

## Reguladores basados en observadores de perturbaciones: principios de funcionamiento y métodos de diseño

Alberto Castillo\*, Pedro Garcia, Pedro Albertos

*Instituto de Automática e Informática Industrial (ai2), Universitat Politècnica de València, Valencia, Spain.*

**To cite this article:** Castillo, A., Garcia, P., Albertos, P. 2022. Disturbance Observer-Based Controllers: operating principles and design strategies. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 19, 343-355. <https://doi.org/10.4995/riai.2022.16856>

### Resumen

Durante las últimas décadas, los reguladores lineales basados en observadores de perturbaciones han experimentado un interés creciente entre la comunidad científica, principalmente, debido a sus buenas propiedades para tolerar cambios o incertidumbres en los sistemas. En este tutorial se aborda una revisión de dichos reguladores, analizando sus elementos más característicos –es decir: **i)** los modelos con entradas de perturbación, **ii)** los algoritmos observadores de perturbaciones, y **iii)** el diseño de leyes de control–, así como sus principales técnicas de diseño. Se consideran también algunos aspectos de la teoría del control que motivan y justifican la utilización de estos reguladores; principalmente: la incertidumbre de los modelos, su importancia dentro del paradigma del control robusto y la capacidad de los modelos perturbados para representar sistemas inciertos. El tutorial concluye con un ejemplo ilustrativo sobre el diseño de este tipo de reguladores para el control de glucosa en personas diabéticas (páncreas artificial).

*Palabras clave:* Observadores de perturbaciones, Control Robusto, Sistemas Inciertos, Sistemas MIMO, Control Óptimo, LQR.

### Disturbance Observer-Based Controllers: operating principles and design strategies

#### Abstract

During the past decades, the scientific interest on the linear disturbance observer-based controllers has notably increased, mainly, due to their good properties for handling changes or uncertainties in the systems. In this tutorial, these type of controllers are reviewed by analyzing their characteristic elements –which are: **i)** the disturbed models, **ii)** the disturbance observer algorithms, and **iii)** the feedback control-laws– as well as their main design-techniques. Some aspects of the control theory that motivate and support the use of these regulators are also described, including: the model uncertainties, its relevance within the robust control paradigm, and the capability of the disturbed models to handle uncertainties. The tutorial concludes with an illustrative example on the closed-loop glucose control for diabetic people (artificial pancreas).

*Keywords:* Disturbance Observer-Based Controllers, Robust Control, Uncertain Systems, MIMO Systems, Optimal Control, LQR.

### 1. Introducción: La incertidumbre de los modelos y el paradigma del control robusto

Se dice que un modelo es incierto si, con mayor o menor frecuencia, produce predicciones imprecisas sobre el comportamiento del sistema. En este sentido, si se ve que no es posible construir un modelo preciso para un sistema dado –debido a, por ejemplo, su complejidad, su coste económico, el aparente

comportamiento aleatorio o errático del sistema en algunas circunstancias o, simplemente, a la falta de conocimiento sobre cómo funcionan algunas de sus partes– entonces, forzosamente, nos veremos obligados a tener que asumir que el modelo es, de alguna forma, incierto. En general, la incertidumbre se asocia a la imposibilidad de hacer predicciones precisas sobre el comportamiento de un sistema.

\* Autor para correspondencia: [alcafra@upv.es](mailto:alcafra@upv.es)

La mayor parte de los sistemas de ingeniería, económicos o biológicos suelen considerarse inciertos; incluso los que a primera vista puedan aparentar ser sencillos. Por ejemplo, consideremos el pedal del acelerador de un coche y el efecto que éste tiene sobre la aceleración del vehículo. Se trata de un sistema simple con una única entrada –pedal acelerador – y una única salida –aceleración del coche. A pesar de esta sencillez conceptual, el modelo es incierto. Aunque es prácticamente seguro el hecho de que presionar el acelerador siempre generará aceleraciones positivas, casi con toda probabilidad se encontrarán dudas si se trata de afirmar, exactamente, cuánto acelerará el vehículo si se presiona el acelerador hasta un valor dado.

Para resolver esta cuestión, uno podría intentar realizar algunos experimentos con el objetivo de extraer datos o un modelo que, cuantitativamente, predigan la aceleración del coche en función de cuánto se ha presionado el pedal acelerador. Sin embargo, es casi seguro que el modelo resultante comience a dar errores una vez las condiciones experimentales cambien. De hecho, la aceleración depende –entre muchos otros factores – del número de pasajeros, de la pendiente de la carretera, de la velocidad del viento, de su dirección, del sistema de transmisión del vehículo y de su estado, etc. Desarrollar experimentos y modelos que consideren todos estos factores se vuelve, en muchos casos, excesivamente complejo. Además, la complejidad suele aumentar conforme más de cerca y con más detalle se examinan los sistemas. Al final, los ingenieros se ven obligados en algún punto a tener que asumir que el comportamiento de los sistemas será relativamente incierto con respecto a sus modelos.

### *El paradigma de control robusto*

Este tipo de incertidumbres asociadas a los sistemas han planteado una cuestión fundamental en la teoría del control, que es: ¿cómo diseñar reguladores precisos para sistemas cuyos modelos son inciertos?. Esta cuestión ha ido ganando importancia progresivamente desde principios de los años sesenta; hasta el punto que, durante la década de 1970, generó un importante cambio de paradigma en la teoría del control hacia el así llamado *control robusto* (Petersen and Tempo (2014); Safonov (2012); Gao (2014); Sariyildiz et al. (2020)).

Este cambio de paradigma se sustenta en una idea clara: las incertidumbres de los modelos no pueden simplemente ignorarse; al contrario, deben de incluirse en las formulaciones de los modelos y de los reguladores de los sistemas.

Esta premisa de diseño se apoya en diferentes investigaciones y experimentos que han revelado que las incertidumbres pueden tener efectos muy negativos en los controladores por realimentación si éstas no se consideran adecuadamente. Horowitz (1963) dio uno de los primeros análisis en esta línea, demostrando matemáticamente que la incertidumbre es un factor dominante en lo que se puede llegar a lograr con el control por retroalimentación. Más tarde, durante los setenta, otros autores como Rosenbrock and McMorran (1971); Athans (1971) y Doyle (1978) informaron de problemas serios con algunas técnicas de control óptimo que eran causados, principalmente, por las incertidumbres de los sistemas. Con sorpresa, Doyle (1978) vió que una diferencia arbitrariamente pequeña entre el sistema real y su modelo matemático podría ser teóricamente capaz de desestabilizar el famoso controlador LQR (del inglés, Linear Quadratic Regulator). Safonov (2012) también hace referencia a algunos intentos fallidos de aplicar el controlador

LQG en un submarino Trident y en un avión F-8C, informando de que el LQG provocó que el submarino saliera inesperadamente a la superficie en simulaciones con mares moderadamente agitados. “Debilidades” de la teoría de control óptimo fueron las principales causas atribuidas a los problemas en el F-8C.

Se dice que estos fallos del regulador LQG durante 1970 fueron el desencadenante principal de todos los desarrollos posteriores de técnicas de control robusto (Safonov (2012); Sariyildiz et al. (2020)). Durante 1970-2000, se publicó una gran cantidad de artículos con diferentes metodologías para diseñar controladores robustos para sistemas inciertos. Los trabajos desarrollados durante este período se pueden categorizar en dos áreas principales: *diseño* de reguladores robustos y *análisis* de reguladores robustos (Petersen and Tempo (2014)). El primero de ellos aborda el problema de diseñar el “mejor” controlador para un modelo nominal con una cierta incertidumbre predefinida. El segundo aborda el problema inverso: dado un modelo y un controlador, encontrar la “cantidad” máxima de incertidumbre que se puede tolerar.

Algunos resultados populares para el análisis de reguladores robustos que se desarrollaron durante este período son: los márgenes de estabilidad multivariable (Safonov (1980)); el teorema de la pequeña ganancia (Sandberg (1964); Zames (1966)); el teorema de Kharitonov (Chapellat and Bhattacharyya (1989)); los análisis de robustez basados en criterios de energía de Lyapunov (Freeman and Kokotovic (2008); Khalil and Grizzle (2002)) o los métodos numéricos basados en desigualdades matriciales (LMIs) (Scherer and Weiland (2000)). Básicamente, estos resultados permiten comprobar los efectos que algún tipo de incertidumbre del sistema pueden tener sobre un determinado controlador.

Por otro lado, los enfoques más conocidos para diseñar reguladores robustos son, entre otros: los basados en las normas  $H_\infty$  y  $H_2$ , (Doyle et al. (1988); Doyle et al. (1989); Khargonekar and Rotea (1991)); los basados en observadores de perturbaciones — del inglés, Disturbance Observer-Based Controllers (DOBCs) (Ohishi (1983); Sariyildiz et al. (2020); Chen et al. (2016); Schweppe (1968); Johnson (1975); Meditch and Hostetter (1973); Bhattacharyya (1978)), el control basado en el rechazo activo de perturbaciones — Active Disturbance Rejection-Based Control (ADRC) (Han (2009); Wu et al. (2020); Carvajal et al. (2021)); los controladores de modos deslizantes (Edwards and Spurgeon (1998)); la teoría del control acomodativo de señales exógenas (DAC) (Johnson (1971, 1986)); y el control basado en modelos internos — Internal Model Control (IMC) (Francis and Wonham (1976); Garcia and Morari (1982)). Todos estos resultados comparten la peculiaridad de que se considera explícitamente algún tipo de incertidumbre durante el proceso de diseño del control.

### *El control robusto durante la revolución tecnológica*

La mayor parte de estos métodos de control robusto son ampliamente conocidos hoy en día. En particular, los DOBCs, el ADRC y los controladores de modo deslizante están siendo muy populares entre los ingenieros y desarrolladores de hoy; principalmente, porque ofrecen muy buena precisión con información muy básica del sistema (Han (2009); Huang and Xue (2014); Sariyildiz et al. (2020); Gao (2006); Gao et al. (2001); Chen et al. (2016)).

Esto se puede apreciar en la Figura 1, que indica el número aproximado de nuevos artículos IEEE que se publicaron durante 2000-2020 conteniendo palabras clave de las principales técnicas de control robusto<sup>1</sup>. Se aprecia un crecimiento significativo en su uso; siendo notable el aumento exponencial de DOBCs, ADRCs y controladores de modo deslizante. Curiosamente, la figura ilustra que alrededor del 50 % del número total de artículos que hacen referencia a estos controladores se han publicado durante los últimos 5 años; lo que indica que se están desarrollando más rápido que en cualquier otro período.

Si la búsqueda se centra en áreas de aplicación específicas, se puede comprobar que controladores de tipo DOBC, ADRC y de modos deslizantes se están aplicando actualmente en: control de movimiento (Umeno and Hori (1991); Choi et al. (1999); Sariyildiz et al. (2015)), electrónica de potencia (Yokoyama and Kawamura (1994); Jain and Yogesh (2020)), detección de fallos (Wang and Daley (1996); Han et al. (2018); Bernardi and Adam (2020)), automóviles, vehículos submarinos y vehículos espaciales (Bünte et al. (2002); Kadowaki et al. (2002); Fujimoto et al. (2004); Sadhu and Ghoshal (2010); Liu et al. (2018)), UAVs (Castillo et al. (2019b)), robots de cirugía/rehabilitación (Ugurlu et al. (2014)), posicionamiento láser de larga distancia (Deng et al. (2020)), levitación magnética (Yang et al. (2011)), economía (Bernhard (2003); Hansen and Sargent (2008)), teoría de juegos (Başar and Olsder (1998)) o biotecnología (Sala-Mira et al. (2019); Sanz et al. (2020)).

Sin embargo, a pesar de la evolución positiva de estos reguladores, en muchos casos los diseñadores e ingenieros todavía encuentran dificultades en cómo proceder a la hora de implementarlos. Esto se debe, en parte, a una falta importante de tutoriales y de documentos que describan detenidamente sus principios de funcionamiento, sin entrar en el complejo aparato matemático de la teoría del control que, en ocasiones, oscurece la sencillez de los conceptos que hay en estos reguladores.

## Objetivos y estructuración de este tutorial

Este tutorial se centra en los controladores basados en observadores de perturbaciones (DOBCs). El objetivo principal es dar una revisión detallada de estos reguladores desde un punto de vista genérico y alternativo al que normalmente pueda encontrarse en la literatura actual. Se puede encontrar un estudio más detallado de estos problemas en Castillo (2021).

El tutorial se encuentra organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, se enumeran cuáles son los elementos principales de estos reguladores, a saber: **i)** los modelos con entradas de perturbación; **ii)** los algoritmos observadores de perturbaciones; y **iii)** el diseño de realimentaciones. Cada uno de estos puntos se comenta con mayor profundidad en las secciones 3, 4, y 5, respectivamente, donde se incluyen algunas de las principales técnicas y algoritmos que pueden emplearse en cada punto. Finalmente, en la Sección 6, se incluye un ejemplo ilustrativo sobre el diseño de este tipo de reguladores para el control de glucosa en personas diabéticas (páncreas artificial).

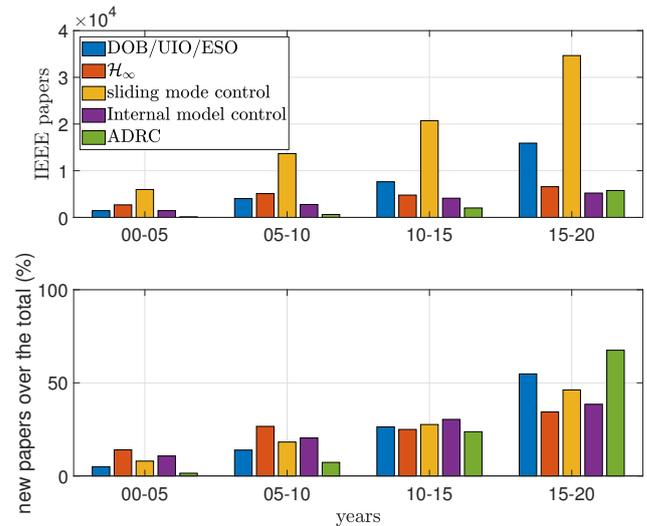


Figura 1: Gráfico superior: Número aproximado de nuevos artículos IEEE en intervalos de 5 años que contienen palabras clave relacionadas con las diferentes estrategias de control robustas. Gráfico inferior: (nº de artículos nuevos) / (nº total de artículos) · 100.

## 2. Reguladores basados en observadores de perturbaciones: elementos principales

Estos reguladores funcionan con un modelo del sistema perturbado, normalmente lineal e invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) + B_1\omega(t), \\ y(t) &= Cx(t); \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\{A, B_2, B_1, C\}$  son las matrices nominales del modelo,  $x(t)$  es su estado nominal interno,  $u(t)$  es la acción de control que se aplica al sistema,  $\omega(t)$  son unas entradas desconocidas llamadas perturbaciones, e  $y(t)$  son las lecturas de los sensores disponibles.

El elemento característico de estos modelos son las entradas desconocidas de perturbación,  $\omega(t)$ . Se trata de unas señales desconocidas que entran al modelo (1) de una forma similar a las acciones de control,  $u(t)$ , y se incluyen para hacer frente a las posibles incertidumbres en el comportamiento del sistema — en la Sección 3 se dan más detalles sobre este punto. En algunas ocasiones, también se incluyen señales de perturbación en el canal de la  $y(t)$  a través de un término  $D\omega(t)$ , con el objetivo de representar el ruido de medida. Sin embargo, este término frecuentemente se desprecia ya que el ruido suele ser apropiadamente filtrado por los observadores empleados.

Este estudio se circunscribe al caso de modelos lineales. Si bien muchos de los conceptos tratados podrían extenderse a modelos no lineales, la diversidad de modelos que el término “no-lineal” engloba y la existencia de numerosos métodos ad-hoc para cada caso concreto dificultan su generalización.

Tomando como base el modelo (1), los DOBCs funcionan de la siguiente forma:

<sup>1</sup>La búsqueda se ha realizado con Google Scholar mediante los siguientes comandos: **i)** (“disturbance observer” OR “Unknown input observer” OR “Extended state observer”) source:“IEEE”; **ii)** (“H infinity” OR “H<sub>∞</sub>” OR “H infinite” OR “H/sub infinity”) source:“IEEE”; **iii)** (“sliding mode control”) source:“IEEE”; **iv)** (“internal model principle” OR “internal model control” OR “IMC”) source:“IEEE”; **v)** (“active disturbance rejection” OR “ADRC”) source:“IEEE”

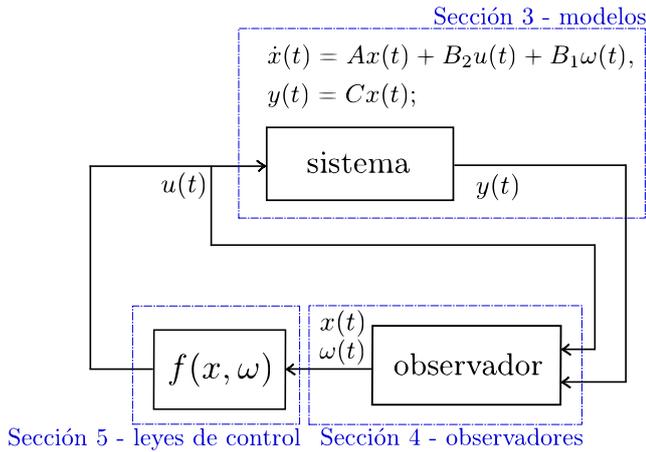


Figura 2: Diagrama de funcionamiento de los controladores basados en observadores de perturbaciones.

1. *Asumen* que, para cualquier acción de control  $u(t)$  que se inyecte al sistema, las lecturas resultantes de los sensores,  $y(t)$ , son *generadas* por el modelo (1).
2. Utilizan *el histórico de medidas*  $y(s)$ ,  $u(s)$ ,  $s \in [0, t]$ , para estimar las variables internas del modelo en el instante actual,  $x(t)$  y  $\omega(t)$ .
3. *Retroalimentan* las estimaciones de  $x(t)$  y  $\omega(t)$  al sistema a través de una *ley de control*:  $u(t) = f(x, \omega)$ ; con el objetivo de regularlo o conducirlo a un punto de funcionamiento predefinido.

Cada uno de estos puntos hace referencia a un elemento característico de los DOBCs: 1. los *modelos* perturbados; 2. los *observadores* de perturbaciones; y 3. las *leyes de control*. En la Figura 2 se muestra un diagrama de bloques de dicha estructura, donde se ha resaltado en azul cada uno de estos puntos. En las siguientes secciones se profundiza en cada uno de ellos.

### 3. Modelos con perturbaciones

En esta sección se profundiza en uno de los principales elementos de los reguladores basados en observadores de perturbaciones: los *modelos perturbados*. A nivel conceptual, este punto es el más importante y merece un análisis detenido.

Desde nuestro punto de vista, las únicas variables “reales” de los sistemas son  $y(t)$  y  $u(t)$ . La primera de ellas representa las lecturas de los sensores que hay instalados –p.e. GPS, sensores de velocidad, de presión, de caudal, de temperatura, de luz, etc–, mientras que la segunda representa las acciones de control que se pueden aplicar al sistema –p.e. acelerar, frenar, velocidad de motores, tensión, corriente eléctrica, etc. En última instancia, el sistema es la relación causal que existe entre ambas variables. Esa causalidad, tal y como se ha mencionado en la Sección 1, suele manifestar cierta incertidumbre — en el sentido que generar una misma variación en los actuadores no siempre causará la misma variación en los sensores.

Sin embargo, desde el punto de vista del regulador, las variables  $y(t)$ ,  $u(t)$ , tan solo son un par de números que se relacionan entre sí a través del modelo (1). El regulador tan solo conoce el modelo. Si éste genera una acción de control para el sistema,  $u(t)$ , estará *asumiendo* que las lecturas posteriores de

los sensores son *generadas* por el modelo (1). Este punto representa un detalle muy importante que, hasta donde conocemos, no se ha tratado con mucho énfasis en la literatura. Analizarlo pone de manifiesto el papel clave que tienen las señales de perturbación,  $\omega(t)$ , en los modelos. El objetivo de esta sección es profundizar en este punto, comparando los modelos con y sin perturbaciones, para resaltar sus principales diferencias.

#### 3.1. Modelos sin perturbaciones

Consideremos, como ejemplo ilustrativo, el siguiente modelo para la posición vertical de una aeronave:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_z(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_z(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} u(t) \quad (2)$$

donde  $u(t)$  (N) es la fuerza de propulsión vertical;  $m$  (kg) es la masa de la aeronave;  $v_z(t)$  (m/s) es su velocidad vertical y  $p_z(t)$  (m) es la posición.

Este modelo proviene fundamentalmente de la mecánica newtoniana. Como primer paso, deberíamos plantearnos las siguientes preguntas: **i)** ¿Es este modelo capaz de representar con precisión la altitud real de una aeronave?; y, si no es así, **ii)** ¿qué modificaciones deberían hacerse?

Para responder a ambas, en primer lugar se debería definir un procedimiento experimental claro que permita evaluar la precisión de un modelo. En concreto, se debería instalar un sensor de altitud en la aeronave de tal forma que se conozca su altitud real,  $y(t)$ . Después, se debería poner la aeronave en vuelo –por ejemplo, dirigiendo manualmente la fuerza  $u(t)$ – y se deberían comparar las medidas dadas por el sensor,  $y(t)$ , con las predicciones del modelo,  $p_z(t)$ . Si el modelo es preciso, entonces se debería cumplir que  $y(t) \approx p_z(t)$ . Es decir: un modelo preciso es aquel que es capaz de *garantizar la ecuación de medición*.

Con esto, imaginemos que uno se lanza a hacer un experimento como éste con el objetivo de verificar si el modelo (2) es válido para diseñar controladores. Casi con toda probabilidad, se encontrará que las medidas de altitud,  $y(t)$ , difieren de las predichas por (2),  $p_z(t)$ . La respuesta a la primera pregunta será negativa en la mayoría de los experimentos. La principal razón es que, a partir de experiencias previas, se conoce que el modelo (2) está ignorando muchos otros elementos que también afectan a la aeronave durante el vuelo, como: la fuerza del viento, la densidad del aire, cómo se genera la fuerza de propulsión  $u(t)$ , etc.

Si la respuesta a **i)** es negativa, ¿cómo se afrontaría la segunda pregunta? Se podría pensar que, para mejorar la precisión del modelo, será necesario incluir en él más información, como: la aerodinámica de la aeronave, la fuerza del viento, o cómo se genera la fuerza vertical  $u(t)$ . Bajo este enfoque, el proceso de modelado se considera concluido cuando se encuentren algunas ecuaciones (probablemente de la forma  $\dot{p}_z(t) = f_1(v_z(t))$ ,  $\dot{v}_z(t) = f_2(v_z(t), u(t))$ ) de tal forma que, para cualquier vuelo que se realice, la altitud predicha por las ecuaciones coincida con las lecturas de los sensores; es decir:

$$\begin{aligned} \dot{p}_z(t) &= f_1(v_z(t)), \\ \dot{v}_z(t) &= f_2(v_z(t), u(t)), \end{aligned} \quad (3)$$

$$y(t) \approx p_z(t). \quad (4)$$

Para el caso de modelos lineales genéricos, tomaría la forma — ver similitudes con (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5)$$

$$y(t) \approx Cx(t); \quad (6)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es una variable interna que representa el estado del sistema;  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la acción de control e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  las lecturas de los sensores.

Ciertamente, una gran desventaja de este enfoque es la gran complejidad para hacer los modelos precisos. Encontrar alguna función determinista,  $f(\cdot)$ , o matrices  $(A, B, C, D)$  que, simplemente al recibir las entradas de control, sean capaces de predecir la altitud de la aeronave —esto es, la ecuación de medición (4), (6), se cumple para todo el tiempo y en todas las posibles circunstancias— no será casi nunca sencillo; pudiendo incluso llegar a ser inviable en términos de tiempo o coste.

### 3.2. Modelos con perturbaciones

Consideremos ahora exactamente la misma cuestión, pero añadiéndole al modelo inicial una entrada de perturbación  $\omega(t)$  en el punto de entrada:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_z(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_z(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t) \quad (7)$$

donde  $\omega(t)$  puede tomar, a priori, cualquier forma de onda sin ningún significado físico específico.

La principal diferencia con respecto a (2) es que (7) contiene una entrada desconocida,  $\omega(t)$ . Este cambio implica que la solución de (7) deja de estar completamente definida. Ahora, para la misma entrada de control  $u(t)$  y los mismos estados iniciales,  $p_z(t_0)$ ,  $v_z(t_0)$ ; el modelo (7) puede generar un conjunto completo de soluciones distintas, una para cada  $\omega(t)$ .

Si nos referimos a la misma pregunta sobre la capacidad de (7) para representar la altitud real de la aeronave, se puede concluir fácilmente que la respuesta ahora es positiva en la mayoría de los casos. Para ello, se podría hacer un experimento similar: se pone en marcha la aeronave y todos los datos dados por el sensor de altitud,  $y(t)$ , junto con las entradas de control,  $u(t)$ , son grabados. Tras el vuelo, se podrían coger los datos y se podría corroborar que, de hecho, *existe* una función,  $\omega(t)$ , que garantiza que la altitud dada por (7) coincida con las medidas proporcionadas por los sensores; es decir,  $p_z(t) \approx y(t)$ .

El experimento podría repetirse de nuevo, pero esta vez realizando nuevas maniobras y volando con otras condiciones ambientales. Después de este segundo vuelo, se podrían tomar los nuevos datos registrados y se podría corroborar de nuevo que existe otra función *diferente*,  $\omega_2(t)$ , que garantiza que la altura dada por (7) coincide con las mediciones,  $y(t)$ . El experimento podría repetirse una y otra vez. Con cada vuelo que se haga, se podría encontrar una nueva (y probablemente distinta) función  $\omega(t)$  que garantiza que  $y(t) \approx p_z(t)$ . De hecho, bajo algunas suposiciones poco restrictivas sobre las lecturas de los sensores,  $y(t)$ , se puede demostrar que siempre existirá una  $\omega(t)$  que garantice que  $y(t) = p_z(t)$ .

Este enfoque, aunque resulta ser bastante distinto del anterior, matemáticamente también queda representado por el mis-

mo sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{p}_z(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_z(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_z(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

Para el caso de modelos lineales genéricos, tomaría la forma — ver similitudes con (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u(t) + B_1\omega(t), \quad (9)$$

$$y(t) = Cx(t); \quad (10)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es una variable interna que representa el estado del sistema;  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la acción de control e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  las lecturas de los sensores.

### 3.3. Principales diferencias entre ambos

Hay dos diferencias relevantes que conviene mencionar. La primera está relacionada con las ecuaciones de medición (6) y (10). En el caso de modelos sin perturbaciones, la ecuación de medición, más que una igualdad estricta, debe entenderse como algo *aproximado* que se cumple únicamente en el caso de que el modelo sea suficientemente preciso. Esta igualdad no se cumplirá si el modelo es impreciso, ya que se están comparando dos cosas que son diferentes: las lecturas de los sensores con la solución del modelo. Por lo tanto, no se cumplirá en las situaciones en las que el modelo sea inexacto.

Sin embargo, en el caso de modelos perturbados, la ecuación de medición se  *fuerza*  a que sea una igualdad matemática estricta. Se puede hacer porque, ahora, el modelo incluye algunas funciones indefinidas,  $\omega(t)$ , cuyo valor se puede elegir libremente. Desde una perspectiva matemática,  $\omega(t)$  da un grado extra de libertad que puede utilizarse para garantizar la ecuación de medición. Desde una perspectiva de control, equivale a decir que nuestra confianza en las lecturas de los sensores es mayor que la del modelo y, en consecuencia, construimos un modelo que se adapta continuamente a las lecturas del sensor.

En otras palabras, tal y como se ha resumido al inicio de sección, implícitamente se asume que las lecturas de los sensores están siendo generadas por un modelo de la forma (1), cuyo grado de libertad para dicha tarea es  $\omega(t)$ .

La segunda diferencia radica en la naturaleza indefinida de la solución temporal de los modelos perturbados. La solución temporal de los modelos perturbados está bien definida únicamente hasta el momento actual,  $t$ . Los estados futuros y las señales de perturbación futuras nunca se conocerán hasta que el tiempo avance y se disponga de nuevas lecturas de sensores que las definan. Este no es el caso de los modelos no perturbados; donde solo con definir los estados iniciales y la entrada de control, su solución se puede integrar infinitamente.

### 3.4. ¿Porque son interesantes los modelos perturbados?

Este tipo de modelos son interesantes ya que las variables  $x(t)$  y  $\omega(t)$  contienen una información *ponderada* del estado del sistema. Su valor depende, en una parte, del modelo predefinido (1) y, en otra parte, del histórico de lecturas recibidas por los sensores.

Si el modelo predefinido es perfecto, entonces se tendrá que  $\omega(t) = 0$ . Si el modelo contiene errores, entonces se autogenerarán señales de perturbación no nulas,  $\omega(t)$ , de tal forma que se garantice la ecuación de medición.

En general, el diseñador de control confía más en las medidas de los sensores que en el modelo, principalmente debido a las incertidumbres descritas en la Sección 1. Sin embargo, tampoco puede desconfiar totalmente del modelo y construir reguladores que únicamente dependan de las lecturas de los sensores  $y(t)$ . Aunque éstas sean, al fin y al cabo, la única información real del estado del sistema, en muchas ocasiones es insuficiente para llevar a cabo un control exitoso, ya que puede no ser posible medir directamente todas las variables necesarias para ello. En este sentido, los modelos con perturbaciones permiten encontrar un buen equilibrio entre: el *modelo* (que incluye información no medible del comportamiento del sistema); las *señales de perturbación* (que acomodan los posibles errores del modelo); y la instalación de *sensores* (que aportan información real sobre el estado actual del sistema). Balancear los tres elementos es la cuestión principal en lo que respecta al modelado de sistemas con modelos perturbados.

#### 4. Observadores

En esta sección se profundiza en el segundo elemento de los DOBCs: los *observadores* de perturbaciones.

Un observador de perturbaciones es un algoritmo –normalmente una ecuación diferencial o recursiva– cuyas entradas son las lecturas de los sensores,  $y(s)$ , y las acciones de control inyectadas al sistema,  $u(s)$ ,  $s \in [0, t]$ ; y cuya salida es una estimación del estado del modelo y de sus señales de perturbación:  $\hat{x}(t)$ ,  $\hat{\omega}(t)$ ; respectivamente. Las estimaciones se calculan asumiendo que las lecturas de los sensores son *generadas* por el modelo (1) — como se ha descrito previamente.

Durante los últimos años, se ha desarrollado un número importante de algoritmos para dicha tarea (1). Algunos de ellos son: Corless and Tu (1998); Xiong and Saif (2003); Chang (2006); Kim et al. (2010); Chen et al. (2016); Chakrabarty et al. (2017); Su and Chen (2018).

En lo que sigue, se incluye una clasificación de los observadores lineales en tres categorías principales: **i**) observadores proporcionales, **ii**) observadores integrales, y **iii**) observadores integrales de orden elevado. Se ilustran sus principales diferencias y lo que motiva cada uno de ellos.

##### 4.1. Observadores proporcionales

A pesar de que este tipo de observadores están hoy en día prácticamente en desuso, fueron unas de las primeras soluciones que fueron propuestas en la literatura formalmente (Corless and Tu (1998)). Se trata de observadores con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_2u(t) + B_1\hat{\omega}(t) + L_x(y(t) - C\hat{x}); \\ \hat{\omega}(t) &= \gamma L_\omega(y(t) - C\hat{x}(t));\end{aligned}\quad (11)$$

siendo  $\gamma$ ,  $L_\omega$  y  $L_x$  las ganancias del observador.

Integrando la Ecuación (11) desde  $t = 0$  hasta el instante actual,  $t$ , se obtienen estimaciones del estado del modelo así como de sus señales de perturbación. Para ello, se han de

utilizar las medidas de los sensores,  $y(s)$ , y de las acciones de control,  $u(s)$ , durante el intervalo de tiempo  $s \in [0, t]$ .

Lo que garantiza que el observador (11) va a dar unas estimaciones precisas de  $x(t)$  y  $\omega(t)$  es el siguiente teorema:

**Teorema 1.** (Corless and Tu (1998)) Si existen dos matrices simétricas y definidas-positivas,  $P$ ,  $Q$ , tal que:

$$\begin{aligned}P(A - L_xC) + (A - L_xC)^T P &= -Q, \\ B_1^T P &= L_\omega C,\end{aligned}\quad (12)$$

entonces el estado,  $x(t)$ , y la perturbación,  $\omega(t)$ , se pueden estimar con (11) hasta cualquier grado de precisión haciendo  $\gamma$  suficientemente grande.

La interpretación del Teorema 1 es sencilla: si se cumple la condición (12), entonces incrementar  $\gamma$  en el observador (11) contribuirá a reducir el error de estimación,  $x(t) - \hat{x}(t)$ ,  $\omega(t) - \hat{\omega}(t)$ . Para más detalles sobre cómo calcular  $P$ ,  $Q$ ,  $L_x$  y  $L_\omega$ , uno puede referirse directamente al artículo original (Corless and Tu (1998)). Esto ilustra la principal ventaja de estos observadores: una vez obtenida las matrices  $L_x$  y  $L_\omega$ , el error de estimación se puede ajustar fácilmente con el escalar  $\gamma$ .

La idea que existe detrás de este tipo de observadores es la siguiente: restando las Ecuaciones (1), (11), se puede ver que el error de estimación del estado cumple:

$$\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = [A - L_xC + \gamma B_1 L_\omega C][x(t) - \hat{x}(t)] + B_1 \omega(t). \quad (13)$$

Se demuestra que, sustituyendo  $L_\omega C = B_1^T P$  en (13) y utilizando

$$V(t) = [x(t) - \hat{x}(t)]^T P [x(t) - \hat{x}(t)]$$

como función de energía de Lyapunov, se consigue que  $V(t)$  converga exponencialmente a cualquier región arbitrariamente pequeña alrededor de cero; simplemente incrementando el valor de  $\gamma$ . Eso implica que el error de observación  $x(t) - \hat{x}(t)$  se puede hacer arbitrariamente pequeño incrementando  $\gamma$ . Después, se demuestra que si el error  $x(t) - \hat{x}(t)$  es pequeño, también lo será el error  $\omega(t) - \hat{\omega}(t)$ .

##### 4.2. Observadores integrales

Este segundo tipo de observadores son de los más utilizados hoy en día. También se conocen como observadores *extendidos* u observadores Proporcional-Integrales (Xiong and Saif (2003); Chang (2006)). Poseen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_2u(t) + B_1\hat{\omega}(t) + L_x(y(t) - C\hat{x}); \\ \dot{\hat{\omega}}(t) &= L_\omega(y(t) - C\hat{x}(t));\end{aligned}\quad (14)$$

donde la mayor diferencia con respecto a (11) es que en el lado izquierdo de (14) se coloca la *derivada* de la estimación de la perturbación en lugar de su valor directo.

La diferencia conceptual entre ambos es significativa. En (11), la estimación de la perturbación depende, *proporcionalmente*, del error entre las lecturas de los sensores,  $y(t)$ , y las predichas por el observador,  $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$ . Sin embargo, en (14), la estimación de la perturbación depende del *histórico* de errores. De ahí el nombre que se le ha asignado a cada uno. La matriz  $L_\omega$  se refiere a veces como el ratio de aprendizaje –del Inglés, learning-rate– del observador (14) (Xiong and Saif (2003)).

Similar a como se ha procedido anteriormente, restando las Ecuaciones (1), (14), se puede ver que el error de estimación ahora cumple:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) &= [A - L_x C][x(t) - \hat{x}(t)] + B_1[\omega(t) - \hat{\omega}(t)], \\ \dot{\omega}(t) - \dot{\hat{\omega}}(t) &= -L_\omega C[x(t) - \hat{x}(t)] + \dot{\omega}(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Es justo en esta expresión que toma el error donde se encuentra su principal ventaja competitiva frente a los proporcionales. Agrupando matricialmente los términos cruzados, el error se puede re-escribir de una forma extendida:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\omega}(t) - \dot{\hat{\omega}}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_x \\ L_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ \omega(t) - \hat{\omega}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \dot{\omega}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

La Ecuación (16) ilustra dos ventajas:

- Si el par de matrices,  $\begin{bmatrix} A & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$ , es observable; entonces existe un gran abanico de métodos numéricos –e.g. posicionamiento de polos, optimización convexa, métodos basados en desigualdades matriciales, o métodos basados en la norma  $\mathcal{H}_\infty$  (e.g. Boyd et al. (1994); Gao et al. (2016))– que se pueden utilizar para calcular los valores de las matrices  $L_x$  y  $L_\omega$ ; de forma que el error de estimación sea pequeño ante una entrada desconocida,  $\dot{\omega}(t)$ .
- Si la perturbación es constante, se obtendrá error nulo siempre y cuándo la matriz principal de (16) tenga polos con parte real negativa.

Aunque es difícil saber con certeza los motivos reales, quizás estas opciones para el diseño de  $L_x$  y  $L_\omega$  sean el principal motor que impulse el uso de este tipo de observadores hoy en día. Estos observadores permiten además eliminar fácilmente perturbaciones constantes o lentamente variables en el tiempo.

#### 4.3. Observadores integrales de orden elevado

La tercera familia de observadores son los integrales de orden elevado. Estos son una extensión directa de los observadores anteriores, cuyo principal objetivo es estimar no solo el valor de  $\omega(t)$ , sino también algunas de sus derivadas.

Estimar derivadas de la perturbación aporta información relevante adicional sobre su estado, ya que se detecta, no sólo el valor de la perturbación, sino también como éste está variando actualmente. Se ha mencionado también que estos observadores ofrecen una precisión mejorada si se comparan con (14) (Chen et al. (2016)).

Estos observadores tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B_2u(t) + B_1\eta_0(t) + L_x(y(t) - C\hat{x}); \\ \dot{\eta}_0(t) &= \eta_1(t) + L_{\omega,0}(y(t) - C\hat{x}(t)); \\ \dot{\eta}_1(t) &= \eta_2(t) + L_{\omega,1}(y(t) - C\hat{x}(t)); \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{r-1}(t) &= \eta_r(t) + L_{\omega,r-1}(y(t) - C\hat{x}(t)); \\ \dot{\eta}_r(t) &= L_{\omega,r}(y(t) - C\hat{x}(t)); \end{aligned} \quad (17)$$

donde puede comprobarse fácilmente –por analogía con (14)– que  $\eta_i \triangleq \dot{\omega}^{(i)}(t)$ .

En (17), haciendo  $r = 0$  se obtiene (14); mientras que para  $r > 0$  se está estimando tanto la perturbación como ‘ $r$ ’ de sus derivadas.

Evaluando el error de estimación, se obtiene una expresión similar a (16):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\omega}_r(t) - \dot{\hat{\omega}}_r(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & \bar{B}_1 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_x \\ L_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ \omega_r(t) - \hat{\omega}_r(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \omega^{(r+1)}(t); \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $\omega_r(t) \triangleq [\omega(t), \dot{\omega}(t), \dots, \omega^{(r)}(t)]$ ;  $\bar{B}_1 = [B_1 \ 0]$ ;  $L_\omega = [L_{\omega,0}^T, L_{\omega,1}^T, \dots, L_{\omega,r}^T]^T$ ; y:

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} 0_q & I_q & 0_q & \dots & 0_q \\ 0_q & 0_q & I_q & \dots & 0_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_q & 0_q & 0_q & \dots & I_q \\ 0_q & 0_q & 0_q & \dots & 0_q \end{bmatrix} \quad (19)$$

Poseen, por tanto, las mismas ventajas que los anteriores en cuanto al diseño de  $L_x$  y  $L_\omega$ . Aparte, son capaces de estimar sin error perturbaciones de tipo polinomial de orden ‘ $r$ ’.

Un hecho importante que cabe destacar es que –como no cabría imaginarse de otra forma– uno no debe esperar de estos observadores una capacidad “infinita” para estimar derivadas. Por la propia naturaleza de las señales, las derivadas altas son difíciles de calcular numéricamente con precisión. Ese hecho se manifiesta en (18) en el comportamiento de la ganancia  $L_{\omega,r}$ ; donde, prácticamente con toda seguridad, se podrá comprobar que para situar los polos de la matriz principal de (18) en una región de estimación suficientemente rápida, será necesario insertar unos valores de ganancias  $L_{\omega,r}$  extremadamente grandes conforme  $r$  se incrementa. Es fácil que el algoritmo de cálculo de estas ganancias se vuelva inestable para valores de  $r > 3$  si se quieren polos de observación relativamente rápidos.

#### 4.4. Otras soluciones

Aparte de los mencionados, existen otros enfoques basados en la estructura de observadores de Luenberger. De entre todos ellos, cabe mencionar los observadores de tiempo finito (Raff et al. (2006)), y los observadores P-D-I para sistemas descriptores (Wu et al. (2007)), que tienen aplicación directa a sistemas perturbados (Gao and Wang (2006)). Ambos enfoques se basan en una transformación lineal del sistema original para, en el primer caso, obtener convergencia en tiempo finito y, en el segundo caso, mejorar la estimación en presencia de perturbaciones, ruido de medida y/o fallo de sensores.

Por otro lado, y de forma genérica, todos los observadores mencionados en este tutorial se pueden extender a sistemas con retardos temporales. Básicamente, estas aproximaciones se pueden dividir en tres enfoques diferentes: **i)** observadores extendidos que incluyen una predicción del estado basada en la técnica de la asignación finita del espectro (FSA) (Sanz et al. (2016); Wang et al. (2020)); **ii)** observadores extendidos con una predicción del estado basada en una cascada de observadores, “sequential sub-predictors”(SSP) (Sanz et al. (2018); Zhu and Fridman (2021)); y **iii)** predictores de estado de sistemas

perturbados basados en observadores de orden elevado Castillo and García (2021). La primera aproximación necesita disponer de una medida del estado, presentando problemas de aproximación numérica para sistemas inestables en bucle abierto (Mondié and Michiels (2003)), mientras que las dos últimas, se construyen a partir de realimentación de la salida, sin problemas de estabilidad interna.

## 5. Leyes de control

Finalmente, en esta sección se profundiza sobre el último elemento de los DOBCs: las *leyes de control*.

Una ley de control es una transformación de las variables estimadas del modelo,  $\hat{x}(t)$ ,  $\hat{\omega}(t)$ , al espacio de acciones de control,  $u(t)$ , a través de una función  $f(\cdot)$ :

$$u(t) = f(\hat{x}(t), \hat{\omega}(t)). \quad (20)$$

Consiste, por tanto, en realimentar las estimaciones del estado del modelo de nuevo al sistema; generalmente, con el objetivo de reconducirlo automáticamente a otro punto de funcionamiento o de cambiar la forma en la que el sistema responde ante entradas externas. Existe un estándar que es diseñar (20) de tal forma que el sistema se estabilice en un punto definido por  $z(t) = C_2 x(t) \approx 0$ , donde  $C_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$  y  $q \leq n$ .

En lo que sigue, se introducen diversas técnicas que pueden emplearse para este fin.

### 5.1. Diseño para eliminar el efecto de las perturbaciones

Se incluyen aquí dos formas de calcular  $f(\cdot)$  de tal forma que la ley de control (20) garantice que  $z(t) \rightarrow 0$ .

#### Perturbaciones constantes

Esta realimentación es de las más utilizadas hoy en día, probablemente debido a su sencillez conceptual y facilidad de cálculo:

$$u(t) = K_x \hat{x}(t) + K_\omega \hat{\omega}(t) \quad (21)$$

donde  $K_\omega \triangleq -[C_2(A + B_2 K_x)^{-1} B_2]^{-1} C_2(A + B_2 K_x)^{-1} B_1$ .

Su principal propiedad es la siguiente (Li et al. (2012)): ante estimaciones exactas *i.e.*  $\hat{x}(t) = x(t)$ ,  $\hat{\omega}(t) = \omega(t)$ — esta realimentación garantiza que  $z(t) = C_2 x(t) \rightarrow 0$  siempre y cuando  $\dot{\omega}(t) \rightarrow 0$ . En otras palabras, para perturbaciones constantes o muy lentamente variables, dicha realimentación garantizará que  $z(t)$  se mantiene cerca de cero.

Cabe destacar que hay un grado de libertad en (21), que es la matriz de realimentación  $K_x$ . Esta matriz puede diseñarse libremente con técnicas estándar como el posicionamiento de polos (Kautsky et al. (1985)) o el diseño LQR (24).

#### Perturbaciones variables con el tiempo

Como extensión directa de (21), se plantea el caso de cómo debería diseñarse una realimentación de tal forma que se elimine por completo el efecto de las perturbaciones en  $z(t)$ , sin necesidad de imponer  $\dot{\omega}(t) \rightarrow 0$ .

En Castillo et al. (2018), se aborda el problema para modelos con una única entrada de control,  $u(t)$ , y una única variable controlada  $z(t)$ ; desarrollando la siguiente realimentación:

$$\begin{cases} u(t) = K_x \hat{x}(t) + u_d(\eta(t), \omega(t), \dot{\omega}(t), \dots, \omega^{(k_d)}(t)), \\ \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Phi \xi(t) + \Gamma \omega(t), \\ \hat{\eta}(t) = H \xi(t). \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

siendo  $\dot{\xi} = \Phi \xi + \Gamma \omega$ ,  $\hat{\eta} = H \xi$ , un filtro estable de la señal de perturbación y  $u_d(\eta, \omega, \dot{\omega}, \dots, \omega^{(k_d)})$  una combinación lineal de derivadas e integrales de  $\omega$ .

La estrategia que se suele plantear para obtener estas realimentaciones es mapear la perturbación y la acción de control al mismo canal del modelo, mediante un adecuado cambio de variable. En general, se busca obtener un modelo equivalente entrada-salida que cumpla que  $B_1 = B_2$ . Esta condición se conoce como “matched condition” y permite eliminar por completo perturbaciones variables en el tiempo mediante la (trivial) ley de control  $u(t) = -\tilde{\omega}(t)$ , siendo  $-\tilde{\omega}(t)$  la perturbación equivalente en el canal de entrada.

Una de estas transformaciones se desarrolla de manera analítica en Castillo et al. (2018) para sistemas SISO. Sin embargo, para sistemas más complejos con múltiples entradas y múltiples perturbaciones, la obtención del cambio de variable resulta excesivamente complejo a nivel técnico. Es por esto que algunos autores optan por, directamente, forzar la condición  $B_1 = B_2$  de manera deliberada en el modelo y, simplemente, delegar en los observadores la tarea de estimar en tiempo real cual sería esta hipotética perturbación equivalente a la entrada (She et al. (2010)). Este último enfoque ha ganado mucha popularidad por su sencillez conceptual.

### 5.2. Diseño basado en control óptimo

El criterio anterior persigue como objetivo que la variable controlada,  $z(t)$ , se mantenga en cero de manera forzosa. En muchas circunstancias éste es, de hecho, el objetivo deseado y puede realizarse satisfactoriamente con realimentaciones de la forma (21)-(22). Sin embargo, dichas realimentaciones poseen un punto débil: no imponen ninguna restricción en la acción de control  $u(t)$ .

En algunas aplicaciones es muy común que existan también restricciones en  $u(t)$ . La razón es que los valores numéricos de  $u(t)$  se envían a actuadores reales en el sistema, y estos siempre poseen ciertas restricciones que es preciso considerar como: valores máximos y mínimos, límites en cuanto a su velocidad de variación, costes económicos asociados a su uso, etc. En algunas circunstancias puede ocurrir que la señal de control generada por (21)-(22) no sea viable debido a estas restricciones.

Para esos escenarios, es bastante común emplear un segundo tipo de realimentaciones que se diseñan con base a criterios de optimización. Éstas poseen la característica de que ponderan y/o imponen restricciones en el uso de ciertas acciones de control.

Presentamos aquí dos categorías principales:

#### Diseño basado en Regulación Cuadrática Lineal (LQR)

La primera de ellas consiste en la siguiente:

$$u(t) = K_x x(t) + \sum_{i=0}^r \bar{K}_{\omega,i} \omega^{(i)}(t), \quad (23)$$

donde  $K_x \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\bar{K}_{\omega,i} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $i = \{0, 1, \dots, r\}$ , vienen dadas por:

$$K_x \triangleq -R^{-1} B_2^T S_T, \quad (24a)$$

$$\bar{K}_{\omega,i} \triangleq (-1)^i R^{-1} B_2^T ((A + B_2 K_x)^T)^{-(i+1)} S_T B_1, \quad (24b)$$

siendo  $S_T$  la solución a la ecuación algebraica de Ricatti (25)

$$A^T S_T + S_T A - S_T B_2 R^{-1} B_2^T S_T + Q = 0. \quad (25)$$

y  $\{Q, R\}$  dos matrices que definen el siguiente coste:

$$J \triangleq \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt. \quad (26)$$

La principal característica de esta realimentación se define en el siguiente teorema:

**Teorema 2.** (Castillo (2021)). *La realimentación (23)-(25) minimiza el coste (26) para perturbaciones polinomiales de orden  $r$ . Para perturbaciones variables en el tiempo, minimiza aproximadamente (26), con un error proporcional a  $\epsilon \triangleq \|\omega^{(r)}(t)\|$ .*

Análisis más detallados de cómo se obtiene esta realimentación pueden encontrarse en Castillo (2021). Otros análisis alternativos pueden verse en Mukherjee et al. (2021), donde se demuestra la expresión para el caso de perturbaciones constantes,  $r = 0$ .

Esta realimentación posee una ventaja importante si se compara con (21), (22). Minimiza el coste (26) y, como puede verse, este coste incluye un grado de libertad para penalizar el uso de  $u(t)$ : la matriz  $R$ . Si con la realimentación (21), uno ve que se están generando acciones de control demasiado agresivas para el sistema, puede utilizar estas realimentaciones con valores crecientes de  $R$  para reducir progresivamente los valores de  $u(t)$  generados por las ecuaciones.

La matriz  $Q$  puede definirse como:  $Q = C_2^T C_2$ , de tal forma que  $x(t)^T Q x(t) = z^T(t) z(t)$ . Así se fuerza a que (26) trate de conducir  $z(t)$  a cero pero, también, penalizando el uso de acciones de control.

### Diseño basado en Control Predictivo (MPC)

La realimentación basada en LQR da un paso hacia delante en lo que respecta a introducir restricciones en el uso de la acción de control. Sin embargo, dichas restricciones son altamente cualitativas ya que únicamente pueden incluirse a través de la matriz  $R$ . ¿Qué ocurre si en un escenario han de garantizarse, estrictamente, restricciones del tipo  $u(t) > 0$ , o  $|u(t)| \leq \alpha$ ?

En estos escenarios, se utiliza una tecnología llamada Control Predictivo basado en Modelos (MPC) (Mayne (2014); Fernandez-Camacho and Bordons-Alba (2013)), cuyo desarrollo ha sido consecuencia directa de los avances en la capacidad de cálculo de los ordenadores y del desarrollo de librerías altamente eficientes para optimización cuadrática sujeta a restricciones.

La idea es intuitiva: en lugar de asumir que la acción de control es una señal continua, ésta se *fragmenta* en pequeños intervalos donde su valor permanece constante,  $u(t) = u_k$ ,  $t \in [t_k, t_k + T)$ . De esta forma, un ordenador puede calcular numéricamente cual sería la secuencia de valores  $\mathbf{u}_k = \{u_0, u_1, \dots, u_N\}$  que es preciso introducir al sistema de tal forma que se minimice un coste similar a (26) que, además, incluye restricciones del tipo  $u(t) > 0$ ,  $|u(t)| \leq \alpha$  o  $\dot{u}(t) \leq \beta$ .

Así pues, el coste (26) se redefine como:

$$J_d \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k], \quad (27)$$

donde  $x_k \triangleq x(t_k)$  es el estado del modelo en el instante en el que la acción de control cambia de  $u_{k-1}$  a  $u_k$ .

El control, entonces, se formula como sigue:

$$\mathbf{u}_k^* = \arg \left( \min_{\mathbf{u}_k} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k] \right), \quad (28a)$$

$$\text{s.t. } u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max} \quad (28b)$$

$$\|u_k - u_{k+1}\| \leq \beta \quad (28c)$$

cuya solución proporciona la señal de control óptima que cumple con las restricciones.

Actualmente, las principales investigaciones en torno a este enfoque van en dos líneas. La primera de ellas, a nivel teórico, consiste en dar soluciones que permitan garantizar que dicho controlador va a ser capaz de estabilizar un sistema que naturalmente es inestable. El origen del problema está en las propias restricciones de las acciones de control. Para entenderlas, resulta útil situarse en el caso extremo: si tenemos un sistema inestable y formulamos el controlador (28) con  $u_{\min} = u_{\max} = 0$ , eso implica que  $u(t) = 0$  –solución trivial nula–, con lo que el controlador no estabilizará nunca al sistema. Si aumentamos el rango:  $u_{\min} = -\epsilon$ ,  $u_{\max} = +\epsilon$ , con  $\epsilon$  relativamente pequeño; el sistema probablemente pueda estabilizarse si sus señales de perturbación son débiles y su estado inicial se sitúa cerca de cero. Pero, en otros casos, probablemente llegará a inestabilizarse. Existe, por tanto, una relación entre la capacidad de estabilización de (28), sus restricciones en las acciones de control y las señales de perturbación que puedan afectar al sistema. Para más detalles, uno puede referirse a Mayne (2014).

El segundo de ellos, va en la línea de cómo predecir el estado y las perturbaciones futuras durante el horizonte de predicción. Se trata de un problema abierto de interés reciente que se está tratando tanto con observadores (Castillo and García (2021)) como con técnicas de clustering y machine learning (Mayne (2014)). Esta problemática pone de manifiesto la importancia de conocer la dinámica principal del sistema ( $A, B_2, C$ ), ya que justo el conocimiento de la dinámica principal es lo que permite hacer predicciones futuras del sistema.

### 5.3. Diseño basado en criterios de energía de Lyapunov

Por último, otro enfoque alternativo para diseñar las realimentaciones son los criterios basados en energía de Lyapunov — o también llamados los métodos de la elipsoide invariante Khlebnikov (2016).

La idea que existe aquí es ligeramente diferente a las anteriores. En primer lugar, se define una realimentación con la estructura (21), pero donde donde  $K_x$  y  $K_\omega$  son, por el momento, matrices indefinidas.

El objetivo es calcular unos valores numéricos para  $\{K_x, K_\omega\}$  de tal forma que una cierta función de energía cuadrática, p.e.

$$V(t) = x^T(t) P x(t) \geq 0 \quad (29)$$

converja a una región cercana a cero:  $\|V(t)\| \leq \epsilon$ ; donde  $\epsilon \geq 0$  y  $P$  es una matriz simétrica y positiva definida.

Si se cumple esto, entonces los estados del sistema controlado se mantendrán dentro de la siguiente elipsoide:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq \epsilon\} \quad (30)$$

El problema reside en cómo calcular numéricamente los valores de  $\{K_x, K_\omega\}$  de tal forma que se asegure esta propiedad. Para ello se recurre generalmente a métodos de optimización numérica basados en desigualdades matriciales (LMI, del inglés, Linear Matrix Inequalities). Se procede como sigue: si se encuentran dos parámetros  $\delta > 0$ ,  $\gamma > 0$ , tal que:

$$\dot{V}(t) + \delta V(t) + \gamma \|\omega(t)\|^2 \leq 0; \quad (31)$$

entonces queda demostrado (Khlebnikov (2016); Castillo et al. (2019a); Fridman (2014)) que  $V(t)$  converge a la región  $V \leq \frac{\gamma\sigma}{\delta} \triangleq \epsilon$ ; siendo  $\|\omega(t)\|^2 \leq \sigma$ .

La Ecuación (31) se puede expresar como una LMI y optimizarla numéricamente para encontrar conjuntos de parámetros  $\{K_x, K_\omega, \gamma, \delta\}$  que garanticen la desigualdad (31). Para más detalles sobre cómo se aborda dicho problema, uno puede referirse al Teorema 5 en Khlebnikov (2016), o al clásico libro Boyd et al. (1994) sobre el papel de las LMIs en la teoría del control.

## 6. Simulación comparativa – control de glucosa

Finalmente, en esta sección se incluye una comparativa sobre las diferentes técnicas anteriormente descritas. Para ello, se utiliza como ejemplo “benchmark” el conocido problema de regulación de glucosa para personas diabéticas.

El siguiente modelo no lineal conforma la base principal del simulador “Medtronic” (Stocker et al. (2006)), un software que se utiliza para educar a pacientes con diabetes de tipo 1, así como para evaluar algoritmos de control automático de glucosa (Kanderian et al. (2009, 2012)):

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= -\frac{1}{\tau_1}v_1(t) + \frac{1}{\tau_1 C_I}u_I(t), \\ \dot{v}_2(t) &= \frac{1}{\tau_2}v_1(t) - \frac{1}{\tau_2}v_2(t), \\ \dot{v}_3(t) &= p_2 S_I v_2(t) - p_2 v_3(t), \\ \dot{v}_4(t) &= -k_{gezi}v_4(t) - v_3(t)v_4(t) + k_{egp} + d(t), \\ y(t_k) &= v_4(t_k). \end{aligned} \quad (32)$$

Tabla 1: Parámetros del modelo. Los valores numéricos corresponden con los que se identificaron en Kanderian et al. (2009) para el paciente n°1.

Param.	Valor	Significado
$\tau_1$	49 ( $\text{min}^{-1}$ )	Retraso en la absorción
$\tau_2$	47 ( $\text{min}^{-1}$ )	Retraso en la absorción
$C_I$	2020 (ml/min)	Depuración de insulina
$p_2$	1,6e-2 ( $\text{min}^{-1}$ )	Retraso en la acción de la insulina
$S_I$	8,11e-4 (ml/ $\mu$ U)	Sensibilidad a la insulina
$k_{gezi}$	2,20e-3 ( $\text{min}^{-1}$ )	Efecto de autoreducción de glucosa
$k_{egp}$	1,33 (mg/dl/min)	Autoproducción de glucosa

Donde  $u_I(t)$  representa la inyección de insulina a nivel Subcutáneo (SC),  $v_1(t)$  es la concentración de insulina a nivel SC,  $v_2(t)$  representa la concentración de insulina en plasma,  $v_3(t)$  representa la insulina efectiva,  $v_4(t)$  la Concentración de Glucosa (CG) y  $d(t)$  es una variable desconocida dependiente del

tiempo que modeliza el incremento de glucosa que sigue tras una comida con contenido de carbohidratos.

### Problema, objetivos y restricciones

El modelo (32) predice, para una persona, cómo la CG en sangre se ve afectada por: **i)** inyecciones de insulina,  $u_I(t)$ ; y **ii)** comidas que la persona ingiere,  $d(t)$ . El principal objetivo es diseñar un regulador que inyecte insulina automáticamente en respuesta a comidas no anunciadas por parte del individuo.

Debido a la alta variabilidad que existe en el tipo y en la duración de las comidas, la variable  $d(t)$  debe de considerarse como un parámetro totalmente desconocido para el regulador. En las simulaciones, se ha utilizado la siguiente función  $d(t)$ :

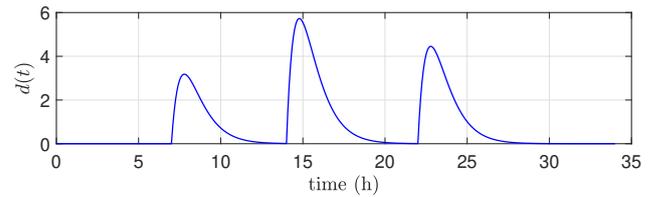


Figura 3: Disturbance introduced to the simulator.

donde  $d(t)$  se ha generado de acuerdo a la fórmula:

$$d(t) = \frac{C_H(t)}{V_G \tau_m^2} t e^{-\frac{t}{\tau_m}}, \quad (33)$$

siendo  $C_H = \{50, 90, 70\}$  (g) la cantidad de carbohidratos consumidos y  $V_G = 0,123$ ,  $\tau_m = 47$  parámetros identificados para el Paciente 1 en Kanderian et al. (2009).

El simulador resuelve numéricamente la Ecuación (32), comenzando desde condiciones estacionarias –i.e.  $v_1(0) = v_2(0) = 13,68$ ,  $v_3(0) = 0,011$ ,  $v_4(0) = 100$ ,  $u_I(0) = 2,77e-4$ – y recibiendo como entradas  $d(t)$  y las inyecciones de insulina generadas por el regulador  $u_I(t)$ . Para el diseño de los siguientes reguladores/observadores, se utiliza una versión linealizada del modelo alrededor del punto  $v_1(0)$ ,  $v_2(0)$ ,  $v_3(0)$ ,  $v_4(0)$ :

$$G \triangleq \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t) + B_1 \omega(t), \\ y(t_k) = C_2 x(t_k), \\ z(t) = C_1 x(t), \end{cases} \quad (34)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\tau_2 & -1/\tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 S_I & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -v_4(0) & -v_3(0) - k_{gezi} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [1/(\tau_1 C_I) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$C_2 = C_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1].$$

El objetivo es que el regulador mantenga una CG en torno a  $v_4(0) = 100$  (mg/dl). En ningún caso puede superar los 250 (mg/dl) o bajar de 54 (mg/dl), ya que esto se corresponde con casos severos de hiperglucemia o hipoglucemia, respectivamente. Tras una comida, los valores óptimos deberían oscilar entre  $70 \text{ (mg/dl)} < v_4(t) < 180 \text{ (mg/dl)}$ . El regulador dispone de medidas  $y(t_k)$  con un periodo  $T = 5$  (min). Además, existe una limitación importante que es que la insulina únicamente puede inyectarse (y no extraerse). Esto se traduce en que la acción de control está limitada a valores positivos:  $u(t) \geq 0$ .

6.1. Diseño de observadores de perturbación

Con objetivos comparativos, se han diseñado tres observadores diferentes para el sistema: un Observador Proporcional (OP), un Observador Integral (OI), y un observador integral de orden 1. La Figura 4 muestra las estimaciones de la perturbación dadas por cada observador:

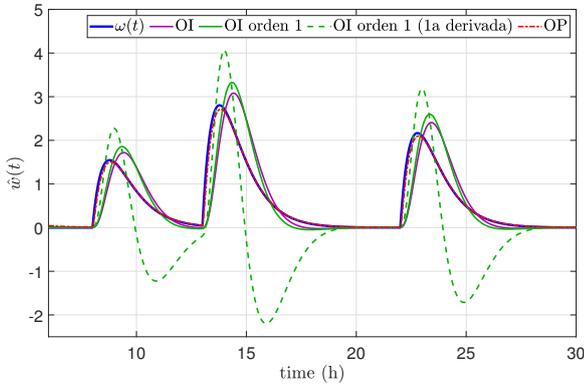


Figura 4: Estimated disturbance by different type of observers.

Puede apreciarse el efecto acumulativo de los observadores integrales frente al observador proporcional. Sin embargo, dicho efecto puede reducirse por alta ganancia en las matrices  $L_x$ ,  $L_\omega$ . Puede observarse también cómo el OI de orden 1 da estimaciones de la derivada de la perturbación observada.

Los OIs se han diseñado con las matrices extendidas (16), (18); mediante la técnica estándar de asignación de polos, situando los polos en  $s = -0,03$ . Por otro lado, el OP se ha diseñado con el software Yalmip (<https://yalmip.github.io/>) de cálculo numérico de desigualdades matriciales. Se han obtenido matrices  $P$ ,  $L_x$  y  $L_\omega$  que garantizan la condición (12) además de la siguiente:  $N \otimes P + M \otimes (PA - PL_x C) + M^T \otimes (PL_x \bar{A} - Y \bar{C})^T \leq 0$ , siendo  $N = [0, 1; 0, 0]$  y  $M = [0,03, -0,03; -0,03, 0,03]$ . Esta última condición fuerza que los polos del observador ( $A - LC$ ) se sitúen en una esfera de radio  $r = 0,03$  y centro  $c = -0,03$  (Chilali et al. (1999)). De esta forma, los polos en bucle cerrado del observador proporcional son comparables a los que se han fijado para los observadores integrales, evitando también divergencias numéricas que puedan aparecer en el proceso de optimización.

Las ganancias obtenidas  $L_{OI}$ ,  $L_{OI}^{orden1}$ ,  $L_{OP} = [L_x, L_\omega]$  son:

$$L_{OI} = \begin{bmatrix} 1,44e-04 \\ 1,42e-03 \\ 9,24e-06 \\ 7,9e-02 \\ 3,5e-03 \end{bmatrix}, L_{OI}^{orden1} = \begin{bmatrix} -6,77e-05 \\ -7,96e-04 \\ -9,89e-06 \\ 1,09e-01 \\ 4,36e-03 \\ 1,05e-04 \end{bmatrix}, L_{OP} = \begin{bmatrix} 5,59e-11 \\ 9,9e-10 \\ 5e-07 \\ 3,72e-03 \\ 3,2e-01 \end{bmatrix}$$

6.2. Diseño de reguladores basados en observadores de perturbación

Se han diseñado tres reguladores diferentes para el mismo escenario: uno para eliminar el efecto de las perturbaciones (21), y dos basados en control óptimo, Ecuación (23), uno con  $r = 0$  y otro con  $r = 2$

Las ganancias del regulador (21) resultan en:

$$K_x = [-23,255, -22,434, -31920, 3,0263],$$

$$K_\omega \triangleq -[C_1(A + B_2 K_x)^{-1} B_2]^{-1} C_1(A + B_2 K_x)^{-1} B_1, \quad (35)$$

$$= 25790.$$

Mientras que las de (23):

$$K_x = [-23,255, -22,434, -31920, 3,0263], \quad (36)$$

$$K_{\omega,0} = 1945,3, K_{\omega,1} = 3,495e5, K_{\omega,2} = 4,438e7.$$

que se corresponden con unas matrices de peso,  $R = 1$ ,  $Q = \text{diag}\{1, 1, 1, 1e-4\}$ .

Estas matrices se han seleccionado a modo “prueba y error”, con el principal objetivo de penalizar desviaciones de la concentración de glucosa sobre el punto de equilibrio. La principal diferencia entre (35) y (36) radica en las ganancias  $K_\omega$ .

Para todos los reguladores, las observaciones se obtienen con un observador integral (18) de orden 2, y con ganancia:

$$L = [L_x, L_\omega] = [-2,57e-07, 9,71e-08, 6,78e-07, \dots, 9,89e-01, 5,23e-01, 1,61e-01, 2,4e-02]^T \quad (37)$$

La Figura 5 muestra el comportamiento en bucle cerrado de los tres reguladores:

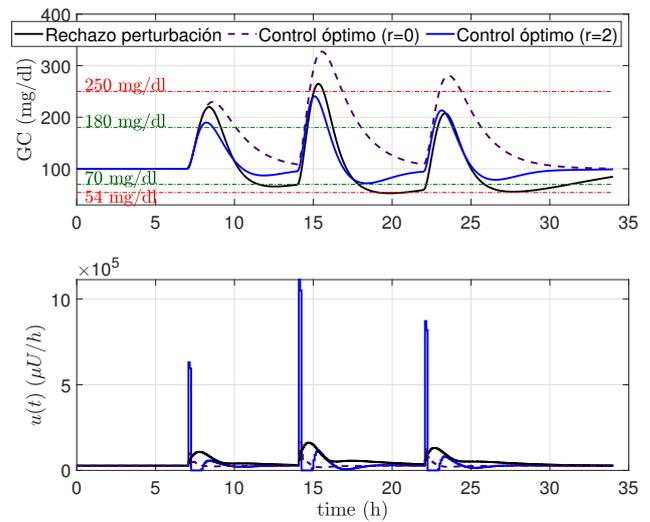


Figura 5: Closed-loop control comparative

Cabe destacar el comportamiento que se obtiene con el enfoque de control óptimo para un grado de aproximación  $r = 2$ . El regulador prácticamente llega a imitar el comportamiento humano – que es, inyectarse un bolo de insulina previo a cada comida. El comportamiento con  $r = 0$  empeora debido a que implícitamente este regulador solo garantiza optimalidad para perturbaciones constantes, lo cual no es el caso.

También, es importante mencionar que ninguna de las otras leyes de control mencionadas en este tutorial (rechazo completo de la perturbación (22), enfoques basados en energía de Lyapunov (29) y MPC (28)) han logrado producir un comportamiento que iguale o mejore a estos tres anteriores. El problema de las dos primeras es que, por diseño, pretenden eliminar por completo el efecto de la perturbación. Para que esto sea posible, el

regulador debería de inyectar al paciente de manera precipitada mucha cantidad de insulina, justo en el instante en el que se detecta una ingesta de comida. De esta forma se fomenta una absorción rápida desde el estado  $v_1(t)$  al  $v_4(t)$  que evita rápidamente un incremento de glucosa postprandial. Después, cuando la CG del paciente comenzase a descender debido el exceso de insulina en  $v_3(t)$ , estos reguladores trataban de extraer la insulina de  $v_3(t)$  rápidamente generando acciones de control negativas. Debido a que la extracción de insulina es imposible por las limitaciones del proceso, dichos reguladores siempre llevaban al paciente a condiciones graves de hipoglucemia.

Por otro lado, el controlador MPC, a pesar de considerar las restricciones en los actuadores, internamente debía de calcular predicciones de la perturbación futura durante horizontes de predicción relativamente largos. Esto introducía errores significativos en las predicciones numéricas de los estados, que se materializaban en acciones de control erráticas. El MPC generalmente asume que la perturbación se mantendrá constante durante el horizonte de predicción, p.e. (Castillo et al. (2020)). Dicha hipótesis, en este caso, no se satisface, lo que daba lugar a los problemas descritos.

## 7. Conclusiones

En este tutorial se ha realizado una revisión sobre los principios de funcionamiento y los principales métodos de diseño de los reguladores basados en observadores de perturbaciones, con el objetivo de dar un punto de vista alternativo al que normalmente pueda encontrarse en la literatura actual y sin entrar en el complejo aparato matemático de la teoría del control.

En concreto, se han distinguido sus elementos característicos –que son: los modelos perturbados, los observadores de perturbaciones, y el diseño de leyes de control– y se ha analizado cada uno de ellos en profundidad; incluyendo referencias a las principales técnicas y algoritmos que se pueden utilizar en distintos escenarios.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Unión Europea-Next Generation EU –proyecto Margarita Salas, MS/38, Universitat Politècnica de València, Ministerio de Universidades, España.

## Referencias

Athans, M., 1971. On the LQG problem. *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (6), 528–528.

Başar, T., Olsder, G. J., 1998. *Dynamic noncooperative game theory*. SIAM.

Bernardi, E., Adam, E. J., 2020. Observer-based fault detection and diagnosis strategy for industrial processes. *Journal of the Franklin Institute* 357 (14), 10054–10081.

Bernhard, P., 2003. *A robust control approach to option pricing. Applications of Robust Decision Theory and Ambiguity in Finance*. City University Press, London.

Bhattacharyya, S., 1978. Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE transactions on Automatic Control* 23 (3), 483–484.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM.

Bünte, T., Odenthal, D., Aksun-Güvenç, B., Güvenç, L., 2002. Robust vehicle steering control design based on the disturbance observer. *Annual reviews in control* 26 (1), 139–149.

Carvajal, B. V. M., Saez, J. S., Rodríguez, S. G.-N., Iranzo, M. M., 2021. Control por rechazo activo de perturbaciones: guía de diseño y aplicación. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 18 (3), 201–217.

Castillo, A., 2021. Novel strategies to design controllers and state predictors based on disturbance observers. Ph.D. thesis, Universitat Politècnica de València.

Castillo, A., García, P., 2021. Predicting the future state of disturbed lti systems: A solution based on high-order observers. *Automatica* 124, 109365.

Castillo, A., García, P., Fridman, E., Albertos, P., 2019a. Extended state observer-based control for systems with locally lipschitz uncertainties: Lmi-based stability conditions. *Systems & Control Letters* 134.

Castillo, A., García, P., Sanz, R., Albertos, P., 2018. Enhanced extended state observer-based control for systems with mismatched uncertainties and disturbances. *ISA transactions* 73, 1–10.

Castillo, A., Santos, T. L., Garcia, P., Normey-Rico, J. E., 2020. Predictive esobased control with guaranteed stability for complex uncertain constrained systems. *ISA transactions*.

Castillo, A., Sanz, R., Garcia, P., Qiu, W., Wang, H., Xu, C., 2019b. Disturbance observer-based quadrotor attitude tracking control for aggressive maneuvers. *Control Engineering Practice* 82, 14–23.

Chakrabarty, A., Corless, M. J., Buzzard, G. T., Žak, S. H., Rundell, A. E., 2017. State and unknown input observers for nonlinear systems with bounded exogenous inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control* 62 (11), 5497–5510.

Chang, J.-L., 2006. Applying discrete-time proportional integral observers for state and disturbance estimations. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51 (5), 814–818.

Chapellat, H., Bhattacharyya, S., 1989. A generalization of kharitonov's theorem; robust stability of interval plants. *IEEE transactions on automatic control* 34 (3), 306–311.

Chen, W. H., Yang, J., Guo, L., Li, S., 2016. Disturbance–observer–based control and related methods—An overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63 (2), 1083–1095.

Chilali, M., Gahinet, P., Apkarian, P., 1999. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE transactions on Automatic Control* 44 (12), 2257–2270.

Choi, B.-K., Choi, C.-H., Lim, H., 1999. Model-based disturbance attenuation for CNC machining centers in cutting process. *IEEE/ASME transactions on mechatronics* 4 (2), 157–168.

Corless, M., Tu, J., 1998. State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica* 34 (6), 757–764.

Deng, J., Xue, W., Zhou, X., Mao, Y., 2020. On disturbance rejection control for inertial stabilization of long-distance laser positioning with movable platform. *Measurement and Control*.

Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., Francis, B., 1988. State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. In: *1988 American Control Conference*. IEEE, pp. 1691–1696.

Doyle, J. C., 1978. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on automatic control* 23 (4), 756–757.

Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., Francis, B. A., 1989. State-space solutions to standard  $h_2$  and  $h_\infty$  / control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 34 (8), 831–847.

Edwards, C., Spurgeon, S., 1998. *Sliding mode control: theory and applications*. Taylor & Francis.

Fernandez-Camacho, E., Bordons-Alba, C., 2013. *Model predictive control*. Springer science & business media.

Francis, B. A., Wonham, W. M., 1976. The internal model principle of control theory. *Automatica* 12 (5), 457–465.

Freeman, R., Kokotovic, P. V., 2008. *Robust nonlinear control design: state-space and Lyapunov techniques*. Springer Science & Business Media.

Fridman, E., 2014. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer.

Fujimoto, H., Saito, T., Noguchi, T., 2004. Motion stabilization control of electric vehicle under snowy conditions based on yaw-moment observer. In: *The 8th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, 2004. AMC'04*. IEEE, pp. 35–40.

Gao, N., Darouach, M., Voos, H., Alma, M., 2016. New unified  $\mathcal{H}_\infty$  dynamic observer design for linear systems with unknown inputs. *Automatica* 65, 43–52.

Gao, Z., 2006. Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design. In: *2006 American control conference*. IEEE, pp. 7–pp.

Gao, Z., 2014. On the centrality of disturbance rejection in automatic control. *ISA transactions* 53 (4), 850–857.

Gao, Z., Huang, Y., Han, J., 2001. An alternative paradigm for control system

- design. In: Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control (Cat. No. 01CH37228). Vol. 5. IEEE, pp. 4578–4585.
- Gao, Z., Wang, H., 2006. Descriptor observer approaches for multivariable systems with measurement noises and application in fault detection and diagnosis. *Systems & Control Letters* 55 (4), 304–313.
- García, C. E., Morari, M., 1982. Internal model control. a unifying review and some new results. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development* 21 (2), 308–323.
- Han, H., Yang, Y., Li, L., Ding, S. X., 2018. Observer-based fault detection for uncertain nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute* 355 (3), 1278–1295.
- Han, J., 2009. From pid to active disturbance rejection control. *IEEE transactions on Industrial Electronics* 56 (3), 900–906.
- Hansen, L. P., Sargent, T. J., 2008. *Robustness*. Princeton university press.
- Horowitz, I., 1963. *Synthesis of Feedback Systems*. Academic Press.
- Huang, Y., Xue, W., 2014. Active disturbance rejection control: methodology and theoretical analysis. *ISA transactions* 53 (4), 963–976.
- Jain, S., Yogesh, H., 2020. Generalized active disturbance rejection controller for load frequency control in power systems. *IEEE Control Systems Letters* 4 (1), 73–78.
- Johnson, C., 1971. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems. *IEEE Transactions on automatic control* 16 (6), 635–644.
- Johnson, C. D., 1975. On observers for systems with unknown and inaccessible inputs. *International journal of control* 21 (5), 825–831.
- Johnson, C. D., 1986. Disturbance-accommodating control; an overview. In: 1986 American Control Conference. IEEE, pp. 526–536.
- Kadowaki, S., Ohishi, K., Miyashita, I., Yasukawa, S., 2002. Re-adhesion control of electric motor coach based on disturbance observer and sensor-less vector control. In: Proceedings of the Power Conversion Conference-Osaka 2002 (Cat. No. 02TH8579). Vol. 3. IEEE, pp. 1020–1025.
- Kanderian, S. S., Weinzimer, S., Voskanyan, G., Steil, G. M., 2009. Identification of intraday metabolic profiles during closed-loop glucose control in individuals with type 1 diabetes.
- Kanderian, S. S., Weinzimer, S. A., Steil, G. M., 2012. The identifiable virtual patient model: comparison of simulation and clinical closed-loop study results. *Journal of diabetes science and technology* 6 (2), 371–379.
- Kautsky, J., Nichols, N. K., Van Dooren, P., 1985. Robust pole assignment in linear state feedback. *International Journal of control* 41 (5), 1129–1155.
- Khalil, H. K., Grizzle, J. W., 2002. *Nonlinear systems*. Vol. 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ.
- Khargonekar, P. P., Rotea, M. A., 1991. Mixed  $H_2/H_\infty$  control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 36 (7), 824–837.
- Khlebnikov, M. V., 2016. Control of linear systems subjected to exogenous disturbances: Combined feedback. In: *IEEE International Federation of Automatic Control (IFAC)*, pp. 111–116.
- Kim, K.-S., Rew, K.-H., Kim, S., 2010. Disturbance observer for estimating higher order disturbances in time series expansion. *IEEE Transactions on automatic control* 55 (8), 1905–1911.
- Li, S., Yang, J., Chen, W. H., Chen, X., 2012. Generalized extended state observer based control for systems with mismatched uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59 (12), 4792–4802.
- Liu, Z., Liu, J., Wang, L., 2018. Disturbance observer based attitude control for flexible spacecraft with input magnitude and rate constraints. *Aerospace Science and Technology* 72, 486–492.
- Mayne, D. Q., 2014. Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica* 50 (12), 2967–2986.
- Meditch, J., Hostetter, G., 1973. Observers for systems with unknown and inaccessible inputs. In: 1973 IEEE Conference on Decision and Control including the 12th Symposium on Adaptive Processes. IEEE, pp. 120–124.
- Mondié, S., Michiels, W., 2003. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (12), 2207–2212.
- Mukherjee, S., Bai, H., Chakraborty, A., 2021. Model-based and model-free designs for an extended continuous-time LQR with exogenous inputs. *Systems & Control Letters* 154, 104983.
- Ohishi, K., 1983. Torque-speed regulation of DC motor based on load torque estimation. In: *IEEJ International Power Electronics Conference, IPEC-TOKYO, 1983-3*. Vol. 2. pp. 1209–1216.
- Petersen, I. R., Tempo, R., 2014. Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments. *Automatica* 50 (5), 1315–1335.
- Raff, T., Lachner, F., Allgower, F., 2006. A finite time unknown input observer for linear systems. In: 2006 14th Mediterranean Conference on Control and Automation. IEEE, pp. 1–5.
- Rosenbrock, H., McMorran, P., 1971. Good, bad, or optimal? *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (6), 552–554.
- Sadhu, S., Ghoshal, T. K., 2010. Sight line rate estimation in missile seeker using disturbance observer-based technique. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 19 (2), 449–454.
- Safonov, M. G., 1980. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. MIT press.
- Safonov, M. G., 2012. Origins of robust control: Early history and future speculations. *Annual Reviews in Control* 36 (2), 173–181.
- Sala-Mira, I., Diez, J.-L., Ricarte, B., Bondia, J., 2019. Sliding-mode disturbance observers for an artificial pancreas without meal announcement. *Journal of Process Control* 78, 68–77.
- Sandberg, I. W., 1964. A frequency-domain condition for the stability of feedback systems containing a single time-varying nonlinear element. *Bell System Technical Journal* 43 (4), 1601–1608.
- Sanz, R., García, P., Albertos, P., 2016. Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of lti systems with input delay. *Automatica* 72, 205–208.
- Sanz, R., García, P., Díez, J.-L., Bondia, J., 2020. Artificial pancreas system with unannounced meals based on a disturbance observer and feedforward compensation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 29 (1), 454–460.
- Sanz, R., García, P., Fridman, E., Albertos, P., 2018. Rejection of mismatched disturbances for systems with input delay via a predictive extended state observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 28 (6), 2457–2467.
- Sariyildiz, E., Chen, G., Yu, H., 2015. An acceleration-based robust motion controller design for a novel series elastic actuator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63 (3), 1900–1910.
- Sariyildiz, E., Oboe, R., Ohnishi, K., 2020. Disturbance observer-based robust control and its applications: 35th anniversary overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 67 (3), 2042–2053.
- Scherer, C., Weiland, S., 2000. *Linear matrix inequalities in control*. Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands 3 (2).
- Schwepe, F., 1968. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control* 13 (1), 22–28.
- She, J.-H., Xin, X., Pan, Y., 2010. Equivalent-input-disturbance approach—analysis and application to disturbance rejection in dual-stage feed drive control system. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 16 (2), 330–340.
- Stocker, D., Kanderian, S., Cortina, G., Nitzan, T., Plummer, J., Steil, G., Mastrototaro, J., 2006. Virtual patient software system for educating and treating individuals with diabetes.
- Su, J., Chen, W.-H., 2018. Further results on “reduced order disturbance observer for discrete-time linear systems”. *Automatica* 93, 550–553.
- Ugurlu, B., Nishimura, M., Hyodo, K., Kawanishi, M., Narikiyo, T., 2014. Proof of concept for robot-aided upper limb rehabilitation using disturbance observers. *IEEE Transactions on Human-Machine Systems* 45 (1), 110–118.
- Umeno, T., Hori, Y., 1991. Robust speed control of DC servomotors using modern two degrees-of-freedom controller design. *IEEE Transactions on industrial electronics* 38 (5), 363–368.
- Wang, C., Dong, W., Wang, J., Ding, Z., 2020. Predictive descriptor observer design for a class of lti systems with applications to quadrotor trajectory tracking. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 10019–10028.
- Wang, H., Daley, S., 1996. Actuator fault diagnosis: an adaptive observer-based technique. *IEEE transactions on Automatic Control* 41 (7), 1073–1078.
- Wu, A.-G., Duan, G.-R., Fu, Y.-M., 2007. Generalized pid observer design for descriptor linear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* 37 (5), 1390–1395.
- Wu, Z.-H., Zhou, H.-C., Guo, B.-Z., Deng, F., 2020. Review and new theoretical perspectives on active disturbance rejection control for uncertain finite-dimensional and infinite-dimensional systems. *Nonlinear Dynamics*, 1–25.
- Xiong, Y., Saif, M., 2003. Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica* 39 (8), 1389–1398.
- Yang, J., Zolotas, A., Chen, W.-H., Michail, K., Li, S., 2011. Robust control of nonlinear MAGLEV suspension system with mismatched uncertainties via DOBC approach. *ISA transactions* 50 (3), 389–396.
- Yokoyama, T., Kawamura, A., 1994. Disturbance observer based fully digital controlled PWM inverter for CVCF operation. *IEEE Transactions on Power Electronics* 9 (5), 473–480.
- Zames, G., 1966. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part one: Conditions derived using concepts of loop gain, concavity, and positivity. *IEEE transactions on automatic control* 11 (2), 228–238.
- Zhu, Y., Fridman, E., 2021. Sub-predictors for network-based control under uncertain large delays. *Automatica* 123, 109350.