

## Control multivaluado de sistemas hamiltonianos con puerto

Fernando Castaños \*

*Departamento de Control Automático, Cinvestav-IPN, 07360 Ciudad de México, México.*

**To cite this article:** Castaños, F. 2022. Multi-valued control of port-Hamiltonian systems. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 19, 419-429. <https://doi.org/10.4995/riai.2022/16814>

### Resumen

Se plantea el uso de leyes multivaluadas para el control de sistemas hamiltonianos con puerto. Se muestra que, si el control multivaluado satisface la propiedad de monotonía creciente, entonces la acción de control es pasiva, el sistema en lazo cerrado está bien definido y se logra la regulación de salida en forma robusta. Se propone una metodología concreta para construir controles máxima y monótonamente crecientes. El esquema de control se ajusta naturalmente a sistemas descritos originalmente por operadores multivaluados, como lo son los sistemas mecánicos con restricciones unilaterales y los circuitos con diodos y transistores.

*Palabras clave:* Control basado en pasividad, sistemas lagrangianos y hamiltonianos, inclusiones diferenciales, síntesis de controles robustos, restricciones y estructura de controladores.

### Multi-valued control of port-Hamiltonian systems

#### Abstract

We consider the use of multi-valued control laws for port-Hamiltonian systems. It is shown that if the multi-valued controller is monotonically increasing, then the control action is passive, the closed-loop system is well-defined, and robust output regulation is achieved. We propose a concrete methodology to construct maximal monotonically increasing controls. The scheme can be naturally applied to systems originally described by multi-valued operators, such as mechanical systems with unilateral constraints and circuits with diodes and transistors.

*Keywords:* Passivity-based control, Lagrangian and Hamiltonian systems, differential inclusions, robust controller synthesis, controller constraints and structure.

### 1. Introducción

A muy grandes rasgos, el control basado en pasividad se entiende como un conjunto de técnicas orientadas al control de sistemas físicos (mecánicos, eléctricos, electromecánicos etc). Las técnicas se centran normalmente en sistemas descritos por las ecuaciones de Euler-Lagrange (Ortega et ál., 1998) o por las ecuaciones de Hamilton (van der Schaft, 2017), con lo que se cubre una amplia clase. Existe una clase interesante de sistemas físicos que también se describe a partir de ecuaciones diferenciales (lagrangianas o hamiltonianas), pero acopladas a inclusiones algebraicas, lo que finalmente resulta en inclusiones diferenciales. Es el caso, por ejemplo, de circuitos con diodos

y transistores (Acary et ál., 2011) o de sistemas mecánicos con restricciones unilaterales (Leine y van der Wouw, 2008).

Existe una literatura madura sobre el análisis y simulación de sistemas físicos descritos por inclusiones diferenciales (Acary y Brogliato, 2008), e incluso sobre el control de este tipo de sistemas (Brogliato, 2016). Aquí nos interesamos en el caso, un tanto distinto, en el que es la propia ley de control la que se define por una inclusión, y por lo tanto es la ley de control la que da origen a la inclusión diferencial. La motivación para producir deliberadamente una inclusión diferencial proviene de la literatura del control por modos deslizantes, que nos enseña que las inclusiones diferenciales tienen propiedades de robustez

\* Autor para correspondencia: castanos@ieee.org

intrínsecas. Cabe mencionar, sin embargo, que las inclusiones que aquí tratamos se derivan de una forma distinta a las que ocurren en el control por modos deslizantes y, sobre todo, que sus soluciones tienen diferentes propiedades de robustez.

Para llevar a cabo la propuesta de diseño nos apegamos a los principios del control basado en pasividad y hacemos un uso extendido de las herramientas del análisis convexo. Como resultado obtenemos controles robustos, fáciles de implementar y que además pueden aplicarse a sistemas físicos originalmente descritos por inclusiones diferenciales. El presente trabajo se inscribe dentro del contexto planteado por Miranda y Castaños (2017); Miranda et ál. (2017, 2018).

En la Sección 2 argumentamos que la característica esencial del control basado en pasividad es un principio de preservación de estructura y aprovechamos para recordar la clase de sistemas hamiltonianos con espacios de estados de dimensión finita. En la Sección 3 planteamos el ejemplo que servirá de hilo conductor a lo largo del artículo y mostramos que los controles definidos por inclusiones se salen del paradigma tradicional basado en el concepto *entrada-salida*. Apelamos a la teoría comportamental de Willems y la usamos como guía conceptual para abordar el problema de control. En la Sección 4 hacemos un breve recordatorio sobre análisis convexo y nos detenemos en la propiedad de monotonía. Vemos que la clase de controladores que nos interesa puede estudiarse desde la perspectiva de operadores multivaluados y que la propiedad de monotonía resulta ser sumamente relevante en el contexto de pasividad. En la Sección 5 analizamos sistemas hamiltonianos acoplados a operadores multivaluados monótonos. Finalmente, las conclusiones se encuentran en la Sección 6.

**2. Preservación de estructura como principio de diseño**

Consideremos un sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

donde el estado  $x$  pertenece a  $\mathbb{R}^n$  y el control  $u$  pertenece a un espacio métrico  $\mathbb{U}$ . Supongamos que el campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuo y que el objetivo es estabilizar asintóticamente al origen  $x = 0$ . Se sabe que una condición necesaria y suficiente para alcanzar el objetivo es la existencia de una *función de Liapunov asignable* (FLA<sup>1</sup>), es decir, de una función continuamente diferenciable  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , positiva definida y tal que

$$\inf_{u \in \mathbb{U}} \nabla V(x) \cdot f(x, u) < 0 \tag{2}$$

para todo  $x \neq 0$  (Artstein, 1983).

Consideremos el caso particular en el que  $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$  y

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i. \tag{3}$$

Definamos las funciones escalares  $a(x) = \nabla V(x) \cdot f_0(x)$  y  $b_i(x) = \nabla V(x) \cdot g_i(x)$  y supongamos ahora que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| < \delta, \quad x \neq 0 \implies \inf_{\|u\| < \varepsilon} \left( a(x) + \sum_{i=1}^m b_i(x)u_i \right) < 0. \tag{4}$$

(Esta es una versión más fuerte que (2)). Supongamos además que la función  $V$  y los campos vectoriales  $f_0, g_1, \dots, g_m$  son suaves. Entonces, existe una ley de control  $u = \hat{u}(x)$  que estabiliza asintóticamente al origen y que además es continua. Incluso, dicha ley puede calcularse explícitamente como

$$\hat{u}_i(x) = -b_i(x)\phi \left( a(x), \sum_{j=1}^m b_j^2(x) \right), \quad i = 1, \dots, m, \tag{5}$$

donde

$$\phi(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } b = 0 \\ \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} & \text{cuando } b \neq 0 \end{cases}$$

(Sontag, 1989).

Los resultados de Artstein y Sontag sorprenden por su generalidad. Sin embargo, no pueden aplicarse directamente pues, aunque se dispone de la forma explícita (5), primero es necesario encontrar una FLA. Encontrar una solución  $V$  para (2) es difícil, en especial cuando las soluciones se buscan en todo el espacio  $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  de funciones con valores reales y continuamente diferenciables. Bajo esta perspectiva, una técnica de control será aplicable en tanto se proponga un conjunto  $\mathcal{V} \subset C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  que sea lo suficientemente reducido como para que el problema (2) sea tratable, pero con la garantía de que existan soluciones  $V \in \mathcal{V}$ .

Una manera efectiva de acotar la búsqueda de una FLA es preservando la estructura que tiene el sistema en lazo abierto. Por ejemplo, si el sistema en lazo abierto es lineal,

$$f(x, u) = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \tag{6}$$

es razonable proponer una ley de control lineal  $\hat{u}(x) = -Kx$ , de tal suerte que el sistema en lazo cerrado también sea lineal. La restricción propuesta es sin pérdida de generalidad, pues si un sistema lineal puede estabilizarse por medio de una retroalimentación de estado arbitraria, entonces puede estabilizarse por medio de una retroalimentación lineal. Además, la búsqueda de funciones asignables puede restringirse a  $\mathcal{V}_Q \subset C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , donde

$$\mathcal{V}_Q = \{V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid V(x) = x^T Qx, \quad Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$$

es el conjunto de funciones cuadráticas homogéneas. En efecto, un sistema lineal es estabilizable si, y sólo si, la desigualdad lineal matricial (DLM<sup>2</sup>)

$$(B^\perp)^T (AP + A^T P) B^\perp < 0 \tag{7}$$

tiene una solución  $P$  positiva definida (Boyd et ál., 1994). En la desigualdad anterior,  $B^\perp$  es una matriz de rango máximo cuyas columnas generan el complemento ortogonal a la imagen de  $B$ . Cuando se tiene  $V \in \mathcal{V}_Q$  y el caso lineal (6), la desigualdad (4) es equivalente a la implicación

$$x^T QB = 0, \quad x \neq 0 \implies x^T (QA + A^T Q)x < 0.$$

<sup>1</sup>CLF en inglés.

<sup>2</sup>LMI en inglés.

Para ver esto, notemos que cuando  $b_i(x) = 0$  para toda  $i$  (es decir, cuando  $x^T QB = 0$ ), la expresión  $a(x) + \sum_{i=1}^m b_i(x)u_i$  sólo puede ser negativa si  $a(x)$  es negativa (es decir, si  $x^T(QA + A^T Q)x < 0$ ). Usando el lema de Finsler se puede verificar que (4) se reduce a (7) con la FLA dada por  $Q = P^{-1}$ . El control puede calcularse usando (5) o simplemente haciendo  $\hat{u}(x) = -B^T P^{-1}x$  (Duan y Yu, 2013). Las ventajas son claras: primero,  $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  es de dimensión infinita mientras que  $\mathcal{V}_Q$  es de dimensión finita; y segundo, la desigualdad (4) es en derivadas parciales mientras que (7) es algebraica.

La idea de usar la preservación de estructura como principio de diseño puede extenderse a sistemas homogéneos más generales que los lineales (Bacciotti y Rosier, 2005). Por ejemplo, se puede diseñar un control homogéneo para sistemas homogéneos usando una FLA homogénea. Si se tiene cuidado con los pesos y grados de homogeneidad, se garantiza que el sistema en lazo cerrado también sea homogéneo. La estrategia funciona particularmente bien en sistemas con restricciones no holonómicas (Rocha et ál., 2022).

A continuación retomamos el control basado en pasividad desde la óptica de preservación de estructura y de los conjuntos  $\mathcal{V}$  que de ella resultan.

### 2.1. Control basado en pasividad

La noción de pasividad proviene originalmente de la teoría de circuitos eléctricos, pero fue formalizada y generalizada por Willems (1972a) en el contexto de sistemas dinámicos. La definición general permite construir una teoría de interconexión de sistemas (Willems, 1972b) y además vincula diferentes nociones de estabilidad, por ejemplo, en el sentido  $\mathcal{L}_2$  o en el de Liapunov (Ortega et ál., 1998; van der Schaft, 2017).

La pasividad es una propiedad de sistemas abiertos, con entradas y salidas, por lo que consideraremos de nuevo al sistema (1) con  $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$  y definiremos la salida  $y \in \mathbb{R}^m$  a partir de una función  $h$ ,

$$y = h(x, u) . \tag{8}$$

**Definición 1.** Decimos que el sistema (1), (8) es *pasivo* si existe una *función de almacenamiento*  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  acotada inferiormente y tal que, para cualesquiera  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  y control admisible  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se tiene

$$H(x(t_1)) - H(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} y(\tau) \cdot u(\tau) d\tau . \tag{9}$$

(Por control admisible nos referimos a un control tal que la integral del lado derecho esté bien definida).

Los modelos de sistema físicos normalmente satisfacen la propiedad de pasividad, en cuyo caso la función de almacenamiento corresponde a la energía total almacenada en el sistema y el par  $(u, y)$  define un puerto a través del cual el sistema interactúa con el ambiente. El producto interno  $y \cdot u$  representa la potencia que circula a través del puerto en un momento dado. El puerto  $(u, y)$  puede estar constituido, por ejemplo, por pares fuerza-velocidad en sistemas mecánicos, o intensidad-tensión

en circuitos eléctricos. La desigualdad (9) establece que el incremento en la energía almacenada siempre es menor que la suministrada a través del puerto (la diferencia se disipa por medio de algún mecanismo de fricción).

El *control basado en pasividad* es un término amplio que engloba varios conceptos, aunque sin duda el más importante es la preservación de pasividad. Es decir, se parte de un sistema pasivo y se busca un control

$$u = \hat{u}(x) + v \tag{10}$$

tal que el sistema en lazo cerrado sea también pasivo, pero con una función de almacenamiento diferente y con un puerto definido por un nuevo par entrada-salida,  $(v, w)$ . Esta idea, llamada *moldeo de energía*<sup>3</sup>, fue aplicada primero por Takegaki y Arimoto (1981) al control de robots manipuladores completamente actuados y después fue reconocida como un principio de diseño general en el artículo histórico de Ortega y Spong (1989). Desde entonces, la idea ha sido desarrollada y sistematizada hasta formar un cuerpo sólido de técnicas orientadas al control de sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos (Ortega et ál., 1998; van der Schaft, 2017; Fantoni y Lozano, 2002; Brogliato et ál., 2020).

Usualmente es más útil escribir (9) con igualdad y en su versión diferencial,

$$\dot{H}(x(t)) = y(t) \cdot u(t) + d(x(t)) , \tag{11}$$

donde  $d(x(t)) \leq 0$  es la función de disipación. Naturalmente, esta forma presupone la diferenciabilidad de la función de almacenamiento.

Una manera simple (aunque restrictiva) de preservar la pasividad es con un control por *balance de energía* (Ortega et ál., 2001). Se busca una retroalimentación  $\hat{u}(x)$  tal que

$$\dot{H}_a(x(t)) = -h(x(t), \hat{u}(x(t))) \cdot \hat{u}(x(t)) \tag{12}$$

para alguna  $H_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . De acuerdo con (11), (10) y (12), se tiene

$$\dot{H}(x(t)) + \dot{H}_a(x(t)) = y(t) \cdot v(t) + d(x(t)) ,$$

es decir, el sistema en lazo cerrado sigue siendo pasivo, pero con función de almacenamiento  $H_d(x) = H(x) + H_a(x)$ .

Al abordar el problema de estabilización asintótica normalmente se procura que  $H_d(x)$  sea positiva definida, de tal suerte que  $H_d$  pueda usarse como función de Liapunov. En una segunda etapa se cierra el puerto con, por ejemplo, una ley pasiva de la forma

$$v(t) = -K_y \cdot y(t) , \quad K_y \geq 0 . \tag{13}$$

A la ley (13) o a cualquiera que satisfaga  $y(t) \cdot v(t) \leq 0$  se le llama *inyección de amortiguamiento*. Desafortunadamente,  $H_d$  normalmente no resulta en una función de Liapunov estricta (su derivada con respecto al tiempo es sólo negativa semidefinida), por lo que para establecer la estabilidad asintótica se requiere verificar la detectabilidad del origen con respecto a  $(y^T K_y y, d)$ . En general se selecciona  $K_y > 0$ , con lo que la estabilidad asintótica se establece verificando la condición de detectabilidad con respecto a  $(y, d)$ , lo que es más simple. Usualmente, la

<sup>3</sup>Energy shaping en inglés.

ley (13) juega un rol secundario y  $K_y$  se usa sólo para modular las tasas de convergencia al modificar el amortiguamiento del sistema.

## 2.2. Control de sistemas hamiltonianos con puerto

Es posible llevar la idea de preservación de estructura más lejos si partimos de una clase más concreta de sistemas. En este artículo nos enfocamos en sistemas hamiltonianos con puerto (Maschke y van der Schaft, 1992). En pocas palabras, un sistema hamiltoniano con puerto es lo que resulta de dotar a un sistema hamiltoniano clásico con entradas, salidas y disipación.

**Definición 2.** Un sistema hamiltoniano con puerto  $(u, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , espacio de estados  $\mathbb{R}^n$  y hamiltoniano  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)]\nabla H(x) + [G(x) - P(x)]u \\ y &= [G(x) + P(x)]^\top \nabla H(x) + [M(x) + N(x)]u \end{aligned} \quad (14)$$

**Hipótesis 1.** La matriz de interconexión  $J(x)$  y la matriz  $M(x)$  satisfacen  $J(x) = -J^\top(x)$  y  $M(x) = -M^\top(x)$ . La matriz de amortiguamiento  $R(x)$ , junto con las matrices  $P(x)$  y  $N(x)$ , satisfacen

$$\mathcal{R}(x) = \begin{pmatrix} R(x) & P(x) \\ P^\top(x) & N(x) \end{pmatrix} \geq 0. \quad (15)$$

Un cálculo directo muestra que

$$\dot{H}(x) = -(\nabla H(x)^\top \quad u^\top) \mathcal{R}(x) \begin{pmatrix} \nabla H(x) \\ u \end{pmatrix} + y(t) \cdot u(t). \quad (16)$$

La Hipótesis 1 implica que, si el hamiltoniano está inferiormente acotado, el sistema es pasivo con función de almacenamiento  $H$  (van der Schaft, 2017).

Ortega et ál. (2008) consideran el caso  $M(x) + N(x) = 0$ ,  $P(x) = 0$  y estudian controladores que preservan la estructura hamiltoniana. Para simplificar la exposición, haremos un abuso de notación y en la definición de FLA omitiremos la distinción entre funciones de Liapunov estrictas y no estrictas. Definamos el conjunto

$$\mathcal{V}_{EB} = \left\{ H(x) + H_a(x) \mid \begin{pmatrix} G^\top(x) \\ G^\perp(x)(J(x) - R(x)) \end{pmatrix} \nabla H_a(x) \equiv 0 \right\}.$$

Cuando  $H_d \in \mathcal{V}_{EB}$  es positiva definida, entonces es una FLA. De hecho, un control que asigna a  $H_d$  como función de Liapunov es

$$\hat{u}(x) = G^+(x)(J(x) - R(x))\nabla H_a(x), \quad (17)$$

donde  $G^+(x)$  es la pseudoinversa de Moore-Penrose. Es relativamente simple verificar que el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)]\nabla H_d(x) + G(x)v \\ w &= G(x)^\top \nabla H_d(x) \end{aligned}, \quad (18)$$

por lo que  $\dot{H}_d(x(t)) \leq w(t) \cdot v(t) + d(x(t))$  y la derivada puede hacerse negativa semidefinida fácilmente con  $v$ . Ortega et ál. (2008) también muestran que (17) es un control por balance de energía (satisface (12)). Este control es el más restrictivo pues vemos que, además de preservar la estructura hamiltoniana, el control preserva los parámetros  $J$  y  $R$ . Incluso, el control preserva las funciones de disipación y de salida (Castaños et ál., 2009); es decir, lo único que se modifica es el hamiltoniano.

El conjunto  $\mathcal{V}_{EB}$  puede ampliarse a

$$\mathcal{V}_{BIDA} = \left\{ H(x) + H_a(x) \mid G^\perp(x)(J(x) - R(x))\nabla H_a(x) \equiv 0 \right\}.$$

El control (17) también asigna la función  $H_d \in \mathcal{V}_{BIDA}$  y resulta en (18), por lo que se preserva la estructura y los parámetros  $J$  y  $R$ . Sin embargo, si no se tiene  $G^\top(x)(J(x) - R(x))\nabla H_a(x) \equiv 0$ , no se cumple (12) y no se preservan las funciones de disipación y de salida. Al control (17) se le conoce como control por asignación de interconexión y amortiguamiento básico (BIDA, en inglés).

A su vez, el conjunto  $\mathcal{V}_{BIDA}$  puede ampliarse a

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{IDA} = \left\{ H(x) + H_a(x) \mid G^\perp(J_d(x) - R_d(x))\nabla H_a(x) \equiv \right. \\ \left. G^\perp(J(x) - J_d(x) - R(x) + R_d(x))\nabla H(x), \right. \\ \left. J_d(x) = -J_d^\top(x), R_d(x) = R_d^\top(x) \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

En este caso, el control que asigna  $H_d \in \mathcal{V}_{IDA}$  es

$$\hat{u}(x) = G^+(x)[(J_d(x) - R_d(x))\nabla H_d(x) - (J(x) - R(x))\nabla H(x)] \quad (19)$$

y el sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d(x) + G(x)v \\ w &= G(x)^\top \nabla H_d(x) \end{aligned}.$$

Vemos que se preserva la estructura pero no las matrices de interconexión y amortiguamiento. A este tipo de control se le llama, justamente, control por asignación de interconexión y amortiguamiento (IDA).

Claramente,  $\mathcal{V}_{EB} \subset \mathcal{V}_{BIDA} \subset \mathcal{V}_{IDA}$ . Estas inclusiones sugieren la siguiente lógica de diseño: Buscar una función positiva definida  $H_d \in \mathcal{V}_{EB}$ . La tarea es relativamente simple, pues el conjunto  $\mathcal{V}_{EB}$  es fácil de caracterizar. En caso de que no exista tal  $H_d$ , probar enseguida con  $\mathcal{V}_{BIDA}$  y finalmente con  $\mathcal{V}_{IDA}$ .

Vale la pena mencionar que el control IDA es sin pérdida de generalidad en el sentido de que, si existe un control arbitrario que estabiliza al sistema, entonces también existe un control de la forma (19) que lo estabiliza (Wu et ál., 2020). Como los resultados de Artstein y Sontag, este resultado sorprende por su nivel de generalidad. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la generalidad puede ser un arma de doble filo, pues la aplicación de IDA puede verse entorpecida por la dificultad de caracterizar a  $\mathcal{V}_{IDA}$ .

Dentro de la óptica de preservación de estructura cabe mencionar otro resultado interesante. En lugar de la retroalimentación de estado (17), es posible implementar el control por medio de un tercer sistema hamiltoniano. Así, la planta, el controlador y el sistema en lazo cerrado tienen una representación hamiltoniana, lo que se inscribe dentro del llamado control por interconexión de sistemas hamiltonianos (Ortega et ál., 2008; Castaños et ál., 2009).

Naturalmente, existen otras estructuras y propiedades que pueden preservarse. Por ejemplo, Bloch et ál. (2000, 2001) parten de un sistema lagrangiano y proponen un control que preserva tanto la estructura como las simetrías que se derivan del lagrangiano del sistema original.

### 3. Enfoque comportamental de Willems

Otra de las contribuciones de Willems (1989) es el enfoque *comportamental* de la teoría de control. Uno de los argumentos centrales es que el modelo entrada–estado–salida dado por (1) y (8) induce un sesgo al asignar, antes de hacer análisis, los roles de las variables que intervienen en el proceso. En otras palabras, asumir de antemano que  $u$  y  $y$  juegan los roles de entrada y salida, respectivamente, supone problemas conceptuales. Incluso, Willems (2007) cuestiona la utilidad del paradigma entrada–salida e ilustra su argumento con varios ejemplos prácticos.

Para Willems, el proceso de modelado comienza definiendo un universo  $\mathbb{V}$  de resultados posibles del fenómeno de interés, es decir, de la planta. Usualmente,  $\mathbb{V}$  es un espacio de funciones de tiempo continuo o discreto. Un modelo matemático es entonces un subconjunto  $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}$  de resultados que son compatibles con las leyes que describen el fenómeno. Decimos que  $\mathcal{B}$  es el *comportamiento* de la planta. De manera similar, el controlador se describe por medio de un comportamiento  $\mathcal{B}_c \subset \mathbb{V}$ . Así, el sistema que resulta de interconectar al controlador y a la planta es el subconjunto de resultados que son compatibles tanto con la planta como con la ley de control,  $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_c \subset \mathbb{V}$ .

*Ejemplo: Regulación de una fuente de alimentación. Parte I*

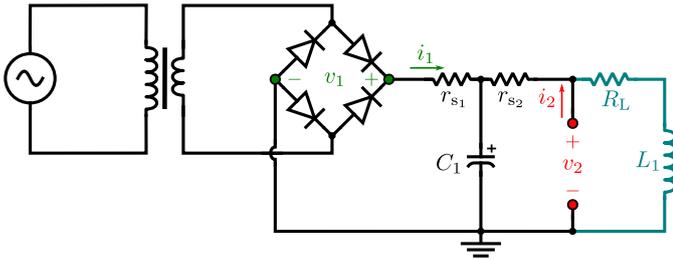


Figura 1: Diagrama de una fuente de alimentación (en negro). Por medio del puerto  $(i_2, v_2)$  (en rojo), se desea regular la tensión aplicada a la carga (en turquesa).

Ilustremos el enfoque con un ejemplo simple. En la Figura 1 se muestra el diagrama de una fuente de alimentación. A partir del puerto  $(i_2, v_2)$ , sea deseada regular la tensión en la carga formada por la resistencia  $R_L$  y el inductor  $L_1$ . Si como estado elegimos a la carga  $q$  en el condensador  $C_1$  y al flujo magnético  $\varphi$  en el inductor,  $x = (q, \varphi)$ , la energía almacenada está determinada por

$$H(x) = \frac{1}{2C_1}q^2 + \frac{1}{2L_1}\varphi^2. \quad (20)$$

Realizando un análisis estándar de nodos y mallas, podemos describir al circuito en la forma hamiltoniana (14). Concretamente,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(R_L + r_{s2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} i_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ r_{s2} \end{pmatrix} i_2 \quad (21)$$

y

$$v_1 = \frac{q}{C_1} + r_{s1}i_1 \quad (22a)$$

$$v_2 = \frac{q}{C_1} - r_{s2}\frac{\varphi}{L_1} + r_{s2}i_2. \quad (22b)$$

Claramente, el hamiltoniano (20) está inferiormente acotado, por lo que el circuito es pasivo con función de almacenamiento  $H$ , entrada  $u = (i_1, i_2)$  y salida  $y = (v_1, v_2)$ .

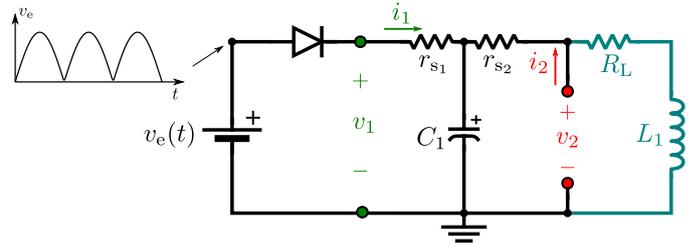


Figura 2: Diagrama simplificado de la fuente de alimentación mostrada en la Figura 1.

Supongamos que en el devanado secundario del transformador existe una tensión  $v_p \sin(\omega t)$ , donde  $v_p \geq 0$  y  $\omega \geq 0$  son la tensión de pico y la frecuencia, respectivamente. Supongamos además que los diodos del puente rectificador son ideales y notemos que los diodos impiden que la intensidad de corriente  $i_1$  sea negativa. Es posible simplificar el diagrama de la fuente como se muestra en la Figura 2. Así, la relación entre las variables del puerto  $(i_1, v_1)$  quedan determinadas por la característica del diodo, es decir, por el problema de complementariedad lineal (Cottle et ál., 2009)

$$i_1 \geq 0, \quad v_1 - v_e(t) \geq 0 \quad \text{y} \quad (v_1 - v_e(t)) \cdot i_1 = 0, \quad (23)$$

donde

$$v_e(t) = v_p |\sin(\omega t)|. \quad (24)$$

El problema de complementariedad es lo suficientemente simple como para obtener una expresión explícita de la intensidad,

$$i_1 = \frac{1}{r_{s1}} \max \left\{ 0, v_e(t) - \frac{q}{C_1} \right\},$$

aunque, como veremos, será más útil realizar el análisis directamente con (23).

Definamos el error  $e(t) = v_2(t) - v_s$ , donde  $v_s > 0$  es la tensión constante que se desea aplicar a la carga. Dentro del marco entrada–salida, el objetivo puede plantearse como sigue: Diseñar un control  $i_2(t)$  tal que  $e(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Aunque existe una extensa literatura sobre el control de circuitos eléctricos, la mayoría se inscribe dentro del marco entrada–salida (Ortega et ál., 2003; Castaños et ál., 2009; Ortega et ál., 2021). Este paradigma puede ser útil en sistemas lo suficientemente sofisticados como para justificar el control por medio de un procesador de señales pero, en otros casos, el paradigma nos lleva a propuestas de diseño desatinadas. En nuestro ejemplo concreto, la solución más simple sería el control proporcional e integral

$$i_2(t) = -K_P e(t) - K_I \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad K_P, K_I > 0. \quad (25)$$

A pesar de la aparente simplicidad de (25), la puesta en práctica presenta problemas, pues requiere de un procesador digital de señales o, en el mejor de los casos, de amplificadores operacionales. Tanto un procesador de señales como un amplificador operacional necesitan de una fuente de alimentación regulada, lo que nos lleva al siguiente absurdo:

Deme una fuente de alimentación regulada y construiré un regulador para su fuente no regulada.

Consideremos ahora el enfoque comportamental. Las variables de interés son las que conforman el segundo puerto,  $(i_2, v_2)$ . Definimos el semieje no negativo  $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$  y proponemos el universo  $\mathbb{V}$  como el espacio de pares  $(i_2, v_2)$  de funciones  $i_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  medibles en el sentido de Lebesgue. Del desarrollo previo obtenemos el comportamiento

$$\mathcal{B} = \{(i_2, v_2) \in \mathbb{V} \mid \exists q, \varphi, i_1, v_1 \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ que satisfacen (21), (22) y (23)}\} .$$

Para que la implementación sea razonable, restringimos nuestra atención a controladores estáticos y pasivos. Los controladores estáticos son los que tienen la forma

$$\mathcal{B}_c = \{(i_2, v_2) \in \mathbb{V} \mid (i_2(t), v_2(t)) \in K_c \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+\} , \quad (26)$$

donde  $K_c$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que no depende del tiempo. Sea  $P_c$  la unión del segundo y cuarto cuadrantes,

$$P_c = \{(i_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (-i_2) \cdot v_2 \geq 0\} .$$

Para que  $\mathcal{B}_c$  sea pasivo, requerimos que  $K_c \subset P_c$ <sup>4</sup>. Por otro lado, la consigna  $v_2(t) = v_s$  sugiere el conjunto objetivo

$$O_c = \{(i_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = v_s\} .$$

Claramente, el objetivo no es completamente compatible con la propiedad de pasividad ( $O_c \not\subset P_c$ ), por lo que es necesario establecer un compromiso. En la Figura 3 se ilustra un conjunto  $K_c$  que cumple con las siguientes propiedades:

$$O_c \cap P_c \subset K_c \subset P_c .$$

Además, mostraremos más adelante que  $K_c$  tiene la ventaja de que puede escribirse como la gráfica de una multifunción máximamente monótona, lo cual jugará un papel importante en el principio de preservación de estructura y en el análisis de estabilidad.

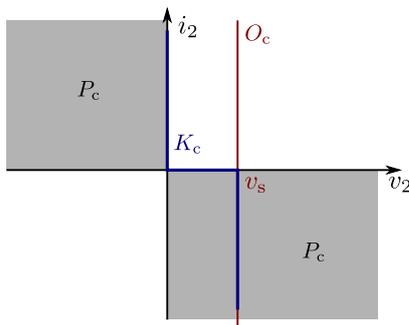


Figura 3: Subconjunto  $P_c$  que caracteriza a los controladores pasivos (en gris), conjunto objetivo  $O_c$  (en rojo) y propuesta del conjunto  $K_c$  que define al controlador (26) (en turquesa).

El conjunto  $K_c$  define la característica de un diodo zener con tensión de ruptura  $v_s$  y corresponde, por supuesto, a la solución

de regulación que una o un estudiante de electrónica propondría naturalmente. En las secciones siguientes presentaremos las herramientas de análisis, mostraremos que el sistema controlado está bien definido ( $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_c \neq \emptyset$ ), y veremos bajo qué condiciones se cumple con el objetivo  $v_2(t) \rightarrow v_s$ .

Finalmente, notemos que el controlador  $\mathcal{B}_c$  escapa al paradigma entrada-salida, pues no es posible asignar los roles de entrada o salida a las variables  $i_2$  o  $v_2$ , es decir, ni  $i_2$  puede escribirse como una función de  $v_2$  ni  $v_2$  puede escribirse como una función de  $i_2$ .

#### 4. Funciones superpotenciales

El enfoque comportamental proporciona herramientas conceptuales que nos permiten abordar una gran variedad de problemas de control. Sin embargo, no es claro a primera vista cómo diseñar y analizar comportamientos concretos. Aquí se propone el análisis multivaluado (el análisis de funciones cuyos valores son subconjuntos, no elementos) como instrumento principal para estudiar y construir comportamientos. La propuesta es bastante natural pues, después de todo, los comportamientos son subconjuntos.

El análisis de operadores multivaluados tiene sus orígenes en el análisis convexo (Rockafellar, 1972; Hiriart-Urruty y Lemaréchal, 1993). Dichos operadores aparecen al generalizar la noción de gradiente a funciones que no necesariamente son derivables en el sentido usual. Brézis (1973) identificó la importancia de la propiedad de monotonía de los operadores multivaluados que resultan de diferenciar funciones convexas, y tanto Brézis (1973) como Moreau (1966) estudiaron sistemas dinámicos gobernados por operadores multivaluados. Brogliato (2004); Brogliato y Goeleven (2011) establecieron la conexión entre monotonía y pasividad. Miranda y Castaños (2017); Miranda et ál. (2017) aplicaron operadores multivaluados en el contexto de control basado en pasividad. Para más detalles sobre sistemas acoplados a operadores multivaluados, recomendamos la revisión de Brogliato y Tanwani (2020).

Sea  $2^{\mathbb{R}^m}$  el conjunto potencia de  $\mathbb{R}^m$ , es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^m$ . Una multifunción en  $\mathbb{R}^m$  es un mapa que, a cada  $y \in \mathbb{R}^m$ , le asocia un subconjunto  $U(y) \subset \mathbb{R}^m$ ,  $U : \mathbb{R}^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ . Definimos el dominio de  $U$  como

$$\text{Dom } U = \{y \in \mathbb{R}^m \mid U(y) \neq \emptyset\}$$

y su gráfica como

$$\text{Gráf } U = \{(u, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid u \in U(y)\} .$$

Podemos usar multifunciones para definir comportamientos bastante generales. Por ejemplo, si las variables de interés están dadas por el puerto  $(u, y)$ , podemos definir el controlador

$$\mathcal{B}_c = \{(u, y) \in \mathbb{V} \mid -u(t) \in U_c(y(t)) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+\} . \quad (27)$$

En análisis convexo resulta conveniente permitir que una función tome sus valores en los reales extendidos,  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . (La conveniencia surge de problemas de optimización con restricciones, pero nosotros le daremos otro uso).

<sup>4</sup>Requerimos que  $K_c$  esté contenido en el segundo y cuarto cuadrante (en lugar del primero y el tercero), porque  $i_2$  se define como la intensidad que sale del controlador.

**Definición 3.** Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Definimos el *dominio efectivo* como

$$\text{Dom } f = \{y \in \mathbb{R}^m \mid f(y) < \infty\}$$

y decimos que  $f$  es *propia* si  $\text{Dom } f \neq \emptyset$ .

**Definición 4.** Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función propia y convexa. La *subdiferencial*  $\partial f(x)$  de  $f$  evaluada en  $x \in \mathbb{R}^m$  se define como

$$\partial f(x) = \{y' \in \mathbb{R}^m \mid f(w) - f(x) \geq y' \cdot (w - x), w \in \mathbb{R}^m\}.$$

En el caso de funciones  $f$  convexas y continuamente diferenciables, la subdiferencial contiene un sólo elemento: el gradiente de  $f$ . Cuando  $f$  no es diferenciable, la subdiferencial consiste en la envolvente convexa de las derivadas direccionales (ver la Figura 4).

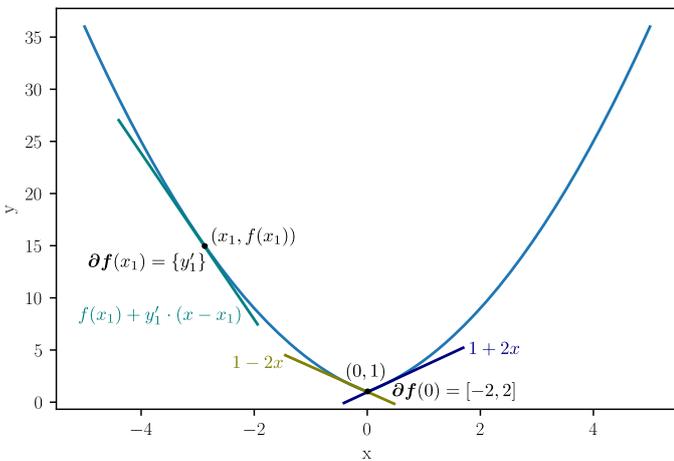


Figura 4: Subdiferenciales de la función convexa  $f(x) = \max\{(x-1)^2, (x+1)^2\}$ . Como  $f$  es continuamente diferenciable en  $x_1$ , la subdiferencial consiste en un sólo punto,  $\partial f(x_1) = \{y'_1\}$ . Como  $f$  no es continuamente diferenciable en 0, la subdiferencial consiste en un intervalo,  $\partial f(0) = [-2, 2]$ .

Es un hecho conocido que el gradiente de una función suave convexa es monótonamente creciente. La subdiferencial generaliza esta propiedad.

**Definición 5.** Una multifunción  $U : \mathbb{R}^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$  es *monótonamente creciente* si, para cualesquiera pares  $(u, y), (\bar{u}, \bar{y}) \in \text{Gráf } U$ , se preserva la relación

$$(u - \bar{u}) \cdot (y - \bar{y}) \geq 0.$$

Si, además, para todo  $(u, y) \notin \text{Gráf } U$  existe un  $(\bar{u}, \bar{y}) \in \text{Gráf } U$  tal que  $(u - \bar{u}) \cdot (y - \bar{y}) < 0$ , entonces decimos que  $U$  es *máxima* y *monótonamente creciente*.

En otras palabras, si  $U$  es un mapa monótonamente creciente, decimos que lo es *máximamente* si la gráfica de  $U$  no puede aumentarse sin destruir la propiedad de monotonía.

**Corolario 1.** (Rockafellar, 1972, Cor. 31.5.2) Si la función  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es *propia, convexa e inferiormente semicontinua*, entonces  $\partial f$  es *máxima* y *monótonamente creciente*.

Una función convexa importante es la *función indicadora*  $\psi_S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  de un conjunto convexo  $S \subset \mathbb{R}^m$ ,

$$\psi_S(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in S \\ +\infty & \text{si } y \notin S \end{cases}.$$

Es relativamente fácil mostrar que la subdiferencial de  $\psi_S(y)$  es igual al *cono normal* a  $S$  en  $y$ ,

$$\partial \psi_S(y) = N_S(y) = \{y' \in \mathbb{R}^m \mid 0 \geq y' \cdot (w - y), w \in S\}; \quad (28)$$

que  $N_S(y) = \{0\}$  cuando  $y$  pertenece al interior de  $S$ ,  $y \in \text{int } S$ ; y que  $N_S(y) = \emptyset$  cuando  $y \notin S$ .

Al usar una multifunción  $U$  para definir una relación entre variables de puerto, la propiedad de monotonía corresponde precisamente a la propiedad de pasividad incremental<sup>5</sup>. Si además tenemos  $0 \in U(0)$ , entonces el comportamiento es pasivo.

*Nota 1.* Al definir (27) a partir de la multifunción monótona  $U_c = \partial \psi_S$ , obtenemos naturalmente un controlador incrementalmente pasivo. En línea con la terminología propuesta por Acary et ál. (2011), diremos que  $\psi_S$  es una función *superpotencial* del controlador.

La operación de proyección es útil para el análisis de sistemas definidos por funciones superpotenciales.

**Definición 6.** Sea  $\|\cdot\|_N$  la norma inducida por la matriz positiva definida  $N \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\|v\|_N = \sqrt{v^T N v}$ . Usamos  $\text{Proy}_\Sigma(N, v)$  para denotar la *proyección* de  $v$  sobre el conjunto  $\Sigma$  usando la norma inducida por  $N$ ,

$$\text{Proy}_\Sigma(N, v) = \arg \min_{w \in \Sigma} \|v - w\|_N.$$

*Ejemplo: Regulación de una fuente de alimentación. Parte II*

La función indicadora es útil para describir y analizar dispositivos conmutados. Consideremos de nuevo la característica del diodo ideal,

$$i_D \geq 0, \quad v_D \geq 0 \quad \text{y} \quad v_D \cdot i_D = 0 \quad (29)$$

y consideremos el conjunto convexo  $\mathbb{R}_+$ . La subdiferencial de su función indicadora es

$$\partial \psi_{\mathbb{R}_+}(v_D) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } v_D < 0 \\ -\mathbb{R}_+ & \text{si } v_D = 0 \\ \{0\} & \text{si } v_D > 0 \end{cases},$$

de donde vemos que la inclusión  $-i_D \in \partial \psi_{\mathbb{R}_+}(v_D)$  es equivalente al problema de complementariedad (29) y que  $\psi_{\mathbb{R}_+}$  es una función superpotencial del diodo. De acuerdo con el Corolario 1, la multifunción  $\partial \psi_{\mathbb{R}_+}$  es *máxima* y *monótonamente creciente*.

Podemos sustituir (22a) y (23) por la inclusión

$$-i_1 \in \partial \psi_{\mathbb{R}_+} \left( \frac{q}{C} + r_{s1} i_1 - v_e(t) \right), \quad (30a)$$

con lo que obtenemos un sistema dinámico acoplado a una multifunción monótona.

<sup>5</sup>Para la noción de pasividad incremental en el caso de mapas dinámicos, el lector puede referirse a Jayawardhana et ál. (2007) o a Pavolv y Marconi (2008).

Podemos definir al conjunto  $K_c$  con una multifunción. Tenemos  $K_c = \text{Gráf } U$ , donde

$$U(v_2) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } v_2 = 0 \\ \{0\} & \text{si } v_2 \in (0, v_s) \\ -\mathbb{R}_+ & \text{si } v_2 = v_s \\ \emptyset & \text{otro caso} \end{cases} .$$

De hecho, como  $-U = \partial\psi_{[0, v_s]}$ , podemos escribir al controlador usando la función superpotencial  $\psi_{[0, v_s]}$ ,

$$\mathcal{B}_c = \{(i_2, v_2) \in \mathbb{V} \mid -i_2(t) \in \partial\psi_{[0, v_s]}(v_2(t)) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+\},$$

de tal suerte que de (22b) obtenemos

$$-i_2 \in \partial\psi_{[0, v_s]} \left( \frac{q}{C_1} - r_{s_2} \frac{\varphi}{L_1} + r_{s_2} i_2 \right) . \quad (30b)$$

Incluso, es posible escribir (30) de manera todavía más compacta. Para tal efecto, recordemos que  $u = (i_1, i_2)$  y  $y = (v_1, v_2)$ , y definamos el conjunto  $S = \mathbb{R}_+ \times [0, v_s] \subset \mathbb{R}^2$ . Notemos que  $\psi_S(y) = \psi_{\mathbb{R}_+}(v_1) + \psi_{[0, v_s]}(v_2)$ , lo que nos permite reescribir (30) como

$$-u \in \partial\psi_S(y), \quad y = Cx + Du + D_e v_e(t), \quad (31)$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{r_{s_2}}{L_1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} r_{s_1} & 0 \\ 0 & r_{s_2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

El comportamiento controlado es entonces

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_c = \left\{ \left( i_2, \frac{q}{C_1} - r_{s_2} \frac{\varphi}{L_1} + r_{s_2} i_2 \right) \in \mathbb{V} \mid q, \varphi, i_2 \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \right. \\ \left. \text{satisfacen (21) y (31) para alguna } i_1 \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \right\} .$$

**Nota 2.** El sistema controlado consta de un sistema dinámico acoplado a operadores monótonos, al igual que la planta en lazo abierto. En este sentido, el diseño está en línea con el principio de preservación de estructura.

### 5. Inyección de amortiguamiento usando funciones superpotenciales

Como se mencionó en la Sección 2, el control basado en pasividad normalmente consta de dos etapas: moldeo de energía (la principal) e inyección de amortiguamiento (secundaria). En la propuesta que se hace aquí, la segunda etapa adquiere mayor importancia, pues es en la que se realiza la tarea de regulación.

El ejemplo de las secciones anteriores nos motiva a estudiar sistemas hamiltonianos lineales acoplados a operadores multivaluados,

$$\dot{x} = (J - R)\nabla H(x) + (G - P)u \quad (32a)$$

$$y = (G + P)^\top \nabla H(x) + Nu + \bar{f}, \quad (32b)$$

$$-u \in \partial\psi_S(y) \quad (32c)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $(u, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  es el puerto,  $S \subset \mathbb{R}^m$  es un conjunto convexo,  $\bar{f} \in \mathbb{R}^m$  es una acción exógena constante y

$$H(x) = \frac{1}{2} x^\top Q x, \quad Q > 0 .$$

Supongamos que las matrices que intervienen en (32) son constantes y satisfacen la Hipótesis 1.

**Lema 1.** Consideremos al sistema (32). Si  $N > 0$  entonces, para toda  $x$  y toda  $\bar{f}$ , existe un, y sólo un, vector  $u$  solución de (32b) y (32c). Es más, la solución está dada por

$$u = N^{-1} \left( \text{Proy}_S \left( N^{-1}, Cx + \bar{f} \right) - (Cx + \bar{f}) \right) \quad (33)$$

con  $C = (G + P)^\top Q$ .

*Demostración.* De (32c) y (28) obtenemos

$$(Cx + \bar{f} - y)^\top N^{-1}(w - y) \leq 0, \quad w \in S .$$

Esta desigualdad caracteriza la proyección de  $Cx + \bar{f}$  sobre  $S$  usando la norma inducida por  $N^{-1}$ ,

$$y = \text{Proy}_S \left( N^{-1}, Cx + \bar{f} \right) \quad (34)$$

(Hiriart-Urruty y Lemaréchal, 1993, p. 117). Al sustituir  $y$  en (32b), recuperamos (33).  $\square$

**Nota 3.** Dado que la proyección es una función lipschitziana, al sustituir (33) de vuelta en (32a) se obtiene un campo vectorial que es Lipschitz continuo en  $x$ . Esto garantiza que, para cada condición inicial  $x(0) = x_0$ , existe una trayectoria única  $x \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ .

Los resultados que siguen nos ayudan a entender el efecto que tiene  $\bar{f}$  sobre la dinámica del sistema.

**Definición 7.** Consideremos al sistema (32). Decimos que  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  es un *tripleto de equilibrio* asociado a  $\bar{f}$  si

$$0 = (J - R)\nabla H(\bar{x}) + (G - P)\bar{u} \quad (35a)$$

$$\bar{y} = (G + P)^\top \nabla H(\bar{x}) + N\bar{u} + \bar{f} \quad (35b)$$

$$-\bar{u} \in \partial\psi_S(\bar{y}) . \quad (35c)$$

Para realizar el cálculo de  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$  se recomienda consultar la Sección 6 de Brogliato y Tanwani (2020).

**Lema 2.** Consideremos al sistema (32) con  $N > 0$  y sea  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$  un tripleto asociado a  $\bar{f} \in \mathbb{R}^m$ . El equilibrio  $\bar{x}$  es estable.

Si, además, se satisface la condición de detectabilidad

$$\| \bar{R}^{1/2} \nabla H(x(t) - \bar{x}) \| \equiv 0, \quad u(t) \equiv \bar{u} - N^{-1} P^\top \nabla H(x(t) - \bar{x}) \\ \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \quad (36)$$

con  $\bar{R} = R - PN^{-1}P^\top$ , entonces  $\bar{x}$  es global y asintóticamente estable.

Cabe mencionar que, como  $\bar{R}$  es el complemento de Schur de  $N$  en (15),  $\bar{R}$  es positiva semidefinida y su raíz cuadrada está bien definida.

Tabla 1: Parámetros del circuito de la Figura 2.

Carga		Resistencias parásitas		Capacitancia	Tensión a la entrada	
$R_L$	$L_1$	$r_{s1}$	$r_{s2}$	$C_1$	$v_p$	$\omega$
200 [Ω]	1 [mH]	5 [Ω]	5 [Ω]	1 [mF]	30 [V]	120π [rad/s]

*Demostración.* El resultado depende esencialmente de la pasividad incremental tanto del sistema hamiltoniano (32a), (32b) como del operador multivaluado (32c). Sumando (35a), (35b) con (32a), (32b) obtenemos el sistema hamiltoniano

$$\dot{x} = (J - R)\nabla H_d(x) + (G - P)(u - \bar{u}) \quad (37a)$$

$$y - \bar{y} = (G + P)^\top \nabla H_d(x) + N(u - \bar{u}) \quad (37b)$$

con  $H_d(x) = H(x - \bar{x})$ . De (16) podemos ver que

$$\dot{H}_d(x) = -(\nabla H_d(x)^\top \quad (u - \bar{u})^\top) \begin{pmatrix} R & P \\ P^\top & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla H_d(x) \\ u - \bar{u} \end{pmatrix} + (y - \bar{y}) \cdot (u - \bar{u})$$

o, de manera equivalente,

$$\dot{H}_d(x) = -\|\bar{R}^{1/2}\nabla H_d(x)\|^2 - \|N(u - \bar{u}) + P^\top \nabla H_d(x)\|_{N^{-1}}^2 + (y - \bar{y}) \cdot (u - \bar{u}).$$

La monotonía creciente de  $\partial\psi_S$  implica que

$$\dot{H}_d(x) \leq -\|\bar{R}^{1/2}\nabla H_d(x)\|^2 - \|N(u - \bar{u}) + P^\top \nabla H_d(x)\|_{N^{-1}}^2,$$

de donde concluimos que  $\bar{x}$  es estable y que el sistema admite la función de Liapunov  $H_d(x)$ . La estabilidad asintótica de  $\bar{x}$  es consecuencia del Teorema de LaSalle y de la condición de detectabilidad. La globalidad se deduce del hecho de que  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} H_d(x) = +\infty$  (Khalil, 1996).  $\square$

El sistema incremental (37) sugiere que  $\bar{f}$  tiene un efecto de moldeado de energía, pues cambia el hamiltoniano de  $H$  a  $H_d$ . De hecho, como el resto de los parámetros se mantiene constante, podríamos decir que es un control tipo BIDA, aunque con la particularidad de que  $\bar{f}$  interactúa con el sistema a través de  $y$ , la variable que tradicionalmente se consideraría como salida.

La robustez de  $\partial\psi_S$  se ve reflejada en la proyección (34), pues garantiza la existencia de un conjunto potencialmente ‘grande’ de estados posibles para los cuales la salida tiene el valor deseado. Sea  $Y_d \subset \mathbb{R}^m$  el conjunto de variables de puerto  $y$  deseadas y sea  $\Omega_d(\bar{f})$  el conjunto de estados para los cuales  $y \in Y_d$ ,

$$\Omega_d(\bar{f}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Proy}_S(N^{-1}, Cx + \bar{f}) \in Y_d\}. \quad (38)$$

Definimos la distancia de un punto  $y$  al conjunto  $Y_d$  como

$$\text{dist}(y, Y_d) = \inf_{w \in Y_d} \|y - w\|.$$

El siguiente teorema es una consecuencia directa de los Lemmas 1 y 2.

**Teorema 1.** Consideremos el sistema (32) con  $N > 0$  y sea  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$  un triplete asociado a  $\bar{f} \in \mathbb{R}^m$ . Si

$$\bar{x} \in \Omega_d(\bar{f}) \quad (39)$$

y se satisface la condición de detectabilidad (36), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(y(t), Y_d) = 0. \quad (40)$$

Si, en lugar de (39) se satisface la condición más fuerte

$$\bar{x} \in \text{int } \Omega_d(\bar{f}),$$

entonces la convergencia (40) es en tiempo finito, es decir, existe una  $T > 0$  tal que  $y(t) \in Y_d$  para toda  $t \geq T$ .

*Ejemplo: Regulación de una fuente de alimentación. Parte III*

Podemos verificar que las ecuaciones (21) y (31) tienen la forma (32) con  $x = (q, \varphi)$ ,  $u = (i_1, i_2)$  y  $y = (v_1, v_2)$ , y que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_L + r_{s2} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r_{s2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} r_{s1} & 0 \\ 0 & r_{s2} \end{pmatrix}.$$

Como se satisface la Hipótesis 1 y como  $N > 0$ , sabemos que el comportamiento del sistema controlado está bien formulado, es decir, de acuerdo al Lema 1 tenemos  $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_c \neq \emptyset$ .

El conjunto de variables de puerto deseadas es

$$Y_d = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = v_s\}$$

(deseamos que  $v_2 = v_s$ , mientras que  $v_1$  es irrelevante para nosotros). Para calcular el conjunto  $\Omega_d(\bar{f})$  descrito en (38), consideraremos el valor promedio de  $v_e(t)$ ,

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} -\bar{v}_e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_e = \frac{2}{\pi} v_p. \quad (41)$$

Es claro que  $\text{Proy}_S(N^{-1}, Cx + \bar{f}) \in Y_d$  es equivalente a que la segunda componente de  $Cx + \bar{f}$  sea mayor que  $v_s$ . Entonces,

$$\Omega_d(\bar{f}) = \left\{ (q, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{q}{C_1} - r_{s2} \frac{\varphi}{L_1} \geq v_s \right\}$$

(en este ejemplo particular,  $\Omega_d$  es independiente de  $\bar{f}$ ).

Como

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_L \end{pmatrix},$$

tenemos la siguiente cadena de implicaciones:

$$\|\bar{R}^{1/2}\nabla H(x(t) - \bar{x})\| \equiv 0 \implies \varphi(t) \equiv \bar{\varphi} \implies N^{-1}P^\top \nabla H(x(t) - \bar{x}) \equiv 0.$$

De la última equivalencia y de  $u(t) \equiv \bar{u} - N^{-1}P^\top \nabla H(x(t) - \bar{x})$  concluimos que  $u(t) \equiv \bar{u}$ . La ecuación de estado (21) se reduce entonces a

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(R_L + r_{s2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r_{s2} \end{pmatrix} \bar{u}.$$

Del segundo renglón observamos que

$$q(t) \equiv C_1(R_L + r_{s2}) \frac{\bar{\varphi}}{L_1} - C_1 r_{s2} \bar{u}_2 ,$$

por lo que  $\dot{q}(t) \equiv 0$  y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(R_L + r_{s2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{q}{C_1} \\ \frac{\varphi}{L_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r_{s2} \end{pmatrix} \bar{u} . \quad (42)$$

Esta ecuación es precisamente (35a), de donde verificamos que  $q(t) \equiv \bar{q}$ , es decir, que  $x(t) \equiv \bar{x}$ , por lo que se satisface la condición de detectabilidad (36). Del Teorema 1 concluimos que se cumple el objetivo  $v_2(t) \rightarrow v_s$  en tiempo finito.

Simularemos el sistema controlado usando los parámetros que se muestran en la Tabla 1. Supongamos que el objetivo es regular la tensión  $v_2$  al valor  $v_s = 12$  [V]. El vector  $C\bar{x} + \bar{f}$  y el conjunto  $S$  se muestran en la Figura 5. Puede verificarse que  $\bar{x} \in \Omega_d(\bar{f})$ . (De hecho, es tedioso pero simple ver que esto siempre es cierto para  $v_p$  lo suficientemente grande en (41)).

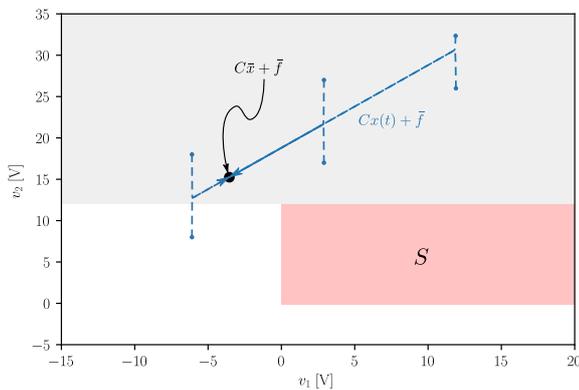


Figura 5: Conjunto  $S$ . Para cualquier vector  $(v_1, v_2)$  en la región gris,  $\text{Proy}_S(N^{-1}, v)$  resulta en un vector con componente  $v_2 = v_s$ . Como  $C\bar{x} + \bar{f}$  pertenece a la región gris, tenemos  $\bar{x} \in \Omega_d(\bar{f})$ .

En la Figura 6 se muestra el plano de fase del sistema cuando la tensión de entrada es constante,  $v_e(t) \equiv 2v_p/\pi$ . El Lema 2 predice que  $\bar{x}$ , el equilibrio asociado a  $\bar{f}$  en (41) es global y asintóticamente estable. Como  $\bar{x} \in \Omega_d(\bar{f})$ , sabemos que  $Cx(t) + \bar{f}$  eventualmente ingresará y permanecerá en la zona que garantiza que la tensión  $v_2$  sea igual a  $v_s$  (ver Teorema 1 y la Figura 5).

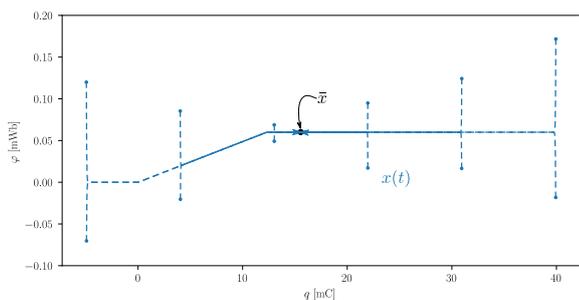


Figura 6: Plano de fase del sistema (21), (31) con la tensión constante  $v_e(t) \equiv 2v_p/\pi$ . Se aprecia que la dinámica de  $\varphi$  es mucho más rápida que la de  $q$  y que las trayectorias convergen al equilibrio  $\bar{x}$ .

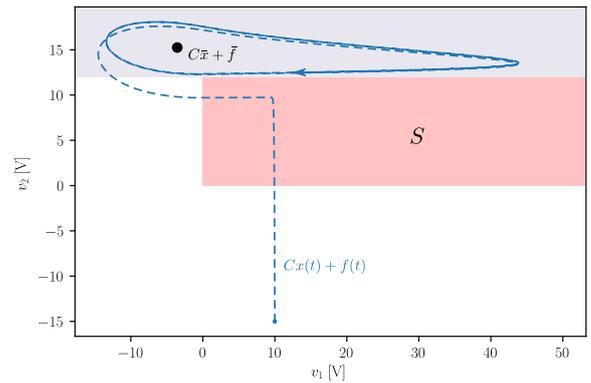


Figura 7: Conjunto  $S$ . Para cualquier vector  $(v_1, v_2)$  en la región gris,  $\text{Proy}_S(N^{-1}, v)$  resulta en un vector con componente  $v_2 = v_s$ . Como  $Cx(t) + f(t)$  pertenece a la región gris, tenemos  $x(t) \in \Omega_d(f(t))$  y se asegura la regulación de  $v_2$  también cuando  $v_e(t)$  está dado por (24).

La condición  $\bar{x} \in \Omega_d(\bar{f})$  es robusta, pues no sólo se cumple para un valor preciso de  $\bar{f}$ , sino para todo un intervalo. Es razonable entonces esperar que el sistema regule correctamente en el caso en el que  $v_e$  (y por lo tanto  $f$ ) no sea constante y esté dada por (24). La Figura 7 ilustra el hecho de que, efectivamente,  $Cx(t) + f(t)$  converge a una vecindad de  $C\bar{x} + \bar{f}$ . La vecindad es lo suficientemente pequeña como para que  $x(t)$  converja a  $\Omega_d(f(t))$  y se logre la regulación de  $v_2$ .

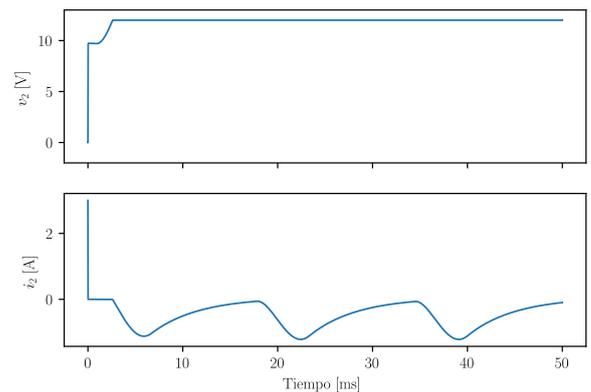


Figura 8: Variables de puerto del sistema (21), (31) con  $v_e(t)$  dado por (24) y con las condiciones iniciales que se ilustran en la Figura 7. La tensión  $v_2(t)$  converge a  $v_s$  en tiempo finito.

El hecho de que exista un  $T > 0$  tal que  $x(t) \in \Omega_d(f(t))$  para todo  $t \geq T$  implica que  $v_2(t) = v_s$  para todo  $t \geq T$ . En la Figura 8 se muestran las variables de puerto  $v_2$  e  $i_2$ . Se puede apreciar que  $v_2(t)$  converge a  $v_s$  en tiempo finito como se anticipaba.

## 6. Conclusiones

Consideramos sistemas hamiltonianos acoplados a operadores multivaluados. En este contexto, el enfoque comportamental de Willems es útil, pues nos permite abordar problemas que no pueden formularse fácilmente dentro del esquema tradicional entrada-estado-salida. Nos enfocamos en circuitos electrónicos, pero el marco teórico puede aplicarse, por ejemplo, a sistemas mecánicos (Miranda et ál., 2017) —De hecho, el trabajo original de Moreau (1966) se desarrolló en el contexto de sistemas mecánicos.

Hemos visto que, dentro de un contexto basado en pasividad, tiene sentido explorar controladores multivaluados que preservan la estructura hamiltoniana de los sistemas originales, pues los sistemas en lazo cerrado son naturalmente robustos a ciertas clases de incertidumbre —Vale mencionar que falta realizar una exploración más sistemática de dichas clases y, en particular, de la forma en la que el conjunto convexo  $S$  las caracteriza.

La puesta en práctica de los controladores propuestos requiere de una discusión amplia que escapa al alcance de este artículo, pero podemos mencionar algunos puntos. En el caso del circuito eléctrico, el control multivaluado puede implementarse directamente usando un dispositivo con esa característica (un simple diodo zener). En aplicaciones más complejas, el control multivaluado puede reemplazarse por una aproximación univaluada (Miranda y Castaños, 2017) o incluso aplicada en tiempo discreto (Miranda et ál., 2017, 2018).

En la metodología propuesta, la etapa de inyección de amortiguamiento se resignifica y adquiere un rol central en el mecanismo de regulación.

## Referencias

- Acary, V., Bonnefon, O., Brogliato, B., 2011. Nonsmooth Modeling and Simulation for Switched Circuits. Springer.
- Acary, V., Brogliato, B., 2008. Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin.
- Artstein, Z., Nov. 1983. Stabilization with relaxed controls. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications 7, 1163 – 1173.  
DOI: 10.1016/0362-546X(83)90049-4
- Bacciotti, A., Rosier, L., 2005. Liapunov Functions and Stability in Control Theory. Springer-Verlag, The Netherlands.
- Bloch, A., Chang, D. E., Leonard, N. E., Marsden, J. E., Oct. 2001. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. II. potential shaping. IEEE Trans. Autom. Control 46, 1556 – 1571.
- Bloch, A., Leonard, N. E., Marsden, J. E., Dec. 2000. Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems. I. the first matching theorem. IEEE Trans. Autom. Control 45, 2253 – 2270.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Brézis, H., 1973. Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans des Espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam.
- Brogliato, B., May 2004. Absolute stability and the lagrange-dirichlet theorem with monotone multivalued mappings. Systems and Control Lett. 51, 343 – 353.  
DOI: 10.1016/j.sysconle.2003.09.007
- Brogliato, B., 2016. Nonsmooth Mechanics: Models, Dynamics and Control. Springer, Switzerland.
- Brogliato, B., Goeleven, D., Jan. 2011. Well-posedness, stability and invariance results for a class of multivalued Lur'e dynamical systems. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications 74, 195 – 212.  
DOI: 10.1016/j.na.2010.08.034
- Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B., Egeland, O., 2020. Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications. Springer, Switzerland.
- Brogliato, B., Tanwani, A., Jan. 2020. Dynamical systems coupled with monotone set-valued operators: Formalisms, applications, well-posedness, and stability. SIAM Review 62, 3 – 129.  
DOI: 10.1137/18M1234795
- Castaños, F., Jayawardhana, B., Ortega, R., García-Canseco, E., Aug. 2009. Proportional plus integral control for set-point regulation of a class of nonlinear RLC circuits. Circuits Syst. Signal Process. 28, 609 – 623.  
DOI: 10.1007/s00034-009-9103-x
- Cottle, R. W., Pang, J.-S., Stone, R. E., 2009. The Linear Complementarity Problem. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Duan, G.-R., Yu, H.-H., 2013. LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications. CRC, Florida.
- Fantoni, I., Lozano, R., 2002. Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems. Springer-Verlag, London.
- Hiriart-Urruty, J.-B., Lemaréchal, C., 1993. Convex Analysis and Minimization Algorithms I. Springer-Verlag, New York.
- Jayawardhana, B., Ortega, R., García-Canseco, E., Castaños, F., Sep. 2007. Passivity of nonlinear incremental systems: Application to PI stabilization of nonlinear RLC circuits. Systems and Control Lett. 56, 618 – 622.  
DOI: 10.1016/j.sysconle.2007.03.011
- Khalil, H. K., 1996. Nonlinear Systems. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Leine, R. I., van der Wouw, N., 2008. Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints. Springer-Verlag, Berlin.
- Maschke, B., van der Schaft, A. J., Jun. 1992. Port-controlled Hamiltonian systems: modelling origins and system-theoretic properties. In: Proc. IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Bordeaux, France, pp. 359 – 365.
- Miranda, F., Brogliato, B., Castaños, F., Sep. 2017. Multivalued robust tracking control of Lagrange systems: Continuous and discrete-time algorithms. IEEE Trans. Autom. Control 62, 4436 – 4450.  
DOI: 10.1109/TAC.2017.2662804
- Miranda, F., Brogliato, B., Castaños, F., May 2018. Set-valued sliding-mode control of uncertain linear systems: Continuous and discrete-time analysis. SIAM J. Control Optim. 56, 1756 – 1793.  
DOI: 10.1137/16M1077362
- Miranda, F., Castaños, F., Jan. 2017. Robust output regulation of strongly passive linear systems with multivalued maximally monotone controls. IEEE Trans. Autom. Control 62, 238 – 249.  
DOI: 10.1109/TAC.2016.2544926
- Moreau, J.-J., Jan. 1966. Quadratic programming in mechanics: Dynamics of one-sided constraints. SIAM J. Control Optim. 4, 153 – 158.  
DOI: 10.1137/0304014
- Ortega, R., Jeltsema, D., Scherpen, J., Oct. 2003. Power shaping: A new paradigm for stabilization of nonlinear RLC circuits. IEEE Trans. Autom. Control 48, 1762 – 1767.
- Ortega, R., Loría, A., Nicklasson, J. P., Sira-Ramirez, H., 1998. Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems. Springer-Verlag, Berlin.
- Ortega, R., Romero, J. G., Borja, P., Donaire, A., 2021. PID Passivity-Based Control of Nonlinear Systems with Applications. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- Ortega, R., Spong, M. W., 1989. Adaptive motion of rigid robots: a tutorial. Automatica 25, 877–888.
- Ortega, R., van der Schaft, A. J., Castaños, F., Astolfi, A., Dec. 2008. Control by interconnection and standard passivity-based control of port-Hamiltonian systems. IEEE Trans. Autom. Control 53, 2527 – 2542.  
DOI: 10.1109/TAC.2008.2006930
- Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., Maschke, B., Apr. 2001. Putting energy back in control. IEEE Control Syst. Mag., 18–33.
- Pavolv, A., Marconi, L., May 2008. Incremental passivity and output regulation. Systems and Control Lett. 57, 400 – 409.  
DOI: 10.1016/j.sysconle.2007.10.008
- Rocha, E., Castaños, F., Moreno, J. A., Jan. 2022. Robust finite-time stabilisation of an arbitrary-order nonholonomic system in chained form. Automatica 135, 109956.  
DOI: 10.1016/j.automatica.2021.109956
- Rockafellar, R. T., 1972. Convex Analysis. Princeton University Press, New Jersey.
- Sontag, E., Aug. 1989. A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. Systems and Control Lett. 13, 117 – 123.  
DOI: 10.1016/0167-6911(89)90028-5
- Takegaki, M., Arimoto, S., Jun. 1981. A new feedback method for dynamic control of manipulators. ASME. J. Dyn. Sys., Meas., Control 102, 119 – 125.
- van der Schaft, A. J., 2017.  $\mathcal{L}_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. Springer-Verlag, London.
- Willems, J. C., 1972a. Dissipative dynamical systems Part I: General theory. Arch. Rat. Mech. and Analysis 45, 321–351.
- Willems, J. C., 1972b. Dissipative dynamical systems Part II: Linear systems with quadratic supply rates. Arch. Rat. Mech. and Analysis 45, 352–393.
- Willems, J. C., 1989. Models for dynamics. In: Kirchgraber, U., Walther, H. O. (Eds.), Dynamics Reported. Vol. 2. John Wiley & Sons, Stuttgart, Ch. 5, pp. 171 – 269.
- Willems, J. C., Dec. 2007. The behavioral approach to open and interconnected systems. IEEE Control Syst. Mag. 27, 46 – 99.
- Wu, D., Ortega, R., Duan, G.-R., 2020. On universal stabilization property of interconnection and damping assignment control. Automatica 119, 109087.  
DOI: 10.1016/j.automatica.2020.109087