

Control por modos deslizantes de orden superior basado en funciones de Lyapunov

Jaime A. Moreno^a, Leonid Fridman^b

^aInstituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Coyoacán, Ciudad de México, México.

^bFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 Coyoacán, Ciudad de México, México.

To cite this article: Moreno, J. A., Fridman, L. 2022. Lyapunov-based High-Order Sliding-Mode control. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 19, 394-406. <https://doi.org/10.4995/riai.2022.17013>

Resumen

En este trabajo se presenta una panorámica del desarrollo de los métodos básicos de análisis y diseño de controladores y observadores por modos deslizantes de orden superior. Inicialmente se describen los controladores por retroalimentación de estados con una ley de control discontinua, que generan un modo deslizante de cualquier orden. Posteriormente se presenta una nueva clase de algoritmos por modos deslizantes de orden superior, que consisten en una retroalimentación de estados continua y una acción de control integral discontinua. Se describen también observadores por modos deslizantes, que estiman los estados del sistema en tiempo finito, y que permiten obtener un controlador por retroalimentación de la salida. Todos los diseños presentados se basan en el uso de funciones de Lyapunov (explícitas), que constituyen una contribución importante del grupo de trabajo de los autores en la Universidad Nacional Autónoma de México. La presentación es tutorial y solo se dan los resultados, dejando a un lado la formalización rigurosa y las pruebas matemáticas. Para ello se refiere al lector a la literatura pertinente. Se ilustran los resultados mediante simulaciones y la validación experimental en un sistema de levitación magnética.

Palabras clave: Modos deslizantes, Control de estructura variable, Métodos de Lyapunov, Control integral, Observadores no lineales.

Lyapunov-based HOSM control

Abstract

We give an overview of the methods of analysis and design of High-Order Sliding Mode Controllers (HOSM) and observers, including also those taking advantage of a discontinuous integral action. First, discontinuous state feedback controllers enforcing a sliding mode of arbitrary order are described. Then a recent class of HOSM controllers is presented, which consists of a continuous state feedback controller and a discontinuous integral term. High-order sliding mode observers are also introduced, which are able to estimate robustly and in finite time the states of the uncertain plant, and they allow the implementation of an output feedback control law. All described designs are based in explicit Lyapunov functions, what is a main contribution of the research group of the authors at the Universidad Nacional Autónoma de México, in Mexico City. The paper is tutorial and only the basic results are presented, leaving aside the rigorous mathematical formulation and proof. For this the appropriate literature is referred to. The results are illustrated using simulations and an experimental validation in a laboratory set up of a magnetic levitation system.

Keywords: Sliding Modes, Variable Structure Control, Lyapunov Methods, Integral Control, Nonlinear Observers

1. Introducción

El control por modos deslizantes (CMD) (Utkin et al., 2009; Shtessel et al., 2014) busca diseñar una variable de deslizamien-

to σ y forzarla a que se anule $\sigma \equiv 0$ en tiempo finito, y a que se mantenga en ese valor para todo tiempo futuro, a pesar de la acción de perturbaciones o a la presencia de incertidumbres en el modelo del sistema. Para lograr tal objetivo se requiere

* Autor para correspondencia: jmorenop@ii.unam.mx

utilizar una ley de control *discontinua*. El control por modos deslizantes clásico (o de primer orden) (CMDPO) (Utkin et al., 2009) alcanza este objetivo cuando la variable de deslizamiento tiene grado relativo $\rho = 1$ con respecto a la variable de control. El control por modos deslizantes de orden superior (CMDOS) (Levant, 2001; Fridman and Levant, 2002; Levant, 2005a,b; Levant and Michael, 2009; Shtessel et al., 2014) extiende estos resultados a un grado relativo arbitrario $\rho > 1$.

Ya que la implementación del control por modos deslizantes de orden superior requiere conocer los valores de la variable de deslizamiento y sus derivadas temporales hasta orden $\rho - 1$, es decir, $\sigma(t), \dot{\sigma}(t), \dots, \sigma^{(\rho-1)}(t)$, ha sido necesario desarrollar diferenciadores exactos y robustos, es decir, que puedan obtener en tiempo finito el valor correcto de tales derivadas (Levant, 1998, 2003; Bartolini et al., 2000; Bejarano and Fridman, 2010; Kobayashi et al., 2007; Floquet and Barbot, 2007; Davila et al., 2005; Shtessel and Shkolnikov, 2003; Efimov and Fridman, 2011). Estos diferenciadores requieren hacer uso de términos de corrección discontinuos, ya que las acciones de corrección continuas no pueden lograr tal objetivo.

Los diseños clásicos de controladores y estimadores por modos deslizantes de orden superior se han basado principalmente en métodos geométricos, que son usualmente muy efectivos para sistemas de bajo orden (Levant, 1993, 1998, 2001, 2003) o, más recientemente, en el uso de la homogeneidad y la contracción de las ecuaciones e inclusiones diferenciales homogéneas (Levant, 2005a,b, 2007; Levant and Michael, 2009). La homogeneidad (Bacciotti and Rosier, 2005; Levant, 2005a; Bernuau et al., 2014) ha sido precisamente la propiedad que ha permitido establecer las características *cualitativas* básicas de los algoritmos de modos deslizantes homogéneos de orden superior, tales como por ejemplo la convergencia global y en tiempo finito, la robustez y la precisión.

En contraste, la teoría de control no lineal moderna se basa fuertemente en el uso de funciones del tipo de Lyapunov para el análisis y el diseño (Freeman and Kokotovic, 1996; Moulay and Perruquetti, 2006). Esto se debe a la íntima conexión de este formalismo con el control óptimo, la robustez y los diversos conceptos de estabilidad interna y externa. En particular, para el diseño de controladores por retroalimentación el concepto de funciones de Lyapunov de control robustas ha jugado un rol fundamental en el desarrollo de métodos de diseño de controladores en las últimas tres décadas (Freeman and Kokotovic, 1996). Una ventaja de las funciones de Lyapunov es que ofrecen medidas *cuantitativas* que son muy útiles en el diseño de controladores y observadores. Muchos de los métodos de análisis y diseño numéricamente efectivos tiene su raíz en las funciones de Lyapunov, como por ejemplo las desigualdades matriciales lineales (LMI por su nombre en inglés). Por este motivo es natural intentar combinar la homogeneidad y los métodos de Lyapunov para obtener una teoría de análisis y diseño de controladores y observadores por modos deslizantes de orden superior más avanzada y más *cuantitativa*. Los métodos de Lyapunov permiten desarrollar procedimientos de diseño y ajuste de ganancias para controladores y diferenciadores por modos deslizantes y extensiones a sistemas con ganancia variable.

Este ha sido uno de los objetivos de nuestro grupo de control en la UNAM durante la última década. En estos últimos años se han dedicado muchos esfuerzos para encontrar funciones de

Lyapunov suaves y no suaves, fuertes o débiles, para algoritmos de modos deslizantes de segundo orden (Moreno and Osorio, 2008; Moreno, 2009; Cruz-Zavala et al., 2010; Moreno, 2011; Moreno and Osorio, 2012; Moreno, 2013; Polyakov and Poznyak, 2009b,a, 2012; Orlov, 2009), inicialmente, y luego para orden arbitrario.

Controladores homogéneos por modos deslizantes de orden arbitrario, basados en funciones de Lyapunov *explícitas*, fueron obtenidos por primera vez en (Cruz-Zavala and Moreno, 2014b) (véase también Cruz-Zavala and Moreno (2014a, 2016b, 2017)), mientras que funciones de Lyapunov *explícitas* y suaves para diferenciadores homogéneos de orden arbitrario fueron desarrolladas en (Cruz-Zavala and Moreno, 2016a). Posteriormente también se diseñaron controladores por modos deslizantes usando funciones de Lyapunov *explícitas* en (Ding et al., 2015, 2016), o mediante el método de la función de Lyapunov *implícita* en (Polyakov et al., 2015, 2016). Este último método presenta el inconveniente de que es necesario calcular en línea la ley de control, lo que hace su implementación más costosa computacionalmente. Tampoco ha sido posible desarrollar diferenciadores por modos deslizantes de orden superior mediante el método de la función *implícita*.

Una de las mayores desventajas del control por modos deslizantes es la aparición del fenómeno de *castañeo* (o “chattering”), que consiste en oscilaciones causadas porque la señal de control suichea a una alta frecuencia, debido a la discontinuidad de la ley de control. Este indeseable fenómeno deteriora el desempeño del sistema en lazo cerrado y puede causar el desgaste de los actuadores. Cuando el grado relativo es $\rho = 1$, el uso del super-twisting, un algoritmo clásico de MDOS de segundo orden, constituye una estrategia clásica (Levant, 1993; Fridman and Levant, 2002; Levant, 2007) para obtener una señal de control continua, con una posible reducción del *castañeo* (Pérez-Ventura and Fridman, 2019b). El *control por modos deslizantes de orden superior con acción integral*, también denominado *control por modos deslizantes continuos*, es una extensión del control super-twisting para grado relativo arbitrario, y fue introducido en una serie de trabajos (Zamora et al., 2013; Kamal et al., 2014; Fridman et al., 2015; Kamal et al., 2016; Moreno, 2018a; Mercado-Uribe and Moreno, 2020b) por nuestro grupo de trabajo de la UNAM.

El objetivo primordial de este artículo es presentar una visión panorámica del desarrollo de los métodos de análisis y diseño de controladores y diferenciadores por modos deslizantes de orden superior, incluyendo también la acción integral, basados en el uso de funciones de Lyapunov *explícitas*. Como esta ha sido una contribución importante de nuestro grupo de trabajo en la UNAM, debido también a la extensión del tema y por razones de limitación de espacio, nos centraremos especialmente en los trabajos desarrollados en nuestro grupo. También presentaremos de manera simplificada los métodos y resultados, siendo laxos en la formulación matemática, con el fin de hacer más comprensible el texto al lector no especializado en el tema y por razones de brevedad. Omitiremos todas las pruebas, para lo cual citaremos las referencias apropiadas, en las que se pueden encontrar todos los detalles técnicos requeridos. Por último, también presentaremos solo los resultados básicos, dejando de lado muchas extensiones.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente forma. En la siguiente Sección 2 se formulará y dará una perspectiva del problema de control por modos deslizantes de orden superior. En la Sección 3 se presenta el método basado en funciones de Lyapunov para diseñar controladores por modos deslizantes desarrollado en nuestro grupo, mientras que la Sección 4 lo hace para el diferenciador por modos deslizantes de orden superior. La Sección 5 formula el problema y da una perspectiva del control por modos deslizantes con acción integral (o control por modos deslizantes continuos), mientras que la Sección 6 expone los resultados básicos obtenidos en este tópico, basados en funciones de Lyapunov. En la Sección 7 se exhibe un ejemplo ilustrativo de los resultados obtenidos, y la Sección 8 concluye el artículo con algunos comentarios finales.

2. El problema del Control por modos deslizantes

Considérese un sistema dinámico incierto, con entrada de control u afín y escalar, es decir, $u \in \mathbb{R}$, descrito por

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z)u, \quad (1)$$

dónde $z \in \mathbb{R}^n$ representa al vector de estados. Los campos vectoriales $f(t, z)$ y $g(t, z)$ en \mathbb{R}^n son suaves e inciertos, y la dimensión n puede ser también incierta.

Un problema básico de control consiste en la estabilización robusta del origen $z = 0$ de (1), a pesar de las incertidumbres y/o perturbaciones presentes en f y g (Khalil, 2002; Isidori, 1995, 1999). Nótese que problemas de seguimiento robusto de referencias variantes en el tiempo pueden ser reformulados como problemas de estabilización robusta.

El control por modos deslizantes (CMD) es un método muy efectivo para resolver este problema. La estrategia de diseño de un CMD consiste en dos pasos:

1. Seleccionar una variable de deslizamiento

$$\sigma = h(t, z), \quad (2)$$

dónde $\sigma \in \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. σ debe ser tal que:

- a) σ tenga grado relativo $\rho \geq 1$ bien definido (Isidori, 1995) con respecto a u , es decir,

$$\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial u} \equiv 0, \frac{\partial \sigma^{(2)}}{\partial u} \equiv 0, \dots, \frac{\partial \sigma^{(\rho)}}{\partial u} \neq 0,$$

dónde $\sigma^{(i)} = \frac{d^i}{dt^i} h(t, z)$; y

- b) la dinámica del sistema (1) restringida a la variedad de deslizamiento $\sigma \equiv 0$ tenga un punto de equilibrio en el origen asintóticamente estable.

2. Diseñar una ley de control discontinua

$$u = \phi(\sigma, \dots, \sigma^{(\rho-1)}) \quad (3)$$

que asegure que se logre que $\sigma(t) \equiv 0$ en tiempo finito, y que se mantenga en ese valor a pesar de las incertidumbres y/o perturbaciones.

El CMD clásico o de primer orden (CMDPO) (Utkin et al., 2009; Khalil, 2002) se caracteriza porque el grado relativo

$\rho = 1$. El control por modos deslizantes de orden superior (CM-DOS) (Levant, 2001, 2005a; Shtessel et al., 2014), es una extensión más reciente, que permite grados relativos $\rho \leq n$ arbitrarios.

Como el grado relativo está bien definido, el sistema (1)-(2) puede ser transformado a la forma (Isidori, 1995)

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, \rho - 1, \\ \dot{x}_\rho = a(t, z) + b(t, z)u, \end{cases} \quad (4)$$

$$\Xi: \quad \dot{\eta} = \phi_0(t, \eta, x), \quad (5)$$

dónde $x := [x_1, \dots, x_\rho]^\top = [\sigma, \dots, \sigma^{(\rho-1)}]^\top$, y las funciones escalares $a(t, z)$ y $b(t, z)$ pueden contener perturbaciones e incertidumbres desconocidas, que corresponden, por ejemplo, a errores de modelado. Se asume que ellas son uniformemente acotadas para todo $z \in \mathbb{R}^m$ y todo $t \geq 0$, es decir,

$$0 < K_m \leq b(t, z) \leq K_M, |a(t, z)| \leq C, \quad (6)$$

para algunas constantes positivas conocidas C, K_m, K_M .

El vector $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ es el estado de la *dinámica reducida* (o dinámica cero) Ξ (Isidori, 1995). Ella describe el comportamiento del sistema restringido a la variedad de deslizamiento $\sigma \equiv 0$. Por diseño se sabe que cuando $x = 0$, Ξ tiene un punto de equilibrio en el origen $\eta = 0$ asintóticamente estable.

El diseño de σ en (2) ha sido considerado ampliamente en la literatura, en particular para el CMDPO (Utkin et al., 2009), y no lo discutiremos en este trabajo. Como la ley de control (3) no depende de la dinámica Ξ , tampoco la consideraremos aquí.

Debido a las incertidumbres y/o perturbaciones presentes en el sistema, representadas por (6), el sistema Σ en (4) se describe en forma natural por la siguiente *inclusión diferencial (ID)* (Levant, 2005a; Filippov, 1988; Bacciotti and Rosier, 2005; Deimling, 1992; Levant and Livne, 2016; Bernuau et al., 2014, 2016)

$$\Sigma_{ID}: \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, \rho - 1, \\ \dot{x}_\rho \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, \end{cases} \quad (7)$$

dónde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ representa el intervalo de puntos entre a y b , $a \leq b$. Recuérdese que para una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(t, x)$ el lado derecho $F(t, x)$ es un conjunto para cada punto (t, x) , y no un punto, como en el caso de las ecuaciones diferenciales. Si $F(t, x)$ satisface ciertas *condiciones estándares* (Filippov, 1988; Bacciotti and Rosier, 2005) se puede asegurar la existencia de soluciones, en el sentido de Filippov (Filippov, 1988), de la inclusión diferencial. Este es el caso de (7) y de las inclusiones diferenciales que encontraremos en este trabajo. Nótese que Σ_{DI} no depende de las propiedades particulares del sistema original y la inclusión diferencial solo "recuerda" las constantes ρ, C, K_m, K_M .

Dada una σ apropiada, el problema de control se resuelve diseñando una ley de control (3) $u = \phi(x)$ para (7), que establezca robustamente el punto $x = 0$ en tiempo finito. Nótese que si la ley de control ϕ es continua, debe ocurrir que $\phi(0) = 0$. En tal caso, si $C > 0$, el punto $x = 0$ en (7) no puede ser un punto de equilibrio. Por lo tanto, una ley de control ϕ continua no puede lograr la estabilización del punto $x = 0$ en (7). Entonces los métodos clásicos de diseño de controladores estabilizantes *continuos*, como los presentados en (Isidori, 1995, 1999; Khalil, 2002), no pueden ser utilizados para nuestro propósito.

Concluimos que es indispensable utilizar una ley de control ϕ que sea discontinua, al menos en el punto $x = 0$. Nótese que la implementación de la ley de control (3) requiere la estimación de las variables x en tiempo finito. El movimiento en el conjunto $\sigma = \dots = \sigma^{(\rho-1)} = 0$, ó $x = 0$, que consiste en trayectorias de Filippov (Filippov, 1988), se denomina *modo deslizante de orden ρ* (Levant, 2003, 2005a).

Cuando $\rho = 1$, en el CMD clásico, $x = \sigma \in \mathbb{R}$ es escalar y la ley de control (3) se reduce a la función signo $u = \phi(x) = k \text{signo}(x)$, con k suficientemente grande (Utkin et al., 2009; Khalil, 2002). Para $\rho \geq 2$ la determinación de funciones ϕ robustamente estabilizantes en tiempo finito es una tarea más difícil. El uso de funciones ϕ *homogéneas*, como ha sido propuesto por A. Levant (Levant, 2005a), simplifica mucho el encontrar soluciones a este problema.

2.1. Funciones y sistemas homogéneos

Los sistemas (continuos y discontinuos) homogéneos tienen una larga historia (Zubov, 1964; Hahn, 1967; Hermes, 1991; Nakamura et al., 2002; Orlov, 2003; Bhat and Bernstein, 2005; Bacciotti and Rosier, 2005; Levant, 2005a; Andrieu et al., 2008; Orlov, 2009; Nakamura et al., 2009; Bernuau et al., 2013a, 2014; Levant and Livne, 2016; Bernuau et al., 2016). Recordaremos algunos conceptos básicos acerca de funciones y sistemas (ecuaciones e inclusiones diferenciales) homogéneos. Para más detalles ver (Bacciotti and Rosier, 2005; Bernuau et al., 2013a, 2014, 2016, 2013b; Bhat and Bernstein, 2005; Deimling, 1992; Filippov, 1988; Hestenes, 1966; Andrieu et al., 2008; Levant, 2005a; Levant and Livne, 2016).

Para cada vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ y cada escalar $\varepsilon > 0$ definimos el operador de *dilatación* $\Delta_\varepsilon x := [\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n]^T$, donde $r_i > 0$ son los *pesos* de las coordenadas x_i , y $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]^T$ el *vector de pesos*. Una función escalar $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *\mathbf{r} -homogénea de grado $l \in \mathbb{R}$* si la identidad $V(\Delta_\varepsilon x) = \varepsilon^l V(x)$ se cumple para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. De igual manera, un campo vectorial $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o un campo vectorial multivaluado $F(x) \subset \mathbb{R}^n$, son *\mathbf{r} -homogéneos de grado $l \in \mathbb{R}$* si las identidades $f(\Delta_\varepsilon x) = \varepsilon^l \Delta_\varepsilon f(x)$, ó $F(\Delta_\varepsilon x) = \varepsilon^l \Delta_\varepsilon F(x)$, se cumplen para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Un sistema se dice que es homogéneo si su campo vectorial (para ecuaciones diferenciales (ED)) o su campo vectorial multivaluado (para ID) es *\mathbf{r} -homogéneo de algún grado*.

Sistemas homogéneos, sean descritos por ED o ID, tienen propiedades muy especiales e importantes (Bacciotti and Rosier, 2005; Bhat and Bernstein, 2005; Andrieu et al., 2008; Hermes, 1991; Levant, 2005a; Levant and Livne, 2016; Bernuau et al., 2013a, 2014, 2016). Por ejemplo, para sistemas homogéneos: (i) atractividad local del punto de equilibrio en $x = 0$ es equivalente a estabilidad global y asintótica. (ii) Si el sistema tiene grado de homogeneidad negativo, atractividad equivale a estabilidad en tiempo finito. (iii) Estabilidad interna de un sistema con entradas es equivalente a la estabilidad externa.

Otra propiedad importante es que la estabilidad asintótica de sistemas homogéneos (continuos o discontinuos) puede ser estudiada mediante funciones de Lyapunov *homogéneas* (Zubov, 1964; Hahn, 1967; Hermes, 1991; Rosier, 1992; Nakamura et al., 2002; Bacciotti and Rosier, 2005; Levant, 2005a; Bhat and Bernstein, 2005; Bernuau et al., 2013a, 2014, 2016; Levant and Livne, 2016): Si el origen de la ID homogénea $\dot{x} \in F(x)$ es

global y asintóticamente estable (en el sentido fuerte), entonces existe una función de Lyapunov fuerte homogénea y suave \mathcal{C}^∞ .

Notación: Para la variable real $z \in \mathbb{R}$ y el número real $p \in \mathbb{R}$ el símbolo $[z]^p = |z|^p \text{signo}(z)$ representa a la potencia signada p de z . En particular, $[z]^0 = \text{signo}(z)$ es la función signo.

2.2. Control por modos deslizantes de orden superior homogéneo

En una serie de trabajos clásicos, y usando herramientas geométricas y la teoría de ecuaciones diferenciales homogéneas, A. Levant ha derivado familias de controladores (3) homogéneos por MDOS (Levant, 1993, 2001, 2003, 2005a,b, 2007; Levant and Michael, 2009). Por razones de espacio no se presentan las formas concretas de los controladores. En estos trabajos el problema de estabilización se resuelve utilizando una ley de control por retroalimentación de estados (3), acotada y *\mathbf{r} -homogénea de grado 0*, es decir, $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^p$

$$u = \phi(x_1, x_2, \dots, x_p) = \phi(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_p} x_p), \quad (8)$$

con $\mathbf{r} = (\rho, \rho - 1, \dots, 1)$, que hace que el origen $x = 0$ sea *robustamente estable* en tiempo finito para el sistema Σ_{ID} (7). La función ϕ es discontinua en el modo deslizante $x = 0$. La inclusión diferencial en lazo cerrado (7)-(8) es *\mathbf{r} -homogénea de grado -1* , y satisface las *condiciones estándares*. El diseño de los controladores, así como el análisis de robustez, precisión y las propiedades de convergencia se hacen mucho más fáciles si se impone la propiedad de homogeneidad. Esto es también válido para los observadores. Esto explica que la homogeneidad se haya convertido en un ingrediente importante del CMDOS, y la mayor parte de los controladores y estimadores por MDOS en la actualidad son homogéneos.

Algunas de las ventajas del CMD son las siguientes:

- Compensación *exacta* de las incertidumbres y perturbaciones *acopladas*, es decir, modeladas por (6).
- La dinámica del sistema en lazo cerrado, después de un tiempo finito, está dado por (5) con $x = 0$, y es de orden reducido, ya que evoluciona en una variedad de dimensión $n - \rho$. Para el CMDPO esta variedad deslizante es una dimensión menor que el espacio de estado del sistema. Usando un CMDOS de orden ρ , la dimensión de la variedad de deslizamiento es $n - \rho$, y puede reducirse hasta 0 si $\rho = n$, el orden del sistema.
- La convergencia a la variedad de deslizamiento se obtiene en tiempo finito. Si $\rho = n$, el origen del sistema es alcanzado en tiempo finito.

Sin embargo, algunas desventajas son también apreciables:

- El uso de una ley de control *discontinua*, para asegurarse que las trayectorias permanecen sobre la superficie de deslizamiento, es causante del *castañeo* ("chattering"), que es una señal de control suicheada de alta frecuencia. El castañeo tiene efectos indeseables en el sistema, como el reducir la vida de los actuadores, excitar dinámicas de alta frecuencia de la planta, usualmente no modeladas, y un alto consumo de energía.

- La estabilización del origen ocurre asintóticamente, ya que, aunque las trayectorias alcanzan la superficie deslizante en tiempo finito, su evolución sobre esta superficie está descrita por una dinámica suave y el origen es alcanzado solo asintóticamente. Solo en el caso de que el CMDOS se realice con grado relativo igual al orden del sistema, es decir, $\rho = n$, la estabilización se alcanza en tiempo finito.

En la próxima Sección 3 presentaremos algunas familias de Controladores homogéneos por MDOS que resuelven el problema para cualquier conjunto de parámetros (ρ, C, K_m, K_M) . Estos controladores se diferencian de los propuestos por A. Levant (Levant, 2003, 2005a,b; Levant and Michael, 2009) en su forma y en que son obtenidos mediante el uso de funciones de Lyapunov de control suaves, homogéneas y explícitas. Ya que la implementación del controlador (8) requiere los valores de σ y sus derivadas hasta $\sigma^{(\rho-1)}$, es decir del estado x de Σ_{ID} , en la Sección 4 se propone un observador homogéneo por MDOS, que puede estimar el estado x de Σ_{ID} exacta y robustamente en tiempo finito para cualquier conjunto de parámetros (ρ, C, K_m, K_M) . Este observador corresponde al diferenciador propuesto por A. Levant (Levant, 2003, 2005a), pero con la diferencia de que su análisis y diseño se realizan mediante el uso de funciones de Lyapunov suaves, homogéneas y explícitas.

3. Diseño a la Lyapunov de controladores por modos deslizantes de orden superior

El uso de funciones de Lyapunov (fuertes) para el análisis y el diseño de CMD de segundo orden fue iniciado en (Moreno and Osorio, 2008; Dávila et al., 2009; Moreno, 2009; Dávila et al., 2010; Moreno, 2010; Santiesteban et al., 2010; Cruz-Zavala et al., 2011a,b; Kochalummoottil et al., 2011; Cruz-Zavala et al., 2012; Sanchez and Moreno, 2012; Cruz-Zavala et al., 2013; Sanchez and Moreno, 2013, 2014). Para MDOS de orden arbitrario se desarrollaron controladores basados en Funciones de Lyapunov en (Cruz-Zavala and Moreno, 2014b,a, 2016b, 2017; Ding et al., 2015, 2016).

Basados en Funciones de Lyapunov de control, suaves y homogéneas, presentaremos familias de controladores homogéneos por MDOS. Los detalles y las pruebas se encuentran en (Cruz-Zavala and Moreno, 2014b,a, 2016b, 2017).

Dado un grado relativo $\rho \geq 2$, asignamos los pesos de homogeneidad $r_i = \rho - i + 1$ a las variables x_i , obteniendo el vector $\mathbf{r} = (\rho, \rho - 1, \dots, 1)$. Defínase también una secuencia no decreciente arbitraria de números reales positivos α_i tales que $\rho \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{\rho-1} \leq \alpha_\rho$. Adicionalmente, defínase recursivamente, para $i = 2, \dots, \rho$, las funciones \mathbf{r} -homogéneas y \mathcal{C}^1

$$\sigma_1(\bar{x}_1) = [x_1]^{\frac{\alpha_1}{\rho}}, \dots, \sigma_i(\bar{x}_i) = [x_i]^{\frac{\alpha_i}{\rho-i+1} + k_{i-1}^{\frac{\alpha_i}{\rho-i+1}}} [\sigma_{i-1}(\bar{x}_{i-1})]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}}, \tag{9}$$

con ciertas constantes $k_i > 0$ a diseñar, y dónde $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$.

Para cualquier constante $m \geq \max_{1 \leq i \leq \rho} \{\rho + 1 + \alpha_{i-1} - i\}$ defínase recursivamente, para $i = 2, \dots, \rho$, las funciones \mathbf{r} -homogéneas y \mathcal{C}^1

$$V_1(x_1) = \frac{\rho}{m} |x_1|^{\frac{m}{\rho}}, \dots, V_i(\bar{x}_i) = \gamma_{i-1} V_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) + W_i(\bar{x}_i) \tag{10}$$

$$W_i(\bar{x}_i) = \frac{r_i}{m} |x_i|^{\frac{m}{r_i}} - [v_{i-1}(\bar{x}_{i-1})]^{\frac{m-r_i}{r_i}} x_i + \left(1 - \frac{r_i}{m}\right) |v_{i-1}(\bar{x}_{i-1})|^{\frac{m}{r_i}}, \tag{11}$$

$$v_1(x_1) = -k_1 [\sigma_1(x_1)]^{\frac{\gamma_1}{\alpha_1}}, \dots, v_i(\bar{x}_i) = -k_i [\sigma_i(\bar{x}_i)]^{\frac{\gamma_i}{\alpha_i}}, \tag{12}$$

con constantes arbitrarias $\gamma_i > 0$. $\sigma_i(\bar{x}_i)$, $v_i(\bar{x}_i)$ y $V_i(\bar{x}_i)$ son \mathbf{r} -homogéneas de grados α_i , r_{i+1} y m , respectivamente. $V_c(x) = V_\rho(\bar{x}_\rho)$ es una función de Lyapunov de control suave y \mathbf{r} -homogénea para el sistema incierto (7), para ganancias k_i apropiadas.

De $V_c(x)$ se pueden obtener diversos controladores homogéneos para (7). En particular, se obtienen la siguientes familias de controladores *discontinuos* y *cuasi-continuos*

$$u_D = -k_\rho \phi_D(x) = -k_\rho [\sigma_\rho(x)]^0, \tag{13}$$

$$u_C = -k_\rho \phi_C(x) = -k_\rho \frac{\sigma_\rho(x)}{M(x)}, \tag{14}$$

dónde $M(x)$ es cualquier función continua, \mathbf{r} -homogénea y positiva definida de grado α_ρ . Por simplicidad asumimos además que $\frac{|\sigma_\rho(x)|}{M(x)} \leq 1$. Los controladores homogéneos (13)-(14) se derivan de $V_c(x)$ imponiendo la condición $\frac{\partial V_c(x)}{\partial x_\rho} \phi(x) > 0$ en todos los puntos dónde $\frac{\partial V_c(x)}{\partial x_\rho} \neq 0$ (Cruz-Zavala and Moreno, 2017). Esta observación permite obtener diversas expresiones equivalentes (en el sentido de la estabilidad) de las leyes de control (13), (14).

Los valores de k_i , para $i = 1, \dots, \rho - 1$, pueden ser fijados dependiendo solamente de ρ y α_i , y son los mismos para los controladores discontinuos y cuasi-continuos, pero son independientes de (K_m, K_M, C) . En contraste, k_ρ se selecciona dependiendo de los valores de K_m , K_M y C para producir el modo deslizante de orden ρ , y los valores son diferentes para los controladores discontinuos y cuasi-continuos. Nótese que los controladores discontinuos presentan discontinuidades no solo en el conjunto de deslizamiento $\{x = 0\}$ sino también en el conjunto dónde $\sigma_\rho(x) = 0$, mientras que los controladores cuasi-continuos son solo discontinuos en el conjunto de deslizamiento, debido a lo cual estos últimos producen un menor efecto de castaño.

Dependiendo de la selección de los parámetros libres $\rho \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_\rho$ se obtienen diferentes familias de controladores. Ilustramos estas familias presentando los controladores de órdenes $\rho = 2, 3$:

Controladores discontinuos

Controladores anidados: Algunas de las α_i son diferentes.

$$u_{2D} = -k_2 \left[[x_2]^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{2}} \right]^0$$

$$u_{3D} = -k_3 \left[[x_3]^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[[x_2]^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \right]^0 \tag{15}$$

Controladores relevados polinomiales: Cuando $\alpha_\rho = \alpha_{\rho-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha \geq \rho$

$$u_{2R} = -k_2 \left[[x_2]^\alpha + \bar{k}_1 [x_1]^{\frac{\alpha}{2}} \right]^0,$$

$$u_{3R} = -k_3 \left[[x_3]^\alpha + \bar{k}_2 [x_2]^{\frac{\alpha}{2}} + \bar{k}_1 [x_1]^{\frac{\alpha}{3}} \right]^0 \tag{16}$$

dónde, si $\rho = 2$, $\bar{k}_1 = k_1^\alpha$; si $\rho = 3$, $\bar{k}_1 = k_2^\alpha k_1^{\frac{\alpha}{2}}$, $\bar{k}_2 = k_2^\alpha$; y si $\rho > 3$, $\bar{k}_i = \prod_{j=i}^{\rho-1} k_j^{\frac{\alpha}{\rho-j}}$, para $i = 1, \dots, \rho - 1$. Controladores relevados polinomiales tienen una forma especialmente simple.

Controladores cuasi-continuos

Controladores anidados: Algunas de las α_i son diferentes. Los parámetros $\beta_i > 0$ son arbitrarios

$$u_{2Q} = -k_2 \frac{[x_2]^{\alpha_2} + k_1^{\alpha_2} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{2}}}{|x_2|^{\alpha_2} + \beta_1 |x_1|^{\frac{\alpha_2}{2}}},$$

$$u_{3Q} = -k_3 \frac{[x_3]^{\alpha_3} + k_2^{\alpha_3} \left[[x_2]^{\frac{\alpha_2}{2}} + k_1^{\frac{\alpha_2}{2}} [x_1]^{\frac{\alpha_2}{3}} \right]^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}}{|x_3|^{\alpha_3} + \beta_2 |x_2|^{\frac{\alpha_3}{2}} + \beta_1 |x_1|^{\frac{\alpha_3}{3}}} \quad (17)$$

Controladores relevados polinomiales: Cuando $\alpha_\rho = \alpha_{\rho-1} = \dots = \alpha_1 = \alpha \geq \rho$

$$u_{2QR} = -k_2 \frac{[x_2]^\alpha + k_1^\alpha [x_1]^{\frac{\alpha}{2}}}{|x_2|^\alpha + \beta_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{2}}},$$

$$u_{3QR} = -k_3 \frac{[x_3]^\alpha + \bar{k}_2 [x_2]^{\frac{\alpha}{2}} + \bar{k}_1 [x_1]^{\frac{\alpha}{3}}}{|x_3|^\alpha + \beta_2 |x_2|^{\frac{\alpha}{2}} + \beta_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{3}}} \quad (18)$$

Todos estos controladores solucionan el problema de estabilización robusta en tiempo finito formulado en la sección 2.

Teorema 1. Para cualquier $\rho \geq 2$, cada uno de los controladores discontinuos o cuasi-continuos en (13)-(14), con parámetros arbitrarios $\rho \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_\rho$, $\beta_1 > 0, \dots, \beta_{\rho-1} > 0$, es **r-homogéneo**, y para k_ρ suficientemente grande se establece el modo deslizante de orden ρ en $x = 0$ en tiempo finito para el sistema incierto (7), si las ganancias $k_1, \dots, k_{\rho-1}$ son seleccionadas apropiadamente.

Usando las propiedades de los sistemas homogéneos (Levant, 2003, 2005a; Levant and Livne, 2016) es posible obtener las siguientes figuras de precisión en presencia de ruido de medición y/o ruido de discretización.

Teorema 2. Considere la planta incierta (7), con cualquiera de los controladores por retroalimentación de estados (13) o (14), y supóngase que las hipótesis del Teorema 1 son satisfechas. Asíumase que el control se realiza con un intervalo de discretización τ . En tal caso el estado x alcanza, después de un tiempo finito, una vecindad del origen, denominada “modo deslizante real”, y caracterizada por

$$|x_1(t)| \leq \delta_1 \tau^\rho, \dots, |x_i(t)| \leq \delta_i \tau^{\rho-(i-1)}, |x_\rho(t)| \leq \delta_\rho \tau,$$

y permanece en ella para todo tiempo futuro. $\delta_1, \dots, \delta_\rho > 0$ son constantes positivas que dependen solamente del controlador seleccionado, los parámetros (C, K_m, K_M, ρ) y las ganancias, pero son independientes de τ y de las condiciones iniciales.

Usando la Función de Lyapunov (10) se puede probar que el tiempo de convergencia es una función acotada del estado inicial (Bernuau et al., 2014, Theorems 5.6, 5.7).

Proposición 3. Los controladores (13)-(14), en lazo cerrado con (7), hacen que la trayectoria de estado que inicia en $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n$ alcance $x = 0$ en un tiempo finito inferior a

$$T(x_0) \leq m \eta_\rho V_\rho^{\frac{1}{m}}(x_0), \quad (19)$$

dónde la constante η_ρ es función de las ganancias (k_1, \dots, k_ρ) , K_m y C .

Si la cota de la perturbación $[-C, C]$ es variante, con una cota superior conocida, es posible diseñar un controlador con ganancia variable.

Teorema 4. Suponga que en (7) $C = \bar{C} + \Theta(t, z)$, dónde la función $\Theta(t, z) \geq 0$ es conocida. Entonces, los controladores (13)-(14), con k_ρ reemplazada por la ganancia variable $(K(t, z) + k_\rho)$, estabiliza el origen $x = 0$ en tiempo finito, si la ganancia k_ρ es suficientemente grande y $K_m K(t, z) \geq \Theta(t, z)$.

Escalamiento de las ganancias: Si el vector de ganancias $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\rho)$ es estabilizante, entonces para toda $L \geq 1$ el vector de ganancias escalado $\mathbf{k}_L = (L^{\frac{1}{\rho}} k_1, \dots, L^{\frac{1}{\rho+1-i}} k_i, \dots, L k_\rho)$ también es estabilizante. Para los controladores relevados polinomiales las ganancias $\bar{k}_i = \prod_{j=i}^{\rho-1} k_j^{\frac{\rho+\alpha}{\rho-j}}$, para $i = 1, \dots, \rho - 1$, se escalan como $\bar{k}_i \rightarrow L^{\frac{(\rho-i)\alpha}{\rho-i+1}} \bar{k}_i$. Adicionalmente, la velocidad de convergencia es acelerada para $L > 1$, o el tamaño de la perturbación permitida C se incrementa a LC .

Las ganancias k_i pueden ser calculadas en forma recursiva como $k_1 > 0$

$$k_{i+1} > G_{i+1}(k_1, \dots, k_i), \dots, k_\rho > \frac{1}{K_m} (G_\rho(k_1, \dots, k_{\rho-1}) + C),$$

dónde las funciones G_i se obtienen de la función de Lyapunov $V_c(x)$ y dependen de ρ , γ_i y α_i (Cruz-Zavala and Moreno, 2017). Las ganancias pueden también parametrizarse en función de k_1 como

$$k_1 > 0, \dots, k_i = \mu_i k_1^{\frac{\rho}{\rho-(i-1)}}, k_\rho > \frac{1}{K_m} (\mu_\rho k_1^\rho + C), \quad (20)$$

para algunas constantes positivas μ_i que dependen de ρ , γ_i y α_i . Algunos valores, calculados numéricamente para u_D en (16), con $\alpha = \rho$, son: $\rho = 2$, $\mu_2 = 1,62$; $\rho = 3$, $(\mu_2 = 1,5, \mu_3 = 3,25)$; $\rho = 4$, $(\mu_2 = 2, \mu_3 = 8,45, \mu_4 = 30)$. Nótese que esta parametrización puede ser usada para todos los controladores, excepto el valor de k_ρ , que es diferente para los controladores continuos y cuasi-continuos. Los valores también pueden ser usados con el controlador de ganancia variable.

Las ganancias obtenidas a partir de la función de Lyapunov pueden ser muy grandes para aplicaciones prácticas, así que puede requerirse un ajuste basado en simulaciones (ver (Cruz-Zavala and Moreno, 2016b)).

4. Diferenciador exacto y robusto

Considere una señal $f(t)$, definida en $[0, \infty)$, y que es medible en el sentido de Lebesgue. Suponga que puede ser descompuesta como $f(t) = f_0(t) + v(t)$, dónde $f_0(t)$ es la señal base que se quiere diferenciar y que pertenece a la clase \mathcal{S}_L^n de señales, que son $(n - 1)$ veces diferenciables y cuya derivada $(n - 1)$ tiene una constante de Lipschitz $L > 0$ conocida, es

decir, $\left|f_0^{(n)}(t)\right| \leq L$. El término $v(t)$ corresponde a una señal de ruido uniformemente acotada $|v(t)| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0$.

Para estimar las derivadas de la señal base utilizaremos el siguiente diferenciador homogéneo, exacto y robusto, propuesto por Levant (Levant, 1998, 2003, 2005a)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\lambda_i L^{\frac{i}{n}} [x_1 - f]^{\frac{n-i}{n}} + x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= -\lambda_n L [x_1 - f]^0. \end{aligned} \tag{21}$$

Debido a que (21) tiene lado derecho discontinuo, sus soluciones se entenderán en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). La prueba de la convergencia de (21) fue hecha mediante el uso de la contracción de inclusiones diferenciales homogéneas en (Levant, 2003, 2005a). En (Cruz-Zavala and Moreno, 2016b, 2019) se introdujo una función de Lyapunov suave para realizar la prueba. A continuación se presentará una variante de tal función de Lyapunov (ver (Moreno, 2018c)).

Definiendo el error de diferenciación como $e_i \triangleq x_i - f_0^{(i-1)}$ y haciendo el escalamiento

$$z_1 = \frac{e_1}{L}, \dots, z_i = \frac{e_i}{\lambda_{i-1} L}, \quad i = 1, \dots, n,$$

la dinámica del error es

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -\tilde{\lambda}_i \left([z_1 + \tilde{v}(t)]^{\frac{n-i}{n}} - z_{i+1} \right), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n &\in -\tilde{\lambda}_n \left([z_1 + \tilde{v}(t)]^0 + \frac{1}{\lambda_n} [-1, 1] \right), \end{aligned} \tag{22}$$

dónde $\tilde{v}(t) = \frac{v(t)}{L} \in [-1, 1] \frac{\varepsilon}{L}$ y

$$\lambda_0 = 1, \tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para $\varepsilon = 0$ el sistema (22) es una inclusión diferencial homogénea con grado $d = -1$ y pesos $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]$, dónde $r_i = n + 1 - i$ para $i = 1, \dots, n$. Para $n \geq 2$ fije p_i tales que $p_i > r_i + r_{i+1} = 2(n-i) + 1$ y $p = p_1 > r_1 + r_2 = 2n - 1 > 1$. Nótese que $p_i \geq p_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n$.

Una función de Lyapunov para (22) es $V(z) = V_1(z)$, definida recursivamente (hacia atrás) por

$$V_n(z_n) = \frac{\beta_n}{p_n} |z_n|^{p_n}, \dots, V_i(z_i) = \beta_i Z_i(z_i, z_{i+1}) + V_{i+1}^{\frac{p_i}{p_{i+1}}}(z_{i+1}), \tag{23}$$

dónde $z_i \triangleq (z_i, \dots, z_n)$, $\beta_i > 0, i = 1, \dots, n$, son arbitrarias y

$$Z_i(z_i, z_{i+1}) = \frac{r_i}{p_i} |z_i|^{\frac{p_i}{r_i}} - z_i [z_{i+1}]^{\frac{p_i - r_i}{n-i}} + \left(\frac{p_i - r_i}{p_i}\right) |z_{i+1}|^{\frac{p_i}{n-i}}. \tag{24}$$

$V(z)$ es \mathbf{r} -homogénea de grado p_1 , continuamente diferenciable y positiva definida.

El siguiente resultado se prueba en (Moreno, 2018c)

Teorema 5. *Bajo las hipótesis hechas sobre la señal $f(t)$, en ausencia de ruido ($v(t) \equiv 0$) y para unas ganancias $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$, seleccionadas apropiadamente, el origen $z = 0$ de la dinámica de error de diferenciación (22) es estable en tiempo finito. $V(z)$ en (23) es una función suave de Lyapunov para todo $p \geq 2n - 1$ y $\beta_i > 0$ y satisface la desigualdad diferencial*

$$\dot{V} \leq -\kappa V(z)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{25}$$

para alguna constante $\kappa > 0$. El tiempo de convergencia puede estimarse por

$$T(z_0) \leq \frac{p}{\kappa} V^{\frac{1}{p}}(z_0). \tag{26}$$

De $V(z)$ (23) se puede estimar el tiempo de convergencia y derivar un método para calcular las ganancias λ_i que aseguran la convergencia del diferenciador. Esto constituye una gran ventaja comparado con los resultados clásicos (Levant, 2003, 2005a), que no permiten esto.

Proposición 6. *Dado $n > 2$ seleccione p_i tal que $p_i > r_i + r_{i+1} = 2(n-i) + 1$ y $p = p_1 > r_1 + r_2 = 2n - 1 > 1$:*

1) *La secuencia de ganancias $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ puede ser calculada hacia atrás como sigue: (a) Seleccione $\lambda_n > 1$, y $\tilde{\lambda}_n > 0$. (b) Para $i = n, n-1, \dots, 2$ elija $\tilde{\lambda}_{i-1}$ tal que*

$$\tilde{\lambda}_{i-1} > \omega_{i-1}(\tilde{\lambda}_i, \dots, \tilde{\lambda}_n),$$

dónde ω_{i-1} es una función obtenida de $V(z)$ (ver (Moreno, 2018c)) y que depende solo de $(\tilde{\lambda}_i, \dots, \tilde{\lambda}_n)$, p_i y $\beta_{i-1}, \dots, \beta_n$.

2) *Para cualquier $j = 1, \dots, n-1$ las ganancias $(\tilde{\lambda}_j, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ son apropiadas para el diferenciador de orden $n-j$.*

Usando las propiedades de los sistemas homogéneos obtenemos las figuras de precisión siguientes (Levant, 2005a; Levant and Livne, 2016):

Proposición 7. *Para una señal de ruido uniformemente acotada ($|v(t)| \leq \varepsilon$) y ganancias del diferenciador estabilizantes, el error de diferenciación $x_i(t) - f_0^{(i-1)}(t), i = 1, \dots, n$, satisface las siguientes desigualdades después de un tiempo finito*

$$\left| x_i(t) - f_0^{(i-1)}(t) \right| \leq \vartheta_i L^{\frac{i-1}{n}} |\varepsilon|^{\frac{n-i+1}{n}}. \tag{27}$$

ϑ_i depende de las ganancias λ_i y de $\vartheta_1 > 1$.

Es posible estimar las constantes ϑ_i en (27) usando la función de Lyapunov (Moreno, 2018c; Cruz-Zavala and Moreno, 2019). Como se discute en (Levant, 1998) los exponentes de ε y L en (27) son óptimos.

Nótese que el diferenciador (21) converge exactamente, a pesar de la entrada desconocida $f^{(n)}(t)$. Esto es posible debido a la discontinuidad en su último término de corrección, que induce un modo deslizante. Esto es imposible para un algoritmo continuo (ver (Levant, 1998, 1993; Vasiljevic and Khalil, 2008) para una discusión más detallada).

Control por modos deslizantes por retroalimentación de la salida. Usando las funciones de Lyapunov desarrolladas, es posible probar la convergencia global del sistema en lazo cerrado por retroalimentación de salida (Moreno, 2018c)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \\ \dot{x}_\rho &\in [-C, C] - k_\rho [K_m, K_M] \phi(\hat{x}), \\ \dot{\hat{x}}_i &= -k_i L^{\frac{i}{p}} [\hat{x}_1 - y]^{\frac{p-i}{p}} + \hat{x}_{i+1}, \\ \dot{\hat{x}}_\rho &= -k_\rho L [\hat{x}_1 - y]^0, \end{aligned} \tag{28}$$

con cualquier controlador $\phi(x)$ discontinuo (13) o cuasi-continuo (14).

Una consecuencia importante del uso del diferenciador en la implementación del controlador por modos deslizantes es que no se requiere conocer la transformación que lleva al sistema (1) a la forma (4)-(5). Solo se requiere conocer las constantes C, K_m, K_M .

5. Control por modos deslizantes con acción integral

Es bien sabido que una de las mayores desventajas del control por modos deslizantes es la aparición del efecto de *castañeo* (“chattering”). En las últimas décadas se han propuesto diversas estrategias de mitigación del castañeo. Recordemos brevemente algunas de ellas.

Reemplazo del control discontinuo por una saturación. Quizás la mas conocida consiste en cambiar la función **signo** por una función continua, usualmente la función **saturación** (Utkin et al., 2009; Khalil, 2002). Sin embargo, la precisión del CMD se ve afectada.

Extensión artificial del grado relativo. Una estrategia clásica (Levant, 1993, 2005a; Bartolini et al., 1998) consiste en considerar en el sistema (4) como variable de estado a la entrada, es decir, $\dot{u} = v$, con lo que se obtiene una nueva variable de control v , y el grado relativo de σ con respecto a v es $\rho + 1$. Si se diseña un controlador por modos deslizantes de orden $\rho + 1$, es decir, $v = \dot{u} = \tilde{\varphi}(\sigma, \dots, \sigma^{(\rho-1)}, \sigma^{(\rho)})$, la señal de control u resultante es continua, desapareciendo el suicheo de alta frecuencia en u . La mayor desventaja de esta estrategia es la necesidad de estimar $\sigma^{(\rho)}(t)$, que involucra la estimación de la derivada de las perturbaciones e incertidumbres. Esta estrategia puede extenderse para obtener una señal de control u con suavidad arbitraria, incrementando el grado relativo en un número arbitrario (Levant and Alelishvili, 2007; Dorel and Levant, 2008).

Controladores por MDOS con acción integral: una extensión del controlador super-twisting para grado relativo arbitrario. Cuando el grado relativo es $\rho = 1$, el controlador por super-twisting para la planta (7) está dado por (Levant, 1993; Fridman and Levant, 2002; Levant, 2007)

$$u = -k_1 \sqrt{|\sigma|} \text{sign}(\sigma) - k_2 \int_0^t \text{sign}(\sigma(\tau)) d\tau,$$

que produce una señal de control u continua. Debido a sus propiedades de robustez y a la facilidad de implementación, el control usando el super-twisting ha sido utilizado ampliamente en muchas aplicaciones (Levant, 2005a; Shtessel et al., 2014).

Para $\rho > 1$ una extensión natural del super-twisting para (7) consiste en el siguiente controlador con acción integral

$$u = \vartheta_1(x) + \int_0^t \vartheta_2(x) d\tau, \tag{29}$$

dónde $\vartheta_1(x)$ es una retroalimentación de estados continua y $\vartheta_2(x)$, la acción integral, es una función *discontinua* del estado x . Como se ha mostrado recientemente (ver en particular (Mercado-Urbe and Moreno, 2020b; Moreno et al., 2020)), haciendo uso de funciones de Lyapunov explícitas, es posible diseñar funciones homogéneas $\vartheta_1(x)$ y $\vartheta_2(x)$ tales que se obtiene seguimiento exacto en tiempo finito, es decir $x(t) = (\sigma(t), \dot{\sigma}(t), \dots, \sigma^{(\rho-1)}(t))^T \equiv 0, \forall t \geq T$. Este controlador extiende al caso de grado relativo arbitrario las propiedades del super-twisting clásico:

- (i) Puede compensar *exactamente* y en tiempo finito perturbaciones y/o incertidumbres acopladas que son funciones *Lipschitz*, es decir, cuya derivada sea acotada.
- (ii) Hace que las señales $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(\rho-1)} = \sigma^{(\rho)} \equiv 0$ se anulen simultáneamente después de un tiempo finito.

- (iii) Para su implementación sólo se requiere disponer del valor de $x(t) = (\sigma(t), \dots, \sigma^{(\rho-1)}(t))^T$. Estas señales pueden ser calculadas con el diferenciador robusto y exacto, presentado en la sección anterior.
- (iv) La señal de control u es continua.
- (v) La precisión es mejor que en el control por modos deslizantes de orden ρ .

Desarrollo de la idea. Para $\rho = 2$ se propuso en (Zamora et al., 2013; Kamal et al., 2014; Fridman et al., 2015; Kamal et al., 2016) un control integral discontinuo, con $\vartheta_2(x)$ dependiente del estado completo x . En (Kamal et al., 2014; Fridman et al., 2015) se extiende (sin una prueba rigurosa) para ρ arbitrario. La prueba se realiza en (Laghrouche et al., 2017), con una función de Lyapunov no suave, que es una extensión de la prueba presentada en (Moreno and Osorio, 2008) para el super-twisting.

Estas pruebas no son válidas para cuando se requiere que ϑ_2 dependa solo de parte de los estados, por ejemplo, solo de la salida x_1 , como en el caso del control PI clásico. Las pruebas para esta situación son desarrolladas para $\rho = 2$ en (Moreno, 2016, 2018a, 2020) y son extendidas para $\rho = 3, 4$ en (Mercado-Urbe and Moreno, 2018a,b). En (Torres-González et al., 2015, 2017; Sanchez and Moreno, 2019) se usa el método de construcción de funciones de Lyapunov basado en formas generalizadas, propuesto en (Sanchez and Moreno, 2019), para diseñar controladores con acción integral discontinua para $\rho = 2$, y en (Mendoza-Avila et al., 2017, 2020) para $\rho = 3$. El caso general es resuelto en (Mercado-Urbe and Moreno, 2020b; Moreno et al., 2020).

6. Diseño à la Lyapunov de controladores por modos deslizantes con acción integral

Por conveniencia, reescribimos el subsistema Σ (4) como

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, \rho - 1, \\ \dot{x}_\rho = b(t, z) [u + \delta(t, z)]. \end{cases} \tag{30}$$

Asumimos que el coeficiente $b(t, z)$ es acotado (como en (6)) y que la perturbación $\delta(t, z) = \frac{a(t, z(t))}{b(t, z(t))}$ puede ser descompuesta en dos términos $\delta(t, z) = \delta_1(t, z) + \delta_2(t, z)$, tales que

$$\begin{aligned} 0 < K_m \leq b(t, z) \leq K_M \\ |\delta_1(t, z)| \leq \Delta_1 \|x\|_{r,p}^{d+r\rho}, \quad |\delta_2(t, z)| \leq \Delta_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Σ_P (30) con (31) puede ser interpretada como una inclusión diferencial que sólo “recuerda” las constantes $\rho, \Delta_1, \Delta_2, K_m, K_M$.

Para $i = 1, \dots, \rho + 1$ defínanse los vectores $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$, y seleccionese el grado de homogeneidad $d \in [-1, 0]$. Esto determina la secuencia no creciente de pesos r_i , dados por $r_i = 1 - (\rho + 1 - i)d$, que satisfacen $r_i + d = r_{i+1}$, el vector de pesos $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{\rho+1}) = (1 - \rho d, 1 - (\rho - 1)d, \dots, 1)$ y $r_{\rho+2} = 1 + d \geq 0$.

Considere el controlador con acción integral dado por

$$\begin{aligned} u &= -k_\rho \chi(\bar{x}_\rho) + \zeta, \\ \dot{\zeta} &\in -K_I \psi(\bar{x}_\rho). \end{aligned} \tag{32}$$

La ley de retroalimentación de estados $\chi(\bar{x}_\rho)$ es una función continua, \mathbf{r} -homogénea de grado $r_{\rho+1} = 1$. La acción integral

$\psi(\bar{x}_\rho)$ es una función posiblemente discontinua, \mathbf{r} -homogénea de grado $r_{\rho+2} = 1 + d \geq 0$, y tal que $x_1 \psi(x_1, 0, \dots, 0) > 0$ para $x_1 \neq 0$. Formas posibles de estas funciones son

$$\chi(\bar{x}_\rho) = \left[|x_\rho|^{\frac{r_1}{r_\rho}} + \sum_{j=1}^{\rho-1} \kappa_j |x_j|^{\frac{r_1}{r_j}} \right]^{\frac{r_{\rho+1}}{r_1}}, \quad (33)$$

$$\psi(\bar{x}_\rho) = \frac{\left[\sum_{j=2}^{\rho} k_{I,j} |x_j|^{\frac{r_1}{r_j}} + x_1 \right]^{\frac{\alpha+r_{\rho+2}}{r_1}}}{\left(\sum_{j=2}^{\rho} \beta_j |k_{I,j}| |x_j|^{\frac{r_1}{r_j}} + |x_1| \right)^{\frac{\alpha}{r_1}}}. \quad (34)$$

Las constantes $\alpha \geq 0$, $\beta_j > 0$ y las ganancias “integrales” $k_{I,j} \in \mathbb{R}$ se pueden asignar libremente, mientras que las ganancias $\kappa_j > 0$, k_ρ , K_I deben ser elegidas adecuadamente para asegurar la estabilidad (y el desempeño) del sistema en lazo cerrado. Si $\alpha = 0$ la función ψ es de tipo “polinomial”, mientras que para $\alpha > 0$ tiene forma “racional”. Nótese que para (34) $x_1 \psi(x_1, \mathbf{0}) = x_1 |x_1|^{\frac{2+(1-\rho)d}{1-\rho d}} > 0$. Si $k_{I,j} = 0$ para toda j , la función ψ depende sólo de x_1 . Defínase como variable de estado integral $x_{\rho+1} = \zeta + \delta_2(t, z)$. El sistema en lazo cerrado (30)-(32) puede ser embebido en una inclusión diferencial homogénea.

Consideraremos dos casos: (i) $d = -1$, de tal forma que ψ es discontinua y se obtiene el control por modos deslizantes de orden superior con acción integral (CMDOSI); y (ii) $d \in (-1, 0]$, dónde la función $\psi(\bar{x}_\rho)$ es continua y se obtiene una *aproximación* continua del CMDOSI. Si $d = 0$ (y $\alpha = 0$) el controlador integral (32) se reduce a un controlador integral lineal.

6.1. Control por modos deslizantes de orden superior con acción integral (CMDOSI)

El resultado principal es (ver la prueba en (Mercado-Uribe and Moreno, 2020b))

Teorema 8. *Seleccione $d = -1$. Para cualesquiera valores $K_m, K_M, \Delta_1, \Delta_2$ en (31) y para valores arbitrarios de $\alpha \geq 0, \beta_j > 0$ y $k_{I,j} \in \mathbb{R}$, existen ganancias positivas $k_\rho, K_I > \Delta_2, \kappa_j$ tales que el origen $\bar{x}_{\rho+1} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado formado por la planta (30) y el control integral (32) es un punto de equilibrio robusta y globalmente estable en tiempo finito. Adicionalmente, después de un tiempo finito $T > 0$ el estado integral ζ converge a la perturbación $\delta_2(t, z)$, es decir, $\zeta(t) = -\delta_2(t, z)$ para todo $t \geq T$.*

Nótese que la señal de control $u(t)$ of (32) es absolutamente continua, en contraste con el control por modos deslizantes de orden superior (Levant, 2005a).

El controlador (32) puede compensar exactamente una amplia clase de incertidumbres y/o perturbaciones descrita por (31). Si se supone, por simplicidad, que a y b en (7) son solo funciones del tiempo, y que $\Delta_1 = 0$, la desigualdad $|\dot{\delta}_2| \leq \Delta_2$ equivale a $\delta_2(t) = a(t)/b(t) = W + \int_0^t \mu(s)ds$, con W una constante arbitraria y μ una función integrable y acotada arbitraria con $|\mu(t)| \leq \Delta_2$. De esto se deduce que a puede ser una perturbación creciente en el tiempo. Esta clase de perturbaciones es mucho más grande que la clase de perturbaciones constantes ($\mu \equiv 0$),

que son las que puede compensar exactamente un controlador con acción integral *continua*.

La implementación del controlador (32) requiere conocer σ y sus derivadas hasta $\sigma^{(\rho-1)}$, es decir, todos los estados \bar{x}_ρ . Si sólo se mide $x_1 = \sigma$, se puede estimar el estado x exactamente y en tiempo finito con el diferenciador presentado anteriormente, pero con ganancias variables (Levant and Livne, 2018; Moreno, 2018b). Las ganancias variables son necesarias ya que \dot{x}_ρ no es acotado por una constante.

Ya que la dinámica en lazo cerrado (30), (32) es una inclusión diferencial homogénea y estable en tiempo finito, los efectos de ruidos y otras perturbaciones y las figuras de precisión pueden ser estudiadas mediante los resultados conocidos para estos sistemas (Fridman and Levant, 2002; Levant, 2003, 2005a; Levant and Livne, 2016; Bernuau et al., 2014). Por ejemplo, de (Levant, 2005a; Levant and Livne, 2016; Bernuau et al., 2014) se concluye que el sistema en lazo cerrado es Entrada-a-Estados estable (EEE) con respecto a los ruidos de medición. Además, si la medición de x_i se realiza con un intervalo de muestreo $\tau \geq 0$ o un ruido de magnitud $v_i \tau^{2+\rho-i}$, $v_i > 0$, entonces las desigualdades $|x_i| \leq \gamma_i \tau^{2+\rho-i}$ se establecen en tiempo finito, con algunas constantes γ_i independientes de τ y de las condiciones iniciales. El orden $2 + \rho - i$ es mayor por 1 que el orden del controlador clásico por modos deslizantes de orden ρ , lo que significa que la precisión es mayor (para valores pequeños de τ). El castaño causado por la dinámica del actuador y/o sensor puede ser estudiada por métodos en el dominio de la frecuencia (Boiko, 2009; Pérez-Ventura and Fridman, 2019a). Estos métodos también pueden ser aplicados para el análisis del efecto del ruido en el diferenciador.

6.2. Aproximación continua y homogénea del CMDOSI

Aunque el controlador integral discontinuo del Teorema 8 puede compensar exactamente perturbaciones Lipschitz $\delta_2(t, z)$ usando una señal de control continua $u(t)$, la discontinuidad en la función ψ hace que la señal de control tenga una derivada temporal discontinua. Con el fin de suavizar aún más $u(t)$, es usual reemplazar la función discontinua ψ por una continua, por ejemplo, por una función de saturación lineal (Utkin et al., 2009; Khalil, 2002). Una propuesta alternativa (que también puede ser realizada en el controlador por modos deslizantes de orden superior presentado en la Sección 3) consiste en utilizar una función ψ continua y homogénea, como aquella obtenida de (34), de grado $r_{\rho+2} = 1 + d > 0$, con $d > -1$. El siguiente resultado (véase la prueba en Mercado-Uribe and Moreno (2020b)) muestra que tal controlador es capaz de compensar exactamente sólo perturbaciones constantes $\delta_2(t, z)$, es decir, $\Delta_2 = 0$, pero que cuando $\Delta_2 > 0$ las trayectorias son *global y finalmente acotadas* (véase por ejemplo (Khalil, 2002, Chapter 4.8) para la definición), de tal forma que se obtiene estabilidad “práctica”. Adicionalmente, la cota final decrece a medida que $r_{\rho+2}$ se acerca a cero.

Teorema 9. *Seleccione $-1 < d < 0$ (resp. $d = 0$). Para cualesquiera valores K_m, K_M, Δ_1 , con $\Delta_2 = 0$, en (31) y para valores arbitrarios de $\alpha \geq 0, \beta_j > 0$ y $k_{I,j} \in \mathbb{R}$, existen ganancias positivas $k_\rho, K_I > \Delta_2, \kappa_j$ tales que el origen $\bar{x}_{\rho+1} = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado formado por la planta (30) y el control integral (32) es un punto de equilibrio robusta y globalmente*

estable en tiempo finito (resp. exponencialmente). Adicionalmente, si $\Delta_2 > 0$ las trayectorias $\bar{x}_\rho(t)$ de la planta son global y finalmente acotadas, con cota final $\mathcal{B}(\Delta_2)$, con $\mathcal{B}(\cdot)$ una función clase \mathcal{K}_∞ . Esto significa que para cualquier condición inicial x_0 existe un tiempo finito T tal que $\|\bar{x}_\rho(t)\| \leq \mathcal{B}(\Delta_2)$ y $|\zeta(t) + \delta_2(t, z)| \leq \mathcal{B}(\Delta_2)$ para todo $t \geq T$.

Escalamiento de ganancias: Para cualquier constante $L > 0$ el siguiente escalamiento de las ganancias (y cotas) preserva la estabilidad para cualquier $d \in [-1, 0]$

$$k_\rho \rightarrow L^{\frac{r_\rho - r_{\rho+1}}{r_\rho}} k_\rho, K_I \rightarrow L^{\frac{r_1 - r_{\rho+2}}{r_1}} K_I, \Delta_1 \rightarrow L\Delta_1, \\ \Delta_2 \rightarrow L\Delta_2, \kappa_j \rightarrow L^{\left(\frac{r_1}{r_\rho} - \frac{r_1}{r_j}\right)} \kappa_j, j = 1, \dots, \rho - 1, \\ k_{I,\iota} \rightarrow L^{1 - \frac{r_1}{r_j}} k_{I,\iota}, \beta_\iota \rightarrow L^{1 - \frac{r_1}{r_j}} \beta_\iota, \iota = 2, \dots, \rho. \quad (35)$$

Estimación del tiempo de convergencia: En (Mercado-Uribe and Moreno, 2020b) se prueba que función de Lyapunov $V(\bar{x}_{\rho+1})$, que es homogénea y de grado m , satisface la desigualdad $\dot{V}(\bar{x}_{\rho+1}) \leq -\kappa V^{\frac{m+d}{m}}(\bar{x}_{\rho+1})$. De esta desigualdad se deduce fácilmente la convergencia en tiempo finito (si $d < 0$). Además, se puede estimar el tiempo mediante la expresión

$$T(\bar{x}_{\rho+1,0}) \leq \frac{m}{-\kappa d} V^{\frac{d}{m}}(\bar{x}_{\rho+1,0}).$$

7. Ejemplo de aplicación

Para ilustrar los resultados considérese el sistema de levitación magnética (Khalil, 2002) descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{aL_0}{2m} \frac{x_3^2}{(a+x_1)^2} + g \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L(x_1)} \left(-Rx_3 + aL_0 \frac{x_2x_3}{(a+x_1)^2} + u \right) \quad (36)$$

dónde $x_1 = y \in \mathbb{R}_+$ es la distancia vertical (hacia abajo) de la bola, medida desde la bobina (cuando la bola está pegada a la bobina $x_1 = 0$), $x_2 = \dot{y}$ es la velocidad, m es la masa de la bola, g es la aceleración de la gravedad, k es el coeficiente de fricción viscosa, $L(x_1) = L_1 + \frac{aL_0}{a+x_1}$ es la inductancia del electroimán, que depende de la posición de la bola, $x_3 = i \in \mathbb{R}_+$ es la corriente eléctrica, R es la resistencia eléctrica en el circuito y el control u es el voltaje aplicado. Todos los parámetros k, m, a, L_0, L_1, g, R son constantes positivas. Asumimos que la única señal medida es la posición x_1 .

El objetivo de control es que la posición de la bola x_1 siga una señal deseada $r(t)$, es decir, lograr que $\sigma(t) = x_1(t) - r(t) \equiv 0$ robustamente y en tiempo finito. σ tiene grado relativo $\rho = 3$ con respecto al control u , de tal forma que la dinámica reducida (o dinámica cero) es trivial, y el sistema se puede llevar a la forma normal (7) usando como variables de estado a $(z_1, z_2, z_3) = (\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma})$. No se presentan los detalles de tal transformación aquí, pero el lector interesado puede consultar los detalles en (Mercado-Uribe and Moreno, 2020a, 2018b). Para el sistema, la forma (7) no es válida globalmente, por lo que los resultados presentados son solo aplicables regionalmente.

7.1. Control por modos deslizantes de orden superior: simulaciones

Como controlador por modos deslizantes de orden superior se utiliza un control discontinuo relevado polinomial de orden $\rho = 3$ (16), con $\alpha = 3$, dado por

$$u = u_{rk}(t) + k_3L \left[[\hat{z}_3]^3 + k_2L^{\frac{3}{2}} [\hat{z}_2]^{\frac{3}{2}} + k_1L^2 \hat{z}_1 \right]^0.$$

El observador está descrito por

$$\dot{\hat{z}}_1 = -\lambda_1 l^{\frac{1}{3}} [\hat{z}_1 - z_1]^{\frac{2}{3}} + \hat{z}_2 \\ \dot{\hat{z}}_2 = -\lambda_2 l^{\frac{2}{3}} [\hat{z}_1 - z_1]^{\frac{1}{3}} + \hat{z}_3 \\ \dot{\hat{z}}_3 = -\lambda_3 l [\hat{z}_1 - z_1]^0 + a(t, \hat{z}) + b(t, \hat{z})u.$$

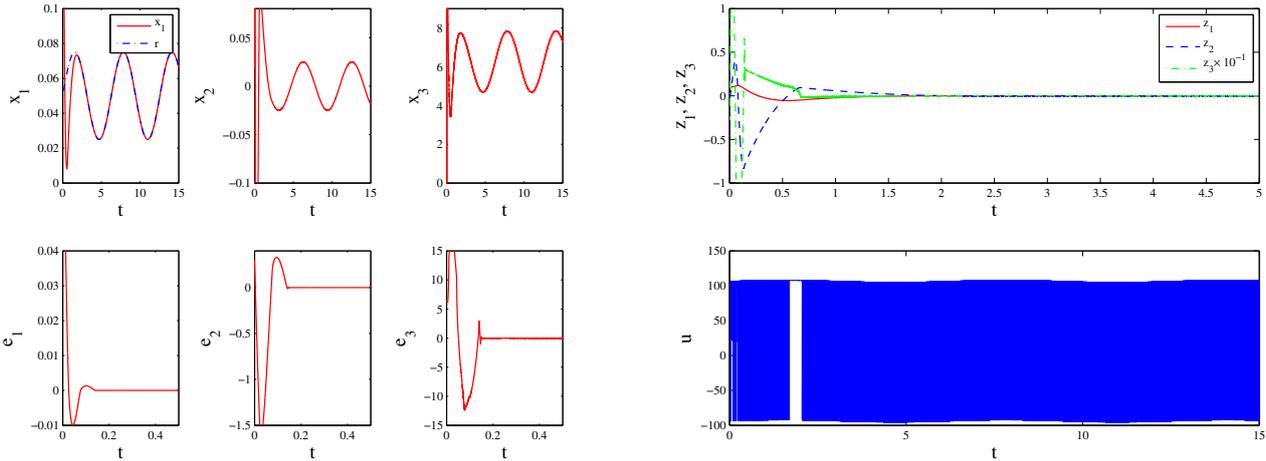
Para las simulaciones se utilizan los siguientes parámetros de la planta: $L_1 = 0,02$ [H]; $L_0 = 0,01$ [H], $a = 0,05$ [m], $k = 0,001$ [N/m/s], $m = 0,1$ [Kg], $g = 9,81$ [m/s²], $R = 1$ [Ω]. La señal de referencia es $r(t) = 0,05 + 0,025 \sin(t)$. Las ganancias del controlador seleccionadas son $k_1 = 1,5, k_2 = 5, k_3 = 25, L = 4$, y las del diferenciador $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1,5\sqrt{3}, \lambda_3 = 1,1$, y $l = 700$. Las condiciones iniciales de la planta son $z_0 = [0,1, 0, 0,3]$ y las del observador $\hat{z}_0 = [0,2, 0,3, 0]$. Consideramos que los parámetros k, m, R son inciertos, por lo que en la simulación sus valores para el observador se toman un 10% mayores a sus valores nominales. Las simulaciones fueron realizadas con un algoritmo Euler de paso fijo, con un paso de 10^{-5} .

La gráfica superior de la Figura 1a muestra la evolución de los tres estados de la planta y de la señal de referencia. $r(t) = 0,05 + 0,025 \sin(t)$. Se observa que la posición de la bola x_1 sigue perfectamente la referencia, después de aproximadamente 1 segundo, a pesar de las incertidumbres en el modelo. La gráfica inferior presenta la evolución de los errores de estimación del diferenciador, para los estados originales de la planta $x(t)$. El observador converge exactamente después de unos 0,2 segundos. Esto es crítico para este sistema, ya que si el controlador no actúa adecuadamente la bola puede salirse de la zona físicamente plausible. La gráfica superior de la Figura 1b muestra el comportamiento en el tiempo de la variable de deslizamiento y sus derivadas $z(t)$. La variedad de deslizamiento $z \equiv 0$ es alcanzada en menos de dos (2) segundos. La gráfica inferior de la Figura 1b muestra la variable de control u , que presenta el castaño característico del control por modos deslizantes.

7.2. Control Integral: validación experimental

Ilustramos el comportamiento del control por modos deslizantes de orden superior con acción integral (32) mediante una validación experimental, llevada a cabo en el sistema de suspensión magnética (Model 730) de la compañía Educational Control Products (ECP). En el modelo matemático (36) la bola es reemplazada por un disco magnético en el sistema experimental. Los valores nominales de los parámetros, dados por el fabricante, son: $L_0 = 0,245$ [H], $L_1 = 0,1$ [H], $R = 1,75$ [Ω], $m = 0,12$ [kg], $g = 9,81$ [$\frac{m}{s^2}$], $a = 8,8$ [mm], $k = 0,1$ [$\frac{Ns}{m}$].

El objetivo de control es el mismo: x_1 debe seguir una señal de referencia no armónica $r(t)$, que es constante ($0,025$ [m]) cuando $0 \leq t \leq 30$ y después ($t \geq 30$) su cuarta derivada temporal d^4r/dt^4 es una señal cuadrada (véase abajo a la derecha de la Figura 2a), que es discontinua pero acotada por $\Delta_2 = 0,02/\pi$.



(a) Gráfica superior: Estados de la planta (x_1, x_2, x_3). Gráfica inferior: Comportamiento de los errores de estimación $e = \hat{x} - x$. (b) Gráfica superior: Variables de deslizamiento z . Gráfica inferior: Comportamiento de la señal de control u .

Figura 1: Resultados de simulación para el ejemplo

Ya que el grado relativo $\rho = 3$ coincide con el orden del sistema, se puede llevar a la forma (7). En estas coordenadas el controlador consiste en un término que compensa los términos no lineales nominales y en la acción integral (32). Las ganancias en $\chi(x)$ (33) son $\kappa_1 = 3, \kappa_2 = 7, \kappa_3 = 21$, y $\psi(x)$ en (34) tiene los parámetros $\alpha = 0, k_I = 2, k_{I2} = k_{I3} = 0$. Nótese que $\psi(x) = \psi(x_1)$ depende solo de la salida x_1 .

Los experimentos fueron realizados para el control integral discontinuo ($d = -1$) y dos aproximaciones con grados de homogeneidad $d = -\frac{1}{2}$, y $d = 0$, siendo este último un controlador lineal. Las ganancias del controlador son escaladas como en (35). Inicialmente consideramos una ganancia de escalamiento $L = 2$ para todos los controladores. Sin embargo, el controlador lineal fue incapaz de seguir la señal y fue necesario hacer $L = 100$ para el, con el fin de obtener un seguimiento razonable.

La Figura 2a muestra la referencia y la evolución en el tiempo de la posición del disco x_1 para los tres controladores, mientras que la Figura 2b presenta los errores de seguimiento de la salida. El controlador lineal tiene un error de regulación aceptable cuando la referencia es constante, pero su desempeño es muy bajo en el seguimiento de la referencia variante en el tiempo. El controlador con acción integral homogénea y continua,

con $d = -1/2$, tiene un mejor desempeño que el controlador lineal, pero no puede hacer un seguimiento adecuado para la referencia variante en el tiempo. El controlador con acción integral discontinua $d = -1$ muestra, por el contrario, un error de seguimiento muy pequeño tanto para la referencia constante como para la variante en el tiempo, a pesar de las incertidumbres en el modelo y sus parámetros y al ruido de medición del sensor de posición. La señal de control correspondiente $u(t)$ se presenta en la Figura 2c para todos los controladores. En contraste con el caso anterior, u es continua para todos ellos, aunque puede presentar componentes de alta frecuencia para el controlador discontinuo, causadas posiblemente por la compensación de fuerzas de fricción desconocidas. Nótese también que para el seguimiento de la señal de referencia variante el controlador discontinuo tiene la señal de control de magnitud más pequeña.

8. Conclusiones

En este artículo se han presentado algunos de los resultados obtenidos recientemente en nuestro grupo de investigación en la UNAM, concernientes a los métodos de diseño basados en funciones de Lyapunov para controladores y diferenciadores

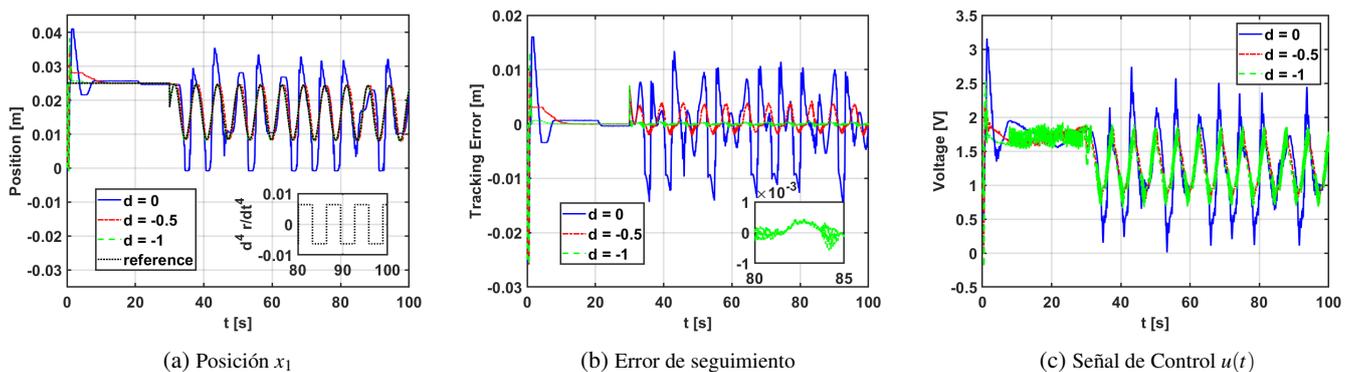


Figura 2: Resultados experimentales para el ejemplo

por modos deslizantes de orden superior, incluyendo también controladores que usan una acción integral. Se ha mostrado que el uso de la homogeneidad y de funciones de Lyapunov homogéneas permite un diseño sistemático de los algoritmos por modos deslizantes, incluyendo el cálculo de ganancias estabilizantes, y la estimación de los tiempos de convergencia y constantes de precisión. Esta línea de trabajo puede extenderse en muchas direcciones. Algunos temas importantes a desarrollar son el control de sistemas multivariables inciertos, estimación de parámetros y el control adaptable por modos deslizantes.

Apoyo financiero

Los autores agradecen el apoyo financiero de PAPIIT-UNAM, proyecto IN102121.

Referencias

- Andrieu, V., Praly, L., Astolfi, A., 2008. Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM J. Control Optim.* 47 (4), 1814–1850.
- Bacciotti, A., Rosier, L., 2005. *Liapunov functions and stability in control theory*, 2nd Edition. Springer-Verlag, New York.
- Bartolini, G., Ferrara, A., Usai, E., 1998. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43 (2), 241–246.
- Bartolini, G., Pisano, A., Usai, E., 2000. First and second derivative estimation by sliding mode technique. *Journal of Signal Processing* 4 (2), 167–176.
- Bejarano, F., Fridman, L., 2010. High order sliding mode observer for linear systems with unbounded unknown inputs. *International Journal of Control* 83 (9), 1920–1929.
- Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., Polyakov, A., Jul. 2013a. On an extension of homogeneity notion for differential inclusions. In: *European Control Conference*. Zurich, Switzerland, pp. 2204–2209.
- Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., Polyakov, A., 2014. On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute* 351 (4), 1816–1901.
- Bernuau, E., Efimov, D., Perruquetti, W., Polyakov, A., 2016. Homogeneity of differential inclusions. In: Fridman, L., Barbot, J.-P., Plestan, F. (Eds.), *Recent Trends in Sliding Mode Control*. Control, Robotics & Sensors. Institution of Engineering and Technology (IET), London, Ch. 2.1, pp. 103–118.
- Bernuau, E., Polyakov, A., Efimov, D., Perruquetti, W., 2013b. Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity. *Systems & Control Letters* 62 (12), 1159–1167.
- Bhat, S., Bernstein, D., 2005. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 17 (2), 101–127.
- Boiko, I., 2009. *Discontinuous control systems: frequency-domain analysis and design*. Birkhäuser, Boston.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., 2014a. Improved convergence rate of discontinuous finite-time controllers. In: *19th IFAC World Congress (IFAC 2014)*. Vol. 19. Cape Town, South Africa, pp. 8636–8641.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., July 2014b. A new class of fast finite-time discontinuous controllers. In: *13th IEEE Workshop on Variable Structure Systems (VSS14)*. Nantes, France, pp. 1–6.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., 2017. Homogeneous high order sliding mode design: A Lyapunov approach. *Automatica* 80, 232–238.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., Fridman, L., 2010. Uniform robust exact differentiator. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 102–107.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., Fridman, L., 2011a. Adaptive gains super-twisting algorithm for systems with growing perturbations. In: *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. Vol. 18, pp. 3039–3044.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., Fridman, L., 2011b. Second-order uniform exact sliding mode control with uniform sliding surface. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 4616–4621.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., Fridman, L., 2012. Uniform sliding mode controllers and uniform sliding surfaces. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 29 (4), 491–505.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J., Fridman, L., 2013. Fast second-order sliding mode control design based on Lyapunov function. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 2858–2863.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J. A., 2016a. Lyapunov approach to Higher-Order Sliding Mode design. In: Fridman, L., Barbot, J.-P., Plestan, F. (Eds.), *Recent Trends in Sliding Mode Control*. The Institution of Engineering and Technology (IET), London, Ch. 1.1, pp. 3–28.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J. A., 2016b. Lyapunov functions for continuous and discontinuous differentiators. *IFAC-PapersOnLine* 49 (18), 660–665, 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS 2016.
- Cruz-Zavala, E., Moreno, J. A., Jul. 2019. Levant's arbitrary order exact differentiator: a Lyapunov approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 64 (7), 3034–3039.
- Dávila, A., Moreno, J., Fridman, L., 2010. Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. ACC 2010. pp. 968–973.
- Dávila, A., Moreno, J. A., Fridman, L., 2009. Optimal Lyapunov function selection for reaching time estimation of super twisting algorithm. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. pp. 8405–8410.
- Davila, J., Fridman, L., Levant, A., 2005. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (11), 1785–1789.
- Deimling, K., 1992. *Multivalued Differential Equations*. Walter de Gruyter. Berlin.
- Ding, S., Levant, A., Li, S., Dec. 2015. New families of high-order sliding-mode controllers. In: *54th IEEE Conference on Decision and Control*. Osaka, Japan, pp. 4752–4757.
- Ding, S., Levant, A., Li, S., 2016. Simple homogeneous sliding-mode controller. *Automatica* 67 (5), 22–32.
- Dorel, L., Levant, A., Dec 2008. On chattering-free sliding-mode control. In: *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 2196–2201.
- Efimov, D., Fridman, L., 2011. A hybrid robust non-homogeneous finite-time differentiator. *IEEE Trans. on Aut. Control* 56, 1213–1219.
- Filippov, A., 1988. *Differential equations with discontinuous righthand side*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands.
- Floquet, T., Barbot, J. P., 2007. Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science* 38 (10), 803–815.
- Freeman, R., Kokotovic, P., 1996. *Robust Nonlinear control Design: State space and Lyapunov Techniques*. Modern Birkhäuser Classics, Boston.
- Fridman, L., Levant, A., 2002. *Higher-Order Sliding Modes*. In: Perruquetti, W., Barbot, J. (Eds.), *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc., New York, Ch. 3, pp. 53–102.
- Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., Chalanga, A., 2015. Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. In: Yu, X., Önder Efe, M. (Eds.), *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*. Vol. 24. Springer International Publishing, Cham, pp. 5–35.
- Hahn, W., 1967. *Stability of Motion*. Springer Berlin Heidelberg.
- Hermes, H., 1991. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. In: Elaydi, S. (Ed.), *Differential Equations, Stability and Control*. Vol. 127 of *Lecture Notes in Pure and Applied Math*. Marcel Dekker, Inc., NY, pp. 249–260.
- Hestenes, M. R., 1966. *Calculus of variations and optimal control theory*. John Wiley & Sons, New York.
- Isidori, A., 1995. *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, Berlin.
- Isidori, A., 1999. *Nonlinear control systems II*. Springer Verlag, London.
- Kamal, S., Chalanga, A., Moreno, J. A., Fridman, L., Bandyopadhyay, B., June 2014. Higher order super-twisting algorithm. In: *2014 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. pp. 1–5.
- Kamal, S., Moreno, J., Chalanga, A., Bandyopadhyay, B., Fridman, L., 2016. Continuous terminal sliding-mode controller. *Automatica* 69, 308–314.
- Khalil, H., 2002. *Nonlinear Systems*, 3rd Edition. Prentice-Hall, New Jersey.
- Kobayashi, S., Suzuki, S., Furuta, K., 2007. Frequency characteristics of Levant's differentiator and adaptive sliding mode differentiator. *International Journal of Systems Science* 38 (10), 825–832.
- Kochalummootil, J., Shtessel, Y., Moreno, J., Fridman, L., 2011. Adaptive twist sliding mode control: A Lyapunov design. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 7623–7628.
- Laghrouche, S., Harmouche, M., Chitour, Y., July 2017. Higher order super-twisting for perturbed chains of integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 62 (7), 3588–3593.
- Levant, A., 1993. Sliding order and sliding accuracy in Sliding Mode Control. *International Journal of Control* 58 (6), 1247–1263.
- Levant, A., 1998. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* 34 (3), 379–384.

- Levant, A., 2001. Universal single-input single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time. *IEEE Trans. Autom. Control* 46 (9), 1447–1451.
- Levant, A., 2003. High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *Int. J. Control* 76 (9), 924–941.
- Levant, A., 2005a. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica* 41, 823–830.
- Levant, A., 2005b. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Trans. Autom. Control* 50 (11), 1812–1816.
- Levant, A., April 2007. Principles of 2–Sliding Mode design. *Automatica* 43 (4), 576–586.
- Levant, A., Alelishvili, L., July 2007. Integral High-Order Sliding Modes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (7), 1278–1282.
- Levant, A., Livne, M., 2016. Weighted homogeneity and robustness of sliding mode control. *Automatica* 72, 186 – 193.
- Levant, A., Livne, M., 2018. Globally convergent differentiators with variable gains. *Int. J. of Control* 91 (9), 1994–2008.
- Levant, A., Michael, A., 2009. Adjustment of high-order sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 19 (15), 1657–1672.
- Mendoza-Avila, J., Moreno, J. A., Fridman, L. An idea for Lyapunov function design for arbitrary order continuous twisting algorithms. In: 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC). Dec 2017. pp. 5426–5431.
- Mendoza-Avila, J., Moreno, J. A., Fridman, L. M., 2020. Continuous twisting algorithm for third-order systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 65 (7), 2814–2825.
- Mercado-Uribe, A., Moreno, J., 2018a. Full and partial state discontinuous integral control. *IFAC-PapersOnLine* 51 (13), 573–578, 2nd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2018.
- Mercado-Uribe, A., Moreno, J., July 2018b. Output feedback discontinuous integral controller for SISO nonlinear systems. In: 2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). Vol. 2018-July. pp. 114–119.
- Mercado-Uribe, A., Moreno, J. A., 2020a. Homogeneous integral controllers for a magnetic suspension system. *Control Engineering Practice* 97, 104325.
- Mercado-Uribe, J. A., Moreno, J. A., 2020b. Discontinuous integral action for arbitrary relative degree in sliding-mode control. *Automatica* 118, 109018.
- Moreno, J. A., 2009. A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. In: 2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE 2009. pp. 12–17.
- Moreno, J. A., 2010. Lyapunov analysis of non homogeneous Super-Twisting algorithms. In: Proceedings of the 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems, VSS 2010. pp. 534–539.
- Moreno, J. A., 2011. Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In: Fridman, L., Moreno, J., Iriarte, R. (Eds.), *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*. LNCIS, 412. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, pp. 113–150.
- Moreno, J. A., 2013. On discontinuous observers for second order systems: Properties, analysis and design. In: Bandyopadhyay, B., Janardhanan, S., Spurgeon, S. K. (Eds.), *Advances in Sliding Mode Control - Concepts, Theory and Implementation*. LNCIS, 440. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, pp. 243–265.
- Moreno, J. A., June 2016. Discontinuous integral control for mechanical systems. In: 2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2016. pp. 142–147.
- Moreno, J. A., 2018a. Discontinuous integral control for systems with relative degree two. In: Clempner, J., (Eds.), W. Y. (Eds.), *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory: In Honor of A. S. Poznyak*. Springer International Publishing, pp. 187–218.
- Moreno, J. A., 2018b. Exact differentiator with varying gains. *International Journal of Control* 91 (9), 1983–1993.
- Moreno, J. A., 2018c. Lyapunov-based design of homogeneous high-order sliding modes. In: Li, S., Yu, X., Fridman, L., Man, Z., Wang, X. (Eds.), *Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Control—Theory and Applications*. Vol. 115. Springer International Publishing, Cham, pp. 3–38.
- Moreno, J. A., 2020. Asymptotic tracking and disturbance rejection of time-varying signals with a discontinuous PID controller. *Journal of Process Control* 87, 79–90.
- Moreno, J. A., Cruz-Zavala, E., Mercado-Uribe, Á., 2020. Discontinuous Integral Control for Systems with Arbitrary Relative Degree. Springer International Publishing, Cham, pp. 29–69.
- Moreno, J. A., Osorio, M., Dec. 2008. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In: 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancún, Mexico, pp. 2856–2861.
- Moreno, J. A., Osorio, M., 2012. Strict Lyapunov functions for the Super-Twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control* 57 (4), 1035–1040.
- Moulay, E., Perruquetti, W., 2006. Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 323 (2), 1430 – 1443.
- Nakamura, H., Yamashita, Y., Nishitani, H., 2002. Smooth Lyapunov functions for Homogeneous Differential Inclusions. In: Proc. 41st SICE Annual Conference. Vol. 3. pp. 1974–1979.
- Nakamura, N., Nakamura, H., Yamashita, Y., Nishitani, H., 2009. Homogeneous stabilization for input affine homogeneous systems. *IEEE Trans. Autom. Control* 54 (9), 2271–2275.
- Orlov, Y., Dec 2003. Finite time stability of homogeneous switched systems. In: Proceedings 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Vol. 4. pp. 4271–4276.
- Orlov, Y. V., 2009. Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Pérez-Ventura, U., Fridman, L., 2019a. Design of super-twisting control gains: A describing function based methodology. *Automatica* 99, 175 – 180.
- Pérez-Ventura, U., Fridman, L., 2019b. When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? frequency domain criteria. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 29 (3), 810–828.
- Polyakov, A., Efimov, D., Perruquetti, W., 2015. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function method. *Automatica* 51 (1), 332–340.
- Polyakov, A., Efimov, D., Perruquetti, W., 2016. Robust stabilization of MIMO systems in finite/fixed time. *Int. J. Robust Nonlinear Control* 26 (1), 69–90.
- Polyakov, A., Poznyak, A., 2009a. Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “twisting” controller for second-order sliding mode realization. *Automatica* 45 (2), 444–448.
- Polyakov, A., Poznyak, A., 2009b. Reaching time estimation for “super-twisting” second-order sliding mode controller via Lyapunov function designing. *IEEE Trans. Autom. Control* 54 (8), 1951–1955.
- Polyakov, A., Poznyak, A., 2012. Unified Lyapunov function for a finite-time stability analysis of relay second-order sliding mode control systems. *IMA J. Math. Control & Information* 29 (4), 529–550.
- Rosier, L., 1992. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters* 19, 467–473.
- Sanchez, T., Moreno, J. Construction of Lyapunov functions for a class of higher order sliding modes algorithms. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. pp. 6454–6459.
- Sanchez, T., Moreno, J., 2013. On a sign controller for the triple integrator. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. pp. 3566–3571.
- Sanchez, T., Moreno, J., 2014. Lyapunov functions for Twisting and Terminal controllers. In: 13th IEEE Workshop on Variable Structure Systems (VSS14).
- Sanchez, T., Moreno, J. A., 2019. Design of Lyapunov functions for a class of homogeneous systems: Generalized forms approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 29 (3), 661–681.
- Santiesteban, R., Fridman, L., Moreno, J., 2010. Finite-time convergence analysis for “twisting” controller via a strict Lyapunov function. In: Proceedings of the 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems, VSS 2010. pp. 1–6.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., Levant, A., 2014. *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, Springer, New York.
- Shtessel, Y. B., Shkolnikov, I. A., 2003. Aeronautical and space vehicle control in dynamic sliding manifolds. *International Journal of Control* 76 (9/10), 1000–1017.
- Torres-González, V., Fridman, L., Moreno, J. Continuous twisting algorithm. In: 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). pp. 5397–5401.
- Torres-González, V., Sanchez, T., Fridman, L. M., Moreno, J. A., 2017. Design of continuous twisting algorithm. *Automatica* 80, 119 – 126.
- Utkin, V., Guldner, J., Shi, J., 2009. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, 2nd Edition. CRC Press, Taylor & Francis, London, UK.
- Vasiljevic, L. K., Khalil, H. K., 2008. Error bounds in differentiation of noisy signals by high-gain observers. *Systems and Control Letters* 57, 856–862.
- Zamora, C., Moreno, J. A., Kamal, S., Oct 2013. Control integral discontinuo para sistemas mecánicos. In: 2013 Congreso Nacional de Control Automático (CNCA AMCA). Asociación de México de Control Automático (AMCA), Ensenada, Baja California, Mexico, pp. 11–16.
- Zubov, V. I., 1964. *Methods of A. M. Lyapunov and their applications*. Groningen: P. Noordhoff Limited.