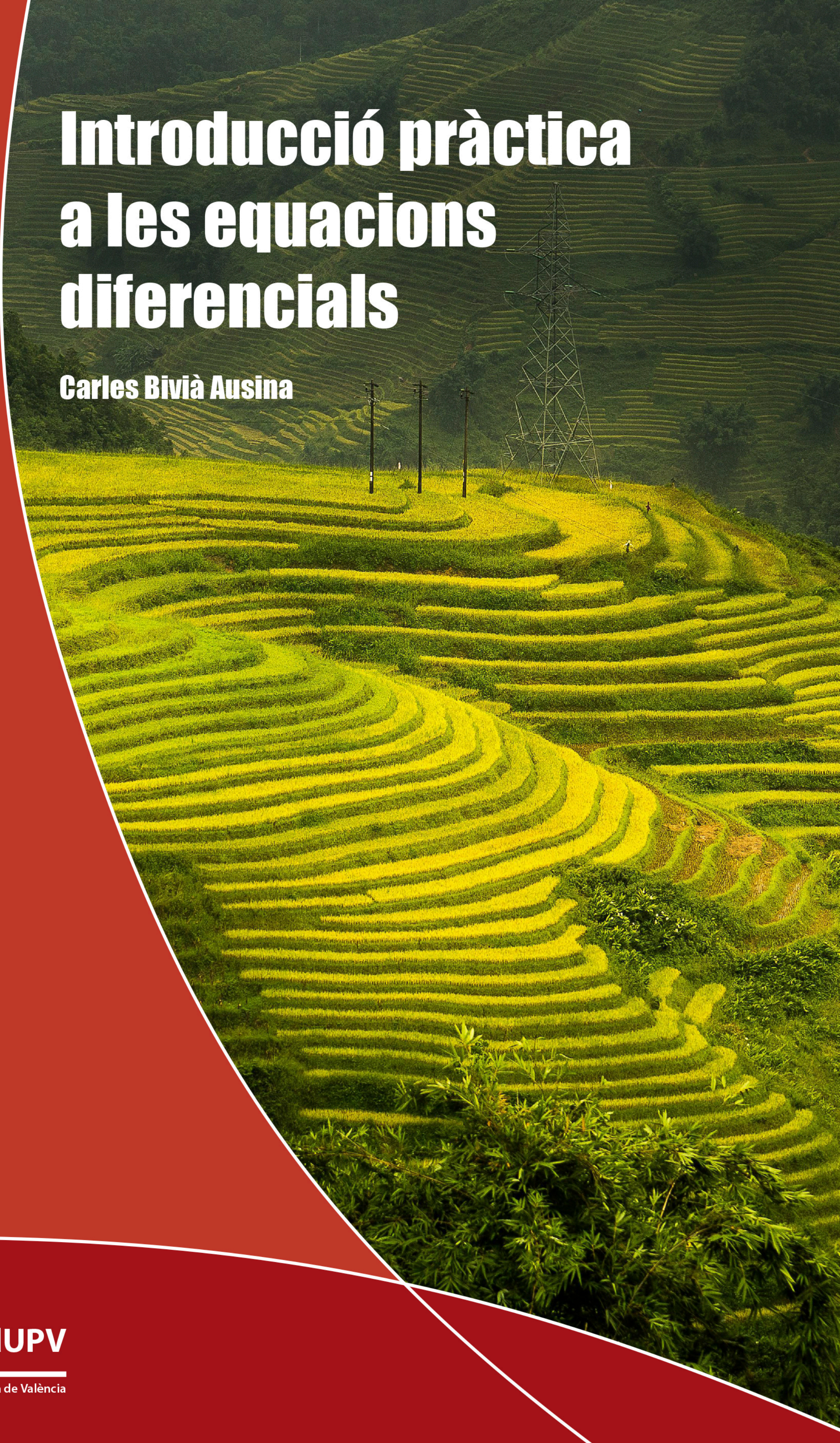
académica

Introducció pràctica a les equacions diferencials

Carles Bivià Ausina



edUPV
Universitat Politècnica de València

Carles Bivià Ausina

Introducció pràctica a les equacions diferencials

edUPV
Universitat Politècnica de València

Col·lecció *Académica*

Per a referenciar esta publicació utlitze la següent cita:
Bivià Ausina, C. (2022). *Introducció pràctica a les equacions diferencials*. Valencia: edUPV

Venda: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0273_03_01_01

ISBN: 978-84-1396-002-9

Imprés baix demanda

edUPV es compromet amb la ecoimpresió i utilitza papers de proveïdors que compleixen amb els estàndards de sostenibilitat mediambiental

Imprimeix: Byprint Percom, S. L.

Si el lector detecta algun error en el llibre o bé vol contactar amb els autors, pot enviar un correu a edicion@editorial.upv.es

Imprés a Espanya

Els límits del meu llenguatge són els límits del meu món.

Ludwig Wittgenstein (1889-1951)
Tractatus Logico-Philosophicus, Proposició 5.6.

Introducció

L'objectiu d'aquest text és donar suport a l'aprenentatge dels mètodes de resolució d'alguns tipus d'equacions diferencials ordinàries, sistemes diferencials lineals i equacions diferencials en derivades parcials. Al mateix temps pretenem també mostrar alguns aspectes dels fonaments d'aquestos temes. Les equacions diferencials constitueixen un camp ben ampli de les matemàtiques i l'estudi d'aquestes es pot dur a terme des de diversos abordatges. El punt de vista que mostrem en el text és fonamentalment analític, és a dir, està orientat a la descripció de procediments de resolució d'equacions diferencials, amb un enfocament pràctic i adreçat a un curs sobre equacions diferencials de sis crèdits d'un grau en enginyeria. Hem intentat també mantenir una perspectiva pedagògica i enfocada als objectius concrets de l'assignatura, sense perdre de vista la correcció formal en l'exposició dels continguts. En la redacció del text hem sigut conscients que no és fàcil oferir una visió exhaustiva dels procediments de resolució esmentats i que, per consegüent, havíem de fer una elecció dels continguts del text. Aquesta elecció s'ha dut a terme en consonància amb el que es podria exposar en un curs de sis crèdits i amb les necessitats d'un grau en enginyeria.

El text està organitzat de la forma següent. En el Tema 1 mostrem conceptes fonamentals en relació a les funcions de variable complexa que seran d'utilitat en temes posteriors. Hem hagut d'excloure una part tant important de la teoria de funcions de variable complexa com és la integració en el pla complex (amb resultats essencials com la fórmula integral de Cauchy o la fórmula dels residus). No obstant, introduïm la noció de residu d'una funció holomorfa en una singularitat aïllada tenint en compte la rellevància d'aquest concepte en temes posteriors (en concret, en el càlcul de transformades inverses de Laplace o de Fourier). Partint del problema general del càlcul explícit de primitives de funcions de variable real, el Tema 2 està dedicat a donar una visió molt general de les equacions diferencials, enfocada a mostrar mètodes analítics de resolució d'equacions diferencials ordinàries.

El Tema 3 està adreçat a l'estudi a les equacions diferencials lineals, inclou resultats com la fórmula de variació de constants o el mètode dels coeficients indeterminats. En aquest tema estudiem també problemes de contorn. En el Tema 4 mostrem les propietats bàsiques de la transformada de Laplace i les seues aplicacions a la resolució de problemes de valors inicials. En el Tema 5 mostrem com aplicar desenvolupaments en sèrie de potències per a resoldre problemes de valors inicials, només en el cas en què les condicions inicials estan formulades en un punt regular de l'equació diferencial.

Els Temes 6 i 7 els dediquem a l'estudi dels sistemes diferencials lineals. En particular, en el Tema 7 incidim en el cas de sistemes de coeficients constants i les tècniques per a la seua resolució utilitzant funcions de matrius. En el Tema 8 estudiem la sèrie de Fourier associada a una funció periòdica, incloguem també les aplicacions d'aquesta eina a la resolució d'equacions diferencials en derivades parcials mitjançant el mètode de separació de variables. El Tema 9 el dediquem a l'estudi de les propietats fonamentals de la transformada de Fourier i les seues aplicacions a la resolució d'alguns tipus d'equacions diferencials ordinàries i en derivades parcials. Al final de cada tema s'inclou una secció amb exercicis, hem inclòs la solució per a la major part d'aquestos.

Degut a l'extensió del text, hem preferit no incloure explícitament aplicacions de les equacions diferencials a àmbits de l'enginyeria i de la ciència en general. Algunes referències duen a terme aquesta tasca de manera molt eficient i gràfica, com ara els textos [2], [4], [6], [16], [19], [23] i [28], entre d'altres.

L'elaboració d'aquest text ha estat motivada per la meua experiència en la impartició de l'assignatura *Matemàtiques* III en el grup en valencià del Grau en Tecnologies Industrials i en el Grau en Enginyeria de l'Energia, i també en l'assignatura *Complements de Matemàtiques per a Anivellament* del Màster Universitari en Enginyeria Industrial de la Universitat Politècnica de València.

Per tant, en l'elecció dels continguts del text he considerat tant el que s'ha estat especificant habitualment en les guies docents de les assignatures esmentades des de la seua creació com alguns punts de vista que s'ofereixen en altres materials docents adreçats a aquestes mateixes assignatures (com per exemple [18]).

Vull mostrar el meu agraïment a tots aquells alumnes que d'una forma o una altra han participat activament en les meues classes i han seguit versions prèvies d'aquest text en cursos passats, i també al Servei de Promoció i Normalització Lingüística i a l'Editorial UPV. Gràcies al suport de tots ells he aconseguit trobar la motivació per a engegar i completar la redacció d'aquest text.

València, 22 de juny de 2022

Índex

Capítol 1

Funcions de variable complexa

En aquest capítol durem a terme una breu introducció a les funcions complexes de variable complexa. En particular introduirem una noció tan important i bàsica com la de funció holomorfa i mostrarem les versions en variable complexa de la funció exponencial, de la funció logarítmica i de les funcions trigonomètriques i hiperbòliques. També estudiarem la noció de residu d'una funció holomorfa en una singularitat aïllada, aquesta noció tindrà aplicacions en diverses operacions relacionades amb la resolució d'equacions diferencials. Es pot trobar un estudi més detingut i profund de les funcions de variable complexa en la referència [9].

1.1 Operacions bàsiques en $\mathbb{C}$

Denotarem per $\mathbb{R}$ el cos dels nombres reals i per $\mathbb{C}$ el cos dels nombres complexos. Recordem que $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$. Considerarem en $\mathbb{C}$ la suma i el producte habituals, tenint sempre en compte que i denota el que es coneix com *unitat imaginària* i que aquest element de $\mathbb{C}$ verifica, per definició, que $i^2 = -1$.

Siga $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on $a, b \in \mathbb{R}$. Ens referirem a a i a b com la *part real* i la *part imaginària* de z, respectivament, i escriurem $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$. L'expressió $z = a + ib$ rep el nom de *forma binòmica* o *cartesiana* del nombre complex z. Direm que z és un nombre *imaginari pur* quan $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Donat un $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, on $a, b \in \mathbb{R}$, definim el *conjugat de* z com el nombre $\overline{z}$ donat per

$$\overline{z} = a - ib.$$

Per tant, $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$. Observem que

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Definim també el *mòdul de* z com

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Veiem que el mòdul de z és igual a la distància que hi ha entre el punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ i l'origen de coordenades en $\mathbb{R}^2$. La prova del següent resultat és senzilla i la proposem com a exercici.

Proposició 1.1. *Per a tot parell de nombres $z, w \in \mathbb{C}$ es verifiquen les següents afirmacions:*

(1) $z\overline{z} = |z|^2$.
(2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
(4) $\overline{\overline{z}} = z$.
(5) $|\overline{z}| = |z|$.
(6) $z \in \mathbb{R}$ *si i només si* $z = \overline{z}$.
(7) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ *i es verifica la igualtat si i només si* $z = \lambda w$, *per a algun* $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

(8) $|zw| = |z||w|$. *En particular,* $|z^n| = |z|^n$, *per a tot* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, es defineix z^{-1} com

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

És immediat veure que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$. Donats $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, denotem per $\frac{z}{w}$ el nombre complex que s'obté al realizar l'operació zw^{-1}. Per tant, a l'hora d'expressar $\frac{z}{w}$ en forma binòmica realitzarem les següents operacions:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}.$$

Es pot comprovar fàcilment que

(1) $(\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
(2) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$.
(3) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, per a tot $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$.

És clar que podem identificar geomètricament $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$, ja que tot nombre complex $z = a + ib$, on $a, b \in \mathbb{R}$, està determinat unívocament pel parell (a, b). Així, donats dos nombres $z, w \in \mathbb{C}$, es defineix la *distància* entre z i w com $|z - w|$.

Denotem per S^1 la circumferència unitat de $\mathbb{C}$ centrada en 0, és a dir

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

És obvi que S^1 es pot reescriure de la forma següent:

$$S^1 = \big\{ \cos(\theta) + i\sin(\theta) : \theta \in \mathbb{R} \big\}.$$

Definició 1.2. Donat un $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ qualsevol, tenim que $\frac{z}{|z|}$ sempre té mòdul igual a 1, és a dir, $\frac{z}{|z|}$ pertany a S^1. Per tant, sempre tindrem una relació de la forma

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \tag{1.1}$$

per a algun $\theta \in \mathbb{R}$. Anomenarem *argument* de z a tot nombre $\theta \in \mathbb{R}$ que verifique la relació anterior.

Donat un $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tot argument de z mesura l'angle que existeix entre el semieix real positiu i el vector de $\mathbb{R}^2$ determinat per z.

A partir de (1.1) obtenim la igualtat

$$z = |z|\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$$

la qual es coneix com *forma trigonomètrica de z*.

Observació 1.3. (1) Fixem un $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. D'acord amb la definició d'argument, si θ i θ' són arguments de z, aleshores $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ i $\sin(\theta) = \sin(\theta')$. És a dir, existeix un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta - \theta' = 2k\pi$.

(2) A partir de l'observació anterior, veiem que si $]a, b[$ és qualsevol interval obert de longitud 2π, aleshores existeix un únic argument de z pertanyent a $]a, b[$. Fixem un $\alpha \in \mathbb{R}$. Com que l'interval $]\alpha-\pi, \alpha+\pi[$ té longitud 2π, existeix un únic argument de z pertanyent a $]\alpha - \pi, \alpha + \pi[$. Denotarem aquest argument de z per $\arg_\alpha(z)$. En particular, si α és un argument de z, tenim que $\arg_\alpha(z) = \alpha$.

(3) Donat un $\alpha \in \mathbb{R}$, definim

$$H_\alpha = \big\{r\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big) : r \leqslant 0\big\}. \tag{1.2}$$

Geomètricament, H_α és la semirecta de $\mathbb{C}$ que forma un angle igual a $\alpha + \pi$ radians amb l'eix positiu de les x. Per exemple:

$$\begin{aligned}
H_0 &= \{r(\cos(0) + i\sin(0)) : r \leqslant 0\} = \{r : r \leqslant 0\} =]-\infty, 0] \\
H_{\frac{\pi}{2}} &= \left\{r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) : r \leqslant 0\right\} = \{ir : r \leqslant 0\} \\
H_\pi &= \{r\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) : r \leqslant 0\} = \{-r : r \leqslant 0\} = [0, +\infty[.
\end{aligned}$$

Veiem que, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, aleshores $\arg_\alpha(z)$ està definit si i només si $z \in \mathbb{C} \setminus H_\alpha$. Denotarem per D_α el conjunt $\mathbb{C} \setminus H_\alpha$, per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) El nombre $\arg_0(z)$ rep el nom d'*argument principal de z*. Per tant $\arg_0(z) \in]-\pi, \pi[$ i aquest nombre es pot calcular si i només si z no pertany al semieix negatiu, és a dir, $z \in \mathbb{C} \setminus \{r \in \mathbb{R} : r \leqslant 0\} = D_0$. Donat un $x \in]0, +\infty[$, és obvi que $\arg_0(x) = 0$.

Exercici 1.4. Siga $z = x + iy \in D_0$, on $x, y \in \mathbb{R}$. Proveu, tenint en compte que arctg és una funció de $\mathbb{R}$ en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, que

$$\arg_0(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}), & \text{si } x > 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + \pi, & \text{si } x < 0,\ y > 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) - \pi, & \text{si } x, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Proposició 1.5. *Siguen $z, z' \in \mathbb{C}$. Suposem que z i z' s'escriuen en forma trigonomètrica com $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ i $z' = |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$, on $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Aleshores:*

(1) $z \cdot z' = |z||z'|\big(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\big)$.

(2) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{|z|}{|z'|}\big(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')\big)$, *si* $z' \neq 0$.

La prova del resultat anterior és senzilla i la proposem com a exercici.

Com a conseqüència directa de la primera relació de la Proposició 1.5 s'obté la coneguda *fórmula de De Moivre*, la qual diu que si $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ i z s'escriu en forma trigonomètrica com $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, aleshores

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

Veurem en la Secció 1.3 que les relacions de la Proposició 1.5 admeten una reformulació molt útil en termes de la funció exponencial.

Exemple 1.6. Siga $z = -1 + i$. Expressem z^{18} en forma binòmica. Tenim que:

$$\begin{aligned} (-1+i)^{18} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^{18} \\ &= 2^{18/2}\left(\cos\left(18\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(18\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -512\, i. \end{aligned}$$

Definició 1.7. Siguen $z, w \in \mathbb{C}$ i siga $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Es diu que z és una *arrel n-èsima de w* o que *z és arrel d'ordre n de w* si $z^n = w$.

Exercici 1.8. Siguen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Siga θ un argument qualsevol de w. Proveu que w té només n arrels n-èsimes distintes i que aquestes venen donades en forma trigonomètrica per:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \tag{1.3}$$

on $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, veiem que totes les arrels n-èsimes de w tenen mòdul igual a $\sqrt[n]{|w|}$ i que aquestes s'identifiquen amb els vèrtexs d'un polígon regular inscrit en la circumferència de centre en 0 i radi $\sqrt[n]{|w|}$.

Exemple 1.9. Resolguem l'equació $z^5 + 32 = 0$. Donat un $z \in \mathbb{C}$, tenim que

$$z^5 + 32 = 0 \iff z^5 = -32.$$

Un argument qualsevol de $w = -32$ és $\theta = \pi$. Per tant, aplicant la relació (1.3) per a $k = 0, 1, 2, 3, 4$, obtenim que les solucions de l'equació són:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\\
z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)\\
z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{5}\right)\right) = -2\\
z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)\\
z_4 &= 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right).
\end{aligned}$$

1.2 Sèries de nombres complexos

En aquesta secció mostrarem breument alguns fets fonamentals relatius a les successions i les sèries de nombres complexos. Assumirem familiaritat amb els conceptes i resultats bàsics sobre successions i sèries de nombres reals.

Definició 1.10. Siga $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successió de nombres complexos, és a dir, una aplicació $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{C}$. La regla o expressió que associa el nombre a_n a cada $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ es coneix com el *terme general* de la successió.

Suposem que cada terme a_n s'escriu en forma binòmica com $a_n = x_n + iy_n$, per a tot $n \geqslant 0$. D'aquesta forma $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ són dues successions de nombres reals.

(1) Direm que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ és *convergent* quan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ són convergents. Suposem que $x, y \in \mathbb{R}$ són tals que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Aleshores direm que $x + iy$ és el *límit* de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i escriurem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x + iy = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + i\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right). \tag{1.4}$$

(2) Es diu que la successió $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ és *divergent* quan no és convergent, és a dir, quan no existeix el límit de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ o no existeix el límit de $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

La relació $\lim_{n\to\infty} a_n = x + iy$ es correspon amb la idea intuïtiva que a mesura que n creix, la distància entre a_n i el límit $x + iy$ va tendint a zero. La prova del següent resultat és immediata.

Proposició 1.11. *Siga* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una successió de nombres complexos. Siga* $\ell \in \mathbb{C}$*, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - \ell| = 0.$$

Exemple 1.12. Considerem la successió $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de nombres complexos donada pel terme general

$$a_n = \frac{in^2 - 2in + 1}{5n^2 + i}$$

per a tot $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Duent a terme els càlculs corresponents, veiem que la forma binòmica del terme general de la successió és

$$a_n = \frac{6n^2 - 2n}{25n^4 + 1} + i\frac{5n^4 - 10n^3 - 1}{25n^4 + 1}$$

per a tot $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Per tant $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ és convergent i $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{i}{5}$.

Definició 1.13. Siga $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successió de nombres complexos. A partir d'aquesta successió podem formar el que s'anomena *successió de sumes parcials associada a* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Aquesta és la successió $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ donada per

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0\\
S_1 &= a_0 + a_1\\
S_2 &= a_0 + a_1 + a_2\\
&\vdots\\
S_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{r=0}^{n} a_r.
\end{aligned}$$

El límit d'aquesta successió, quan existeix, es denota per $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i rep el nom de *sèrie*. És a dir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

És habitual fer un abús de nomenclatura anomenant també sèrie a la successió $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$. Així:

(1) es diu que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és *convergent* quan existeix el límit de $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$. Aquest límit rep també el nom de *suma de la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(2) Si el límit de $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ no existeix, aleshores direm que *la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *és divergent*.

El límit de $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ es correspon amb la idea intuïtiva de sumar tots els termes de la successió $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. És senzill provar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n)$ són convergents. En aquest cas es té que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)\right) + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n)\right).$$

O equivalentment, es tenen les següents relacions:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)$$
$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n).$$

Exemple 1.14. Siga $z \in \mathbb{C}$. Estudiem, en funció de z, la convergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Aquesta sèrie s'anomena *sèrie geomètrica de raó z*. Donat un $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, observem que

$$(1-z)\sum_{r=0}^{n} z^r = \sum_{r=0}^{n} z^r - \sum_{r=0}^{n} z^{r+1} = \sum_{r=0}^{n}(z^r - z^{r+1}) = 1 - z^{n+1}.$$

Per tant, tenim que

$$\sum_{r=0}^{n} z^r = \begin{cases} n+1, & \text{si } z = 1 \\ \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, & \text{si } z \neq 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Així tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ és convergent si i només si $|z| < 1$ i en aquest cas es té que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} z^r = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}. \tag{1.6}$$

En particular, tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ és convergent si i només si $|z| < 1$ i en aquest cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1 - |z|}.$$

És senzill provar el següent resultat, el qual ajuda en el càlcul de la suma d'una sèrie.

Proposició 1.15. *Siguen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries convergents de nombres complexos. Aleshores*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

per a tot $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exemple 1.16. Considerem la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)^n \right).$$

Calculem, si existeix, la suma d'aquesta sèrie. Tenint en compte les desigualtats $\frac{1}{5} < 1$ i $|-\frac{1}{2} + \frac{i}{4}| = \frac{\sqrt{5}}{4} < 1$ concloem, per l'Exemple 1.14 i la Proposició 1.15, que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)^n \right) &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right)^n \\ &= 3 \frac{1}{1 - 1/5} + 2 \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2} + \frac{i}{4})} = \frac{747}{148} + i \frac{8}{37}.\end{aligned}$$

Donada una successió $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$, on $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, el significat de $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ és anàleg al que hem vist en la Definició 1.13 reemplaçant els termes S_n de la definició de la successió de sumes parcials per

$$S_n = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n, \qquad \text{per a tot } n \geqslant m.$$

Si partim d'una successió $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ i fixem un $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, aleshores és immediat veure que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ és convergent. En aquest cas es té que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{m-1} + \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n \right).$$

En general, determinar la convergència d'una sèrie no és un problema senzill. Mostrem a continuació tres resultats que ajuden en aquesta tasca en algunos casos.

Teorema 1.17. *Si la sèrie de nombres complexos* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *és convergent, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostració. Siga $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, per a tot $n \geqslant 0$, i siga $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. És a dir: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Tenim que $a_n = S_n - S_{n-1}$, per a tot $n \geqslant 1$. Aleshores, aplicant límits a ambdues bandes de la igualtat anterior obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

El recíproc del Teorema 1.17 és fals en general. Per exemple, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no és convergent (vegeu una prova d'aquest fet en [1, p. 227]) i en canvi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. En general, és ben sabut que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ és convergent si i només si $p > 1$ (vegeu [1, p. 234]).

Es pot trobar una prova del següent resultat en [1, p. 229].

Teorema 1.18. *Suposem que* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *és una sèrie decreixent de nombres reals positius tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Aleshores la sèrie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *és convergent.*

Com a aplicació del resultat anterior, veiem que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ és convergent. La demostració del següent resultat es pot trobar, per exemple, en [1, p. 235].

Teorema 1.19. (Criteri de l'arrel)
Considerem una sèrie de nombres complexos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tal que el següent límit existeix:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Aleshores:

(1) *Si $\lambda < 1$, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergeix.*
(2) *Si $\lambda > 1$, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergeix.*
(3) *Si $\lambda = 1$, no podem determinar la convergència a través del valor de λ.*

Proposició 1.20. *Siga $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successió de nombres complexos tal que $a_n \neq 0$, per a tot n suficientment gran. Considerem els límits*

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad\qquad \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Si existeix el límit μ, aleshores λ també existeix i $\lambda = \mu$.

Hi pot haver casos en els quals el límit λ del resultat anterior existeix però μ no existeix. Açò ocorre per exemple per a la successió $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ donada per

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{si } n \text{ és parell} \\ \frac{1}{n^3}, & \text{si } n \text{ és imparell.} \end{cases}$$

Proposem com a exercici dur a terme les corresponents comprovacions i també la prova de la Proposició 1.20 (vegeu [1, p. 257]).

Definició 1.21. Es diu que una sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és *absolutament convergent* quan la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és convergent.

En general, tota sèrie $\sum_{n=0}^{\infty}$ absolutament convergent és convergent (vegeu [1, Teorema 8.18]) i a més

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, .$$

El recíproc d'aquesta afirmació és fals, és a dir, no es pot concloure que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ siga convergent a partir de la condició que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Un exemple que posa açò de manifest és la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. En el següent resultat veiem que la condició de convergència absoluta és important a l'hora d'expressar el producte de sèries també com una sèrie.

Teorema 1.22. (Mertens)
Siguen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries convergents. Suposem que una d'elles és absolutament convergent. Aleshores

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

on $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$, per a tot $n \geqslant 0$.

En general, la igualtat anterior no es verifica sense la hipòtesi que alguna de les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ siga absolutament convergent (vegeu [1, 8.32, p. 261]).

Hi ha un tipus de sèries que serà d'especial interés en la seccions posteriors, es tracta de les sèries de potències. Siga $z_0 \in \mathbb{C}$. Una *sèrie de potències centrada en* z_0 és una sèrie que s'escriu de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

on $a_n \in \mathbb{C}$, per a tot $n \geqslant 0$. Acceptant el conveni que $0^0 = 1$, tenim que la suma de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ quan $z = z_0$ és igual a a_0. És a dir, aquesta sèrie convergeix almenys quan $z = z_0$.

Per exemple:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n$ és una sèrie de potències centrada en $z_0 = 0$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} (z + 1)^n$ és una sèrie de potències centrada en $z_0 = -1$.

Apareix així el problema natural de determinar quins són els valors de $z \in \mathbb{C}$ per als quals una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ és convergent. Veurem que el conjunt d'aquestos z dona lloc a un subconjunt de $\mathbb{C}$ que no té una forma qualsevol.

Donat un $R > 0$ denotem per $D(z_0, R)$ el disc obert centrat en z_0 de radi R, és a dir:

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, click aquí