

## Sobre el control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento de sistemas mecánicos

Jesús Sandoval<sup>a,\*</sup>, Rafael Kelly<sup>b</sup>, Víctor Santibáñez<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Tecnológico Nacional de México/I.T. de La Paz, Blvd. Forjadores de B.C.S., 23080, La Paz, México.

<sup>b</sup>Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Carretera Ensenada-Tijuana, No.3918, Zona Playitas, 22800, Ensenada, México.

<sup>c</sup>Tecnológico Nacional de México/I.T. de La Laguna, Apdo. Postal 49, Adm. 1, 27001, Torreón, México

**To cite this article:** Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V. 2022. On the energy shaping plus damping injection control of mechanical systems. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 19, 407-418. <https://doi.org/10.4995/riai.2022.16862>

### Resumen

En este trabajo se presenta un tutorial sobre un método de diseño de controladores basado en el moldeo de energía más inyección de amortiguamiento para el control de una clase de sistemas mecánicos completamente actuados y subactuados. Se proporciona un marco teórico unificado que permite resolver diferentes objetivos de control como son: regulación de posición y regulación de velocidad para ambas clases de sistemas y, seguimiento de trayectorias para el caso de sistemas mecánicos completamente actuados. Además, la regulación de energía es formulada como un nuevo objetivo de control para generar oscilaciones controladas en ambas clases de sistemas mecánicos. En adición, se abordan algunos criterios de diseño como compensación de fricción dinámica, exclusión de medición de velocidad e inclusión de la dinámica de actuadores. Finalmente, como ejemplos de aplicación, se presentan recientes resultados publicados en la literatura sobre el diseño de controladores para robots manipuladores accionados por par, un péndulo con rueda inercial y un sistema carro-péndulo.

*Palabras clave:* Control de energía, Estabilidad de Lyapunov, Control de robots, Sistemas mecánicos.

### On the energy shaping plus damping injection control of mechanical systems

#### Abstract

This paper presents a tutorial about a controllers design method based on the energy shaping plus damping injection for the control of mechanical systems. A unified theoretical framework is provided to solve different control objectives such as: position regulation and speed regulation for both class of mechanical systems and, trajectory tracking for the case of fully actuated mechanical systems. Also, the energy regulation is formulated as a new control objective to generate controlled oscillations in both fully actuated mechanical systems and underactuated mechanical systems. In addition, some design criteria are addressed: dynamic friction compensation, exclusion of speed measurement and, inclusion of actuator dynamics. Finally, as examples of application, recent results published in the literature on the design of controllers for torque-driven robot manipulators, an inertia wheel pendulum, and a cart-pendulum system, are presented.

*Keywords:* Energy control, Lyapunov stability, Robot control, Mechanical systems.

### 1. Introducción

El moldeo de energía potencial más inyección de amortiguamiento es un método de diseño de controladores para el control de robots manipuladores. Este método fue introducido

en (Takegaki and Arimoto, 1981) siendo un trabajo pionero en control de robots, que desde entonces ha motivado nuevas contribuciones sobre este tópico en las últimas cuatro décadas. Más aún, el controlador por moldeo de energía e inyección de amortiguamiento utilizado para el control de posición de robots ma-

\* Autor para correspondencia: [jesus.sg@lapaz.tecnm.mx](mailto:jesus.sg@lapaz.tecnm.mx)

nipuladores es conocido como control PD con compensación de gravedad (Kelly et al., 2005). Una interpretación física del controlador anterior fue descrita en (Ortega et al., 1998), donde el moldeo de energía e inyección de amortiguamiento están representadas por un péndulo virtual unido a la articulación del robot por medio de un resorte y un amortiguador lineal virtual. Esta interpretación es útil para los ingenieros, principalmente porque la sintonía de las ganancias del controlador se basa en conceptos de energía y amortiguamiento.

Recientemente, una propuesta de moldeo de energía más inyección de amortiguamiento para el diseño de un controlador de seguimiento de trayectorias de robots manipuladores accionados por par e influenciados por la fricción dinámica de Dahl fue publicada en (Kelly et al., 2021). Un logro interesante fue demostrar que el controlador de seguimiento de trayectorias conocido como control par-calculado es un controlador por moldeo de energía total. Además, puesto que la estructura matemática de este controlador se puede dividir en dos términos: moldeo de energía e inyección de amortiguamiento, es posible reescribirlo como un control PD con compensación de gravedad más un término no lineal. Extendiendo la interpretación utilizada para el control PD con compensación de gravedad mostrada en (Ortega et al., 1998), el controlador par-calculado puede ser representado por un péndulo virtual acoplado a la articulación del robot por medio de un resorte y un amortiguador virtual no lineal. La primera publicación donde se menciona el moldeo de energía total para el control de posición de robots manipuladores con articulaciones flexibles fue en (Ailon and Ortega, 1993). Sin embargo, la propuesta de moldeo de energía total ha sido adoptada más como una metodología de diseño de controladores para la regulación de posición de una clase de sistemas mecánicos subactuados –aquellos sistemas que tienen más grados de libertad que entradas de control– donde es necesario moldear tanto la función de energía potencial como la función de energía cinética (Bloch et al., 2000; Ortega et al., 2002; Romero et al., 2015; Fujimoto and Sugie, 2004; Viola et al., 2007; Romero et al., 2013). Más allá del control de posición, el campo de aplicaciones para controlar sistemas mecánicos subactuados usando el moldeo de energía total ha sido extendido a los siguientes objetivos de control: regulación de velocidad y regulación de energía (Sandoval et al., 2021b,c,d). Además, numerosas investigaciones sobre control por moldeo de energía para robots manipuladores abordan principalmente dos objetivos de control: control de posición (regulación de posición articular) y control de movimiento (seguimiento de trayectorias articulares) (Ebrahimi et al., 2021; Franco and Garriga-Casanovas, 2021; Cruz-Zavala et al., 2017; Kelly, 1999; Tanaka and Fujita, 2015; Kelly and Santibáñez, 1998; Navarro-Alarcón et al., 2013; Liu and Xin, 2017; Takegaki and Arimoto, 1981; Kelly et al., 2021; Romero et al., 2015, 2013).

Por otro lado, existen varias estrategias que han resuelto el problema de seguimiento de trayectorias de sistemas mecánicos usando las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana (Fujimoto et al., 2003; Kelly et al., 2005; Ortega et al., 1998; Fujimoto and Sugie, 2004). Por ejemplo, (Fujimoto et al., 2003) y (Fujimoto and Sugie, 2004) resolvieron este problema para una clase de sistemas hamiltonianos usando transformaciones canónicas, donde la dinámica del error en el sistema en malla cerrada ha sido construido usando la definición estándar del error: el vector

de estado del sistema en malla abierta menos el vector de estado deseado. En contraste, en el presente tutorial, el marco teórico utilizado se basa en una novedosa transformación de coordenadas, las cuales no son arbitrarias puesto que ellas corresponden a nuevas posiciones y momentos y, más importante, a coordenadas de verdaderos momentos. Esto significa que la presente propuesta difiere de la anterior definición estándar del error para el sistema en malla cerrada. Más aún, las nuevas coordenadas conducen a un sistema en malla cerrada autónomo, y basado en la teoría de Lyapunov, se puede mostrar que el sistema en malla cerrada es estable e, invocando el teorema de LaSalle se asegura que las trayectorias del sistema en malla cerrada convergen asintóticamente a un particular conjunto invariante.

En resumen, la contribución del presente trabajo es un tutorial sobre el control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento de una clase de sistemas mecánicos completamente actuados y subactuados, que muestra recientes aplicaciones para el control de algunos sistemas mecánicos como: robots manipuladores, un péndulo con rueda inercial y un sistema carro-péndulo. Cabe resaltar que el método propuesto en este artículo es una alternativa a los métodos de diseño por moldeo de energía reportados en la literatura, los cuales están enfocados principalmente en diseñar reguladores de posición, ver el libro de (Duindam et al., 2009) y, un excelente tutorial sobre el concepto de energía utilizado en control (Ortega et al., 2001). En particular, este método puede ser aplicado para el cumplimiento de diferentes objetivos de control, además de regulación de posición, como se mencionó anteriormente.

A lo largo del presente documento, la notación  $(\cdot)_{n \times n}$  denota una matriz  $n \times n$ , con  $I_{n \times n}$  como la matriz identidad y  $0_{n \times n}$  la matriz de ceros; mientras  $\mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n$  es el vector de ceros  $n \times 1$ , el gradiente  $\nabla_{(\cdot)} = \frac{\partial}{\partial(\cdot)}$  es un vector columna,  $\det[A]$  denota el determinante de la matriz  $A$ , y  $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  representa una matriz diagonal  $n \times n$  donde los elementos en la diagonal son  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

El resto del documento está organizado como sigue. En la sección 2, se presenta un resumen del método de control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento de una clase de sistemas mecánicos completamente actuados y subactuados. En la sección 3, se muestra una aplicación a robots manipuladores accionados por par, mientras en las secciones 4 y 5 se describe su aplicación a dos sistemas subactuados: el péndulo con rueda inercial y el sistema carro-péndulo, respectivamente. Finalmente, las conclusiones son dadas en la sección 6.

## 2. Control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento: un resumen

En esta sección se presenta un resumen del método de control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento para una clase de sistemas mecánicos completamente actuados y subactuados, como eje principal del presente trabajo.

### 2.1. Formulación del problema de control

La formulación inicia con una descripción hamiltoniana del sistema mecánico a ser controlado, donde el hamiltoniano es la suma de la energía cinética más la energía potencial de un sistema mecánico de  $n$  articulaciones

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de posiciones y momentos generalizados, respectivamente,  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0$  es la así llamada matriz de inercia. Una propiedad de la función de energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  del sistema mecánico debido a la fuerza gravitacional es que esta función es al menos una vez diferenciable con respecto a  $\mathbf{q}$ . Es conveniente recordar que en formulación hamiltoniana el momentum  $\mathbf{p}$  está definido como

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades generalizadas.

### 2.1.1. Modelo dinámico de los sistemas mecánicos a controlar

La dinámica de sistemas mecánicos accionados por pares incorpora fricción viscosa en todas sus articulaciones. Específicamente, sus ecuaciones pueden ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ -\mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva, la cual contiene los coeficientes estrictamente positivos de fricción viscosa de las articulaciones del sistema mecánico, y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entradas de control. La clase de sistemas mecánicos completamente actuados accionados por par considerados en este artículo está dado por (3).

### 2.1.2. Objetivo de control: Sistema hamiltoniano en malla cerrada deseado

Inspirado por (1) y (2), la función escalar

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), \quad (4)$$

es llamada el hamiltoniano deseado, donde  $M_a(\mathbf{q}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva, simétrica y diferenciable para todo  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$ . Además,  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$  es una función continua y definida positiva al menos localmente, con un mínimo en  $\mathbf{q}_a^* = \mathbf{0}_n$ . La siguiente transformación de coordenadas es introducida:

$$\mathbf{q}_a = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\phi}(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_a = M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (6)$$

siendo  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^n$  los vectores de nuevas posiciones y momentos ‘generalizados’. En adición, los vectores  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$  y  $\boldsymbol{\phi}(t)$  tienen la estructura

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = [\alpha_1(\mathbf{q}) \quad \alpha_2(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \alpha_n(\mathbf{q})]^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = [\phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \cdots \quad \phi_n(t)]^T. \quad (8)$$

Las funciones  $\alpha_i(\mathbf{q})$  son continuamente diferenciables con respecto a  $\mathbf{q}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , seleccionados para asegurar que el rango  $\{W(\mathbf{q})\} = n$ , para cualquiera  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $W(\mathbf{q})^{-1}$  exista, donde  $W(\mathbf{q})$  es la matriz Jacobiana del vector  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$ , esto es,

$$W(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (9)$$

Más aún, se supone que las funciones  $\phi_i(t)$  son dos veces diferenciables. De (5), se sigue que

$$\dot{\mathbf{q}}_a = W(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}(t). \quad (10)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{q}}_a$  de (10) en (6), y  $\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p}$  de (2), queda

$$\mathbf{p}_a = T(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\mathbf{p} - M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \quad (11)$$

donde

$$T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}) = M_a(\mathbf{q}_a)W(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1} \quad (12)$$

y rango  $\{T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\} = n$ .

En este artículo, el objetivo de control del sistema hamiltoniano en malla cerrada deseado consiste en diseñar una entrada de control  $\boldsymbol{\tau}$  tal que se obtenga el siguiente sistema hamiltoniano deseado en malla cerrada:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ -\mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a)\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \end{bmatrix} \forall t \geq 0, \quad (13)$$

donde  $\mathcal{H}_a$  es la función diferenciable cuya estructura fue definida en (4), y la matriz  $\mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva completamente arbitraria. La estabilidad asintótica global del equilibrio  $[\mathbf{q}_a^T \quad \mathbf{p}_a^T]^T = [\mathbf{0}_n^T \quad \mathbf{0}_n^T]^T$  de (13) puede ser verificado en (Kelly et al., 2021).

*Comentario 1:* Sobre el objetivo de control (asegurando la estructura del sistema en malla cerrada (13)), éste está relacionado al llamado ‘objetivo de control de función de energía total con inyección de amortiguamiento (TEFDA)’ en (Kelly, 2015).

En contraste con los métodos de diseño por moldeo de energía existentes en la literatura de control, el marco teórico descrito aquí incorpora el cambio de coordenadas (5)-(6) y el sistema en malla cerrada deseado (13). Por ejemplo, si  $K = I_{n \times n}$  entonces de (5), se sigue que  $\mathbf{q}_a = \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d(t)$ , siendo  $\tilde{\mathbf{q}}$  el vector del error de seguimiento de trayectorias de posiciones articulares y  $\mathbf{q}_d(t)$  la función vectorial de posiciones articulares deseadas, respectivamente. Más aún, sustituyendo  $\mathbf{q}_a = \tilde{\mathbf{q}}$  y su derivada temporal  $\dot{\mathbf{q}}_a = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  en (6) se obtiene  $\mathbf{p}_a = M_a(\tilde{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ . Note que  $\mathbf{p}_a$  definido en (6) es el momentum resultante obtenido del lagrangiano  $\mathcal{L}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a)$  definido como sigue

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a - \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), \quad (14)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}_a = M_a(\mathbf{q}_a)^{-1}\mathbf{p}_a$ , de acuerdo con (6). Por tanto, el momentum  $\mathbf{p}_a$  está dado por

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial \mathcal{L}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_a} = M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (15)$$

en contraste al ‘falso momentum’  $\tilde{\mathbf{p}}$  definido en (Fujimoto et al., 2003; Fujimoto and Sugie, 2004):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d &= \frac{\partial \mathcal{L}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}_d(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_d} \\ &= M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - M_d(\mathbf{q}_d)\dot{\mathbf{q}}_d, \end{aligned} \quad (16)$$

siendo  $M_d(\mathbf{q}_d)$  una matriz simétrica definida positiva a ser diseñada. En suma, el marco teórico propuesto utiliza errores de posición  $\mathbf{q}_a = \tilde{\mathbf{q}}$  y momentos verdaderos  $\mathbf{p}_a$  definidos en (15) relacionados a la transformación de coordenadas dadas en (5) y (6), en lugar de aquellas coordenadas usadas en (Fujimoto et al., 2003) y (Fujimoto and Sugie, 2004), dadas por los errores de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$ , y una diferente variable tomada como un falso momentum de acuerdo con (16).

Por simplicidad, de aquí en adelante, será utilizada la siguiente notación:

$$\begin{aligned} M &= M(\mathbf{q}), & M_a &= M_a(\mathbf{q}_a), & H &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \\ \mathcal{H}_a &= \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a), & \mathcal{U}_a &= \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), & T_a &= T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}), \\ \mathcal{D}_a &= \mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) & \mathcal{U} &= \mathcal{U}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

## 2.2. Ley de control

A continuación, se presenta una ley de control que resuelve el problema de control formulado en la sección 2.1. En particular se demostrará que al sustituir la acción de control  $\tau$  en (3) se obtiene el sistema en malla cerrada deseado (13).

**Proposición 1:** Considere el modelo del sistema mecánico (3). Entonces, se obtiene el sistema en malla cerrada deseado (13) con la ley de control

$$\tau = \tau_{es} + \tau_{di}, \quad (17)$$

donde

$$\tau_{es} = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + \mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} - T_a^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t)], \quad (18)$$

$$\tau_{di} = -T_a^{-1} \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a, \quad (19)$$

siendo  $\tau_{es}$  y  $\tau_{di}$  las acciones de control llamadas moldeo de energía e inyección de amortiguamiento, respectivamente. Se entiende por “ganancias” del controlador (17)-(19) a las matrices  $M_a$ ,  $\mathcal{D}_a$  y  $W$  (que es parte de  $T_a$ ), así como las constantes que multiplican a la función  $\mathcal{U}_a$ .

*Prueba:* La derivada temporal de  $\mathbf{p}_a$  en (11) queda

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \mathbf{p} + T_a \dot{\mathbf{p}} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t). \quad (20)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{p}}$  de (3) en (20) resulta

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \mathbf{p} + T_a [-\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - \mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} + \tau] - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t), \quad (21)$$

y usando (17)-(19) en (21), se obtiene  $\dot{\mathbf{p}}_a$  como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_a &= \dot{T}_a \mathbf{p} + T_a [-\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - \mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + \mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \\ &\quad - T_a^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t)] \\ &\quad - T_a^{-1} \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a] - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t) \\ &= -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a M_a^{-1} \mathbf{p}_a. \end{aligned} \quad (22)$$

Luego, de (4) se verifica la siguiente igualdad

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \nabla_{\mathbf{p}_a} \left( \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) \right) = M_a^{-1} \mathbf{p}_a, \quad (23)$$

y recordando que (6) está dado por la definición  $\mathbf{p}_a = M_a \dot{\mathbf{q}}_a$ , entonces al sustituir  $\mathbf{p}_a$  en (23) queda

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \dot{\mathbf{q}}_a. \quad (24)$$

Finalmente, se concluye que (22) y (24) corresponden a (13). Esto completa la prueba de la Proposición 1.

El significado físico de los términos de moldeo de energía e inyección de amortiguamiento pueden ser expresados como sigue: moldeo de energía significa transformar (3) en (13) –pero considerando solo el primer término del lado derecho de (13)–

por medio de la entrada de control  $\tau_{es}$  en (17). Por otro lado, la inyección de amortiguamiento significa agregar intencionalmente una entrada externa al sistema en malla cerrada (13), a través del término  $\tau_{di}$  en la entrada de control (17), el cual corresponde al segundo término del lado derecho de (13). Su rol es lograr que  $[\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{p}_a^T]^T = [\mathbf{0}_n^T \ \mathbf{0}_n^T]^T$  sea un equilibrio asintóticamente estable globalmente y, también sirve para manipular la velocidad de convergencia deseada.

## 2.3. Sistemas mecánicos subactuados

La regulación de posición (estableciendo todas las posiciones generalizadas a valores constantes) para una clase de sistemas mecánicos subactuados encontrados en numerosos laboratorios de control ha sido resuelto exitosamente por dos metodologías de diseño basadas en control por moldeo de energía total conocidas en inglés como: Interconnection Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC) y Controlled Lagrangian; publicadas por (Ortega et al., 2002) y (Bloch et al., 2000), respectivamente.

Si consideramos el caso de un sistema mecánico con más grados de libertad que entradas de control, entonces conviene sustituir la ley de control (17) por

$$\tau = G\mathbf{u}, \quad (25)$$

donde  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de distribución de actuadores, con  $\text{rango}(G) = m$ , y  $m < n$ , siendo  $m$  el número de entradas de control y  $n$  el número de grados de libertad. Ahora, el vector de entradas de control es  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ . Como consecuencia de no existir una inversa de la matriz  $G$ , la matriz  $M_a$  y la función escalar  $\mathcal{U}_a$  ya no son arbitrarias y ambas deben ser soluciones del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs):

$$\begin{aligned} G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + \mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \\ - T_a^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t)]] = \mathbf{0}_{(n-m)} \end{aligned} \quad (26)$$

donde  $G^\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$  es el aniquilador izquierdo de la matriz  $G$ , tal que,  $G^\perp G = \mathbf{0}_{(n-m) \times m}$ . Además, la matriz  $\mathcal{D}_a$  en (19) se escoge convenientemente de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}_a = T_a G K_v G^T T_a^T \quad (27)$$

la cual es semidefinida positiva y  $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz definida positiva. Finalmente, si hay soluciones  $M_a$  y  $\mathcal{U}_a$ , entonces la ley de control (17) puede describirse como (25) con

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [G^T G]^{-1} G^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + \mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \\ &\quad - T_a^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t)]] - K_v G^T T_a^T \end{aligned} \quad (28)$$

Debido a que generalmente en una o en ambas soluciones  $M_a$  y  $\mathcal{U}_a$  en (26), su propiedad de positividad es local, en el mejor de los casos solo se cumple que  $[\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{p}_a^T]^T = [\mathbf{0}_n^T \ \mathbf{0}_n^T]^T$  sea un equilibrio asintóticamente estable localmente.

Por último, aún cuando resolver el conjunto de EDPs en (26) es todo un desafío, en las secciones 4 y 5 se muestran algunos ejemplos donde es posible obtener una solución.

### 3. Control de robots manipuladores accionado por pares

En esta sección se muestran algunas aplicaciones del método de control mediante (17)-(19) para robots manipuladores accionado por pares, descrito en la sección 2. Las aplicaciones han sido recientemente publicadas en (Kelly et al., 2021) y (Sandoval et al., 2021c).

#### 3.1. Regulación de posición: control PD con compensación de gravedad

La ley de control propuesta (17)-(19) puede ser reescrita en la notación estándar de la dinámica de robots manipuladores  $\langle M, C, \mathbf{g} \rangle$  como (Kelly et al., 2005):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathcal{R}\dot{\mathbf{q}} - [MW^{-1}M_a^{-1}][C_a\dot{\mathbf{q}}_a + \mathcal{D}_a\dot{\mathbf{q}}_a \\ & + \mathbf{g}_a + [M_aWM^{-1} + M_a\dot{W}M^{-1}]M\dot{\mathbf{q}} - \dot{M}_a\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \\ & - M_a\ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) - \dot{M}_a\dot{\mathbf{q}}_a], \end{aligned} \quad (29)$$

donde se han definido en (Kelly et al., 2021) las variables  $C\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}\dot{\mathbf{q}} - \nabla_{\mathbf{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M\dot{\mathbf{q}}\right)$ ,  $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{U}$ , la igualdad (12), la identidad  $\dot{M} = -MM^{-1}M$ , las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} C_a\dot{\mathbf{q}}_a = & \dot{M}_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a - \nabla_{\mathbf{q}_a}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a\right), \\ \mathbf{g}_a = & \mathbf{g}_a(\mathbf{q}_a) = \nabla_{\mathbf{q}_a}\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), \end{aligned}$$

y los términos restantes en (29). Las ganancias del controlador (29) son: las matrices  $M_a$  y  $\mathcal{D}_a$  (ambas definidas debajo de la Ecuación (4) y (13), respectivamente), la función escalar  $\mathcal{U}_a$ , y la función vectorial  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})$  que define a  $W$  de acuerdo a (9).

Como un hecho importante, para robots sin fricción ( $\mathcal{R} = 0_{n \times n}$ ) la selección de los siguiente términos en (29):  $M_a = M$ ,  $\mathcal{U}_a = \frac{1}{2}\mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a$ ,  $\mathcal{D}_a = K_v$ , y  $\boldsymbol{\phi}(t) = -\mathbf{q}_d$  constante para todo  $t \geq 0$  tal que  $\dot{\mathbf{q}}_d = \ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}_n$ , y a su vez,  $\mathbf{q}_a = \tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{q} + \mathbf{q}_d$ , con  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}$  y  $W(\mathbf{q}) = -I_{n \times n}$ , donde  $K_p$  y  $K_v$  son matrices simétricas definidas positivas, conduce a la ley de control conocida en la literatura de robots manipuladores como control PD con compensación de gravedad (Kelly et al., 2005):

$$\boldsymbol{\tau}_{PD+g} = K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (30)$$

donde, en este caso, las únicas ganancias de este controlador son  $K_p$  y  $K_v$  (matrices de ganancias Proporcional y Derivativa).

#### 3.2. Un controlador de seguimiento de trayectorias: control par-calculado

De la sección anterior, otra selección apropiada de los siguientes términos en (29) es:  $M_a = I_{n \times n}$ ,  $\mathcal{U}_a = \frac{1}{2}\mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a$ ,  $\mathcal{D}_a = K_v$ , y  $\boldsymbol{\phi}(t) = -\mathbf{q}_d(t)$  tal que  $\mathbf{q}_a = \tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{q} + \mathbf{q}_d$ , con  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}$  y  $W(\mathbf{q}) = -I_{n \times n}$ , donde  $K_p$  y  $K_v$  son matrices simétricas definidas positivas, conducen a la ley de control conocida en la literatura de robots manipuladores como control par-calculado (Kelly et al., 2005):

$$\boldsymbol{\tau}_{pc} = M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p\tilde{\mathbf{q}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (31)$$

donde las únicas ganancias de este controlador son  $K_p$  y  $K_v$  (matrices de ganancias Proporcional y Derivativa). La ley de control (31) puede ser reescrita como

$$\boldsymbol{\tau}_{pc} = \hat{K}_p(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}} - \hat{K}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) \quad (32)$$

siendo las ganancias no lineales

$$\hat{K}_p(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})K_p, \quad (33)$$

$$\hat{K}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = M(\mathbf{q})[K_v + M^{-1}(\mathbf{q})C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})], \quad (34)$$

y la función vectorial no lineal

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_v\dot{\mathbf{q}}_d]. \quad (35)$$

Note que el control par-calculado (32) puede ser visto como un control PD con compensación de gravedad más un término no lineal dado por  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$ , con ganancias no lineales  $\hat{K}_p(\mathbf{q})$  y  $\hat{K}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  definidos en (33) y (34).

Además, como se mencionó en la introducción, para el objetivo de control de regulación de posición ( $\mathbf{q}_d$  constante,  $\dot{\mathbf{q}}_d = \ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}_n$ , y a su vez,  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}_n$ ) el control par-calculado (32) queda

$$\boldsymbol{\tau}_{pcR} = \hat{K}_p(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}} - \hat{K}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (36)$$

el cual puede ser representado por un péndulo virtual acoplado a la articulación del robot por medio de un resorte y un amortiguador no lineales dados por  $\hat{K}_p(\mathbf{q})$  y  $\hat{K}_v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , respectivamente, definidos en (33) y (34).

#### 3.3. Un regulador de energía

La regulación de energía ha sido formulado como un nuevo objetivo de control en (Sandoval et al., 2021a), donde se describe su aplicación al movimiento oscilatorio en aquellas articulaciones seleccionadas por el usuario. El movimiento periódico controlado oscila alrededor de una posición deseada como referencia, lo cual permite un interesante comportamiento del robot. Principalmente, cuando se tiene interés en generar un movimiento oscilatorio de amplitud deseada y frecuencia constante, a través de la acción de control (17)-(19), simplemente configurando a cero una de las ganancias (elementos de la diagonal) de  $\mathcal{D}_a$ , mientras el resto de las ganancias de (17)-(19) se asigna convenientemente.

Para clarificar la notación en esta sección, cada articulación no amortiguada será referida como la  $j$ -ésima articulación sin inyección de amortiguamiento, y cada articulación con amortiguamiento será llamada la  $i$ -ésima articulación amortiguada, tal que  $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , con  $j \neq i$ , donde  $n$  es el número total de articulaciones del robot. En adición, la matriz  $\mathcal{R}$  es definida como  $\mathcal{R} = \text{diag}\{f_{v_1}, f_{v_2}, \dots, f_{v_n}\}$ , mientras la matriz  $\mathcal{D}_a = K_v$ , con  $K_v = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_n}\}$ .

Por conveniencia, se considera  $\mathcal{H}_a$  en (4) con la siguiente estructura

$$M_a = \text{diag}\{a_i\}, \quad (37)$$

$$\mathcal{U}_a = \frac{1}{2}\mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a, \quad (38)$$

siendo  $a_i$  constantes estrictamente positivas, y  $K_p = \text{diag}\{k_{p_i}\}$  una matriz definida positiva, con  $i = 1, 2, \dots, n$ . La función  $\mathcal{U}_a$  podría ser cualquier función definida positiva, pero ha sido seleccionada como una forma cuadrática en (38) en vista de la trayectoria oscilatoria que se pretende generar. En adición, de (5), ha sido definido  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$  y  $\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{q}_d(t)$ , tal que

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d(t) \quad (39)$$

donde  $\mathbf{q}_d(t)$  es una función dos veces diferenciable.

La energía constante “deseada” es una constante no negativa dada por

$$\mathcal{H}_a^* = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \frac{p_{a_j}^2(0)}{a_j} + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} k_{p_j} q_{a_j}^2(0). \quad (40)$$

Con algún abuso de la palabra, esta constante es llamada “deseada” porque está relacionada con la función de energía deseada  $\mathcal{H}_a$  en (4), pero su valor depende de las condiciones iniciales de las articulaciones no amortiguadas, así que esta no es una constante arbitraria especificada libremente por el usuario.

Formalmente, el objetivo de control de regulación de energía es el cumplimiento de:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t)) = \mathcal{H}_a^*, \quad (41)$$

desde cualquier condición inicial del robot  $[\mathbf{q}(0)^T \ \mathbf{p}(0)^T]^T$ . Específicamente, el valor de  $\mathcal{H}_a^*$  puede obtenerse calculando las constantes:  $q_{a_j}(0) = q_j(0) - q_{d_j}(0)$ , y  $p_{a_j}(0) = a_j[\dot{q}_j(0) - \dot{q}_{d_j}(0)]$ , después de tomar en cuenta (6), (37), (39), y la derivada temporal de (39).

*Comentario 2:* La constante  $\mathcal{H}_a^*$  puede ser también igual a cero para  $q_{a_j} = p_{a_j} = 0$ , de acuerdo a (40), en tal caso el objetivo de control se convierte en un objetivo de control de seguimiento de trayectorias o de regulación de posición.

La estrategia que se utilizó en (Sandoval et al., 2021a) para cumplir (41) consistió en agregar amortiguamiento parcial vía la ley de control (17) en lugar de una inyección de amortiguamiento completa. Para este fin, se presentó el análisis de estabilidad del sistema en malla cerrada (13) siendo  $\mathcal{D}_a = K_v$  una matriz semidefinida positiva (matriz de inyección de amortiguamiento parcial) con elementos  $K_v = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_n}\}$ , donde al menos una constante  $k_{v_j}$  es cero, siendo  $j \neq i$ . Es importante mencionar que la selección  $q_{a_j}(0) = p_{a_j}(0) = 0$  significa que ningún movimiento oscilatorio de la  $j$ -ésima articulación de la posición  $q_j$  alrededor de la posición deseada  $q_{d_j}$  del robot manipulador es deseada, y de acuerdo con (40), este valor conduce a una energía deseada nula:  $\mathcal{H}_a^* = 0$ ; por tanto, en este caso el objetivo de regulación de energía se convierte en un objetivo de control de seguimiento de trayectorias. Se establece el resultado principal en la siguiente proposición.

**Proposición 2:** Considere el sistema en malla cerrada deseada (13), con  $\mathcal{H}_a$  en (4) compuesta por (37) y (38). Sea  $\mathcal{D}_a = K_v$  una matriz diagonal semidefinida positiva, donde  $K_v = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_n}\}$  tal que al menos una constante  $k_{v_j}$  es cero. Entonces, el objetivo de control de regulación de energía (41) se cumple con  $\mathcal{H}_a^*$  definida en (40):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t)) = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \frac{p_{a_j}^2(0)}{a_j} + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} k_{p_j} q_{a_j}^2(0),$$

donde  $j$  es la  $j$ -ésima articulación no amortiguada, tal que  $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $n$  es el número total de articulaciones del robot.

La prueba de la anterior Proposición 2 se describe en detalle en (Sandoval et al., 2021a), así como diferentes simulaciones numéricas que ilustran el cumplimiento del objetivo de control (41).

### 3.3.1. Amplitud y frecuencia deseada

La solución de  $q_{a_j}$  está dada por (ver procedimiento en (Sandoval et al., 2021a)):

$$q_{a_j}(t) = q_{a_j}^M \cos(\omega_{d_j} t - \varphi_j), \quad (42)$$

donde  $q_{a_j}^M$  es la máxima amplitud,  $\varphi_j$  es el ángulo de fase, y la frecuencia angular  $\omega_{d_j}$  es calculada como:

$$\omega_{d_j} = \sqrt{\frac{k_{p_j}}{a_j}}. \quad (43)$$

Esto permite a su vez calcular la frecuencia en Hertz, esto es,

$$f_{d_j} = \frac{\omega_{d_j}}{2\pi}, \quad (44)$$

y el periodo  $P_j$  en segundos, dado por

$$P_j = \frac{2\pi}{\omega_{d_j}}. \quad (45)$$

La máxima amplitud  $q_{a_j}^M$  se obtiene de la siguiente expresión

$$q_{a_j}^M = \sqrt{\frac{2c_{E_j}}{k_{p_j}}} = \sqrt{\frac{1}{k_{p_j}} \left[ \frac{p_{a_j}^2(0)}{a_j} + k_{p_j} q_{a_j}^2(0) \right]}, \quad (46)$$

donde

$$c_{E_j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_{a_j}^2}{a_j} + k_{p_j} q_{a_j}^2 \right]. \quad (47)$$

En resumen, el regulador propuesto (17) con  $\mathcal{D}_a = K_v$ , donde  $K_v = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_n}\}$  tal que al menos una constante  $k_{v_j}$  es cero, cumple el objetivo de control (41), y las reglas de sintonía están dadas por (43)-(46).

### 3.4. Control de robots manipuladores influenciados por la fricción dinámica de Dahl

Un controlador para seguimiento de trayectorias de robots manipuladores con fricción, fue presentado en (Kelly et al., 2021). De los argumentos teóricos de estabilidad, así como también de ensayos experimentales sobre un brazo robótico de 2 grados de libertad, se concluyó que se recomienda la compensación de fricción viscosa más fricción dinámica (como en el caso del robot con fricción en sus articulaciones, donde la fricción es caracterizada por el modelo de fricción de Dahl más fricción viscosa) para mejorar el seguimiento de trayectorias. Cabe mencionar que la fricción es un fenómeno complejo que se puede intentar modelar de diversas maneras, ninguna perfecta. En algunos sistemas prevalecen algunos efectos más que otros lo que hace más adecuados algunos tipos de modelos de fricción.

#### 3.4.1. Modelo dinámico del robot

El esquema propuesto consistió en la caracterización de la fricción de cada una de las articulaciones del robot manipulador asumido a ser descrito por uno de los modelos de fricción más simples: el modelo de Dahl. Este modelo aplicado en las articulaciones de  $n$  grados de libertad de robots manipuladores está dado por (Moreno et al., 2003):

$$\dot{\mathbf{z}} = -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\Sigma_o \mathbf{z} + \dot{\mathbf{q}}, \quad (48)$$

$$\mathbf{f}_d(\mathbf{z}) = \Sigma_o \mathbf{z} \quad (49)$$

donde  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  es un vector de estados internos de fricción no medibles,

$$\Psi(\dot{\mathbf{q}}) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{f_{c_1}} |\dot{q}_1|, \frac{1}{f_{c_2}} |\dot{q}_2|, \dots, \frac{1}{f_{c_n}} |\dot{q}_n| \right\} \quad (50)$$

es una matriz diagonal definida positiva, donde  $f_{c_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) denota los parámetros de Coulomb (estrictamente positivos) para cada una de las  $n$  articulaciones,  $\Sigma_o = \text{diag}\{\sigma_{0_1}, \sigma_{0_2}, \dots, \sigma_{0_n}\}$  es una matriz diagonal definida positiva, la cual contiene los parámetros de ‘rigidez’ de cada articulación del robot ( $\sigma_{0_i} \geq 0$ ),  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades generalizadas dado por

$$\dot{\mathbf{q}} = M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T, \quad (51)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}$  puede ser visto como la entrada y  $\mathbf{f}_d \in \mathbb{R}^n$  como la salida de fuerza de fricción de Dahl friction en (48)-(49). Aún cuando ni el estado  $\mathbf{z}$  ni la fuerza de fricción de Dahl  $\mathbf{f}_d$  pueden ser medidos, suponemos que la estructura y todos los parámetros del modelo de Dahl (48)-(49) son conocidos. Note de (49) que la fricción de Dahl se hace nula ( $\mathbf{f}_d(\mathbf{z}) = \mathbf{0}_n$ ) para una matriz de ‘rigidez’ nula ( $\Sigma_o = 0_{n \times n}$ ).

Tomando en cuenta el modelo de fricción de Dahl (48)-(49), la ecuación de movimiento del robot manipulador de  $n$  grados de libertad involucrando la fricción dinámica de Dahl más la fricción viscosa puede ser escrita en la siguiente estructura matemática no lineal tipo hamiltoniana:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -\mathcal{R} & -I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} & -\Psi(\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{z}} W_o(\mathbf{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \quad (52)$$

donde  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entradas de control de pares, la matriz semidefinida positiva  $\mathcal{R} = \text{diag}\{r_{v_1}, r_{v_2}, \dots, r_{v_n}\}$  contiene los coeficientes de fricción ( $f_{v_i} \geq 0$ ) de las articulaciones del robot, y

$$W_o(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \Sigma_o \mathbf{z}. \quad (53)$$

### 3.4.2. Objetivo de control

Para este esquema propuesto, el objetivo de control es conseguir el siguiente sistema en malla cerrada no autónomo deseado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \mathbf{z}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -D_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) & -T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}) \\ 0_{n \times n} & T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})^T & -\Pi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \\ \nabla_{\mathbf{z}_a} W_a(\mathbf{z}_a) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \xi_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \\ \xi_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \end{bmatrix}, \quad (54)$$

donde las funciones  $\xi_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a)$  y  $\xi_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a)$  están definidas por

$$\xi_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) = T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})[1 - \mu]\mathcal{R}\dot{\mathbf{q}}, \quad (55)$$

y

$$\begin{aligned} \xi_2(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) &= \delta k_z M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{h}(\mathbf{q}_a) + [1 - \delta] \\ &\times T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a \\ &+ \delta \varepsilon M^{-1}(\mathbf{q})[1 - \mu]\mathcal{R}\dot{\mathbf{q}} - [1 - \delta]\dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (56)$$

donde  $\mu, \delta \in \{0, 1\}$  son parámetros constantes de configuración para activar la compensación de fricción acorde con la selección en la Tabla 1, y la función vectorial  $\mathbf{h}(\mathbf{q}_a)$  está definida por

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}_a) = [\tanh(q_{a_1}) \ \tanh(q_{a_2}) \ \dots \ \tanh(q_{a_n})]^T. \quad (57)$$

La función vectorial (57) desempeña un rol clave en el diseño de la dinámica del observador, requerida para obtener un estimado del estado no medible  $\mathbf{z}$  del modelo de fricción de Dahl (48)-(49), así como también en la función de Lyapunov propuesta para probar estabilidad uniforme asintótica global del sistema en malla cerrada.

Tabla 1: Parámetros de configuración  $\mu$  y  $\delta$  para compensación de fricción

$\mu$	$\delta$	Tipo de compensación de fricción
1	0	viscosa
0	1	Dahl
1	1	Dahl más viscosa
0	0	sin compensación total

Continuando con la definición de las entradas del sistema en malla cerrada deseado (54), se define

$$\Pi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \Psi(\dot{\mathbf{q}}) + \delta \varepsilon M(\mathbf{q})^{-1}, \quad (58)$$

con  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  cualquier constante estrictamente positiva, y

$$W_a(\mathbf{z}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_a^T \Sigma_o \mathbf{z}_a, \quad (59)$$

donde  $\mathbf{z}_a = \mathbf{z} - \delta \hat{\mathbf{z}}$  denota el error de observación del estado interno  $\mathbf{z}$ , con  $\hat{\mathbf{z}}$  dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_o &= -\Psi(\dot{\mathbf{q}})\Sigma_o[\mathbf{x}_o + K_o \mathbf{p}_a] + M^{-1}[\mathbf{p} - W \mathbf{p}_a + k_z \mathbf{h}(\mathbf{q}_a)] \\ &+ K_o[\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + D_a M_a^{-1} \mathbf{p}_a] + \varepsilon \dot{W}^{-1} M_a^{-1} \mathbf{p}_a \\ &+ \varepsilon W^{-1} M_a^{-1} \mathbf{p}_a, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{x}_o + K_o \mathbf{p}_a, \quad (61)$$

siendo  $K_o = -\varepsilon W^{-1}(\mathbf{q})M_a^{-1}(\mathbf{q}_a)$  una matriz diagonal definida positiva, y  $k_z > 0$  es una constante escalar que convenientemente está acotada. La matriz  $W_a(\mathbf{z}_a)$  desempeña el rol de incorporar la ecuación  $\dot{\mathbf{z}}_a = \dot{\mathbf{z}} - \delta \dot{\hat{\mathbf{z}}}$  en el sistema en malla cerrada (54).

### 3.4.3. Objetivo de control de seguimiento

Considere el modelo del robot –con fricción incluida– (52). Se desea que las posiciones articulares del robot  $\mathbf{q}$  sigan asintóticamente las trayectorias deseadas de posición  $\mathbf{q}_d(t)$ . Formalmente, el objetivo de control de seguimiento global en espacio articular es el cumplimiento del:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)] = \mathbf{0}_n, \quad (62)$$

para toda posición inicial  $\mathbf{q}(0)$ , y velocidad inicial  $\dot{\mathbf{q}}(0)$ , donde  $\mathbf{q}_d(t)$  es una función continua dos veces diferenciable. Se asume que  $\mathbf{q}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$  son funciones vectoriales acotadas conocidas.

### 3.4.4. Ley de control

La ley de control que sustituida en el modelo del robot (52) obtiene el sistema en malla cerrada (54) está dada por

$$\tau = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} + \mu \mathcal{R} \dot{\mathbf{q}} + \delta \Sigma_o \hat{\mathbf{z}} - T_a^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + D_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \mathbf{p} - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t)]. \quad (63)$$

donde  $\hat{\mathbf{z}}$  es calculada de (60) y (61). El principal resultado del esquema propuesto ha sido establecido en la siguiente proposición.

**Proposición 3:** Considere el modelo del robot (este puede ser afectado por la fricción de Dahl más la fricción viscosa) (1), (52), (53) donde  $\mathcal{R} \geq 0$  y  $\Sigma_o \geq 0$  (esto es, las fricciones viscosa y de Dahl, ambos tipos pueden estar presentes en todas las  $n$  articulaciones del robot) junto con la ley de control (63) y (60)-(61), donde  $M_a = \bar{M}_a$  y  $\mathcal{U}_a = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a$ , siendo  $\bar{M}_a = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  y  $K_p = \text{diag}\{k_{p_1}, k_{p_2}, \dots, k_{p_n}\}$  arbitrarias pero matrices constantes definidas positivas. Además,  $D_a$  en la ley de control (63) es asumido a ser una matriz arbitraria pero diagonal definida positiva. Sea  $\alpha(\mathbf{q}) = -K\mathbf{q}(t)$  y  $\phi(t) = -K\mathbf{q}_d(t)$  donde  $K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  y  $k_i > 0$ . Entonces, el objetivo de control de seguimiento (62) se cumple proporcionando que  $\mu = \delta = 1$  (compensación completa de fricción –compensación de fricción más fricción de Dahl–) y  $k_z > 0$  en la parte dinámica (60) del controlador es una constante suficientemente pequeña para satisfacer simultáneamente:

$$k_z < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1}\}}{\lambda_{\max}^2\{K^{-1} \bar{M}_a^{-1}\}}}, \quad (64)$$

$$k_z < \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{K_p\} \lambda_{\max}\{\bar{M}_a^{-1}\}}{\lambda_{\max}^2\{K^{-1} \bar{M}_a^{-1}\}}}, \quad (65)$$

$$k_z < \frac{4 \lambda_{\min}\{K_a K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}_a^{-1} D_a \bar{M}_a^{-1}\}}{\lambda_{\max}^2\{K_a D_a \bar{M}_a^{-1}\} + 4 \lambda_{\min}\{K_a K_p\} \lambda_{\max}\{K_a \bar{M}_a^{-1}\}}, \quad (66)$$

donde  $K_a = K^{-1} \bar{M}_a^{-1}$ . Más aún, el sistema en malla cerrada es asíntotico y uniformemente estable en forma global (GUAS).

La prueba de la anterior Proposición 3 es descrita en detalle en (Kelly et al., 2021), así como resultados experimentales en tiempo real que validan el cumplimiento del objetivo de control (62).

## 4. Control de un péndulo con rueda inercial

El péndulo con rueda inercial es sistema subactuado que consiste de un péndulo físico sin fricción con un disco simétrico (rueda) atado en el extremo, el cual es libre de girar sobre un eje paralelo de rotación del péndulo (Figura 1). La naturaleza subactuada es debido a que tiene dos grados de libertad y un solo actuador localizado en el disco, el cual se asume a ser un dispositivo de par ideal (identidad lineal sin memoria).

Un modelo dinámico del péndulo con rueda inercial mostrado en la Figura 1, puede ser descrito por (1) y (3) con las siguientes matrices (Ortega et al., 2002):

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (67)$$

y la función de energía potencial  $\mathcal{U}(q_1) = m_3[\cos(q_1) - 1]$ , donde  $M = M^T > 0$  es la así llamada matriz de inercia,  $G$

es la matriz de distribución de la entrada de control  $u$ ,  $a_1 = I_1 + I_2 + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2$ ,  $a_2 = I_2$ ,  $a_3 = I_2$ ,  $m_3 \triangleq g(m_1 l_{c_1} + m_2 l_1)$ , y es definido

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Siguiendo la misma suposición hecha en (Ortega et al., 2002), se ha asumido ambas articulaciones del mecanismo sin fricción. El significado del resto de los parámetros de la planta es descrito en (Sandoval et al., 2020).

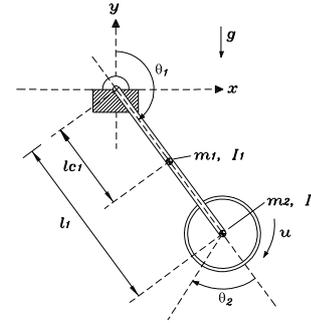


Figura 1: Péndulo con rueda inercial

Con el fin de obtener el modelo dinámico en formulación hamiltoniana, la función de energía (hamiltoniano) –siendo la suma de la energía cinética más la energía potencial– es definida como sigue

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2 \det[M]} [a_3 p_1^2 - 2a_2 p_1 p_2 + a_1 p_2^2] + m_3 [\cos(q_1) - 1] \quad (69)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$  y  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T$  son los vectores de las posiciones y momentos generalizados, respectivamente.

Un modelo dinámico del péndulo con rueda inercial sin fricción viscosa, puede ser escrito en forma compacta de la siguiente manera (estructura tipo hamiltoniana) (Ortega et al., 2002):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[a_3 p_1 - a_2 p_2]}{\det[M]} \\ \frac{[-a_2 p_1 + a_1 p_2]}{\det[M]} \\ m_3 \sin(q_1) \\ u \end{bmatrix} \quad (70)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$  es la única entrada de control de par aplicado a la rueda. La principal variable del sistema a ser controlada (salida de la planta) es el desplazamiento angular de la varilla del péndulo  $q_1$ .

### 4.1. Regulador de energía

Para el diseño de un regulador de energía, el siguiente cambio de coordenadas fue introducido en (Sandoval et al., 2021d):

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{bmatrix} = M_d M^{-1} \mathbf{p}, \quad (71)$$

tal que, la función de energía deseada está definida como sigue:

$$\mathcal{H}_d(q_1, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}}^T M_d^{-1} \hat{\mathbf{p}} + \mathcal{U}_d(q_1), \quad (72)$$

siendo  $M_d = M_d^T$  una adecuada matriz constante definida positiva y  $\mathcal{U}_d(q_1)$  una conveniente función de energía potencial la

cual es asumida a ser continua y al menos una vez diferenciable con respecto a  $q_1$ , y una función definida positiva localmente, dependiendo solo de la articulación no actuada  $q_1$ . Note que  $\mathcal{H}_d(q_1, \hat{\mathbf{p}})$  en (72) es una función definida positiva localmente, por tanto,  $\mathcal{H}_d(0, \mathbf{0}_2) = 0$ . Por conveniencia, la siguiente notación es introducida para la matriz constante  $M_d$  escrita como:

$$M_d \triangleq \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

siendo los elementos  $d_i$  constantes estrictamente positivas, con  $i = 1, 2, 3$ , los cuales deben ser seleccionados para asegurar  $\det[M_d] = d_1d_3 - d_2^2 > 0$ . Enseguida, una constante no negativa  $\mathcal{H}_d^*$  es introducida y definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_d^* = \mathcal{H}_d(q_1^*, \mathbf{0}_2) = \mathcal{U}_d(q_1^*), \quad (74)$$

donde  $q_1^*$  es una constante arbitraria no negativa que pertenece al intervalo  $0 \leq q_1^* < \pi$ , siendo la amplitud deseada de la oscilación del desplazamiento angular del péndulo. Es importante mencionar que la selección  $q_1^* = 0$  es una opción degenerativa admisible, lo cual significa que ningún movimiento oscilatorio en estado estacionario es deseado, y dado que  $\mathcal{U}_d(q_1)$  en (72) es asumida a ser una función definida positiva localmente, de (74) se satisface  $\mathcal{U}_d(0) = 0$ .

#### 4.1.1. Objetivo de control

Considere el modelo del péndulo con rueda inercial (70). Se pretende encontrar una ley de control  $u$  para lograr que las trayectorias tiendan asintóticamente desde una pequeña configuración inicial hacia un valor constante no negativo de la función de energía deseada  $\mathcal{H}_d$  definida en (72), siendo esta constante  $\mathcal{H}_d^* = \mathcal{U}_d(q_1^*) \in [\mathcal{U}_d(0), \mathcal{U}_d(\pi)]$  la así llamada energía deseada.

Formalmente, el objetivo de control de regulación de energía es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}_d(q_1(t), \hat{\mathbf{p}}(t)) = \mathcal{H}_d^*, \quad (75)$$

tal que  $\mathcal{H}_d(q_1(0), \hat{\mathbf{p}}(0))$  esté suficientemente cerca a  $\mathcal{H}_d^*$ .

Aún cuando a simple vista no es obvio, como consecuencia de (75), un movimiento oscilatorio del péndulo para  $0 < q_1^* < \pi$  (y a su vez  $\mathcal{H}_d^* > 0$ ) es logrado como sigue: una vez la función de energía deseada  $\mathcal{H}_d$  en (72) (compuesta por la energía cinética más la energía potencial deseadas) alcanza la curva de nivel  $\mathcal{H}_d(q_1, \hat{\mathbf{p}}) = \mathcal{H}_d^*$ , existe un intercambio entre ambas energías (cinética y potencial), en el cual la tasa de intercambio está determinada por la constante diferente de cero  $\mathcal{H}_d^*$ . Dado que el intercambio de ambas energías es una constante real positiva ( $\mathcal{H}_d^* > 0$ ), este produce una oscilación estacionaria conocida como órbita cerrada (Khalil, 2005). Por tanto, el movimiento oscilatorio del péndulo alrededor de su posición vertical superior es lograda vía el objetivo de control de regulación de energía (75) para todo  $0 < q_1^* < \pi$ .

#### 4.1.2. Ecuación diferencial parcial (EDP)

Tomando en cuenta que  $M$  y  $M_d$  son matrices constantes (por tanto,  $\nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{H} = \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{U}$  y  $\nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{H}_d = \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{U}_d$ ), la única EDP a resolver es:

$$G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{U} - MM_d^{-1}\nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{U}_d] = 0, \quad (76)$$

donde  $G^\perp = [1 \ 0]$ , cuya solución es:

$$\mathcal{U}_d = \frac{m_3}{k_1} [\cos(q_1) - 1], \quad (77)$$

donde  $k_1$  está dada por

$$k_1 = \frac{d_3a_1 - d_2a_2}{\det[M_d]}, \quad (78)$$

la cual es una constante estrictamente negativa bajo la selección de diseño de entradas  $d_2$  y  $d_3$  de  $M_d$ , tal que:  $d_3a_1 < d_2a_2$ .

#### 4.1.3. Ley de control

El regulador de energía está compuesto por el control por moldeo de energía  $u_{es}$  más el control gradiente de velocidad  $u_{sg}$ :

$$u = u_{es} - k \left[ \underbrace{\gamma_1 [\mathcal{H}_d - \mathcal{H}_d^*]}_{u_{sg}} \left[ \left[ \frac{d_3\hat{p}_1 - d_2\hat{p}_2}{\det[M_d]} \right] \beta_1 + \left[ \frac{d_1\hat{p}_2 - d_2\hat{p}_1}{\det[M_d]} \right] \beta_2 \right] + \underbrace{\gamma_2 \beta_2 \hat{p}_2}_{u_{sg}} \right], \quad (79)$$

donde  $u_{es} = \alpha_1 \sin(q_1)$ , y

$$\mathcal{H}_d = \frac{[d_3\hat{p}_1^2 - 2d_2\hat{p}_1\hat{p}_2 + d_1\hat{p}_2^2]}{2 \det[M_d]} + \frac{m_3}{k_1} [\cos(q_1) - 1], \quad (80)$$

con  $\gamma_1, \gamma_2, k > 0$  y  $\hat{p}_2$  es la variable tipo-momentum asociada a la articulación actuada de la rueda definida en (71). El diseño de la acción de control gradiente de velocidad  $u_{sg}$  es mostrado en detalle en (Sandoval et al., 2021d).

#### 4.2. Regulador de posición/velocidad usando sólo mediciones de posición

Un regulador de posición/velocidad usando solo mediciones de posición fue presentado en (Sandoval et al., 2021b), el cual solo requiere medición de posiciones, es decir, sin mediciones de velocidad, como un criterio adicional de diseño del controlador. Este regulador mejora el reportado en (Sandoval et al., 2020). La novedad es un adecuado diseño de filtros lineales de primer orden que evitan el uso de tacómetros o aproximación de la derivada temporal de mediciones de posición obtenidas de los encoders.

##### 4.2.1. Objetivo de control y ley de control

Considere el modelo de la planta (70). Se desea llevar asintóticamente tanto al péndulo a su posición vertical superior  $q_{d1} = 0$ , como a la rueda a una velocidad constante deseada  $\omega_{d2} = r$ . Formalmente, este objetivo –el cual es llamado regulación de posición/velocidad– puede ser expresado como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \dot{q}_2(t) - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Se ha asumido que solo están disponibles las mediciones de la posición del péndulo y de la rueda ( $q_1$  y  $q_2$ ).

Por conveniencia se definió:

$$\omega_d = \begin{bmatrix} \omega_{d1} \\ \omega_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Además, se definieron las variables:

$$\mathbf{q}_a = K[\mathbf{q} - \mathbf{q}_d(t)], \quad (83)$$

$$\mathbf{p}_a = M_a \dot{\mathbf{q}}_a, \quad (84)$$

donde  $\mathbf{q}_d(t) = [q_{d1} \int_0^t \omega_{d2} d\sigma]^T$ , mientras  $K$  y  $M_a$  son definidos como

$$M_a = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

siendo  $k_1, k_2, d_1, d_2$  y  $d_3$  constantes estrictamente positivas, donde  $d_1 > 0$  y  $\det[M_a] = d_1 d_3 - d_2^2 > 0$  aseguran la positividad de la matriz  $M_a$ . Por otro lado, tomando en cuenta que  $M_a, K$  y  $M$  son matrices no singulares con elementos constantes, y seleccionando convenientemente  $k_1 = a_1$  y  $k_2 = a_2$ , la matriz  $T = M_a K M^{-1}$  (en general una matriz no singular y no simétrica) queda

$$T = \frac{1}{\det[M]} \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}, \quad (86)$$

siendo  $\det[M] = a_1 a_3 - a_2^2 > 0$  y las constantes  $\xi_{ij}$  están definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= d_1 a_1 a_3 - d_2 a_2^2, & \xi_{12} &= -a_1 a_2 [d_1 - d_2], \\ \xi_{21} &= d_2 a_1 a_3 - d_3 a_2^2, & \xi_{22} &= a_1 a_2 [d_3 - d_2]. \end{aligned} \quad (87)$$

Puede ser verificado que  $T$  es una matriz no singular, ya que  $\det[T] = a_1 a_2 [d_1 d_3 - d_2^2]$  es diferente de cero, así que  $T^{-1}$  existe. Para el diseño de los filtros de primer orden se definió apropiadamente la matriz  $D_a$  como sigue:

$$D_a = k_v T G G^T T^T = k_v \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad (88)$$

donde  $k_v > 0$ , y las constantes estrictamente positivas  $b_i$  corresponden a

$$b_1 = \frac{\xi_{12}^2}{[\det[M]]^2}, \quad b_2 = \frac{\xi_{12}\xi_{22}}{[\det[M]]^2}, \quad b_3 = \frac{\xi_{22}^2}{[\det[M]]^2}. \quad (89)$$

Finalmente, el filtrado lineal consistió en un conjunto de dos pares de filtros lineales de primer orden, donde cada uno tiene como entrada el error de posición  $q_{a_i}$  en lugar de la posición  $q_i$ , con  $i = 1, 2$ . Más aún, las salidas de los filtros son convenientemente agrupados en un vector denotado por  $\vartheta_a \in \mathbb{R}^n$ , expresados como:

$$\vartheta_a = \begin{bmatrix} \vartheta_b \\ \vartheta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta_{a_1} + \vartheta_{a_2} \\ \vartheta_{a_3} + \vartheta_{a_4} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

tal que los términos en el primer renglón de (90) corresponden a la salida de un filtro de primer orden (Kelly, 1993):

$$\vartheta_{a_1} = \left\{ \frac{b_{1\rho}}{\rho + \lambda_1} \right\} q_{a_1}, \quad \vartheta_{a_2} = \left\{ \frac{b_{2\rho}}{\rho + \lambda_1} \right\} q_{a_2}, \quad (91)$$

así como también el segundo renglón (90), esto es,

$$\vartheta_{a_3} = \left\{ \frac{b_{3\rho}}{\rho + \lambda_2} \right\} q_{a_1}, \quad \vartheta_{a_4} = \left\{ \frac{b_{4\rho}}{\rho + \lambda_2} \right\} q_{a_2}, \quad (92)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo elemento definido en (89),  $\rho = \frac{d}{dt}$  denota el operador diferencial,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son constantes estrictamente positivas, y  $q_{a_i}$  es la  $i$ -ésima entrada del vector  $\mathbf{q}_a$ . La variable

$\vartheta_a$  puede ser calculada de la salida del siguiente sistema lineal cuya entrada es el error de posición  $\mathbf{q}_a$  en (83):

$$\dot{\mathbf{x}} = -A\mathbf{x} - A D_a \mathbf{q}_a, \quad (93)$$

$$\vartheta_a = \mathbf{x} + D_a \mathbf{q}_a, \quad (94)$$

donde  $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , y  $D_a$  es la matriz simétrica semidefinida positiva mostrada en (88).

El resultado principal se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 4:** Considere el modelo dinámico (70) con (69) y (2) con (67). Sea  $\omega_{d2}$  la velocidad constante deseada y arbitraria de la rueda, y la posición angular deseada del péndulo denotada por  $q_{d1}(t) = \bar{q}_{d1}$ , con la constante  $\bar{q}_{d1} = \delta\pi$  para cualquier número par  $\delta$ . Se  $D_a$  una matriz simétrica semidefinida positiva definida en (88). Sean  $M_a$  y  $\mathcal{U}_a$  soluciones de la siguiente ecuación diferencial parcial

$$G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} - M K^{-1} M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a] = 0, \quad (95)$$

donde  $G^\perp = [1 \ 0]$  es un aniquilador de rango pleno de  $G$ , esto es,  $G^\perp G = 0$ . Suponga que  $M_a = M_a^T > 0$ , y que  $\mathcal{U}_a$  es una función continua, diferenciable, y definida positiva localmente con un mínimo aislado en  $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}_2$ . Entonces, el objetivo de control de posición/velocidad (81) se cumple en un sentido local vía realimentación de la ley de control

$$u = [G^T G]^{-1} G^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} - M K^{-1} M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a] - k_v G^T T^T \vartheta_a, \quad (96)$$

donde  $[G^T G]^{-1} = 1$ ,  $k_v > 0$  es arbitrario utilizada para construir la matriz  $D_a$  en (88), y  $\vartheta_a$  es calculada por medio del sistema lineal (93)-(94).

## 5. Control de un carro-péndulo accionado por fuerza

El carro-péndulo accionado por fuerza (también llamado péndulo invertido (Bloch et al., 2000; Lozano et al., 2000) es un mecanismo subactuado constituido por un carro moviéndose sobre una superficie plana con un péndulo atado al carro por medio de un pivote (Figura 2). Este mecanismo es subactuado debido a que tiene dos grados de libertad –la rotación del péndulo  $q_1$  y el desplazamiento horizontal del carro  $q_2$ – y tiene un solo actuador, la fuerza externa  $F$  aplicada al carro.

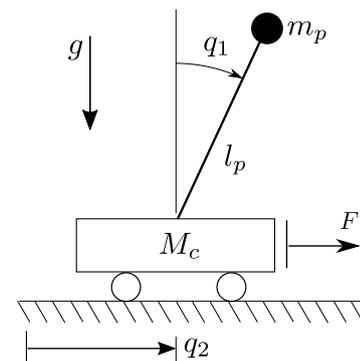


Figura 2: Sistema carro-péndulo accionado por fuerza.

### 5.1. Modelo dinámico completo: sistema carro-péndulo más el motor de CD

Se asume que la fuente de par que produce la fuerza necesaria para mover el carro se origina desde un motor de CD de escobillas e imanes permanentes, por tanto, se requiere suministrar su voltaje de armadura como entrada de control en lugar de la fuerza  $F$ . Con este fin, el modelo dinámico del motor de CD es desarrollado a partir del diagrama esquemático mostrado en la Figura 3. El modelo dinámico completo –el carro-péndulo más el motor de CD– permite una eventual implementación del regulador de velocidad diseñado en (Sandoval et al., 2021c) y que será mostrado más adelante, el cual es expresado en términos de un voltaje en lugar de una fuerza.

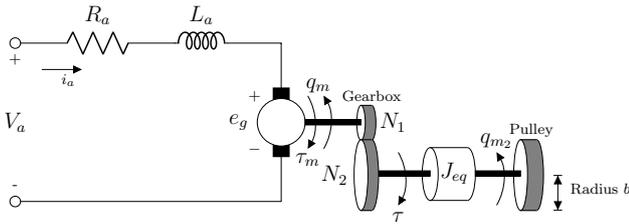


Figura 3: Circuito equivalente de un motor de CD con escobillas e imanes permanentes con una caja de engranes y una polea.

El significado de la notación de la Figura 3 puede ser consultada en (Sandoval et al., 2021c). El modelo dinámico completo puede ser expresado en las siguientes variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \frac{1}{\det[\mathcal{M}(\mathbf{q})]} [\gamma \delta \sin(q_1) - \beta \cos(q_1) [u + \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2]] \\ \frac{1}{\det[\mathcal{M}(\mathbf{q})]} [\alpha [u + \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2] - \beta \delta \cos(q_1) \sin(q_1)] \end{bmatrix}, \quad (97)$$

donde  $\det[\mathcal{M}(\mathbf{q})] = \alpha \gamma - \beta^2 \cos^2(q_1)$ ,  $u$  es la entrada de control de fuerza dada por

$$u = \frac{1}{b^2} [b K_{eq} V_a - \bar{B}_{eq} \dot{q}_2], \quad (98)$$

y las constantes

$$K_{eq} = \frac{\lambda \eta_m k_t}{R_a}, \quad B_{eq} = \lambda^2 \left[ \frac{\eta_m k_t k_m}{R_a} + f_v \right].$$

Más aún,  $u$  puede ser vista como una entrada de control de fuerza en un modelo de un amplificador de potencia:

$$V_a = \frac{1}{b K_{eq}} [b^2 u + \bar{B}_{eq} \dot{q}_2]. \quad (99)$$

Luego de aplicar el método de linealización parcial descrito por (Spong, 1994) sobre el modelo dinámico de la planta (97), este puede ser escrito con una estructura tipo hamiltoniana (3) requerida por el marco teórico mostrado en la sección 2:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ -\nabla_{q_1} \mathcal{U} - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) v \\ -\nabla_{q_2} \mathcal{U} + v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \frac{\delta}{\alpha} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad (100)$$

con la entrada de control expresada como:

$$u = \left[ \frac{\det[\mathcal{M}(\mathbf{q})]}{\alpha} \right] v + \frac{\beta \delta}{\alpha} \sin(q_1) \cos(q_1) - \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2, \quad (101)$$

siendo  $v$  una entrada de control “auxiliar.” El hamiltoniano está dado por

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2} [p_1^2 + p_2^2] + \frac{\delta}{\alpha} \cos(q_1) \quad (102)$$

y el momentum  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T$  definido en (2) resulta

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

con las matrices de “inercia” y “distribución” relacionadas al modelo dinámico (100), dadas por

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G(q_1) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (104)$$

así como la nueva función de “energía potencial” definida en (102), extraída de (100):

$$\mathcal{U}(q_1) = \frac{\delta}{\alpha} \cos(q_1). \quad (105)$$

### 5.2. Objetivo de control, EDP y ley de control

El objetivo de control es llevar asintóticamente el péndulo a su posición vertical superior  $q_1 = q_{d1} = q_1^* = 0$  y el carro moviéndose a una velocidad constante arbitraria  $r$ . Formalmente, este objetivo puede ser expresado como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad (106)$$

donde  $r$  es la velocidad deseada del carro, esto es, se desea que el carro siga una rampa como trayectoria de posición  $q_2(t) = rt$ .

La única EDP a resolver fue la siguiente

$$\begin{aligned} & \left[ d_3 - d_2 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1}) \right] \nabla_{q_{a1}} \mathcal{U}_a \\ & + \left[ d_1 \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1}) - d_2 \right] \nabla_{q_{a2}} \mathcal{U}_a = -\nabla_{q_{a1}} \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (107)$$

y una solución está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a(q_{a1}, q_{a2}) = & -\frac{\det[\mathcal{M}_a]}{d_2} \frac{\delta}{\beta} \ln \left( \frac{d_2 \beta \cos(q_{a1}) - d_3 \alpha}{d_2 \beta - d_3 \alpha} \right) \\ & + \frac{1}{2} k_p z^2(q_{a1}, q_{a2}), \end{aligned} \quad (108)$$

donde cada uno de las constantes son definidas en (Sandoval et al., 2021c). El regulador de velocidad diseñado en (Sandoval et al., 2021c) que cumple el objetivo de control (106) puede ser expresado en términos de errores de posición y momentos siendo  $[p_{a1} \ p_{a2}]^T = M_a [\dot{q}_{a1} \ \dot{q}_{a2}]^T$ , donde  $\dot{q}_{a1} = \dot{q}_1 - \dot{q}_{d1} = \dot{q}_1$ , tal que

$$\begin{aligned} u = & \left[ \frac{\det[\mathcal{M}(\mathbf{q})]}{\alpha} \right] \left[ \frac{f(\mathbf{q}_a)}{\det[\mathcal{M}_a] \left[ 1 + \left[ \frac{\beta \cos(q_{a1})}{\alpha} \right]^2 \right]} \right. \\ & - k_v \left[ p_{a2} - \frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1}) p_{a1} \right] + \frac{\beta \delta}{\alpha} \sin(q_1) \cos(q_1) \\ & \left. - \beta \sin(q_1) \dot{q}_1^2 \right], \end{aligned} \quad (109)$$

donde

$$f(\mathbf{q}_a) = \left[ -\frac{\beta}{\alpha} \cos(q_{a1}) \right] \left[ \det[M_a] \nabla_{q_{a1}} \mathcal{U} - d_3 \nabla_{q_{a1}} \mathcal{U}_a + d_2 \nabla_{q_{a2}} \mathcal{U}_a \right. \\ \left. + d_2 \nabla_{q_{a1}} \mathcal{U}_a - d_1 \nabla_{q_{a2}} \mathcal{U}_a \right]$$

o en términos del voltaje de armadura  $V_a$  de acuerdo con (99):

$$V_a = \frac{1}{bK_{eq}} \left[ b^2 u + \bar{B}_{eq} [\dot{q}_{a2} + \dot{q}_{d2}(t)] \right]. \quad (110)$$

## 6. Conclusiones

Se ha presentado un tutorial sobre el control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento de una clase de sistemas mecánicos completamente actuados y subactuados. Una serie de resultados recientes publicados en la literatura sobre el control de robots manipuladores y dos sistemas mecánicos subactuados ampliamente utilizados en numerosos laboratorios de control ilustran la utilidad del marco teórico utilizado para analizar controladores reportados en la literatura, formular diferentes objetivos de control y, abordar algunos criterios de diseño en el controlador. Se puede decir que este método de diseño resulta apropiado para ampliar el campo de aplicaciones del control de sistemas mecánicos.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos TecNM, CONACYT 166636, CONACYT 166654 y, CONACYT 134534.

## Referencias

- Ailon, A., Ortega, R., 1993. An observer-based set-point controller for robot manipulators with flexible joints. *Systems and Control Letters* 21, 329–335. doi:10.1016/0167-6911(93)90076-I.
- Bloch, A.M., Leonard, N., Marsden, J., 2000. Controlled lagrangian and the stabilization of mechanical systems i: the first matching theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45, 2253–2270. doi:10.1109/9.895562.
- Cruz-Zavala, E., Nuño, E., Moreno, J.A., 2017. Finite-time regulation of robot manipulators: an energy shaping approach. *IFAC Proceedings Volumes* 50, 9583–9588. doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.1678.
- Duindam, V., Macchelli, A., Stramigioli, S., Bruyninckx, H., 2009. *Modeling and Control of Complex Physical Systems - The Port-Hamiltonian Approach*. Springer-Verlag, Germany.
- Ebrahimi, R., Ahmad, A., Mahboobi, R., 2021. Controller design for nonlinear bilateral teleoperation systems via total energy shaping. *Mechanical Systems and Signal Processing* 150, 1–13. doi:10.1016/j.ymsp.2020.107239.
- Franco, E., Garriga-Casanovas, A., 2021. Energy-shaping control of soft continuum manipulators with in-plane disturbances. *The International Journal of Robotics Research* 40, 236–255. doi:10.1177/0278364920907679.
- Fujimoto, K., Sakurama, K., Sugie, T., 2003. Trajectory tracking control of port-controlled hamiltonian systems via generalized canonical transformations. *Automatica* 39, 2059–2069. doi:10.1016/j.automatica.2003.07.005.
- Fujimoto, K., Sugie, T., 2004. Trajectory tracking control of nonholonomic hamiltonian systems via generalized canonical transformations. *European Journal of Control* 10, 421–431. doi:10.3166/ejc.10.421-431.
- Kelly, J., Sandoval, J., Santibáñez, V., 2021. A guas joint position tracking controller of torque-driven robot manipulators influenced by dynamic dahl friction: theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 29, 1877–1890. doi:10.1109/TCST.2020.3024134.
- Kelly, R., 1993. A simple set-point robot controller by using only position measurements. *IFAC Proceedings Volumes* 26, 527–530. doi:10.1016/S1474-6670(17)48783-0.
- Kelly, R., 1999. Regulation of manipulators in generic task space: an energy shaping plus damping injection approach. *IEEE Transactions on Robotic and Automation* 15, 381–386. doi:10.1109/70.760361.
- Kelly, R., 2015. Total energy function with damping assignment (tefda): A novel control objective in robotics. In: *Proceedings XVI Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, 1–6doi:10.1109/RPIC.2015.7497057.
- Kelly, R., Santibáñez, V., 1998. Global regulation of elastic joint robots based on energy shaping. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43, 1451–1456. doi:10.1109/9.720506.
- Kelly, R., Santibáñez, V., Loria, A., 2005. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag, London.
- Khalil, H.K., 2005. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, USA.
- Liu, Y., Xin, X., 2017. Global motion analysis of energy-based control for 3-link planar robot with a single actuator at the first joint. *Nonlinear Dynamics* 88, 1749–1768. doi:10.1007/s11071-017-3343-2.
- Lozano, R., Fantoni, I., Block, D., 2000. Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Systems and Control Letters* 40, 197–204. doi:10.1016/S0167-6911(00)00025-6.
- Moreno, J., Kelly, R., Campa, R., 2003. Manipulator velocity control using friction compensation. *IEE Proceedings Control Theory Applications* 150, 119–126. doi:10.1049/ip-cta:20030083.
- Navarro-Alarcón, D., Liu, Y., Romero, J.G., 2013. Energy shaping methods for asymptotic force regulation of compliant mechanical systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22, 2376–2383. doi:10.1109/TCST.2014.2309659.
- Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P., Sira-Ramirez, H., 1998. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: Mechanical and electromechanical applications*. Springer-Verlag, London.
- Ortega, R., Schaft, A.J.V.D., Mareels, I., Maschke, B., 2001. Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine* 21, 18–33. doi:10.1109/37.915398.
- Ortega, R., Spong, M.W., Gómez-Estern, F., Blankenstein, G., 2002. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47, 1213–1233. doi:10.1109/TAC.2002.800770.
- Romero, J.G., Donaire, A., Ortega, R., 2013. Robust energy shaping control of mechanical systems. *Systems and Control Letters* 62, 770–780. doi:10.1016/j.sysconle.2013.05.011.
- Romero, J.G., Ortega, R., Sarras, I., 2015. A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 60, 818–823. doi:10.1109/TAC.2014.2330701.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., 2020. A speed regulator for a torque-driven inertia wheel pendulum. *IFAC Proceedings Volumes* 53, 6371–6376. doi:10.1016/j.ifacol.2020.12.1749.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., 2021a. Energy regulation of torque-driven robot manipulators in joint space. *Journal of the Franklin Institute* 359, 1427–1456. doi:10.1016/j.jfranklin.2022.01.034.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., 2021b. An output feedback position/speed regulator for a torque-driven inertia wheel pendulum. *International Journal of Systems Science* 19, 3451–3463. doi:10.1007/s12555-020-0744-7.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., 2021c. A speed regulator for a force-driven cart-pole system. *International Journal of Control, Automation and Systems* 19, 3451–3463. doi:10.1080/00207721.2021.1958950.
- Sandoval, J., Moyrón, J., Kelly, R., Santibáñez, V., Moreno-Valenzuela, J., 2021d. Energy regulation for a torque-driven vertical inertia wheel pendulum. *Control Engineering Practice* 115, 1–13. doi:10.1016/j.conengprac.2021.104909.
- Spong, M., 1994. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. In *Proceedings of IEEE/RJSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* doi:10.1109/IR0S.1994.407375.
- Takegaki, M., Arimoto, S., 1981. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 103, 119–125. doi:10.1115/1.3139651.
- Tanaka, N., Fujita, M., 2015. Energy shaping control method for robotic force/position regulation and motion control. *IFAC Proceedings Volumes* 32, 1136–1141. doi:10.1016/S1474-6670(17)56192-3.
- Viola, G., Ortega, R., Banavar, J., Acosta, J.A., Astolfi, A., 2007. Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52, 1093–1099. doi:10.1109/TAC.2007.899064.