Obtención del rendimiento de un motor de Carnot en función de las temperaturas de los focos térmicos

Apellidos, nombre	Atarés Huerta, Lorena (loathue@tal.upv.es)
Departamento	Departamento de Tecnología de Alimentos
Centro	ETSIAMN (Universidad Politécnica de Valencia)

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo vamos a describir el concepto de rendimiento de un motor y a hablar en concreto del motor descrito por Carnot. Se trata de un motor idealizado en el que no se consideran las pérdidas de energía debidas a estados de no equilibrio y al rozamiento. Describimos las etapas del ciclo de Carnot, y exponemos las ecuaciones que permiten hallar su rendimiento en función de las temperaturas de los focos entre los que trabaja el motor. Para unas temperaturas dadas, el rendimiento del motor de Carnot marcará el límite máximo de rendimiento para los motores reales.

2 Introducción

El rendimiento de un motor térmico es la proporción de trabajo obtenido por cada julio de calor recibido. Los motores no pueden generar más energía de la que reciben (no pueden crear energía) ni tampoco pueden transformar en trabajo todo el calor que reciben.

Carnot propuso el funcionamiento de una máquina idealizada, un motor que funcionara en equilibrio térmico y sin rozamiento. A partir de este planteamiento, y tras describir las cuatro etapas del ciclo de Carnot, veremos una deducción matemática para obtener una ecuación muy útil en termodinámica: el rendimiento del motor de Carnot a partir de las temperaturas de los focos entre los que trabaja.

3 Objetivos

Con la redacción del presente artículo docente, se pretende que el alumnado sea capaz de:

- Comprender el concepto de rendimiento de un motor
- Identificar las diferentes etapas del ciclo de Carnot
- Comprender la obtención de una ecuación para calcular el rendimiento del motor de Carnot a partir de las temperaturas de los focos entre los que trabaja.

4 Desarrollo

4.1 Motor térmico: descripción y rendimiento

Un motor térmico es una máquina construida para llevar a cabo la transformación de calor en trabajo. Para ello, funciona absorbiendo calor (q_1) a partir de una fuente a una temperatura elevada (T_1) también denominada foco caliente, y cediendo calor (q_2) a una fuente fría a temperatura T_2. El flujo de calor de entrada

q_1 se considera con signo positivo, mientras que los flujos que salen del motor, q_2 y W, tendrán signo negativo. Dado que la máquina funciona en ciclos, al finalizar cada ciclo vuelve a tener la energía inicial ($\Delta U=0$), por lo que la máquina no acumula ni genera energía. En consecuencia, la diferencia de ambos flujos de calor coincidirá con el trabajo generado. Por ejemplo, si por cada ciclo el motor recibe 100J de calor y tiene 65J de pérdidas, el trabajo generado es 35J.

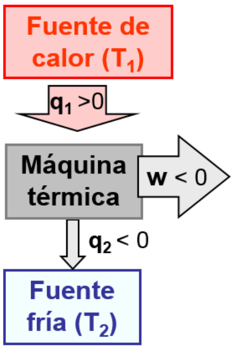

Figura 1: motor térmico trabajando entre una fuente de calor a la temperatura T_1 y una fuente fría a la temperatura T_2 ($T_2 < T_1$).

El rendimiento (e) de un motor térmico se define como el cociente entre el trabajo que produce con el signo opuesto (-W), y el calor que recibe de la fuente de calor (q_1). Es necesario cambiar el signo de W para obtener un valor de rendimiento positivo. Si ambos flujos de energía fueran iguales, el rendimiento sería 1, pero dado que hay pérdidas de calor hacia el foco frío, el rendimiento será menor que 1.

$$e = \frac{-W}{q_1}$$

Ecuación 1: rendimiento (e) de un motor térmico

Puesto que se debe cumplir un balance de energía en el motor, la misma cantidad de energía que entra en él (en forma de calor q_1), saldrá de él (repartida entre W y q_2). Al sustituir esta equivalencia en el numerador de la ecuación 1, se obtiene la ecuación 2, que es una expresión para el rendimiento de una máquina térmica en función de los calores de entrada y salida (q_1 y q_2 respectivamente).

$$e = \frac{-W}{q_1} = \frac{q_1 + q_2}{q_1} = 1 + \frac{q_2}{q_1} < 1$$

Ecuación 2: Rendimiento de una máquina térmica en función de los calores de entrada (q_1) y salida (q_2).

Analicemos la ecuación 2. Al tener ambos flujos sentidos opuestos (q_1 es positivo y q_2 es negativo), el cociente q_2 / q_1 será negativo. Dado que en los motores siempre hay una cierta pérdida de calor, q_2 nunca será nulo y el rendimiento será necesariamente menor que 1.

Una vez justificado que el rendimiento no puede ser 1, la siguiente pregunta que podríamos hacernos es cuál será el rendimiento máximo de un motor y en qué circunstancias se puede obtener. El teorema de Carnot afirma que **el máximo rendimiento de un motor se consigue cuando trabaja de forma reversible.** A continuación, vamos a estudiar el ciclo de Carnot, a partir del cual deduciremos el rendimiento máximo de un motor.

4.2 Ciclo ideal de Carnot

El ciclo de Carnot recibe el calificativo de ideal porque las cuatro etapas que lo integran son etapas reversibles. Como cualquier motor térmico, el motor de Carnot absorbe calor de un foco a T_1 (elevada) y lo cede a un foco frío a T_2. La reversibilidad del proceso exige que la absorción y la sesión de calor de los focos se produzcan a la misma temperatura de los focos, a través de dos procesos isotérmicos reversibles. Por funcionar de manera reversible, la máquina de Carnot podría funcionar en el sentido en el que la vamos a describir (motor térmico) y también al contrario (refrigerador o bomba de calor).

4.2.1 Etapas que integran el ciclo de Carnot

Consideremos que tenemos una cierta sustancia (podría ser un gas ideal) contenida en el interior de un recipiente con una pared móvil que puede desplazarse sin rozamiento. Inicialmente se encuentra ocupando un volumen relativamente pequeño (V_1) y a una presión relativamente elevada (P_1). A partir de este estado inicial, se llevan a cabo las siguientes cuatro etapas:

A. **Expansión isotérmica**. El gas está en contacto con la fuente de calor, ambos están en equilibrio térmico a T_1, y a esa temperatura el gas se expande de manera isotérmica hasta alcanzar el volumen V_2. El volumen del gas aumenta debido al aporte de calor que proviene de la fuente. El gas recibe calor, pero su temperatura permanece constante (T_1) porque la energía recibida se transforma en trabajo de expansión.

B. **Expansión adiabática**. Se retira el contacto entre la fuente de calor y el sistema, y se aísla a este último para que no pueda intercambiar calor con los alrededores. En estas circunstancias se continúa expandiendo el gas, que ahora no recibe calor, por lo que utilizará su propia energía interna para empujar la pared móvil. Esta pérdida de energía interna se traduce en un enfriamiento del gas, que disminuye su temperatura de T_1 (temperatura del foco caliente) hasta T_2 (temperatura del foco frío). Al final de esta etapa el gas ocupa un volumen V_3.

C. **Compresión isotérmica**. El sistema se pone en contacto con la fuente fría, y ambos estarán a T_2. Manteniéndose a esa temperatura, el gas sufre una compresión hasta V_4. Puesto que al comprimirlo, el gas está recibiendo energía, se deberá permitir una salida de energía para que su temperatura permanezca constante. Esta pérdida de energía corresponde a un flujo de calor que sale del sistema hacia el foco frío.

D. **Compresión adiabática**. De nuevo se aísla al sistema y se continúa comprimiendo el gas hasta volver a V_1. La energía que recibe ahora no puede salir hacia los alrededores, por tanto se aumenta la energía interna del sistema y también su temperatura, que asciende hasta T_1, cerrándose así el ciclo.

4.2.2. Representación gráfica del ciclo de Carnot

Para representar gráficamente el ciclo ideal de Carnot en un diagrama P-V, sería necesario conocer cómo varía P en función de V en procesos reversibles isotérmicos y adiabáticos. Las ecuaciones 3 y 4 describen estas relaciones y la figura 2 representa en un diagrama PV el ciclo de Carnot.

$$P \cdot V = cte$$

Ecuación 3: relación entre presión y volumen en un proceso reversible isotérmico

$$P \cdot V^{\gamma} = cte$$

Ecuación 4: relación entre presión y volumen en un proceso reversible adiabático

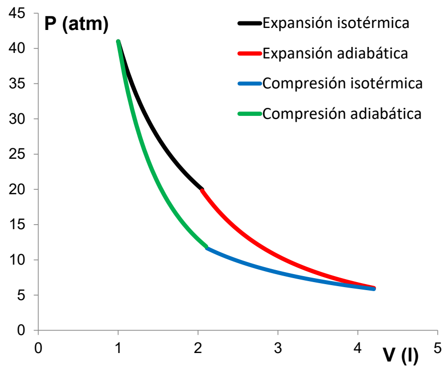

Figura 2: Representación del ciclo de Carnot en un diagrama P-V

El trabajo que el sistema cede a los alrededores durante la expansión equivaldría al área debajo de las curvas de expansión, y tendría signo negativo. El trabajo que el sistema recibe de los alrededores para la compresión equivaldría al área debajo de las curvas de compresión, y tendría signo positivo. En términos absolutos, el trabajo de expansión es mayor al de compresión, porque la expansión ocurre a presiones mayores que la compresión. La diferencia entre ambos valores, que gráficamente equivaldría al área encerrada dentro del ciclo, será el trabajo neto que el motor produce en cada ciclo. Por ejemplo, si por cada ciclo el trabajo de expansión es 100J, y el de compresión es 65J, el trabajo neto será 35J.

4.2.3. Rendimiento del ciclo de Carnot

Por último, vamos a transformar la expresión del rendimiento en función de los flujos de calor (ecuación 2) en otra ecuación en función de las temperaturas de los focos, más fáciles de determinar que los flujos de calor. En las dos etapas isotérmicas, por tener un gas ideal variando de volumen y presión a temperatura constante, la U del sistema no habrá variado (en los gases ideales U depende solamente de la temperatura). En estas etapas se cumplirá que el calor y el trabajo son cuantitativamente iguales, pero con signo opuesto. En la expansión isotérmica el sistema recibe calor (q_1) y cede trabajo (W_1), mientras que en la compresión isotérmica el sistema recibe trabajo (W_2) y cede calor (q_2).

$$q_1 = -W_1 = \int_{V_1}^{V_2} pdV = nRT_1 ln\frac{V_2}{V_1}$$

Ecuación 5: calor intercambiado en la expansión isotérmica

$$q_2 = -W_2 = \int_{V_3}^{V_4} pdV = nRT_2 ln\frac{V_4}{V_3}$$

Ecuación 6: calor intercambiado en la compresión isotérmica

Por otro lado, en las etapas adiabáticas reversibles se cumple que:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{R/\bar{C}_v}$$

Ecuación 7: Expansión adiabática

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{R/\bar{c}_v}$$

Ecuación 8: Compresión adiabática

De las ecuaciones 7 y 8 se deduce que el cociente V_4/V_3 debe ser igual a V_1/V_2 y tendrá el valor inverso a V_2/V_1. Sólo queda terminar esta deducción, como se muestra en la ecuación 9.

$$e = 1 + \frac{q_2}{q_1} = 1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{ln(V_4/V_3)}{ln(V_2/V_1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1$$

Ecuación 9: a partir de la expresión del rendimiento en función de los flujos de calor q_1 y q_2, se puede obtener otra ecuación en función de las temperaturas de los focos T_1 y T_2. Para comprender esta deducción, recuerda que ln (a) / ln(a^{-1}) = -1

Partiendo de la ecuación 2, que permite calcular el rendimiento a partir de los flujos de calor q_1 y q_2, se sustituyen las ecuaciones 5 y 6. Después, puesto que V_4/V_3 equivale a V_1/V_2 se deduce que el cociente de los logaritmos debe ser -1. Finalmente se obtiene que el rendimiento de la máquina de Carnot se puede hallar a partir de las temperaturas de los focos y será:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1$$

Ecuación 10: rendimiento del motor de Carnot.

Teniendo en cuenta que T_1 es la temperatura del foco caliente y T_2 la del foco frío, se deduce que el rendimiento del motor será más alto (más parecido a 1) cuanto mayor sea T_1 y menor sea T_2.

Un motor perfecto tendría rendimiento igual a 1. Para obtener ese valor de rendimiento sería necesario que la temperatura del foco frío fuera 0K. La tercera ley de la termodinámica afirma que en términos prácticos esa temperatura no se puede alcanzar.

Por último, un ejemplo numérico. Supongamos dos focos a las temperaturas T_1=1000K y T_2 = 100K. Aplicando la ecuación 5 se obtiene que el rendimiento de un motor de Carnot funcionando entre esas temperaturas es 1-100/1000= 0.9. Eso quiere decir que cualquier motor real funcionando entre esas temperaturas tendrá un rendimiento inferior a 0.9, dado que el motor de Carnot tendrá el rendimiento máximo por ser un motor idealizado.

5 Cierre

En este artículo docente hemos descrito las cuatro etapas que forman parte del ciclo de Carnot y hemos expuesto el concepto de rendimiento del motor de Carnot. Hemos deducido una ecuación para calcular este último a partir de las temperaturas de los focos entre los que funciona el motor.

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] FISICOQUÍMICA. Levine, I. N. McGraw-Hill. 1991

[2] FISICOQUÍMICA. Metz, C.R. Ed. McGaw-Hill. Interamericana. 1991