [\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} \Rightarrow [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} = [\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} \tag{2}$$

Esta relación se ha de cumplir:

$$\text{a) } \forall t \rightarrow \omega_i = \omega_r = \omega_t \tag{3}$$

$$\text{b) } \forall \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \tag{4}$$

Además, de (2), (3) y (4) se deduce

$$[\mathbf{E}_{oi} + \mathbf{E}_{or}]^{\text{tg}} = [\mathbf{E}_{ot}]^{\text{tg}} \tag{5}$$

- Continuidad del campo magnético:

$$[\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} = [\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} \Rightarrow [\mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} = [\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t)]^{\text{tg}} \quad (6)$$

De esta ecuación se deducen también las relaciones (3) y (4), y adicionalmente la condición

$$[\mathbf{H}_{oi} + \mathbf{H}_{or}]^{\text{tg}} = [\mathbf{H}_{ot}]^{\text{tg}} \quad (7)$$

A partir de (4), se deducen las leyes de la reflexión y la refracción. De (5) y (7), se obtienen las relaciones entre las amplitudes y las fases de las ondas (fórmulas de Fresnel).

2.2. Leyes de la reflexión y de la refracción.

1ª ley. $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r, \mathbf{k}_t$ y \mathbf{N} son coplanarios $\Rightarrow \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r, \mathbf{k}_t \in \Pi(XZ)$ (plano de incidencia).

2ª ley. Reflexión: $\theta_r = \theta_i$ (8a)

Refracción: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ (8b)

2.3. Relaciones entre amplitudes: fórmulas de Fresnel

Onda incidente con el vector \vec{E} perpendicular al plano de incidencia (polarización \perp , transversal eléctrica TE o polarización s):

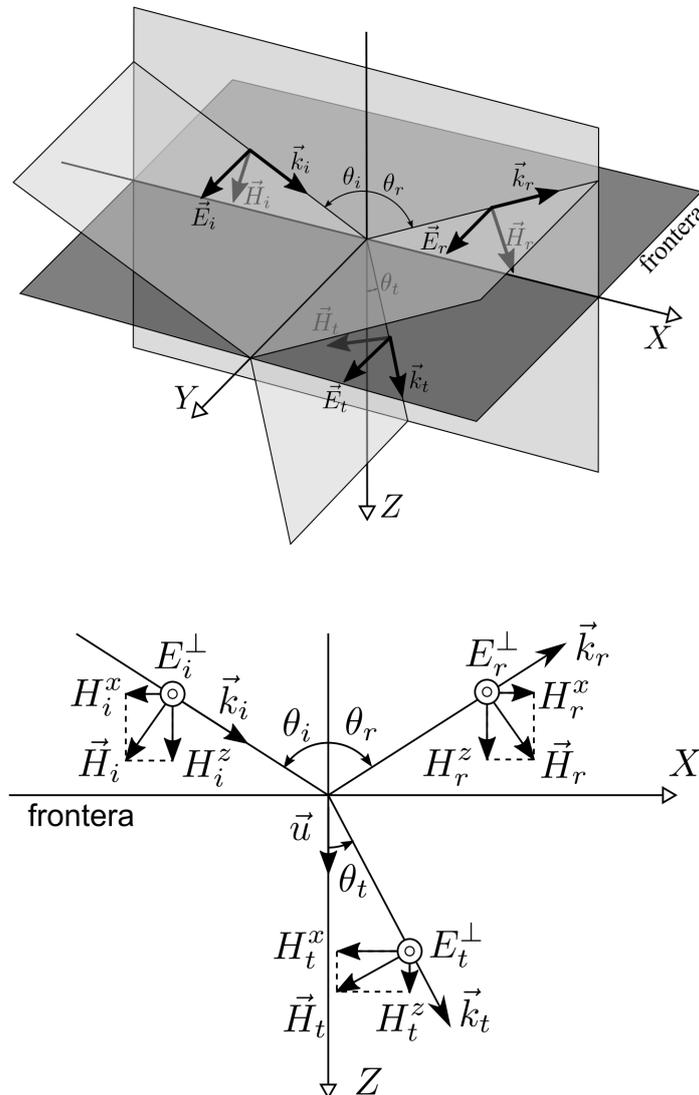


Figura 2. Condiciones de continuidad polarización TE.

Condiciones de continuidad:

a) Campo eléctrico —ecuación (5)—:

$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot} \quad (9)$$

b) Campo magnético —ecuación (7)—:

$$-H_{oi} \cos \theta_i + H_{or} \cos \theta_r = -H_{ot} \cos \theta_t$$

$$\downarrow \quad |\mathbf{H}| = \frac{n}{\mu c} |\mathbf{E}|$$

$$\frac{n_1}{\mu_1} (-E_{oi} + E_{or}) \cos \theta_i = -\frac{n_2}{\mu_2} E_{ot} \cos \theta_t \quad (10)$$

Se definen los coeficientes de reflexión $r = \frac{E_{or}}{E_{oi}}$ y de transmisión $t = \frac{E_{ot}}{E_{oi}}$, que dependen de la polarización de la onda incidente. En este caso $E_{oi}^\perp = E_{oi}$, $E_{or}^\perp = E_{or}$ y $E_{ot}^\perp = E_{ot}$, y a partir de (9) y (10) se obtiene (para el caso $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

$$\begin{aligned} r_\perp &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{k_{iz} - k_{tz}}{k_{iz} + k_{tz}} \\ t_\perp &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2k_{iz}}{k_{iz} + k_{tz}} \end{aligned} \quad (11)$$

\downarrow En incidencia normal ($\theta_i = 0$)

$$\begin{aligned} r_\perp &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t_\perp &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{aligned} \quad (12)$$

- Onda incidente con el vector \vec{E} paralelo al plano de incidencia (polarización $||$, transversal magnética TM o polarización p):

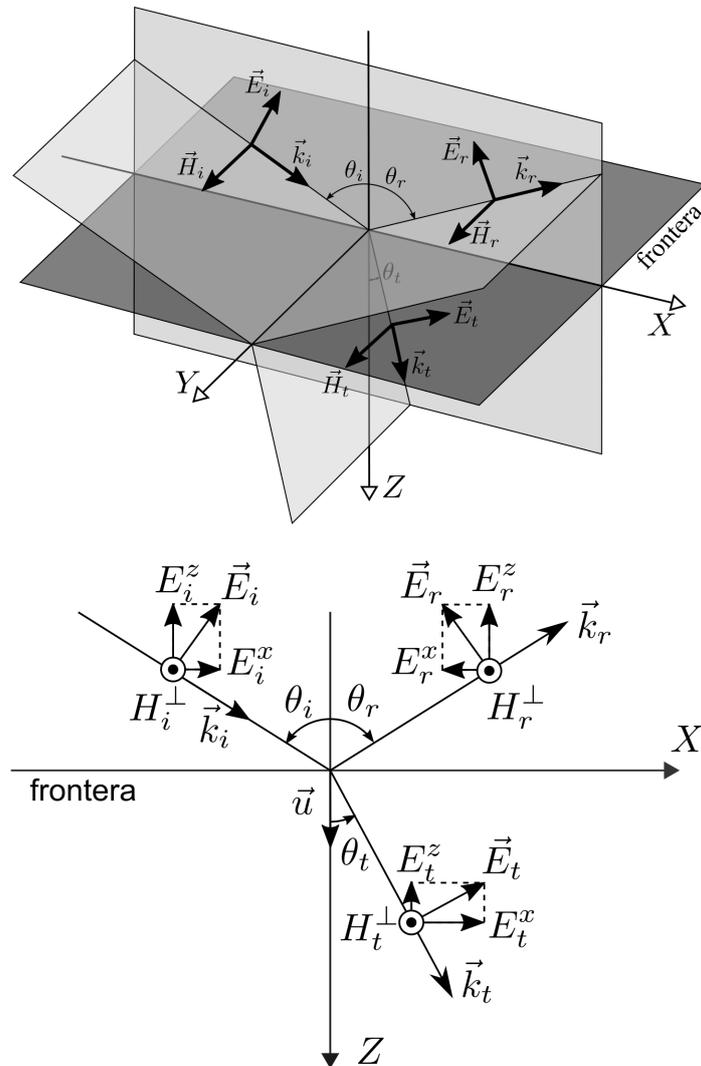


Figura 3. Condiciones de continuidad polarización TM

Condiciones de continuidad:

a) Campo eléctrico —ecuación (5)—:

$$E_{oi} \cos \theta_i - E_{or} \cos \theta_r = E_{ot} \cos \theta_t \quad (13)$$

b) Campo magnético —ecuación (7)—:

$$H_{oi} + H_{or} = H_{ot}$$

$$\downarrow \quad |\mathbf{H}| = \frac{n}{\mu c} |\mathbf{E}|$$

$$\frac{n_1}{\mu_1} (E_{oi} + E_{or}) = \frac{n_2}{\mu_2} E_{ot} \quad (14)$$

En este caso $E_{oi}^{\parallel} = E_{oi}$, $E_{or}^{\parallel} = E_{or}$ y $E_{ot}^{\parallel} = E_{ot}$, y a partir de (13) y (14) se obtiene (para el caso $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{k_{iz} |\mathbf{k}_t|^2 - k_{tz} |\mathbf{k}_i|^2}{k_{iz} |\mathbf{k}_t|^2 + k_{tz} |\mathbf{k}_i|^2} \quad (15)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2k_{iz} |\mathbf{k}_t|^2}{k_{iz} |\mathbf{k}_t|^2 + k_{tz} |\mathbf{k}_i|^2}$$

\downarrow En incidencia normal ($\theta_i = 0$)

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = -r_{\perp} \quad (16)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = t_{\perp}$$

2.4. Interpretación de las fórmulas de Fresnel.

La representación gráfica de los coeficientes de reflexión y transmisión en función del ángulo de incidencia permite analizar, para cada tipo de polarización, las variaciones de las amplitudes reflejada y transmitida respecto de la amplitud incidente. Se analizarán los dos casos posibles, es decir, $n_1 < n_2$ —reflexión *externa*— y $n_1 > n_2$ —reflexión *interna*—, constatando la existencia, en ambos casos, del ángulo de Brewster o ángulo de polarización. En el segundo de los casos se pondrá de manifiesto la aparición del fenómeno de reflexión total interna (TIR) para el ángulo límite (o ángulo crítico).

- Reflexión externa. Ángulo de Brewster.

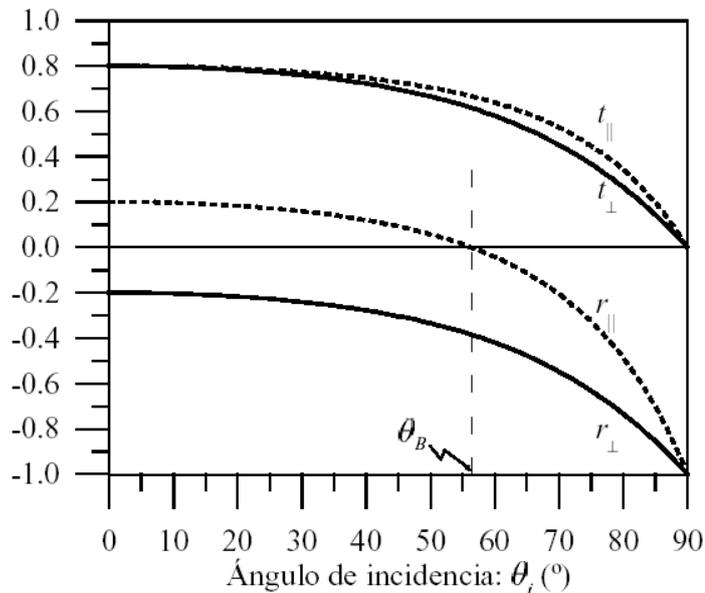


Figura 4a. $n_1 < n_2$, aire \sim vidrio, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, $\theta_B \approx 56^\circ$

- Reflexión interna. Ángulo crítico.

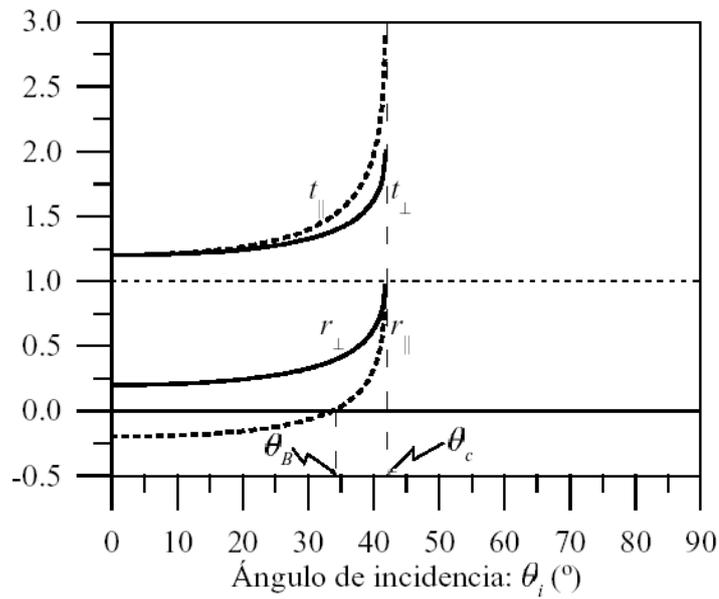


Figura 4b. $n_1 > n_2$, vidrio \sim aire, $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$,

$$\theta_c \approx 41'8'', \theta_B \approx 37'7''$$

2.5. Reflectancia y transmitancia.

Se definen la reflectancia, R , (y la transmitancia, T) como el cociente de flujos, a través del elemento de área A , de la onda reflejada (y la transmitida) y de la onda incidente. Se puede probar que

$$R = \frac{E_{or}^2}{E_{oi}^2}, \quad T = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \frac{E_{ot}^2}{E_{oi}^2} \quad (17)$$

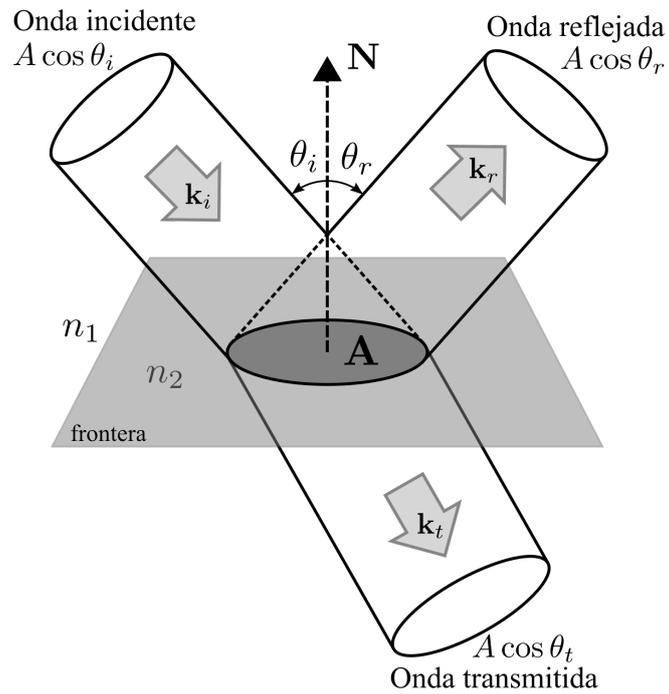


Figura 5. Transmitancia/reflectancia.

Ambas dependen de la polarización de la luz incidente. Para las polarizaciones consideradas en apartados anteriores (\perp y \parallel), a partir de los coeficientes de reflexión y transmisión (11) y (15), se obtiene

$$\begin{aligned}
 R_{\perp} &= r_{\perp}^2, & T_{\perp} &= \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\perp}^2 \\
 R_{\parallel} &= r_{\parallel}^2, & T_{\parallel} &= \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\parallel}^2
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Es directo comprobar el principio de conservación de la energía ($R+T=1$) para cada una de las componentes del campo:

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1, \quad R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1
 \tag{19}$$

Para incidencia normal ($\theta_i = 0$) se obtiene

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = R_o = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T_{\perp} = T_{\parallel} = T_o = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$
(20)

Si se representa gráficamente el valor de la reflectancia y la transmitancia en función del ángulo de incidencia, tanto para reflexión *externa* como *interna*, se obtiene:

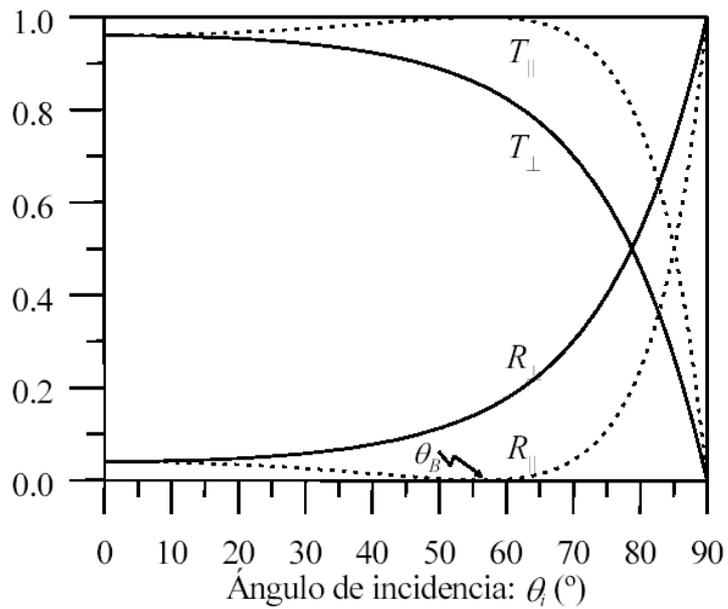


Figura 6a. $n_1 < n_2$, aire ~ vidrio, $n_1 = 1$, $n_2 = 1'5$, $\theta_B \approx 56^\circ$

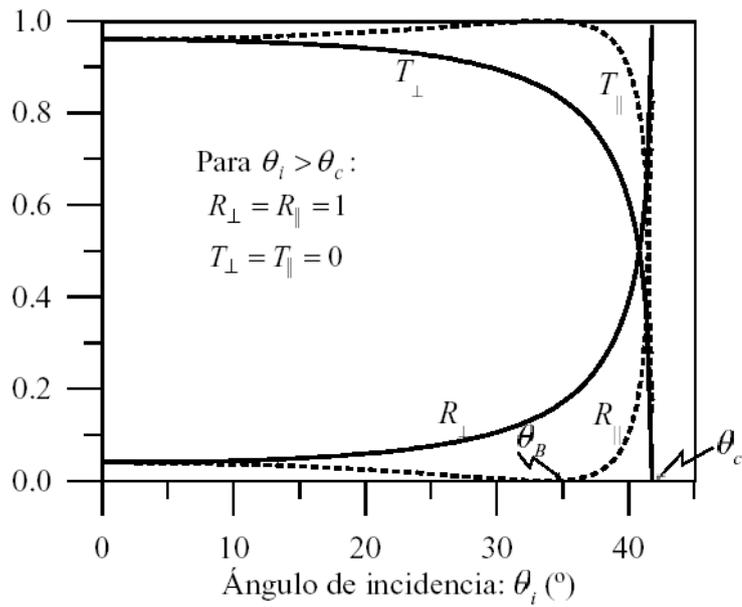


Figura 6b. $n_1 > n_2$, vidrio \sim aire, $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$,
 $\theta_c \approx 41.8^\circ$, $\theta_B \approx 37.7^\circ$

2.6. Ley de Brewster.

De acuerdo con las fórmulas de Fresnel, para $\theta_i = \theta_B$ (ángulo de Brewster) se cumple que $r_{\parallel} = 0$. En esas condiciones:

- La onda reflejada está totalmente polarizada (sólo tiene componente \perp).
- La onda transmitida está parcialmente polarizada.
- Ley de Brewster: $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

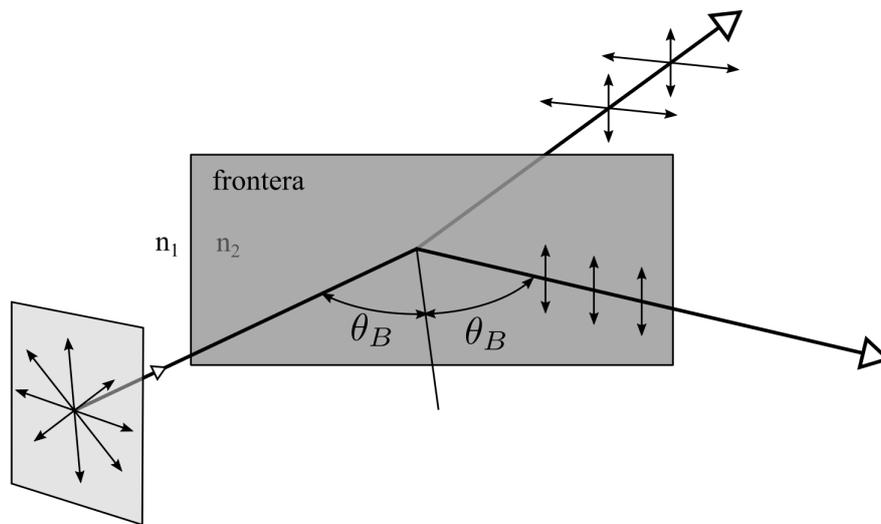


Figura 7. Polarización por incidencia en ángulo de Brewster.

Aplicaciones:

* Polarizador de *pila de placas de vidrio*:

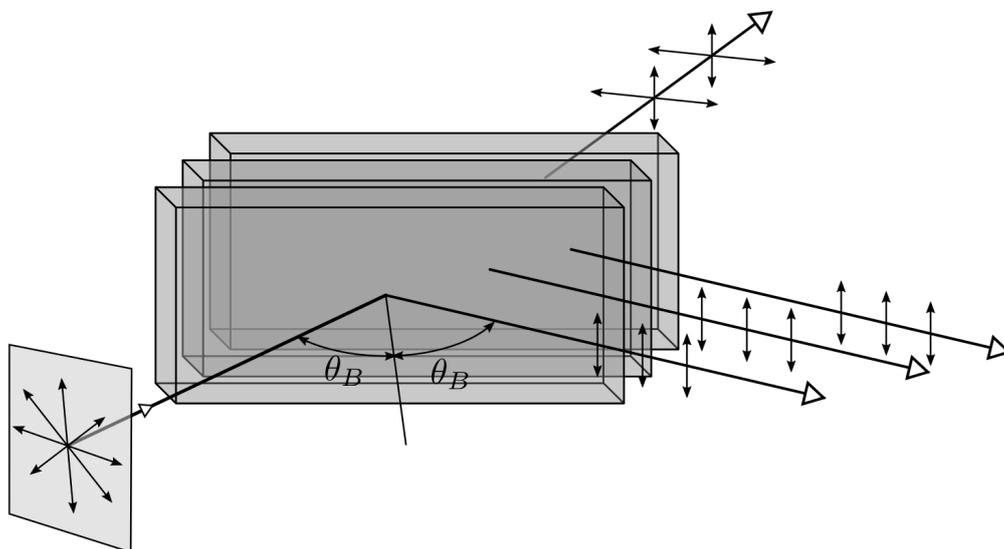


Figura 8. Polarización por pilas de placas de vidrio.

* Ventanas de Brewster en láseres:

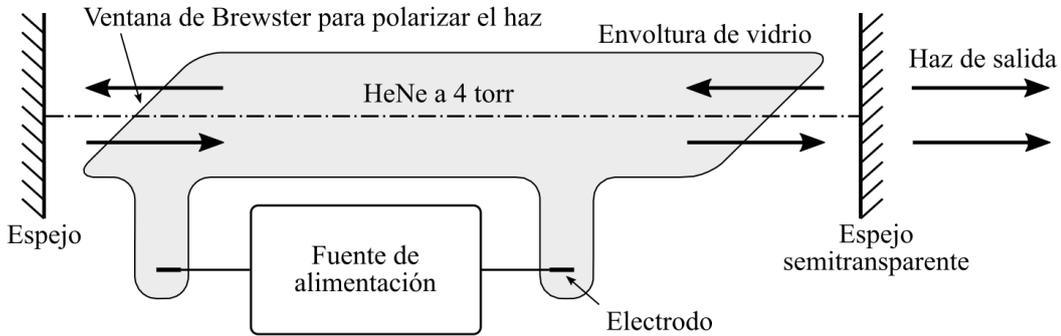


Figura 9. Ventanas de Brewster en láseres.

2.7. Reflexión total interna.

Para el caso de reflexión interna ($n_1 > n_2$), el ángulo de incidencia máximo para el que existe onda transmitida es el *ángulo crítico* θ_c , para el que $\theta_t = 90^\circ$. A partir de la ley de la refracción (2.8b), se obtiene que $\sin \theta_c = n_2 / n_1$.

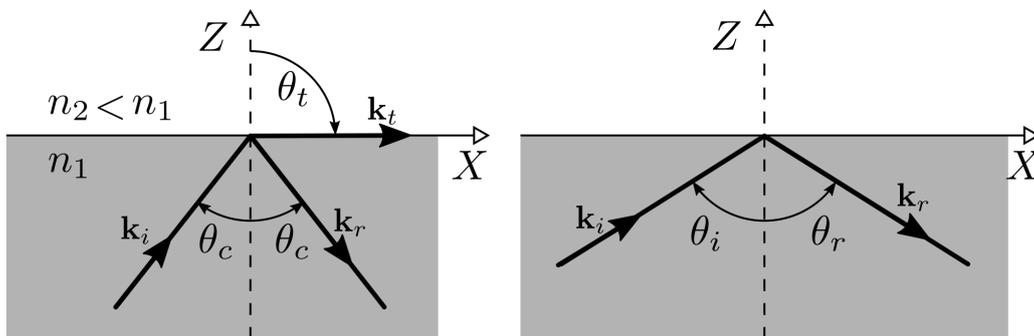


Figura 10. Reflexión total interna.

Experimentalmente se observa que para ángulos de incidencia mayores que θ_c toda la luz es reflejada hacia el primer medio, produciéndose el fenómeno de *reflexión total interna* (TIR).

En este caso, si sólo se generase una onda reflejada por interacción con la frontera entre ambos medios, las condiciones de continuidad del campo electromagnético no podrían cumplirse. De hecho, en el segundo medio aparece una onda que se propaga únicamente en la dirección paralela a dicha frontera y que se atenúa muy rápidamente en la dirección Z , extinguiéndose prácticamente a una pequeña distancia z_p de la interfase.

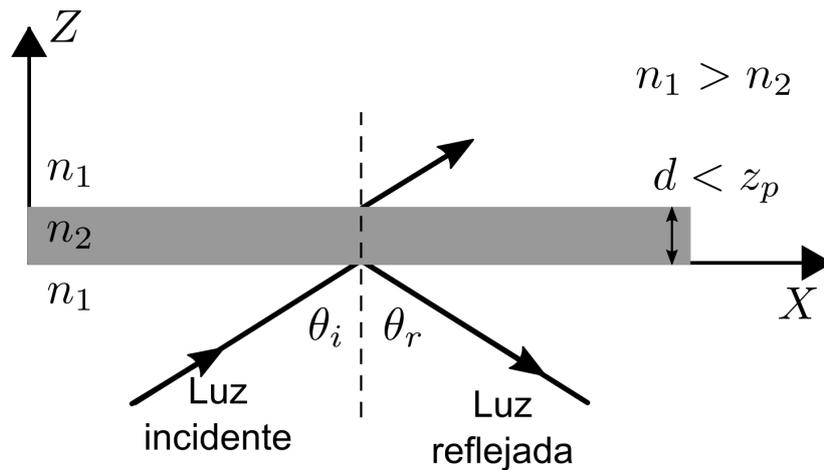


Figura 11. Efecto túnel óptico.

La penetración de esta *onda evanescente* en el segundo medio puede aprovecharse para producir el fenómeno de *reflexión total interna frustrada* (FTIR) —o *efecto túnel óptico*. Para ello, se

sitúa un nuevo material dieléctrico a una distancia de la interfase menor que z_p , de manera que la luz alcanza esta sustancia tras “propagarse” a través de un medio “prohibido”.

Aplicaciones:

* Prismas de reflexión total:

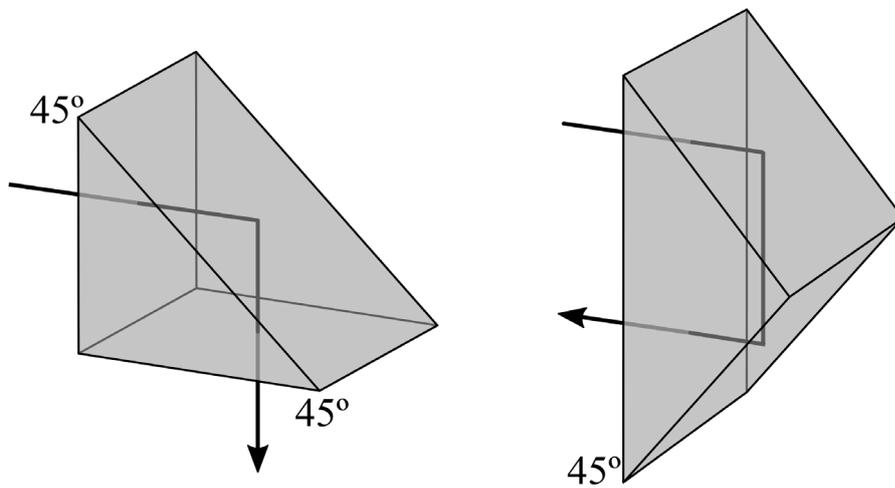


Figura 12. Prismas de reflexión total.

* Guiado de la luz en una fibra óptica:

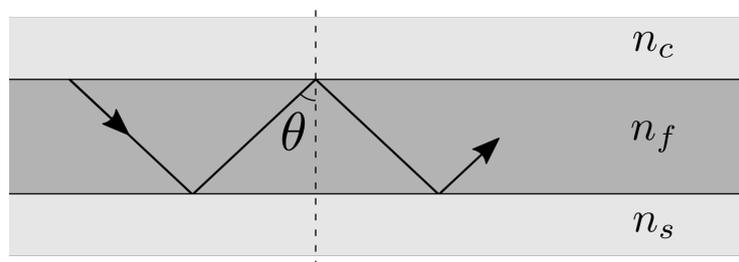


Figura 13. Guiado por fibra óptica.

- * Prisma acoplador en una guía óptica:

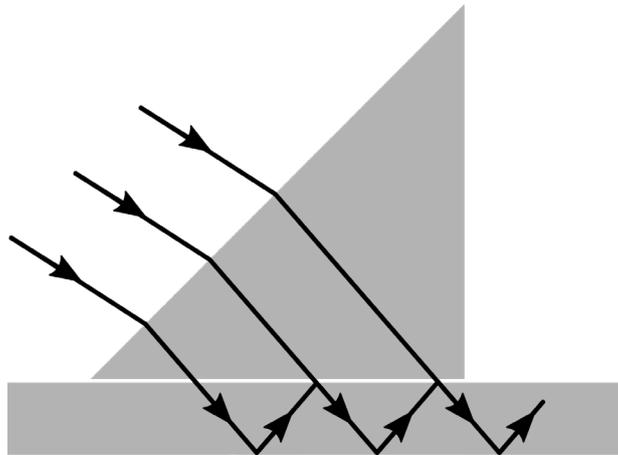


Figura 14. Prisma acoplador.

- * Cubo divisor de haz:

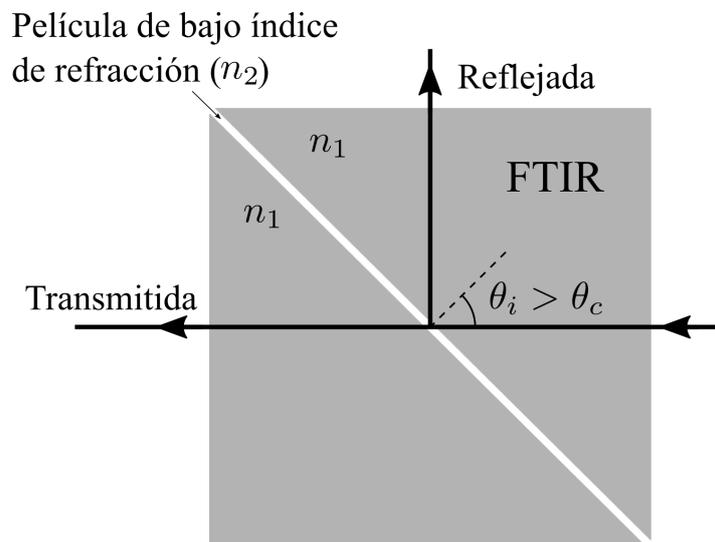


Figura 15. Divisor de haz.

2.8. Impedancia.

La propagación en un medio homogéneo es equivalente a la propagación de una onda *TEM* en una línea de transmisión. La magnitud análoga al índice de refracción es ahora la impedancia Z que caracteriza a la línea de transmisión. Así, el caso de dos líneas de transmisión de longitud semiinfinita e impedancias Z_1 y Z_2 es análogo al de una interfase entre dos medios de índices n_1 y n_2 , obteniéndose en ambos casos expresiones formalmente idénticas.

Tema 3

Óptica de multicapas

3.1. Lámina delgada.

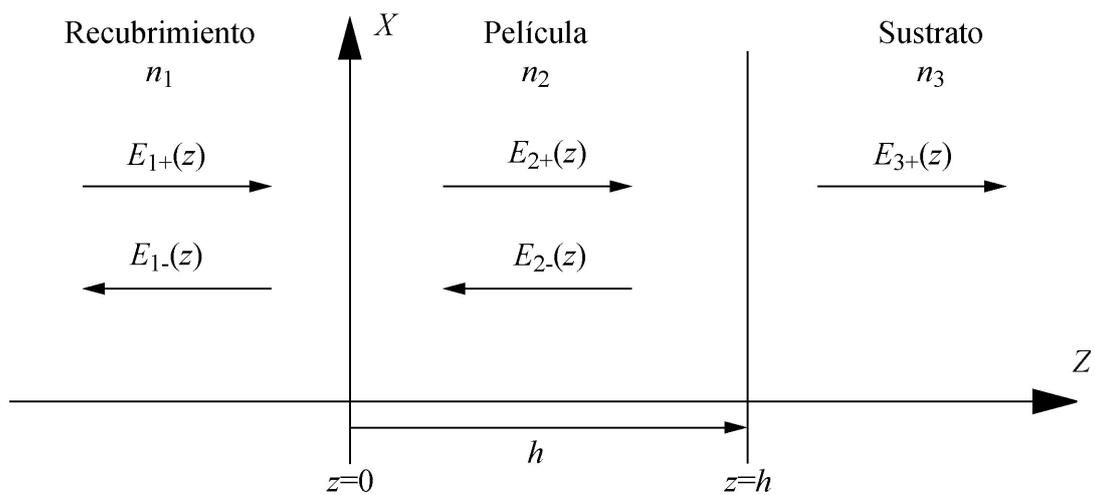


Figura 16. Película delgada.

Analizamos ahora el comportamiento de una lámina delgada de caras planoparalelas de índice n_2 —*película*— y espesor h ,

depositada sobre un material de índice n_3 —*sustrato*— y rodeada por otro medio de índice n_1 —*recubrimiento*.

Elección del sistema de coordenadas:

- * origen O en la superficie de separación (frontera) de los dos medios;
- * eje Z en la dirección de la normal \mathbf{N} a ésta superficie y dirigido desde el medio 1 al medio 2;
- * plano de incidencia coincidente con el plano XZ .

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{oj} e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_{oj} e^{ik_{jz}z} e^{i(k_{jx}x - \omega t)} = \mathbf{E}_j(z) e^{i(k_{jx}x - \omega t)}, \quad j=1,2,3 \quad (21)$$

$$n(z) = \begin{cases} n_1 & z < 0 \\ n_2 & 0 < z < h \\ n_3 & z > h \end{cases} \quad (22)$$

- **Estudio a partir de las fórmulas de Fresnel.**

Cuando una onda plana incide sobre la lámina da lugar a una serie de ondas planas reflejadas y transmitidas. Estas ondas resultan de las interferencias múltiples de las ondas reflejadas y transmitidas en cada frontera.

Aplicando las condiciones de continuidad a los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en cada frontera y teniendo en cuenta las fórmulas de Fresnel,

pueden obtenerse los coeficientes de reflexión, r , y transmisión, t , de la película. Para ambas polarizaciones (\perp y \parallel) se obtienen expresiones formalmente idénticas, dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} r &= \frac{E_{1+}(0)}{E_{1-}(0)} = \frac{r_{12} + r_{23} e^{i\phi}}{1 + r_{12} r_{23} e^{i\phi}} \\ t &= \frac{E_{3+}(h)}{E_{1-}(0)} = \frac{t_{12} t_{23} e^{i\phi/2}}{1 + r_{12} r_{23} e^{i\phi}} \end{aligned} \quad (23)$$

donde $\phi = 2k_{2z}h = \frac{4\pi n_2}{\lambda} h \cos\theta_2$ es la fase acumulada por la onda al recorrer (ida y vuelta) la película, y donde r_{ij} y t_{ij} son los coeficientes de reflexión y de transmisión en la interfase $i-j$. (Nótese que estos coeficientes serán diferentes para cada polarización \perp o \parallel de la onda incidente).

- **Transmitancia y reflectancia.**

De manera análoga a como se hizo en el caso de una única interfase, la transmitancia y la reflectancia en este caso vienen dadas por

$$R = \frac{(E_{1-}(0))^2}{(E_{1+}(0))^2} = r^2, \quad T = \frac{n_3 \cos\theta_3 (E_{3+}(0))^2}{n_1 \cos\theta_1 (E_{1+}(0))^2} = \frac{n_3 \cos\theta_3}{n_1 \cos\theta_1} t^2 \quad (24)$$

- **Aplicación: capa antirreflectante.**

Considerando incidencia normal se obtiene $R=0$ eligiendo:

$$\begin{cases} \phi = \pi \rightarrow n_2 h = \lambda / 4 \\ n_2 = \sqrt{n_1 n_3} \end{cases}$$

Ejemplo: $n_1 = 1$ (aire) y $n_3 = 1.52$ (vidrio) $\rightarrow n_2 = 1.23$.

Aproximación: capa de $MgF_2 \rightarrow n_2 = 1.38$ y $h = \lambda / 4 n_2$ para

$\lambda = 600 \text{ nm}$.

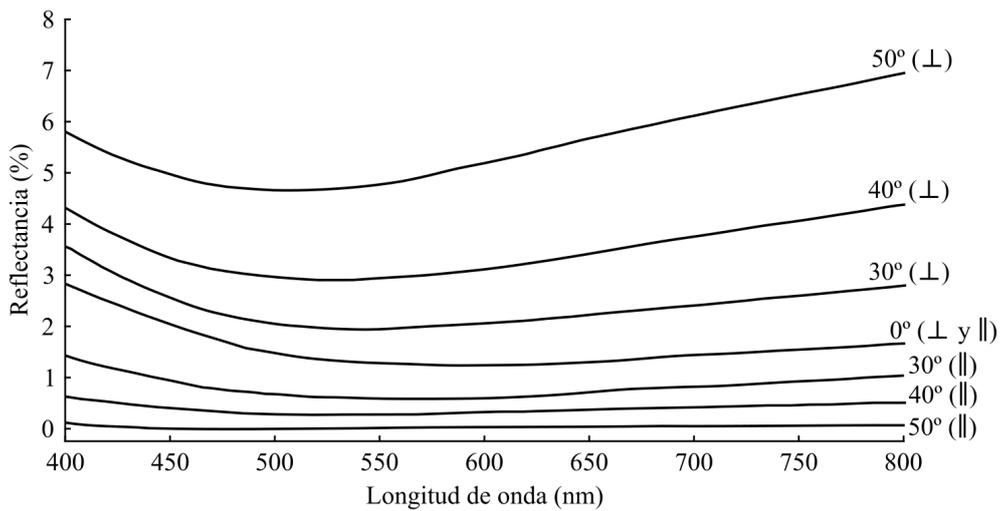


Figura 17. Ejemplo reflectancia de una lámina delgada.

Estos resultados pueden mejorarse usando multicapas.

3.2. Formulación matricial.

El análisis de dos o más capas aplicando directamente las fórmulas de Fresnel es complicado, ya que la aplicación de las condiciones de contorno en todas las interfases conduce a un número elevado de ecuaciones. En estos casos es más útil emplear un *método matricial* que permite un tratamiento sistemático de cada capa, que resulta fácil de extender al caso de una multicapa. Para ello, vamos a caracterizar por su correspondiente matriz:

- * cada interfase (matriz de transmisión)
- * tránsito de la luz a través de cada capa (matriz de propagación).

De este modo, se obtendrá la *matriz característica de cada lámina* (o capa) y, para concluir, en el caso de múltiples capas consecutivas, la *matriz característica de una multicapa*.

- **Matriz de una interfase dieléctrico-dieléctrico.**

El campo eléctrico a cada lado de la interfase será el resultado de la superposición

$$E(z) = E_{j+}(z) + E_{j-}(z) \quad j=1,2 \quad (25)$$

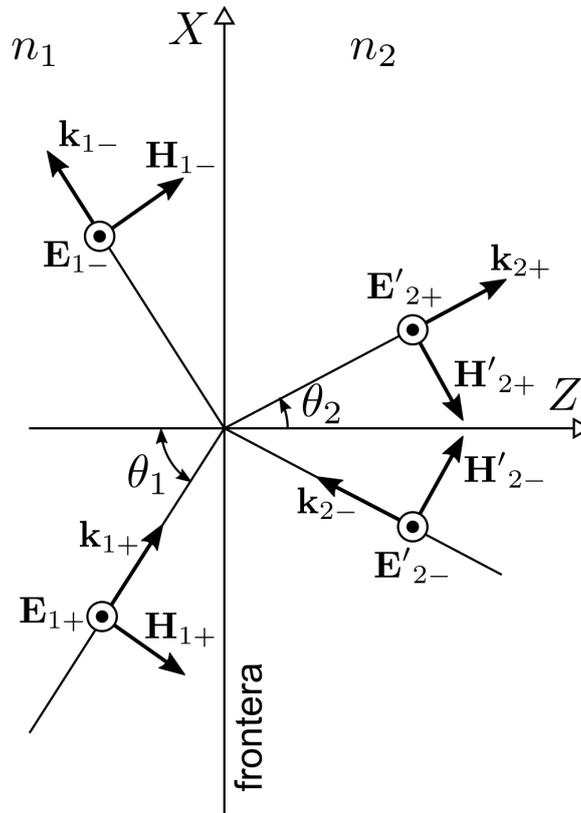


Figura 18. Interfase dieléctrico-dieléctrico. Se muestra sólo el caso de polarización \perp .

Aplicando las condiciones de continuidad en la frontera, se obtiene un sistema de dos ecuaciones que se puede expresar en forma matricial como

$$\mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} E'_{2+} \\ E'_{2-} \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde $E'_{2\pm} = E_{2\pm}(0)$. Las matrices \mathbf{D}_j ($j=1,2$) toman una expresión diferente para cada polarización

$$\mathbf{D}_j^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -n_j \cos \theta_j & n_j \cos \theta_j \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$\mathbf{D}_j^\parallel = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\cos \theta_j \\ n_j & n_j \end{bmatrix} \quad (27b)$$

La ecuación (26) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} E'_{2+} \\ E'_{2-} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{12} \begin{bmatrix} E'_{2+} \\ E'_{2-} \end{bmatrix} \quad (28)$$

donde \mathbf{D}_{12} es la denominada *matriz de transmisión de la interfase*. Teniendo en cuenta las fórmulas de Fresnel esta matriz puede expresarse como

$$\mathbf{D}_{12} = \frac{1}{t_{12}} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

expresión válida para ambas polarizaciones sin más que sustituir r_{12} y t_{12} por los coeficientes correspondientes a cada tipo de polarización.

- **Matriz de una lámina.**

Para obtener la *matriz característica de una lámina*, se debe tener en cuenta que la luz encuentra dos interfases en su propagación ($n_1 \sim n_2$ y $n_2 \sim n_3$) y que sufre un retardo al atravesar la lámina.

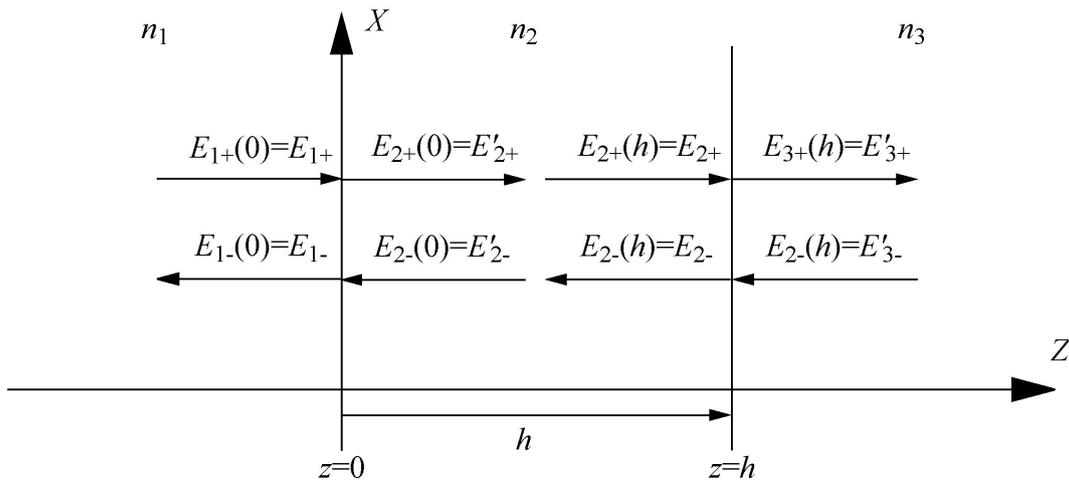


Figura 19. Matriz de una lámina.

Estos efectos pueden tenerse en cuenta de manera secuencial, de acuerdo con el siguiente esquema:

- * Interacción con la 1ª interfase:
$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} E'_{2+} \\ E'_{2-} \end{bmatrix}$$
- * Tránsito a través de la lámina: cambio de fase $\pm\phi_2 = \pm k_{2z}h$ en cada campo $E'_{2\pm}$, que puede tenerse en cuenta a través de una matriz de propagación, \mathbf{P}_2 , de modo que
$$\begin{bmatrix} E'_{2+} \\ E'_{2-} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} E_{2+} \\ E_{2-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2+} \\ E_{2-} \end{bmatrix}$$
- * Interacción con la 2ª interfase:
$$\begin{bmatrix} E_{2+} \\ E_{2-} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{D}_3 \begin{bmatrix} E'_{3+} \\ E'_{3-} \end{bmatrix}$$

De este modo, pueden relacionarse los campos a un lado y al otro de la lámina mediante la ecuación

$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} E'_{3+} \\ E'_{3-} \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde \mathbf{M} es la *matriz característica de la lámina*, que viene dada por

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{D}_3 = \frac{e^{-i\phi_2}}{t_{12}t_{23}} \begin{bmatrix} 1 + r_{12}r_{23} e^{i2\phi_2} & r_{12} e^{i2\phi_2} + r_{23} \\ r_{12} + r_{23} e^{i2\phi_2} & r_{12}r_{23} + e^{i2\phi_2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

expresión válida, de nuevo, para ambas polarizaciones sin más que sustituir los coeficientes correspondientes a cada tipo de polarización.

- **Matriz de una multicapa.**

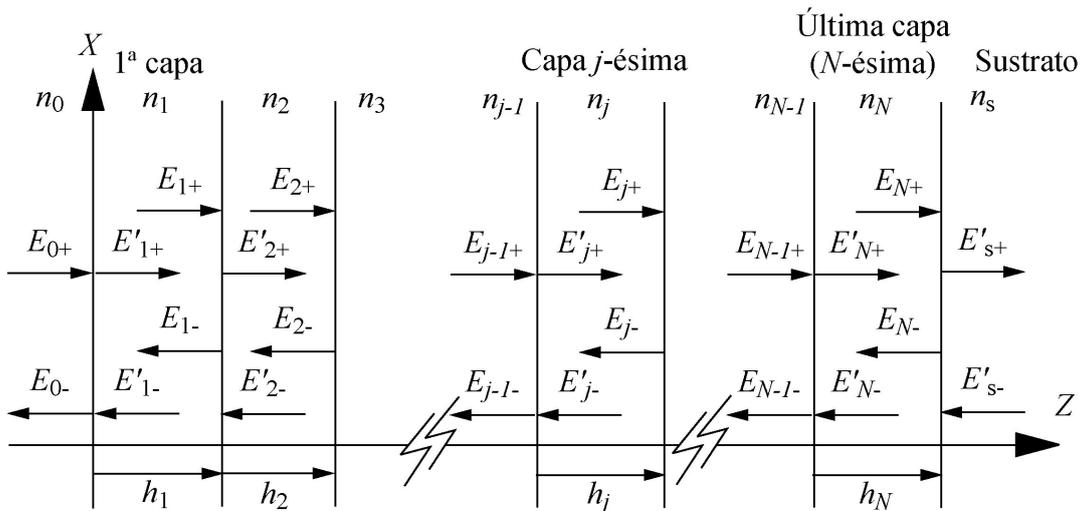


Figura 20. Matriz de una multicapa

Aplicando las relaciones matriciales anteriores a cada interfase y a la propagación en el interior de cada capa, se obtiene

$$\begin{bmatrix} E_{0+} \\ E_{0-} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_m \begin{bmatrix} E'_{s+} \\ E'_{s-} \end{bmatrix} \quad (32)$$

donde \mathbf{M}_m es la *matriz característica de la multicapa*, que viene dada por

$$\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_0^{-1} \left(\prod_{j=1}^N \mathbf{D}_j \mathbf{P}_j \mathbf{D}_j^{-1} \right) \mathbf{D}_s \quad (33)$$

A partir de la ecuación matricial (32) pueden obtenerse los coeficientes de reflexión y de transmisión de la multicapa (así como la reflectancia), tanto si la luz incide desde el medio de índice n_0 como si lo hace desde el medio de índice n_s :

- * Luz incidente desde el medio de índice $n_0 \rightarrow E'_{s-} = 0$:

$$r = \frac{E_{0-}}{E_{0+}} = \frac{M_{21}}{M_{11}}, \quad t = \frac{E'_{s+}}{E_{0+}} = \frac{1}{M_{11}} \quad (34)$$

- * Luz incidente desde el medio de índice $n_s \rightarrow E_{0+} = 0$:

$$r' = \frac{E'_{s+}}{E'_{s-}} = -\frac{M_{12}}{M_{11}}, \quad t' = \frac{E_{0-}}{E'_{s-}} = \frac{|\mathbf{M}_m|}{M_{11}} = |\mathbf{M}_m| t \quad (35)$$

La matriz \mathbf{M} , en general, exhibe ciertas propiedades de simetría que resultan de interés práctico. Así, puede deducirse que

$$\text{a) } M_{12} = M_{21}^*, \quad M_{11} = M_{22}^* \quad (36)$$

$$\text{b) } |\mathbf{M}_m| = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0}. \text{ Si } n_s = n_0 \rightarrow |\mathbf{M}_m| = 1 \quad (37)$$

c) De forma similar a lo deducido en (24), se definen las reflectancias y transmitancias de la multicapa como

$$R = r^2, \quad T = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} t^2$$

$$R' = r'^2, \quad T' = \frac{n_0 \cos \theta_0}{n_s \cos \theta_s} t'^2$$
(38)

Teniendo en cuenta (35) y (37), se deduce que $T' = T$.

- **Sistemas multicapa periódicos.**

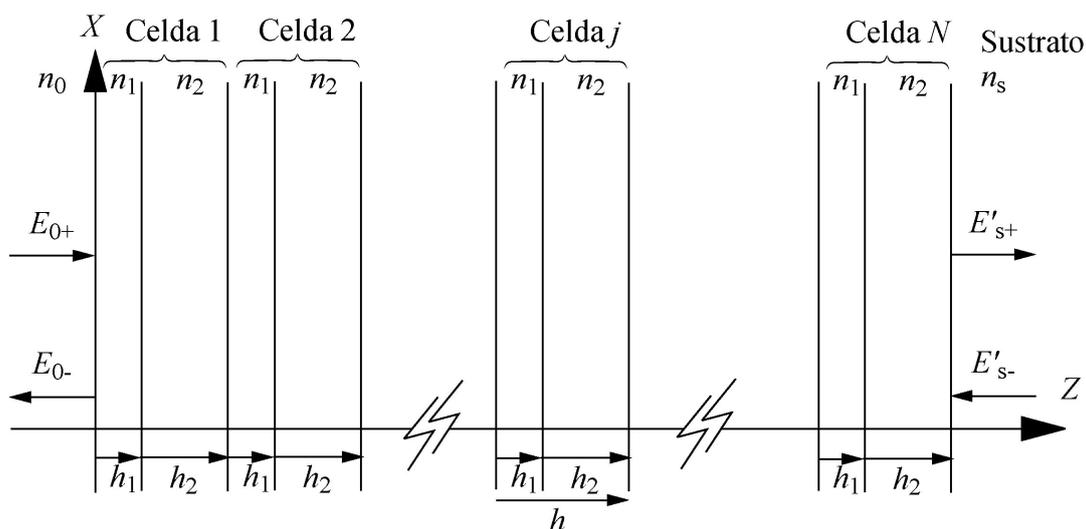


Figura 21. Sistema de multicapa periódicos.

El sistema está formado por N multicapas idénticas o celdas unidad (de dos capas en este caso), que se repiten con periodo $h = h_1 + h_2$ entre el medio inicial, de índice n_0 , y del sustrato, de índice n_s . El índice de refracción del sistema vendrá dado por la función

$$n(z) = \begin{cases} n_1, & jh < z < jh + h_1 \\ n_2, & jh + h_1 < z < (j+1)h \end{cases} = n(z+h) \quad (39)$$

Cuando la luz atraviesa todo el sistema desde el medio inicial hasta el sustrato, se cumplirá

$$\begin{bmatrix} E_{0+} \\ E_{0-} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_0^{-1} \left(\prod_{j=1}^N \mathbf{D}_j \mathbf{P}_j \mathbf{D}_j^{-1} \right) \mathbf{D}_s \begin{bmatrix} E'_{s+} \\ E'_{s-} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{mp} \begin{bmatrix} E'_{s+} \\ E'_{s-} \end{bmatrix} \quad (40)$$

donde \mathbf{M}_{mp} es la matriz característica de la multicapa periódica.

3.3. Aplicaciones.

- **Sistemas multicapa antirreflectantes.**

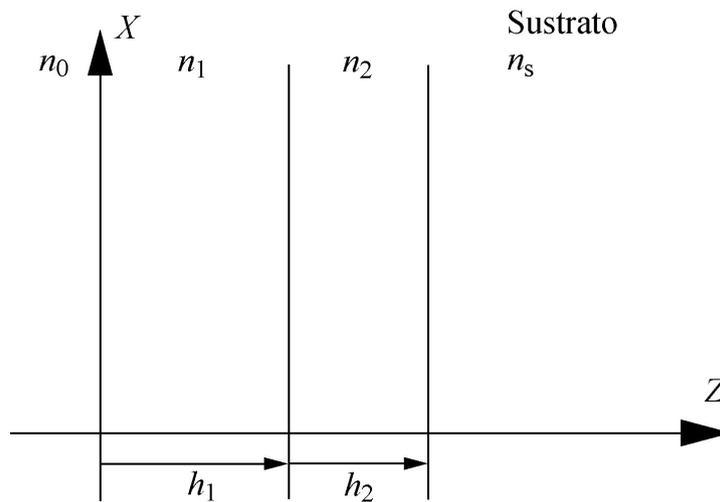


Figura 22. Sistema multicapa antirreflectante.

Matriz característica del sistema:

$$\mathbf{M}_{mp} = \mathbf{D}_{01} \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_{12} \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_{2s} \quad (41)$$

Coefficiente de reflexión:

$$r = \frac{M_{21}}{M_{11}} = \frac{r_{01} + r_{12s} e^{i2\phi_1}}{1 + r_{01} r_{12s} e^{i2\phi_1}} \quad (42)$$

donde $r_{12s} = \frac{r_{12} + r_{2s} e^{i2\phi_2}}{1 + r_{12} r_{2s} e^{i2\phi_2}}$ es el factor de reflexión del sistema formado por la película de índice n_2 y el sustrato.

Un ejemplo sencillo es el caso en el que se trabaja en incidencia normal y ambas capas son *cuarto de onda*, es decir, $n_1 h_1 = n_2 h_2 = \lambda / 4 \rightarrow \phi_1 = \phi_2 = \pi / 2$.

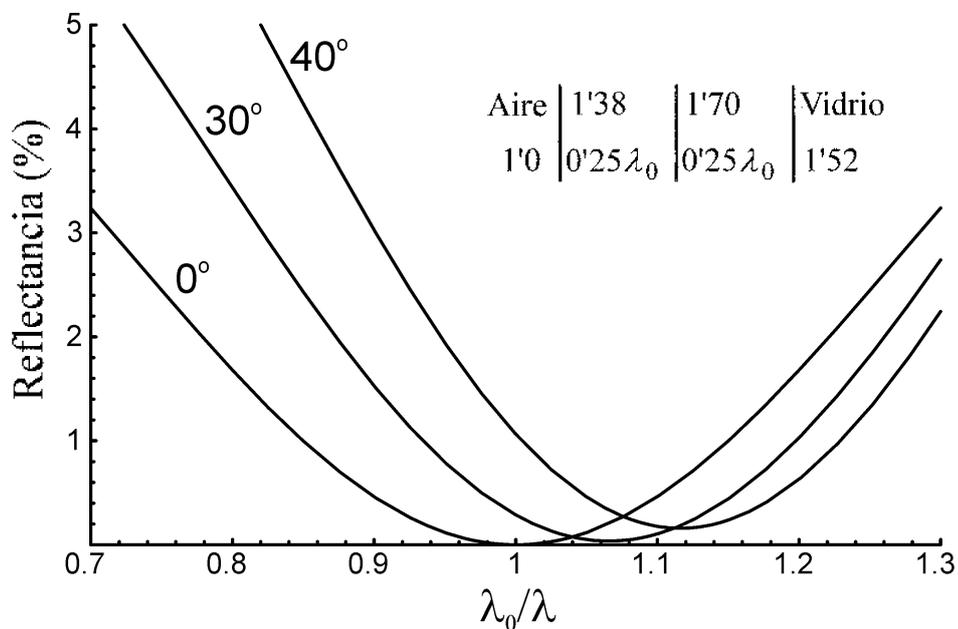


Figura 23. Reflectancia sistema bicapa.

$$\text{En este caso: } r = 0 \rightarrow r_{01} = r_{12s} \rightarrow \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 = \frac{n_s}{n_0}$$

Aumentando el número de capas se puede conseguir diseños con una baja reflectancia en un rango amplio de longitudes de onda:

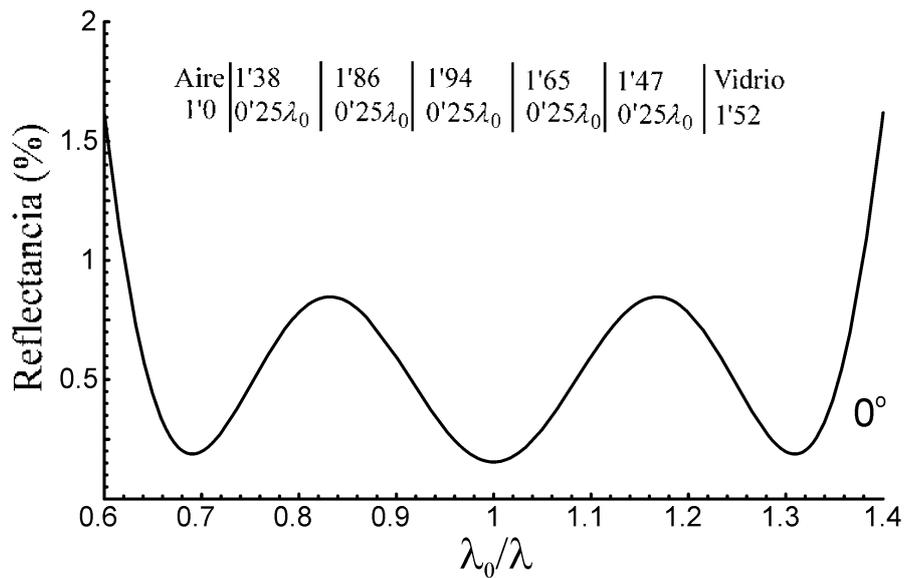


Figura 24. Baja reflectancia con sistema de cinco capas.

- **Sistemas multicapa de alta reflectancia: *Cristales fotónicos*.**

Un ejemplo sencillo es el de N multicapas, formadas cada una de ellas por dos capas (n_1, h_1) y (n_2, h_2) , trabajando en incidencia normal y ambas *cuarto de onda*. En este caso la matriz característica de la multicapa viene dada por

$$\mathbf{M}_{mp, \lambda/4} = \mathbf{D}_0^{-1} (\mathbf{D}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2^{-1})^N \mathbf{D}_s \quad (43)$$

donde ahora $\mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ $j=1,2$, y $\mathbf{D}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$.

La reflectancia del sistema es

$$R = r^2 = \left| \frac{M_{21}}{M_{12}} \right|^2 = \left(\frac{1 - \frac{n_s}{n_o} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{2N}}{1 + \frac{n_s}{n_o} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{2N}} \right)^2$$

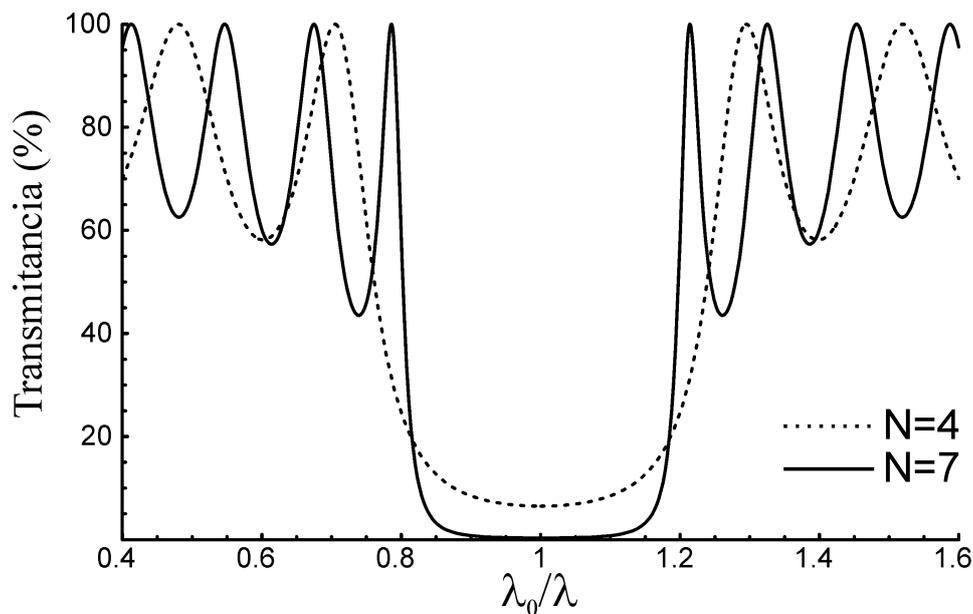


Figura 25. Cristal fotónico 1D: $n_0=n_5=1$, $n_1=2.5$, $n_2=1.5$.

Puede probarse que a medida que crece el número de capas N el valor de esta función tiende a la unidad, por lo que la transmitancia tiende hacia cero.

La aparición de regiones o *bandas prohibidas* en el espectro de la luz que se propaga a través de un sistema multicapa periódico ha llevado a la introducción del término de *cristales fotónicos 1D* para estos medios estratificados por su analogía con el movimiento de electrones en los sólidos cristalinos. Así, muchos conceptos usados en la física del estado sólido tales como ondas de Bloch, zonas de Brillouin y bandas prohibidas también pueden usarse aquí.

- **Filtros selectores de frecuencia.**

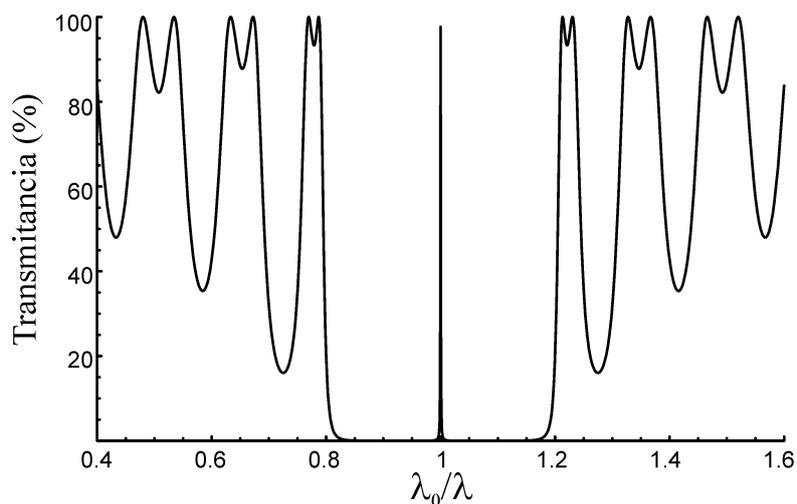


Figura 26. Filtro selector de frecuencia: $n_0=n_S=1$, $(AB)^5AB^2A(BA)^5$, $n_A=2.5$, $n_B=1.5$.

Si en un sistema multicapa periódico generamos un defecto en la red, por ejemplo, aumentando o disminuyendo el espesor de unas de las capas, aparecen estados resonantes dentro de la banda prohibida que pueden utilizarse en el diseño de filtros selectores de frecuencia.

- **Sistemas multicapa aperiódicos**

La existencia de bandas prohibidas se ha demostrado en sistemas multicapa cuyos materiales están distribuidos de forma aperiódica. Un primer ejemplo lo encontramos en los sistemas fractales como es el *conjunto de Cantor triádico*.

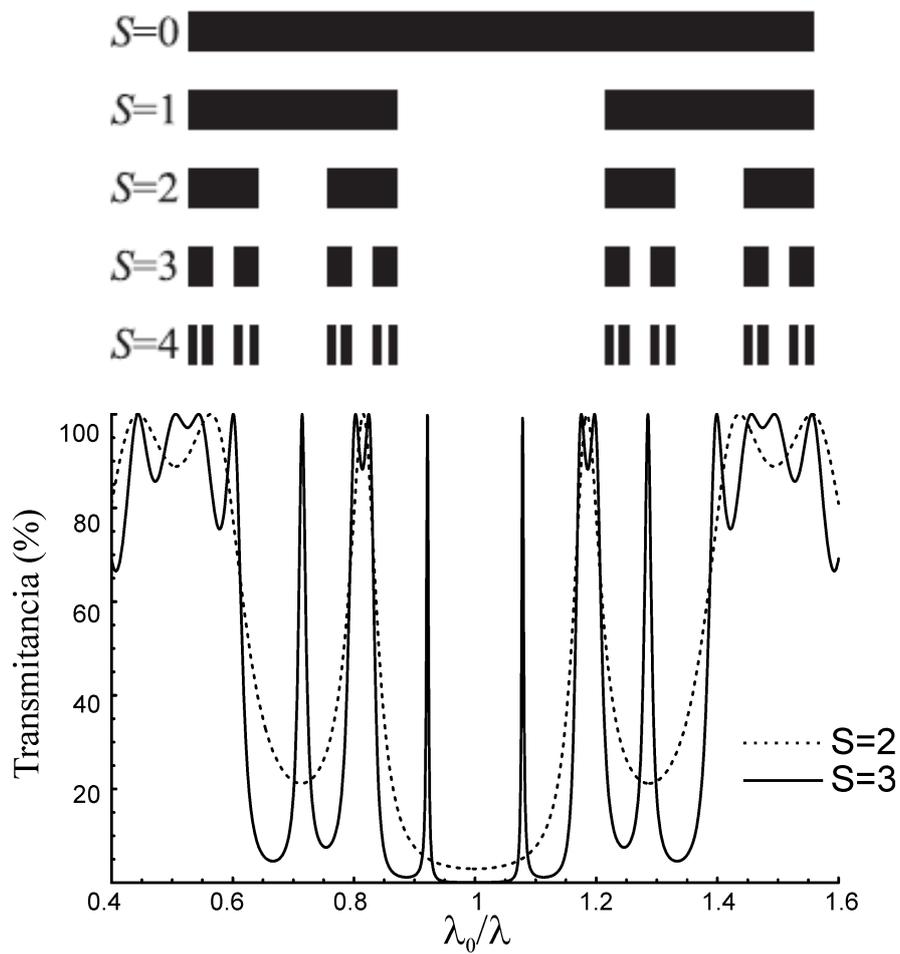


Figura 27. Multicapa fractal: $n_0=n_S=1$, $S=2$: $ABAB^3ABA$, $S=3$:
 $ABAB^3ABAB^9ABAB^3ABA$, $n_A=2.5$, $n_B=1.5$.

El conjunto fractal de Cantor representado en la figura anterior se obtiene mediante una construcción iterativa. En el primer paso ($S=0$) consiste únicamente en una barra de longitud L . En el siguiente paso ($S=1$) se divide el segmento en tres partes iguales de longitud $L/3$ y eliminamos el segmento central. El proceso se va repitiendo iterativamente sobre cada segmento resultante. Reemplazando los segmentos por un material A y los gaps por un material B se obtiene una multicapa fractal cuyo espectro de transmisión presenta bandas prohibidas *autosimilares*.

A continuación, se muestra el proceso de generación de otras secuencias aperiódicas que permiten el diseño de diferentes sistemas de multicapas a partir de una semilla $\{A, B\}$:

- Fibonacci: $g(A) = AB \quad g(B) = A$
- Thue–Morse: $g(A) = AB \quad g(B) = BA$
- Period-doubling $g(A) = AB \quad g(B) = AA$
- Silver mean $g(A) = AAB \quad g(B) = A$
- Bronze mean $g(A) = AAAB \quad g(B) = A$
- Copper mean $g(A) = ABB \quad g(B) = A$
- Nickel mean $g(A) = AB BB \quad g(B) = A$
- Triadic Cantor $g(A) = ABA \quad g(B) = BBB$

Tema 4

Laboratorios virtuales

4.1. Multicapas periódicas.

<http://hdl.handle.net/10251/98702>

El objetivo de este laboratorio virtual es el estudio de la transmitancia y reflectancia producida por multicapas periódicas cuyos parámetros de diseño podemos controlar y bajo condiciones de iluminación definidas por el usuario.

Para generar las curvas de transmitancia y reflectancia (proporción de energía que se transmite y se refleja respectivamente) debemos introducir los parámetros que caracterizan la multicapa: El número de zonas de la multicapa, los índices de refracción de los diferentes medios (medio de incidencia, medio de salida, medios 1 y 2 de la multicapa), grosor de cada una de las capas (en unidades de onda). Además, debemos indicar el ángulo de incidencia de la iluminación (respecto a la normal a la multicapa),

así como la polarización utilizada, Transversal Eléctrico (TE) o Transversal Magnético (TM). Tras la Introducción de estos parámetros obtendremos en la parte superior una representación geométrica de la multicapa en la que el medio 1 se muestra en color blanco y el medio 2 en negro. En la gráfica inferior se muestran la curva seleccionada (transmitancia o reflectancia) en función de la longitud de onda de diseño.

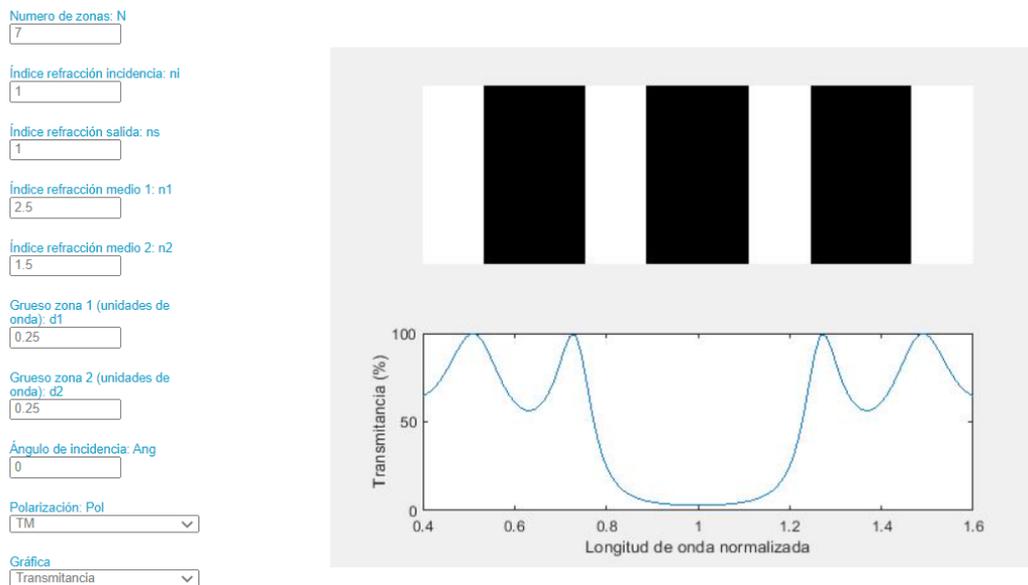


Figura 28. Laboratorio virtual “Multicapas Periódicas”.

Los valores que aparecen por defecto (ver Fig. 28) corresponden a una multicapa de 7 zonas sumergida en aire (índices de incidencia y salida: 1) que alterna medios con índice de refracción 2.5 y 1.5 y un grosor de cuarto de onda, respectivamente. Se ilumina

desde la normal (Ángulo de incidencia 0°) con una polarización TM (aunque para 0° ambos modos son equivalentes).

Podemos simular una capa antirreflejante aire-vidrio introduciendo los siguientes parámetros: Tomaremos una multicapa de dos zonas, con los índices de refracción de incidencia, salida, medio 1 y medio 2 como 1, 1.52, 1.38, 1.7, respectivamente. Los grosores de ambas capas se toman como el correspondiente a un cuarto de onda. Analizando la transmitancia para diferentes ángulos de incidencia y para ambas polarizaciones se puede observar que para el modo TM con un ángulo de incidencia de 75° se mantiene por encima del 50% en un amplio rango de longitudes de onda, mientras que para polarización TE y/o ángulos de incidencia cercanos a la normal la transmitancia presenta valores elevados.

4.2. Multicapas aperiódicas.

<http://hdl.handle.net/10251/98704>

El objetivo de este laboratorio virtual es el estudio de la transmitancia y reflectancia producida por multicapas aperiódicas cuyos parámetros de diseño podemos controlar mediante reglas de iteración conocidas y bajo condiciones de iluminación definidas por el alumno.

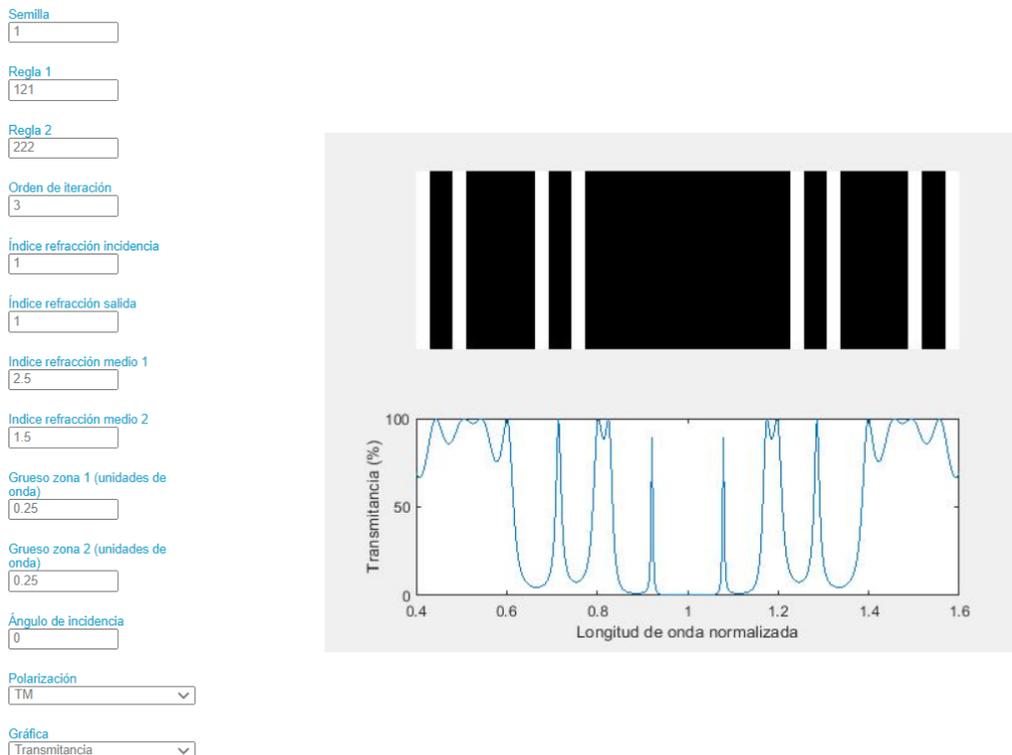


Figura 29. Laboratorio virtual “Multicapas Aperiódicas”.

Para generar las curvas de transmitancia y reflectancia (proporción de energía que se transmite y se refleja respectivamente) debemos introducir los parámetros que caracterizan la multicapa: Introducimos una semilla y las reglas de iteración 1 y 2 como una cadena con los caracteres numéricos 1 y 2. Introducimos el número de iteraciones (Orden). La secuencia se genera de forma que, en cada iteración se sustituye cada '1' por la regla 1 y cada '2' por la regla 2. Además, se introducen los índices de refracción de los diferentes medios (medio de incidencia, medio de salida, medios 1 y 2 de la multicapa), grosor de cada una de las capas

(en unidades de onda). Se indica también el ángulo de incidencia de la iluminación (respecto a la normal a la multicapa), así como la polarización utilizada, Transversal Eléctrico (TE) o Transversal Magnético (TM). Tras la Introducción de estos parámetros obtendremos en la parte superior una representación geométrica de la multicapa en la que el medio 1 se muestra en color blanco y el medio 2 en negro. En la gráfica inferior se muestran la curva seleccionada (transmitancia o reflectancia) en función de la longitud de onda de diseño.

Los valores que aparecen por defecto corresponden a una multicapa que sigue la secuencia fractal de Cantor de orden 3 sumergida en aire (índices de incidencia y salida: 1) que alterna medios con índice de refracción 2.5 y 1.5 y un grosor de cuarto de onda, respectivamente. Se ilumina desde la normal (Ángulo de incidencia 0°) con una polarización TM (aunque para 0° ambos modos son equivalentes). Se puede observar la estructura fractal de la transmitancia y sus propiedades de autosimilitud tal como aumentamos el orden de iteración.

También podemos introducir secuencias manualmente seleccionando el orden de iteración=0 y escribiendo ésta en el campo "Semilla". De esta forma, las reglas de iteración no tienen ningún efecto. Así pues, podemos escribir la secuencia "121212121221212121212", es decir, una multicapa periódica en la que se ha introducido un defecto. Introduciendo esta secuencia con

los parámetros del ejemplo 1 se puede observar que una estructura de este tipo genera una banda sin transmisión (característica de la red periódica) con un pico muy estrecho de alta transmisión en la longitud de onda de diseño.