

## Análisis dinámico inverso de robots paralelos: Un tutorial con álgebra de Lie

Eugenio Yime<sup>a,\*</sup>, Roque Saltarén<sup>b</sup>, Javier Roldán<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad del Atlántico, Cra 30 No 8-49 Puerto Colombia, 081007 Puerto Colombia, Colombia.

<sup>b</sup>Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática, Universidad Politécnica de Madrid, C/ José Gutiérrez Abascal, n°2, 28006, Madrid, España.

**To cite this article:** Yime, E., Saltaren, R.J., Roldan, J. 2023. Inverse dynamics of parallel robots: a tutorial with Lie algebra. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 20, 327-346.  
<https://doi.org/10.4995/riai.2023.18356>

### Resumen

La cinemática y dinámica de mecanismos paralelos es un campo de investigación donde tradicionalmente se realizan los análisis de los mecanismos empleando la teoría de los torsores. En este artículo se presenta un enfoque alternativo, basado en la teoría de grupos y álgebra de Lie, el cual es un método que ha sido utilizado de manera exitosa en el análisis de cadenas cinemáticas abiertas. El artículo inicia con una breve introducción a las cadenas cinemáticas abiertas y su álgebra de Lie, y posteriormente aplica dichos conceptos a los mecanismos paralelos. El artículo se ha redactado utilizando únicamente álgebra de vectores y matrices, con el objetivo de cubrir la mayor cantidad de investigadores del campo de la Robótica. En ese sentido, se analizan ejemplos típicos de robots paralelos en forma de tutorial, entre los que se encuentran, el mecanismo de cinco barras, el mecanismo de cuatro barras espacial y el robot 3-RRR planar. Se espera que el enfoque práctico dado al presente artículo contribuya a fomentar el uso del álgebra de Lie para el análisis cinemático y dinámico de mecanismos paralelos.

*Palabras clave:* Robots paralelos, modelamiento dinámico, dinámica multicuerpo, mecanismo cinco barras, robot 3-RRR planar.

### Inverse dynamics of parallel robots: a tutorial with Lie algebra

#### Abstract

The kinematics and dynamics of parallel mechanisms is a field of research where mechanisms analysis are traditionally carried out using the screw theory. In this article an alternative approach based on group theory and Lie algebra is presented, where both methods, group theory and Lie algebra, are successfully used in the analysis of open kinematic chains. The article begins with a brief introduction to open kinematic chains and its Lie algebra, and later extends the analysis to parallel mechanisms. The article has been written using only traditional vectors and matrices algebra, with the aim of covering the largest number of researchers in the field of Robotics. Typical examples of parallel robots are analyzed in the form of a tutorial, among which are the five-bar mechanism, the spatial four-bar mechanism and the planar 3-RRR robot. It is hoped that the practical approach given to this article will contribute to promoting the use of Lie algebra for the kinematic and dynamic analysis of parallel mechanisms.

*Keywords:* Parallel robots, dynamic modelling, multibody dynamics, five bar mechanisms, planar 3-RRR robot

### 1. Introducción

Se denomina mecanismo cinemático paralelo, también conocido como robot paralelo, a un dispositivo mecánico que tiene por característica principal tener varias cadenas cinemáticas seriales dispuestas en configuración paralela y unidas por un

cuerpo común que se denomina el efector final del robot, Tsai (1999), Kong and Gosselin (2007). La importancia de los robots paralelos radica en sus prestaciones, como son alta relación fuerza/peso, mayor rigidez mecánica, y mejor precisión, cuando se comparan con los robots seriales, Merlet (2005), Taghirad (2013).

\*Autor para correspondencia: eugenioyime@mail.uniatlantico.edu.co  
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Los robots paralelos han sido objeto de una amplia investigación en todos sus campos, y mucho se ha avanzado en cinemática, dinámica y control. En el campo de la cinemática se han logrado grandes desarrollos gracias a la teoría de torsos (Screw Theory en Inglés), tanto en la síntesis, donde existen por ejemplo los libros de síntesis estructural Gogu (2008), Gogu (2009), Gogu (2010), Gogu (2012), Gogu (2014), como en el análisis, donde sobresalen los aportes de Gallardo en los cálculos del jerk e hiper-jerk Gallardo-Alvarado (2016). Recientemente, en el análisis de mecanismos sobresalen los aportes dados por Gallardo-Alvarado and Gallardo-Razo (2022). En el aspecto dinámico, se tienen los aportes dados por Briot and Khalil (2015), Gallardo et al. (2003), entre muchos otros.

En los robots paralelos, el análisis cinemático inverso suele realizarse por medio del álgebra de vectores, por cuanto es un método sencillo que brinda buenos resultados. Sin embargo, el análisis cinemático directo es mucho más complicado, Merlet (2005). En ese sentido, en Nielsen and Roth (1999), y Merlet (2004) se mencionan las técnicas numéricas y algebraicas más empleadas para solucionar el problema cinemático directo, como son los métodos algebraicos de eliminación y bases de Gröebner, y el método numérico de continuación. Otros métodos numéricos recientes involucran el método de regresión Morrell et al. (2013), y el método de redes neuronales, Zubizarreta et al. (2018). Sin embargo, es evidente que los métodos numéricos son los más utilizados, por cuanto los métodos algebraicos involucran complejas ecuaciones no lineales basadas en polinomios de orden superior. También se emplean métodos híbridos, como por ejemplo en Kim and Park (2001), donde se plantean un conjunto de polinomios obtenidos de forma algebraica, para después emplear un método numérico para encontrar la solución.

Respecto a la dinámica, el enfoque ha sido resolverla tanto de forma numérica, como de forma simbólica. En Taghirad (2013) se muestra un método de solución de forma simbólica resolviendo la dinámica de las patas por medio de las ecuaciones Newton-Euler para robots seriales; posteriormente se resuelve para las juntas activas uniendo las ecuaciones en el efector final. El mismo enfoque fue empleado por Briot and Khalil (2015), pero unificando la dinámica con los conceptos cinemáticos de la teoría de torsos. En Gallardo et al. (2003), se ilustra también de manera similar como emplear la teoría de torsos para obtener la dinámica de robots paralelos por medio del trabajo virtual. Sin embargo, uno de los grandes inconvenientes de los métodos algebraicos es que la dinámica debe ser resuelta para las variables independientes de la cadena cinemática, lo que se traduce en un arduo trabajo manual de simplificación algebraica de ecuaciones altamente no lineales.

Otro enfoque de análisis dinámico de robots paralelos lo brinda la dinámica multicuerpo. Esta técnica busca analizar tanto la cinemática como la dinámica de cualquier tipo de cadena cinemática (abierta, cerrada, en paralelo o híbrida) por métodos numéricos computacionales. En la dinámica multicuerpo existen dos métodos generales más difundidos. El método utilizado por Haug (1989) y Nikravesh (2018), donde todas las juntas de la cadena cinemática se reemplazan por restricciones de movimiento, y el método empleado por Featherstone (2008) donde solo se rompen (es decir se reemplazan por restricciones) ciertas juntas de la cadena cinemática, de manera que se tiene un

árbol de cadenas cinemáticas abiertas, unidas por restricciones de movimiento. Cada método tiene sus ventajas y desventajas, donde el método de Featherstone tiene la característica de generar un mínimo de ecuaciones de restricciones, y la dinámica se basa en el enfoque utilizado para cadenas cinemáticas seriales.

En Featherstone (2008) se resumen los métodos más comúnmente empleados para resolver la dinámica multicuerpo, y al tratamiento del álgebra de Lie se le da el nombre de álgebra de vectores  $6D$ . Por otro lado, Park et al. (1995), Park et al. (1999), Lynch and Park (2017), fueron los primeros en introducir los conceptos del álgebra de Lie al análisis cinemático y dinámico de robot seriales, complementando en cierta forma, los algoritmos desarrollados por Featherstone. Lastimosamente, la metodología y nomenclatura utilizada por Park no se ha generalizado en el análisis de cadenas cinemáticas cerradas, como es el caso de la robótica paralela. Un inconveniente del método propuesto por Featherstone para el análisis dinámico de robots paralelos es la relación entre el lazo de posición y el análisis de velocidad, por cuanto las restricciones se encuentran expresadas en velocidad. Featherstone propone solventar este inconveniente introduciendo las matrices  $X_{err}$  durante el proceso de integración numérica.

Tabla 1: Definiciones de  $T_{i-1,i}$  para las juntas más comunes.

Tipo de junta	$T_{i-1,i}$
Rotacional. Se define como una rotación alrededor del eje z	$\begin{bmatrix} R_z(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Traslacional. Se define como una traslación paralela al eje z	$\begin{bmatrix} I & t_z(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Cilíndrica. Se define como una rotación y traslación alrededor del eje z	$\begin{bmatrix} R_z(\theta_1) & t_z(\theta_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Universal. Se define como dos rotaciones sucesivas, la primera alrededor del eje z, la segunda alrededor del eje y	$\begin{bmatrix} R_z(\theta_1)R_y(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Esférica. Se define como tres rotaciones sucesivas a lo largo de los ejes z, y, x	$\begin{bmatrix} R_z(\theta_1)R_y(\theta_2)R_x(\theta_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Helicoidal. Se define como una rotación alrededor del eje z y una traslación en z debido al paso de la rosca p	$\begin{bmatrix} R_z(\theta_1) & t_z(p\theta_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Planar. Se define como dos traslaciones a lo largo de los ejes x, y, y una rotación en z	$\begin{bmatrix} R_z(\theta_3) & [t_x(\theta_1), t_y(\theta_2)] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

El presente artículo amplía la notación de álgebra de Lie introducida por Lynch and Park (2017) para aplicarla en el análisis numérico de la dinámica inversa de robots paralelos. Este nuevo enfoque numérico difiere del enfoque propuesto por Featherstone (2008) en la simplificación del análisis de posi-

ción, y la introducción de un solo tipo de jacobiano para los tipos de juntas más comunes, generando de esta forma un método práctico para analizar dinámicamente un robot paralelo. Se puede decir que la principal ventaja del enfoque propuesto sobre el método algebraico de la teoría de tórsos es la eliminación de la manipulación manual de ecuaciones altamente no lineales, cuando se intenta expresar la dinámica en función de las variables independientes, reduciendo considerablemente el tiempo del análisis. Respecto al método propuesto por Featherstone, el cambio propuesto evita emplear variables diferentes para el análisis de posición, y, por ende, tener que introducir matrices adicionales durante la integración numérica. Por último, con el objetivo de querer fomentar el uso de la nomenclatura del álgebra de Lie, se ha escrito el artículo a modo de tutorial con tres ejemplos numéricos al final, para ilustrar de la mejor forma posible, como realizar de forma práctica y directa el análisis numérico de la cinemática y la dinámica inversa de los robots paralelos.

## 2. Análisis de Posición, Velocidad y Aceleración de Cadenas Cinemáticas Abiertas

En las siguientes tres secciones se hará un repaso de los análisis de posición, velocidad y aceleración para cadenas cinemáticas abiertas, como son los robots seriales. Buscando alcanzar el objetivo de cobijar la mayor audiencia posible, se emplea la nomenclatura comúnmente utilizada en los cursos de Robótica.

### 2.1. Análisis de Posición

El análisis de posición en la Robótica de cadenas seriales se realiza por medio del uso de las matrices de transformación homogéneas,  $\mathbf{T}$ . Estas matrices describen la posición y orientación relativa entre dos sistemas de referencia diferentes, ubicados en los cuerpos que conforman la cadena cinemática. La matriz de transformación homogénea entre dos sistemas consecutivos,  $i - 1$  e  $i$ , se define, empleando la notación de los subíndices, como,

$$\mathbf{T}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1,i} & r_{i-1,i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde se ha incluido la matriz de rotación entre sistemas de referencia,  $\mathbf{R}$ . La transformación inversa de la matriz de transformación homogénea se obtiene por,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i-1,i}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1,i}^T & -\mathbf{R}_{i-1,i}^T r_{i-1,i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_{i,i-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i,i-1} & r_{i,i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

En este caso, se ha introducido la relación entre los vectores de posición que unen los dos sistemas de referencia,  $r_{i,i-1} = -\mathbf{R}_{i-1,i}^T r_{i-1,i} = -\mathbf{R}_{i,i-1} r_{i-1,i}$ .

En términos matemático, se dice que la matriz de transformación homogénea,  $\mathbf{T}_{i-1,i}$ , pertenece al grupo especial Euclidiano  $SE(3)$ , el cual posee un álgebra de grupos denominada álgebra de Lie. Esta algebra se hace evidente cuando se realiza el análisis de velocidades a las cadenas cinemáticas abiertas.

El análisis de posición, de una cadena cinemática abierta, se obtiene al multiplicar de forma consecutiva todas las matrices de transformación homogénea ubicadas desde la base del

robot hasta el sistema del efector final del mismo. La ecuación resultante entre los dos sistemas de referencia ubicados en los extremos de la cadena cinemática se puede escribir como,

$$\mathbf{T}_{0,n} = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_{i-1,i} \quad (3)$$

Entre un par de cuerpos consecutivos, se ubica una junta, la cual puede ser pasiva o activa. Esta junta posee a su vez una matriz de transformación homogénea,  $\mathbf{T}_{i-1,i}$ , que no es constante sino que depende de los grados de libertad de la junta. En la cadena cinemática abierta existirán dos tipos de matrices de transformación homogéneas, las de las juntas, y las matrices constantes relacionadas con la geometría y ubicación de los cuerpos. La Tabla 1 contiene los tipos de juntas más comunes encontrados en una cadena cinemática junto con las definiciones de la matriz de transformación respectiva.

### 2.2. Análisis de Velocidad

En el caso de una cadena cinemática abierta, el análisis de velocidad se obtiene al diferenciar la ecuación de posición, (3). El resultado de esta operación suele multiplicarse por la matriz de transformación inversa,  $\mathbf{T}_{0,n}^{-1}$ , para de esta forma, expresar las velocidades en función del sistema de referencia de cada cuerpo. El resultado de esta multiplicación es,

$$\mathbf{T}_{0,n}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{0,n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_{i,n}^{-1} (\mathbf{T}_{i-1,i}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{i-1,i}) \mathbf{T}_{i,n} \quad (4)$$

Donde el producto  $\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}}$  solo existe en aquellos cuerpos unidos por una junta, puesto que en los demás casos  $\mathbf{T}$  es constante y su derivada es cero. La expresión que se obtiene para el producto  $\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}}$  es de la forma,

$$\mathbf{T}^{-1} \dot{\mathbf{T}} = \tilde{S}_i \dot{\theta}_i = \begin{bmatrix} \hat{S}_{i,rot} & S_{i,lin} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i \quad (5)$$

Esta expresión recibe el nombre de álgebra de Lie,  $se(3)$ , y pertenece al grupo especial Euclidiano  $SE(3)$ . El resultado obtenido para  $\tilde{S}_i$  dependerá del tipo de junta y sus grados de libertad. Esta matriz tiene la peculiaridad de que se puede asociar con un vector de dimensión  $6 \times 1$ . En Featherstone (2008) se les da a estos vectores el nombre de vectores  $6D$ , mientras que en Murray et al. (1994) se les dice *twist*, en referencia a la teoría de tórsos.

En la expresión (5) se ha definido de forma implícita dos conceptos. El primero es el operador  $\hat{}$  el cual es el equivalente matricial del producto vectorial en vectores  $3D$ . Su definición para un vector  $3D$  es,

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

El segundo concepto involucrado es el operador  $\tilde{}$  el cual es un operador que transforma un vector del álgebra de Lie  $se(3)$ , representado como vector  $6 \times 1$ , a una matriz de  $4 \times 4$ . En ese sentido, se puede mencionar la operación anti- $\tilde{}$ , que se encarga de extraer el vector  $6 \times 1$  subyacente de la matriz  $4 \times 4$ . Este vector se suele expresar de la forma,

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{i,rot} \\ S_{i,lin} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde se dice que se ha representado siguiendo la nomenclatura de Plücker, el cual recomienda colocar de primero el término rotacional, y de segundo el término lineal.

A cada una de las juntas definidas en la Tabla 1 se le puede hacer la operación  $T_{i-1,i}^{-1}\hat{T}_{i-1,i}$  y posteriormente extraer el vector  $S_i$  utilizando la operación anti- $\hat{(\cdot)}$ . Los resultados obtenidos se encuentran resumidos en la Tabla 2, donde los vectores  $S_i$  se representan según la nomenclatura de Plücker.

Tabla 2: Definiciones de  $S_i$  para las juntas

Tipo de junta	$S_i$
Rotacional	$[0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$
Traslacional	$[0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$
Cilíndrica	$\begin{bmatrix} 0, 0, 1, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 1 \end{bmatrix}^T$
Universal	$\begin{bmatrix} -s\theta_2, 0, c\theta_2, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$
Esférica	$\begin{bmatrix} -s\theta_2, c\theta_2, c\theta_2 c\theta_3, 0, 0, 0 \\ 0, c\theta_3, -s\theta_3, 0, 0, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$
Helicoidal	$[0, 0, 1, 0, 0, p]^T$
Planar	$\begin{bmatrix} 0, 0, 1, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, 0 \end{bmatrix}^T$

En la ecuación (4) se puede observar que para cada  $\hat{S}_i$  se encuentra una operación con la forma  $\mathbf{T}^{-1}\hat{S}_i\mathbf{T}$ . En álgebra de Lie esta operación  $\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1})$  recibe el nombre de operador adjunto, y si bien se define en función de la transformación inversa,

$$Ad_{T_{i-1,i}}S_i \leftrightarrow \mathbf{T}_{i-1,i}\hat{S}_i\mathbf{T}_{i-1,i}^{-1}$$

El uso de los subíndices y la propiedad del operador adjunto, donde su inversa es equivalente a la inversa de la matriz de transformación,  $Ad_{T_{i,i-1}}^{-1} = Ad_{T_{i-1,i}}^{-1} = Ad_{T_{i-1,i}}$ , permite que se generalice sin mayores inconvenientes el uso de los subíndices que se utilizan en las matrices de transformación homogénea. Siguiendo la notación de subíndices, el operador adjunto se define como,

$$Ad_{T_{i-1,i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1,i} & 0 \\ r_{i-1,i}\hat{\mathbf{r}}_{i-1,i} & \mathbf{R}_{i-1,i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Por otro lado, en el álgebra de Lie se hace referencia a los covectores cuando se va a realizar el producto escalar entre elementos del álgebra de Lie. En ese espacio de los covectores existe el equivalente al operador adjunto, el cual recibe el nombre de operador coadjunto. En este artículo la definición del operador coadjunto viene dado por la expresión,  $Ad_T^* = Ad_T^{-T}$ , y con representación de subíndices queda de la forma,

$$Ad_{T_{i-1,i}}^* = \begin{bmatrix} R_{i-1,i} & r_{i-1,i}\hat{\mathbf{r}}_{i-1,i} \\ 0 & R_{i-1,i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Es importante aclarar que según Lynch and Park (2017) la definición del operador coadjunto es,

$$Ad_T^* = Ad_T^T$$

Pero se puede apreciar que haciendo uso de los subíndices los resultados obtenidos son los mismos.

Utilizando el operador adjunto del álgebra de Lie, la ecuación de velocidad, (4), para una cadena cinemática abierta queda expresada de la forma,

$$V_n = \sum Ad_{T_{n,i}}S_i\dot{\theta}_i \quad (10)$$

### 2.3. Las velocidades son vectores y las fuerzas son covectores.

A modo de aclaración del operador coadjunto,  $Ad_T^*$ , se muestra a continuación las transformaciones entre sistemas de referencia para las velocidades y las fuerzas. En el caso de las velocidades, la Figura 1 muestra una pareja de velocidades ubicada en el sistema  $i$ , velocidad lineal  $v_i$  y velocidad angular  $\omega_i$ , que se va a trasladar al sistema  $i-1$ .

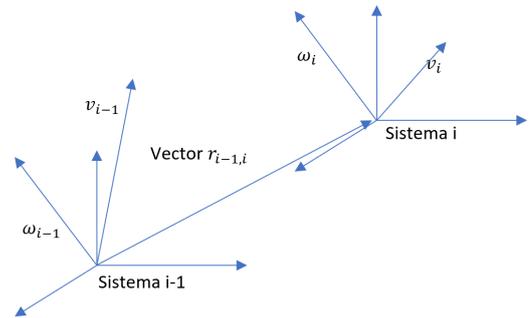


Figura 1: Traslado de velocidades entre sistemas de referencias.

El traslado de la velocidad angular en dirección diferente a su línea de acción implica la multiplicación de la misma por la distancia del traslado, generando así una velocidad lineal. Si a ese efecto se le agrega el cambio de coordenadas debido a la matriz de rotación  $R_{i-1,i}$ , el resultado obtenido es,

$$\begin{bmatrix} \omega_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i-1,i} & 0 \\ r_{i-1,i}\hat{\mathbf{r}}_{i-1,i} & R_{i-1,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

$$V_{i-1} = Ad_{T_{i-1,i}}V_i$$

Es decir, que los vectores velocidades se trasladan entre sistemas de referencias utilizando el operador adjunto  $Ad_T$ .

El mismo ejercicio se puede repetir para las fuerzas, en cuyo caso hay que tener en cuenta que la traslación de la misma genera un momento cuando se hace diferente a su línea de acción. El resultado para este caso es,

$$\begin{bmatrix} m_{i-1} \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i-1,i} & r_{i-1,i}\hat{\mathbf{r}}_{i-1,i} \\ 0 & R_{i-1,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

$$F_{i-1} = Ad_{T_{i-1,i}}^*F_i$$

Es decir, las fuerzas se trasladan entre sistemas utilizando el operador coadjunto  $Ad_T^*$ .

Este ejercicio aclara que las velocidades deben tratarse como vectores del álgebra de Lie, mientras que las fuerzas son los covectores del álgebra de Lie. Este resultado es muy importante para el cálculo de la potencia, por cuanto la misma se calcula multiplicando una fuerza por una velocidad. Al emplear los operadores adjuntos y coadjuntos se está asegurando que la medición de la potencia sea invariante respecto al sistema de coordenadas escogido para realizar el producto,

$$V_i^T F_i = F_i^T V_i = V_{i-1}^T F_{i-1} = F_{i-1}^T V_{i-1}$$

Por cuanto se tiene que para la multiplicación de un operador adjunto con su respectivo operador coadjunto es la matriz identidad,  $Ad_{T_{i-1,i}}^T Ad_{T_{i-1,i}}^* = Ad_{T_{i-1,i}}^* Ad_{T_{i-1,i}}^T = I$ .

2.4. Análisis de Aceleración

El análisis de aceleración se logra derivando el análisis de velocidad. Derivando respecto al tiempo la ecuación (10), se obtiene,

$$A_n = \sum_{i=1}^n (Ad_{T_{n,i}} S_i \ddot{\theta}_i + Ad_{T_{n,i}} \dot{S}_i \dot{\theta}_i + Ad_{T_{n,i}} ad_{V_i} S_i \dot{\theta}_i) \quad (11)$$

En esta expresión se ha introducido el concepto del operador del corchete de Lie,  $ad_V$ , el cual es una extensión del producto vectorial de vectores 3D a los vectores 6D. El operador corchete de Lie en términos matemáticos se define como el resultado de la siguiente operación entre dos elementos del álgebra de Lie,

$$ad_{V_i} V_j = [\tilde{V}_i, \tilde{V}_j] = \tilde{V}_i \tilde{V}_j - \tilde{V}_j \tilde{V}_i \quad (12)$$

esto para el caso de las matrices del grupo  $se(3)$ . Sin embargo, se puede obtener el mismo resultado realizando una derivación a la expresión del operador adjunto, ecuación (8),

$$\dot{A}d_{T_{i-1,i}} = Ad_{T_{i-1,i}} ad_{V_i} \quad (13)$$

Ya sea que el operador del corchete de Lie se obtenga diferenciando el operador adjunto, como en (13), o por medio de las operaciones de matrices, (12), el resultado obtenido es el mismo,

$$ad_{V_i} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_i & 0 \\ \hat{v}_i & \hat{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

Es importante destacar que el operador corchete de Lie tiene propiedades similares a la del producto vectorial,

$$ad_{V_i} V_j = -ad_{V_j} V_i \quad (15a)$$

$$ad_{V_i} V_i = ad_{V_j} V_j = 0 \quad (15b)$$

En la ecuación de aceleración, ecuación (11), aparece el término  $\dot{S}_i$ , el cual solo existe en aquellas juntas donde el vector  $S_i$  no es constante. Siguiendo las definiciones de  $S_i$  de la Tabla 2, se observa que las dos juntas que tienen un vector  $S_i$  no constante son las juntas universal y esférica. Los valores de las matrices  $\dot{S}_i$  para estas juntas se encuentra en la Tabla 3.

Tabla 3: Definiciones de  $\dot{S}_i$  para las juntas

Junta	$\dot{S}_i$
Universal	$\begin{bmatrix} -c\theta_2 \dot{\theta}_2, 0, -s\theta_2 \dot{\theta}_2, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$
Esférica	$\begin{bmatrix} -c\theta_2 \dot{\theta}_2, -s\theta_2 \dot{\theta}_2, -s\theta_2 c\theta_3 \dot{\theta}_2 - c\theta_2 s\theta_3 \dot{\theta}_3, 0, 0, 0 \\ 0, s\theta_3 \dot{\theta}_3, -c\theta_3 \dot{\theta}_3, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$

El producto  $ad_{V_i} S_i \dot{\theta}_i$  que aparece en la ecuación de aceleración, ecuación (11), se puede conmutar, en cuyo caso se tendría el término  $-ad_{S_i} V_i \dot{\theta}_i$ . En este punto, se reemplaza la ecuación (10) para el cálculo de  $V_i$ , obteniendo el siguiente resultado,

$$A_n = \sum_{i=1}^n (Ad_{T_{n,i}} S_i \ddot{\theta}_i + Ad_{T_{n,i}} \dot{S}_i \dot{\theta}_i) - \sum_{i=2}^n Ad_{T_{n,i}} ad_{S_i} \left( \sum_{j=1}^{i-1} Ad_{T_{i,j}} S_j \dot{\theta}_j \right) \dot{\theta}_i$$

Se puede volver a conmutar el resultado para cambiar el signo de la expresión, obteniendo,

$$A_n = \sum_{i=1}^n (Ad_{T_{n,i}} S_i \ddot{\theta}_i + Ad_{T_{n,i}} \dot{S}_i \dot{\theta}_i) + \sum_{i=1}^{n-1} Ad_{T_{n,i}} ad_{S_i} \left( \sum_{j=i+1}^n Ad_{T_{i,j}} S_j \dot{\theta}_j \right) \dot{\theta}_i \quad (16)$$

La segunda sumatoria de la ecuación recibe el nombre de aceleración de términos de Lie, por cuanto surge del producto de Lie de los diferentes vectores de álgebra de Lie, y tiene la característica de que en su evaluación solo participan componentes de velocidad. Sumando al término de Lie la derivada  $\dot{S}_i$  se tiene lo que se va denominar términos Coriolis de aceleración, por ser dependiente de las velocidades de las juntas,

$$A_{c,n} = \sum_{i=1}^n Ad_{T_{n,i}} \dot{S}_i \dot{\theta}_i + \sum_{i=1}^{n-1} Ad_{T_{n,i}} ad_{S_i} \left( \sum_{j=i+1}^n Ad_{T_{i,j}} S_j \dot{\theta}_j \right) \dot{\theta}_i \quad (17)$$

Con esta última expresión, la aceleración de un cuerpo se puede expresar como,

$$A_n = \sum_{i=1}^n Ad_{T_{n,i}} S_i \ddot{\theta}_i + A_{c,n} \quad (18)$$

3. La relación entre la velocidad absoluta y la velocidad obtenida con el álgebra de Lie

El operador adjunto del álgebra de Lie guarda relación con el operador de traslado empleado en la teoría de torsesores. En la teoría de torsesores se describen los vectores respecto al sistema absoluto, por lo tanto se eliminan las matrices de rotación en el análisis de velocidades. Reemplazando en la ecuación (8) las matrices de rotación por matrices identidades se obtiene,

$$Ad_{O_{i-1,i}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ r_{i-1,i} & I \end{bmatrix}$$

La relación de velocidades entre el álgebra de Lie y la teoría de torsesores se obtiene trasladando el vector velocidad al sistema absoluto, con  $Ad_T$ , y después regresando el vector al punto de análisis, con  $Ad_O$ ,

$$V_{0,i} = Ad_{O_{i,0}} Ad_{T_{0,i}} V_i$$

Donde  $V_{0,i}$  es la velocidad obtenida por métodos tradicionales, es decir, expresada en el sistema de referencia absoluto. El operador  $Ad_{T_{0,i}}$  se emplea para trasladar la velocidad  $V_i$  y llevarla al lugar donde se encuentra el sistema absoluto. Sin embargo, como la velocidad lineal se ve afectada por dicho traslado, se necesita el operador  $Ad_{O_{i,0}}$  para regresar el resultado en términos absolutos, de nuevo al punto de referencia del sistema  $i$ . Una rápida verificación del resultado que se obtiene después de realizar la operación de multiplicación entre los dos operadores lineales  $Ad_{O_{i,0}} Ad_{T_{0,i}}$  da el siguiente resultado,

$$Ad_{O_{i,0}} Ad_{T_{0,i}} = \begin{bmatrix} R_{0,i} & 0 \\ 0 & R_{0,i} \end{bmatrix}$$

Con lo cual se puede concluir que la relación entre los resultados obtenidos para el análisis de velocidades empleando el

método del álgebra de Lie, y el mismo análisis de velocidad por métodos tradicionales, incluyendo la teoría de torsores, es la matriz de rotación entre el sistema del cuerpo  $i$  y el sistema absoluto.

#### 4. Análisis Cinemático de Cadenas Cinemáticas Cerradas

El análisis cinemático de cadenas cerradas consiste en reemplazar varias juntas en ecuaciones de restricción de movimiento para convertir la cadena cinemática cerrada en varias cadenas cinemáticas abiertas. Las ecuaciones de restricciones se agrupan en un vector denominado vector de restricciones,

$$\Phi(\theta) = 0 \quad (19)$$

donde  $\theta$  son las variables asociadas a los grados de libertad de cada una de las juntas que conforman las cadenas cinemáticas abiertas que se crearon al romper la cadena cinemática cerrada.

El método del vector de restricciones es una técnica ampliamente utilizada en el estudio de sistemas multicuerpos. En esa área del conocimiento existen dos enfoques para el estudio de las cadenas cinemáticas cerradas. El primero es el empleado por Haug (1989) y Nikravesh (2018), conocido como enfoque de las variables globales o coordenadas generalizadas, Shabana (2020). El segundo enfoque se conoce como variables relativas, y es cuando solo se emplean las variables de las juntas. Este es el enfoque empleado por Featherstone (2008).

Lo novedoso del presente artículo respecto al enfoque tradicional empleado ya sea en la metodología de Haug (1989), o en Featherstone (2008), es que se unifican los tipos de restricciones en dos tipos básicos: restricciones de movimiento lineal, y restricciones de movimiento angular. Gracias a ello, es posible crear una correlación simple y sencilla entre la derivada de las restricciones y las velocidades en álgebra de Lie, como se apreciará en la ecuación (25). Lastimosamente este tipo de correlación no es posible logarlo con las metodologías tradicionales. Así por ejemplo, si se utiliza el enfoque propuesto por Haug, se tendría que generar de forma adicional una relación entre los vectores velocidades de Lie y la derivada de las restricciones. Por otro lado, en el caso del enfoque propuesto por Featherstone se tendría que emplear matrices de tipo  $X_{err}$  durante la integración numérica.

##### 4.1. Restricciones básicas de movimiento

Las restricciones básicas de movimiento se han agrupado en restricciones de movimiento lineal y restricciones de movimiento angular.

##### 4.1.1. Restricción de movimiento lineal

Este tipo de restricción es evidente en la junta esférica, la cual tiene por particularidad tener un punto común entre los dos cuerpos que une. La restricción de movimiento lineal es, por lo tanto, un tipo de restricción que restringe el movimiento lineal entre dos cuerpos a lo largo de un vector (o línea de acción de la restricción de movimiento). Otro ejemplo es la junta prismática, donde se necesitarán dos restricciones de movimiento lineal, ya que el movimiento en  $z$  es permitido.

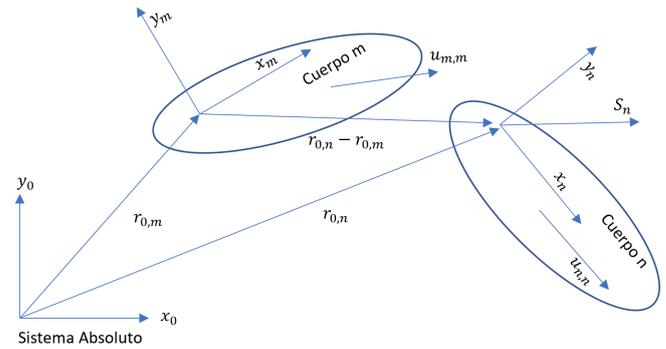


Figura 2: Definiciones utilizadas en las ecuaciones de restricción.

La Figura 2 ilustra las definiciones de cuerpos y vectores utilizados para la restricción de movimiento lineal. La junta enésima,  $n$ , se reemplaza por una ecuación de restricción. Los cuerpos que formaban la junta son, el cuerpo  $m$  ubicado a la izquierda, y el cuerpo  $n$  ubicada a la derecha de la junta. Cada cuerpo tiene su respectivo sistema de referencia. La definición de la restricción de movimiento se hará a partir de un vector ubicado en el cuerpo  $n$ ,  $u_{n,n}$ , y vendrá dada por,

$$\Phi(\theta) = (R_{0,n}u_{n,n})^T (r_{0,n} - r_{0,m}) = 0 \quad (20)$$

Donde  $r_{0,m}$  es el vector de posición del cuerpo  $m$ , de igual forma  $r_{0,n}$  es la posición del cuerpo  $n$  y  $r_{0,n} - r_{0,m}$  es la distancia entre los dos cuerpos.

Ahora bien, el objetivo es demostrar que la derivada de esta expresión se puede expresar en términos del álgebra de Lie. La derivada de  $\Phi$  respecto al tiempo, se define por,

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} = \Phi_{\theta} \dot{\theta}$$

En el caso de la restricción lineal (20), su derivada es,

$$\dot{\Phi}(\theta) = (\dot{R}_{0,n}u_{n,n})^T (r_{0,n} - r_{0,m}) + (R_{0,n}u_{n,n})^T (v_{0,n} - v_{0,m})$$

Reemplazando la derivada de la matriz de rotación,  $\dot{R} = \hat{\omega}R$ , y, adicionalmente, extrayendo el término de velocidad angular de la operación transpuesta,

$$\dot{\Phi}(\theta) = (R_{0,n}u_{n,n})^T \hat{\omega}_n^T (r_{0,n} - r_{0,m}) + (R_{0,n}u_{n,n})^T (v_{0,n} - v_{0,m})$$

Factorizando  $R_{0,n}u_{n,n}$ , y observando que  $r_{m,n} = r_{0,n} - r_{0,m}$ , se tiene,

$$\dot{\Phi}(\theta) = (R_{0,n}u_{n,n})^T \left( \begin{bmatrix} \hat{r}_{m,n} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{0,n} \\ v_{0,n} \end{bmatrix} - v_{0,m} \right) \quad (21)$$

En esta ecuación se aprecia que claramente es el producto escalar de dos vectores expresados en el sistema absoluto. Estos vectores pueden expresarse en términos de vectores del álgebra de Lie, para ello hay que tener en cuenta la regla del producto escalar: este solo aplica para un vector con su covector. En ese sentido, el covector es,

$$\begin{aligned} a &= R_{0,n}u_{n,n} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{0,m} & 0 \\ 0 & R_{0,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{m,n} & \hat{r}_{m,n}R_{m,n} \\ 0 & R_{m,n} \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ u_{n,n} \end{bmatrix} \\ a &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} (Ad_{O_{m,0}}^* Ad_{T_{0,m}}^*) Ad_{T_{m,n}}^* C_{n,n}^* \end{aligned} \quad (22)$$

Donde se ha empleado la propiedad de la matriz de rotación,  $R_{0,n} = R_{0,m}R_{m,n}$ , y se ha definido el covector  $C_{n,n}^*$  como la dirección de la fuerza de reacción de la junta, la cual apunta hacia donde no se permite el movimiento relativo entre cuerpos,

$$C_{n,n}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{n,n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Para el caso del vector involucrado en el producto escalar se puede apreciar que es la diferencia de velocidades entre los dos cuerpos  $m$  y  $n$ ,

$$b = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} (Ad_{O_{m,0}} Ad_{T_{0,m}}) (Ad_{T_{m,n}} V_n - V_m) \quad (24)$$

Ambas ecuaciones (22) y (24) comparten la matriz  $\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ , que en cierta forma actúa como filtro para eliminar el componente angular de los componentes. Se puede eliminar esta matriz para poder obtener una ecuación expresada en términos del álgebra de Lie,

$$\dot{\Phi}(\theta) = C_{n,n}^{*T} Ad_{T_{m,n}}^{*T} (Ad_{T_{m,n}} V_n - V_m)$$

Donde, por cuestiones de espacio se ha realizado la operación  $(Ad_{O_{m,0}}^* Ad_{T_{0,m}}^*)^T (Ad_{O_{m,0}} Ad_{T_{0,m}}) = I$ , la cual es fácilmente verificable. Ahora hay que tener en cuenta la propiedad del operador coadjunto,  $Ad_{T_{m,n}}^{*T} Ad_{T_{m,n}} = I$

$$\dot{\Phi}(\theta) = C_{n,n}^{*T} (V_n - Ad_{T_{m,n}}^{*T} V_m)$$

En esta expresión hay que observar que  $Ad_{T_{m,n}}^{*T} = Ad_{T_{m,n}}^{-1} = Ad_{T_{n,m}}$ , obteniéndose el resultado final,

$$\dot{\Phi}(\theta) = C_{n,n}^{*T} (V_n - Ad_{T_{n,m}} V_m) \quad (25)$$

#### 4.1.2. Restricción de movimiento angular

Este tipo de restricción se emplea cuando se desea que dos vectores permanezcan perpendiculares entre sí. Por ejemplo, en una junta prismática donde solo se permite el movimiento a lo largo de la dirección  $z$ , y no está permitido que existan rotaciones en los otros dos ejes. La Figura 2 contiene los vectores empleados para la construcción de la ecuación de restricción angular: vector  $u_{m,m}$  fijo en el cuerpo  $m$ , y vector  $u_{n,n}$  unido al cuerpo  $n$ . En términos del sistema absoluto, la ecuación de restricción se puede plantear como el siguiente producto escalar,

$$\Phi(\theta) = (R_{0,m} u_{m,m})^T (R_{0,n} u_{n,n}) \quad (26)$$

Al igual que en la restricción lineal, se quiere encontrar la derivada de esta expresión en términos de las velocidades del álgebra de Lie. Diferenciando se tiene,

$$\dot{\Phi}(\theta) = (R_{0,n} u_{n,n})^T (\dot{R}_{0,m} u_{m,m}) + (R_{0,m} u_{m,m})^T (\dot{R}_{0,n} u_{n,n})$$

Donde se ha empleado la propiedad conmutativa del producto escalar para dejar las derivadas de la matriz de rotación del lado derecho de cada expresión. Reemplazando  $\dot{R} = \hat{\omega}R$ , se obtiene,

$$\dot{\Phi}(\theta) = (R_{0,n} u_{n,n})^T (\hat{\omega}_{0,m} R_{0,m} u_{m,m}) + (R_{0,m} u_{m,m})^T (\hat{\omega}_{0,n} R_{0,n} u_{n,n})$$

Factorizando el producto  $R_{0,n} u_{n,n}$ , en el segundo término,

$$(R_{0,m} u_{m,m})^T (\hat{\omega}_{0,n} R_{0,n} u_{n,n}) = (R_{0,n} u_{n,n})^T \hat{\omega}_{0,n}^T (R_{0,m} u_{m,m})$$

Reemplazando el resultado, y aplicando las reglas del operador del producto vectorial,  $\hat{\omega}_{0,n}^T = -\hat{\omega}_{0,n}$ ,  $\hat{\omega}_{0,n} u_m = -\hat{u}_m \omega_{0,n}$ . Se obtiene,

$$\dot{\Phi}(\theta) = (\hat{u}_n u_m)^T (\omega_n - \omega_m)$$

Donde se ha definido,  $u_n = R_{0,n} u_{n,n}$  y  $u_m = R_{0,m} u_{m,m}$ .

Ahora se busca llevar esta expresión a vectores del álgebra de Lie. Para hacer eso, primero se expande los términos del producto vectorial,

$$\hat{u}_n u_m = R_{0,n} \hat{u}_{n,n} R_{0,n}^T R_{0,m} u_{m,m} = R_{0,n} \hat{u}_{n,n} R_{n,m} u_{m,m}$$

Por lo que la expresión se puede describir como el producto escalar de un vector y su covector en coordenadas absolutas,

$$\Phi(\theta) = (R_{0,n} \hat{u}_{n,n} R_{n,m} u_m)^T (\omega_n - \omega_m)$$

Se pueden identificar el término de la izquierda como un covector ubicado en el cuerpo  $n$  y llevado al sistema de referencia absoluto,

$$a = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} Ad_{O_{n,0}}^* Ad_{O_{0,n}}^* \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u}_{n,n} R_{n,m} u_m \end{bmatrix}$$

El término de la derecha es la diferencia de velocidades entre los cuerpos  $m$  y  $n$ , lo cual es fácilmente verificable como,

$$b = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} (Ad_{O_{n,0}} Ad_{O_{0,n}}) (V_n - Ad_{T_{n,m}} V_m)$$

Tanto para el covector  $a$  como para el vector  $b$ , se está utilizando la matriz  $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$  para filtrar el componente angular de cada término. Procediendo a eliminar dicho filtro de la multiplicación, se obtiene la ecuación general de la derivada de la restricción de movimiento angular,

$$\dot{\Phi}(\theta) = C_{n,n}^{*T} (V_n - Ad_{T_{n,m}} V_m) \quad (25)$$

Para este caso, el vector  $C_{n,n}^*$  tiene por significado el siguiente valor,

$$C_{n,n}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u}_{n,n} R_{n,m} u_m \end{bmatrix} \quad (27)$$

#### 4.2. La derivada de las restricciones en álgebra de Lie

Observando los resultados previamente obtenidos, se puede concluir que solo se necesita una ecuación para calcular la derivada de las restricciones, la cual aplica para los dos tipos de restricción de movimiento,

$$\dot{\Phi}(\theta) = C_{n,n}^{*T} (V_n - Ad_{T_{n,m}} V_m) \quad (25)$$

Esta expresión tiene una interpretación física. En una junta cinemática, como la de la Figura 2, la velocidad del cuerpo posterior a la junta se puede expresar como,

$$V_n = Ad_{T_{n,m}} V_m + S_n \dot{\theta}_n$$

Donde  $S_n \dot{\theta}_n$  es la velocidad debido a la junta, la cual fue reemplazada por una ecuación de restricción. Si las restricciones se cumplen, se puede reemplazar esta expresión en la ecuación (25), obteniéndose,

$$\dot{\Phi}(\theta) = C_{n,n}^{*T} S_n \dot{\theta}_n = 0$$

Esta expresión se cumplirá siempre y cuando las restricciones no se violen, pero además, al ser una junta física el componente

$\dot{\theta}_n$  puede no ser cero, es decir la junta tendrá velocidades diferente a cero en sus grados de libertad. Este resultado implica que el covector  $C_{n,n}^*$  debe ubicarse en el espacio tangente a  $S_n$ , el cual se conoce como el espacio de las fuerzas de reacción; es decir,  $C_{n,n}^*$  apunta en dirección a las fuerzas de reacción de la junta que une los cuerpos  $m$  y  $n$ . En vista de este resultado, el covector  $C_{n,n}^*$  puede definirse directamente a partir de las definiciones de los vectores  $S_i$ . La Tabla 4 contiene el resumen de las definiciones para cada junta. Un aspecto a resaltar es que no se encuentra la junta universal, el análisis para la restricción angular sirve para entender mejor este caso particular.

La matriz  $R_{n,m}$  de la ecuación (25) se puede expresar en función de las matrices de rotación entre los cuerpos que une la junta, es decir el producto,  $R_{0,n} = R_{0,m}R_i$ , donde  $R_i$  es debido a la junta. Entonces, la matriz  $R_{n,m} = R_{0,n}^T R_{0,m}$ , o despejando,

$$R_{n,m} = R_i^T$$

En el caso de la junta universal se puede verificar que no existen dos vectores constantes  $u_{n,n}$  y  $u_{m,m}$  que empleándolos en la ecuación  $\hat{u}_{n,n}R_i^T u_{m,m}$  se obtenga otro vector constante.

Tabla 4: Restricciones según juntas

Junta	Vector $\Phi$	Vector $c_{n,n}^*$
Rotacional.	$\begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{xx}) \\ \Phi_{lin}(u_{yy}) \\ \Phi_{lin}(u_{zz}) \\ \Phi_{ang}(u_{zz}, u_{yy}) \\ \Phi_{ang}(u_{xx}, u_{zz}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0, 0, 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 1 \\ 1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$
Traslacional.	$\begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{xx}) \\ \Phi_{lin}(u_{yy}) \\ \Phi_{ang}(u_{zz}, u_{yy}) \\ \Phi_{ang}(u_{xx}, u_{zz}) \\ \Phi_{ang}(u_{yy}, u_{xx}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0, 0, 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$
Cilíndrica.	$\begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{xx}) \\ \Phi_{lin}(u_{yy}) \\ \Phi_{ang}(u_{zz}, u_{yy}) \\ \Phi_{ang}(u_{yy}, u_{xx}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0, 0, 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$
Esférica.	$\begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{xx}) \\ \Phi_{lin}(u_{yy}) \\ \Phi_{lin}(u_{zz}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0, 0, 0, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 1 \end{bmatrix}^T$
Planar.	$\begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{zz}) \\ \Phi_{ang}(u_{zz}, u_{yy}) \\ \Phi_{ang}(u_{xx}, u_{zz}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0, 0, 1 \\ 1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T$

### 4.3. Jacobiano del vector de restricciones

La derivada del vector de restricciones, para los dos tipos de restricciones básicas, lineal y angular, es la expresión,

$$\dot{\Phi}(\theta) = C_{n,n}^{*T} (V_n - Ad_{T_{n,m}} V_m) \quad (25)$$

Donde los cuerpos  $m$  y  $n$  son los extremos de dos cadenas cinemáticas abiertas. El objetivo ahora es reemplazar las velocidades  $V_n$ , y  $V_m$  en función de las juntas que conforman cada cadena cinemática abierta, de manera que el resultado pueda agruparse de la forma,

$$\dot{\Phi}(\theta) = \Phi_\theta \dot{\theta}$$

Donde la matriz  $\Phi_\theta$  recibe el nombre de matriz jacobiana de las restricciones.

La matriz jacobiana es una matriz de tamaño  $n_c \times n_v$ , donde  $n_c$  representa el número de restricciones que se crearon al momento de romper los lazos cinemáticos cerrados para convertirlos en lazos abiertos, y  $n_v$  representa el número de grados de libertad (ya sean activos o pasivos) asociados a cada junta que conforman los lazos abiertos. Como la matriz jacobiana es grande y en cierta forma algo compleja, para simplificar el análisis se va a considerar el caso de un lazo cinemático cerrado que se rompe para crear dos lazos abiertos. Para los demás casos se puede replicar el resultado obtenido.

En el lazo cerrado que se rompió, el cuerpo de la izquierda de la junta se denomina cuerpo  $m$ , y el cuerpo derecho de la junta se denomina cuerpo  $n$ . Como estos cuerpos son el extremo de las respectivas cadenas cinemáticas abiertas, sus velocidades se pueden calcular por la expresión,

$$V_n = \sum_{i=1}^n Ad_{T_{n,i}} S_i \dot{\theta}_i$$

$$V_m = \sum_{j=1}^m Ad_{T_{m,j}} S_j \dot{\theta}_j$$

Donde se ha considerado que en el lazo de la izquierda existen  $m$  cuerpos, y en el lazo de la derecha existen  $n$  cuerpos. Reemplazando en la derivada de la ecuación de la restricción, se obtiene,

$$c_n^{*T} \left( \sum_{i=1}^n Ad_{T_{n,i}} S_i \dot{\theta}_i \right) - c_n^{*T} Ad_{T_{n,m}} \left( \sum_{j=1}^m Ad_{T_{m,j}} S_j \dot{\theta}_j \right) = 0$$

Si se extraen los vectores velocidades en un solo vector,  $\dot{\theta}$ , se obtendrá la ecuación para la matriz jacobiana. Los componentes de dicha matriz vienen dados por la ecuación,

$$\Phi_\theta(i, j) = \epsilon_{i,j} C_{ni,ni}^{*T} Ad_{T_{ni,j}} S_j \quad (28)$$

Los valores de  $i$  y  $j$  corresponden a la restricción número  $i$ , y al grado de libertad  $\theta_j$  de las juntas. El escalar  $\epsilon_{i,j}$  puede tener tres valores, 0 si la variable  $\theta_j$  no se necesita para evaluar la restricción  $i$ , 1 si la variable  $\theta_j$  está del lado derecho del lazo cinemático involucrado en la restricción  $i$ , y  $-1$  si se encuentra en el lazo cinemático izquierdo de la restricción. El covector  $C_{ni,ni}^*$  es de tamaño  $6 \times 1$  y es el mismo utilizado en el cálculo de la restricción  $i$ ; el vector  $S_j$  tiene tamaño  $6 \times 1$  y está definido según el grado de libertad de junta  $\theta_j$ , y corresponde a una de las columnas de los valores resumidos en la Tabla 2; y la matriz adjunta  $Ad_{T_{ni,j}}$  es una matriz de tamaño  $6 \times 6$  y es la encargada de trasladar el vector  $S_j$  de la junta  $j$  hasta el sistema del cuerpo  $n$ . Para los cuerpos que pertenecen al lado izquierdo, el operador adjunto  $Ad_{T_{ni,j}}$  se divide en dos productos,

$$Ad_{T_{ni,j}} = Ad_{T_{ni,mi}} Ad_{T_{mi,j}} \quad (29)$$

Donde  $Ad_{T_{mi,j}}$  es el operador adjunto que se obtiene en la misma cadena cinemática abierta que se encuentra del lado izquierdo, y  $Ad_{T_{ni,mi}}$  es el operador adjunto que se calcula en función de las restricciones y las matrices de transformación homogénea de los cuerpos  $mi$  y  $ni$ ,  $T_{ni,mi} = T_{ni,0} T_{0,mi}$ .

#### 4.4. Análisis numérico de posición

En cinemática computacional es ampliamente empleado el método de Newton-Raphson para ensamblar numéricamente la cadena cinemática cuando existe una violación al vector de restricciones. El algoritmo Newton-Raphson está basado en la expresión,

$$\Phi_{\theta} \Delta \theta = -\Phi \quad (30)$$

Donde  $\Phi_{\theta}$  es el jacobiano del vector de restricciones que se obtuvo en la sección previa. En el caso del análisis de posición, se procede a separar el jacobiano según sus columnas, de manera que se logre dividir en dos secciones, de un lado quedan las variables que se consideran juntas activas, y por lo tanto al ser las variables actuadas siempre se conocerá su magnitud en posición, velocidad y aceleración; y por otro lado quedan las juntas pasivas, cuyo valor depende de las activas y la forma de la cadena cinemática cerrada, por lo que no es conocido a priori. La partición se puede escribir como,

$$\Phi_{\theta_{act}} \Delta \theta_{act} + \Phi_{\theta_{pas}} \Delta \theta_{pas} = -\Phi$$

La división de la matriz jacobiana forma las matrices  $\Phi_{\theta_{act}}$ , conocida como la matriz jacobiana de las juntas activas, y  $\Phi_{\theta_{pas}}$  la matriz jacobiana de las juntas pasivas.

En el análisis cinemático de posición se asume que las juntas activas al ser valores modificados por el usuario no necesitan corrección alguna,  $\Delta \theta_{act} = 0$  reduciendo el algoritmo Newton-Raphson a,

$$\Phi_{\theta_{pas}} \Delta \theta_{pas} = -\Phi$$

Numéricamente esta ecuación tiene solución única cuando la matriz  $\Phi_{\theta_{pas}}$  es cuadrada y no singular, que es la opción ideal. También se puede obtener una solución de mínimos cuadrados cuando existen más restricciones (filas de  $\Phi_{\theta_{pas}}$ ) que juntas pasivas, es decir, se crearon restricciones redundantes al momento de romper las juntas para crear las cadenas cinemáticas abiertas. En ambos casos la ecuación para calcular la variación en las juntas pasivas dentro del algoritmo N-R es del tipo,

$$\Delta \theta_{pas} = -(\Phi_{\theta_{pas}})^{\#} \Phi \quad (31)$$

Donde el operador  $()^{\#}$  significa que se puede realizar la inversa (cuando la matriz es cuadrada y no singular), o la pseudoinversa cuando la matriz tiene más filas que columnas, y las restricciones redundantes serán eliminadas por el método de la pseudoinversa. No es recomendable obtener una solución numérica cuando la matriz tenga más columnas que filas, porque implica que hay más juntas que restricciones, y físicamente significa que el mecanismo no tiene los actuadores necesarios para moverse de forma controlada.

El algoritmo Newton-Raphson basado en la ecuación (31) se repite hasta que se obtiene la solución  $\Phi = 0$ , o en su defecto minimizar lo máximo posible dicho vector.

#### 4.5. Análisis de velocidades

Una vez se ha conseguido minimizar  $\Phi$ , se procede a realizar el análisis de velocidad. En este punto las incógnitas son los

valores de las velocidades pasivas. Estas velocidades se calculan en función de las velocidades de las juntas activas por medio de la misma expresión empleada en el algoritmo Newton-Raphson,

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_{\theta_{pas}} \dot{\theta}_{pas} + \Phi_{\theta_{act}} \dot{\theta}_{act} \\ \dot{\theta}_{pas} &= -(\Phi_{\theta_{pas}})^{\#} \Phi_{\theta_{act}} \dot{\theta}_{act} \end{aligned} \quad (32)$$

Una vez se tenga la posición y velocidad corregida, se procede a realizar el análisis de aceleración.

#### 4.6. Análisis de aceleración

Derivando dos veces el vector de restricciones se obtiene,

$$\ddot{\Phi} = \Phi_{\theta} \ddot{\theta} - \gamma = 0 \quad (33)$$

Donde el término  $\Phi_{\theta}$  ya es conocido como la matriz jacobiana del sistema, el proceso ahora es buscar un significado para el vector  $\gamma$  el cual esté basado en las cadenas cinemáticas abiertas que forman parte del vector de restricciones.

Derivando respecto al tiempo la ecuación (25) se obtiene la expresión,

$$\ddot{\Phi} = C_{n,n}^{*T} (A_n - Ad_{T_{n,m}} A_m + ad_{V_n} Ad_{T_{n,m}} V_m) = 0 \quad (34)$$

Donde se tuvo en cuenta que el vector  $C_{n,n}^{*}$  es constante. Ahora toca reemplazar las aceleraciones  $A_n$  y  $A_m$  para obtener la definición de  $\gamma$ . Según la ecuación (18), se tiene,

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{i=1}^m Ad_{T_{q,i}} S_i \ddot{\theta}_i + A_{c,i} \\ A_n &= \sum_{i=1}^n Ad_{T_{q,i}} S_i \ddot{\theta}_i + A_{c,i} \end{aligned}$$

Reemplazando en (34), y extrayendo el producto  $\Phi_{\theta} \ddot{\theta}$ , se obtiene la definición para la fila  $k$ -ésima del vector de aceleración  $\gamma$ ,

$$\gamma_k = -C_{n_k, n_k}^{*T} (A_{c, n_k} - Ad_{T_{n_k, m_k}} A_{c, m_k} + ad_{V_{n_k}} Ad_{T_{n_k, m_k}} V_{m_k}) \quad (35)$$

Donde los componentes de este vector son,  $C_{n_k, n_k}^{*}$  para el co-vector empleado en el cálculo de la restricción  $k$ -ésima;  $A_{c, m_k}$  aceleración de términos de Coriolis del cuerpo  $m$  perteneciente a la restricción  $k$ -ésima;  $A_{c, n_k}$  aceleración de Coriolis del cuerpo  $n$  perteneciente a la restricción  $k$ -ésima; y el término de Coriolis  $ad_{V_{n_k}} Ad_{T_{n_k, m_k}} V_{m_k}$  debido al producto de velocidades de los cuerpos  $n$  y  $m$  de la restricción  $k$ -ésima.

El análisis de aceleración se hace similar al análisis de velocidad, se aprovecha la partición del jacobiano entre jacobiano de juntas activas y jacobiano de juntas pasivas, para obtener la aceleración de las juntas pasivas en función de la aceleración de las juntas activas, donde se asume, al igual que en velocidad, que las aceleraciones de juntas activas son conocidas y de valores correctos. La ecuación para aceleración queda resumida como,

$$\ddot{\theta}_{pas} = (\Phi_{\theta_{pas}})^{\#} (\gamma - \Phi_{\theta_{act}} \ddot{\theta}_{act}) \quad (36)$$

## 5. Dinámica Inversa de Cadenas Cinemáticas Cerradas

Según Featherstone (2008), la dinámica de un cuerpo que tiene un sistema de referencia no centroidal, como ocurre en los cuerpos que hacen parte de las cadenas cinemáticas abiertas, viene dado por la expresión,

$$F_i = M_i A_i + ad_{V_i}^* M_i V_i \quad (37)$$

Donde  $F_i$  es la suma de todas las fuerzas, tanto externas como de reacción y de gravedad, que se aplican en el sistema de referencia del cuerpo  $i$ .  $V_i$  es la velocidad del cuerpo expresada en su sistema de referencia.  $A_i$  es la aceleración del cuerpo expresada en su sistema de referencia.  $M_i$  es la matriz de masa del cuerpo, la cual se calcula por la expresión,

$$M_i = \begin{bmatrix} R_{i,c} I_c R_{i,c}^T - m_i \hat{r}_{i,c} \hat{r}_{i,c} & m_i \hat{r}_{i,c} \\ -m_i \hat{r}_{i,c} & m_i 1_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (38)$$

En esta expresión  $I_c$  es la inercia centroidal del cuerpo,  $r_{i,c}$  es el vector que describe la ubicación del centro de centro de gravedad del cuerpo en función del sistema  $i$ .  $R_{i,c}$  es la matriz de rotación que existe entre el sistema del cuerpo, sistema  $i$ , y los ejes principales de inercia, sistema  $c$ .  $m$  es la masa del cuerpo.  $1_{3 \times 3}$  es la matriz identidad de tamaño tres filas por tres columnas. En la ecuación (37)  $ad_{V_i}^*$  es el operador corchete de Lie para los covectores,

$$ad_{V_i}^* = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_i & \hat{v}_i \\ 0 & \hat{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (39)$$

Se le denomina dinámica inversa al procedimiento mediante el cual se calculan las fuerzas de impulsión necesarias para mover el mecanismo con valores conocidos en posición, velocidad y aceleración de las juntas actuadas. Si bien existen varios métodos para evaluar la dinámica inversa, el principio del trabajo virtual es uno de los más empleados para resolver este problema. Este principio del trabajo virtual se resume en que toda la potencia ingresada por los actuadores debe ser igual a la potencia consumida por las fuerzas externas y las fuerzas inerciales. Empleando la notación de vectores de Lie se puede escribir el principio de trabajo virtual como la siguiente sumatoria,

$$\dot{\theta}_{act}^T \tau + \sum V_i^T (F_i - M_i A_i - ad_{V_i}^* M_i V_i) = 0 \quad (40)$$

El procedimiento a realizar es convertir esta expresión de suma de productos escalares en una expresión matricial. Este objetivo se logra introduciendo una relación entre la velocidad del cuerpo  $i$  y las juntas actuadas del mecanismo,

$$V_i = J_i \dot{\theta}_{act} \quad (41)$$

La matriz  $J_i$  fue bautizada por Tsai como la matriz jacobiana del eslabón  $i$ , ver Tsai (1999). Reemplazando esta última expresión en la ecuación del trabajo virtual se obtiene,

$$\dot{\theta}_{act}^T \tau + \dot{\theta}_{act}^T J_i^T (F_i - M_i A_i - ad_{V_i}^* M_i V_i) = 0$$

Factorizando el término  $\dot{\theta}_{act}$ , el cual no siempre es cero, se tiene la ecuación de la dinámica inversa para las cadenas cinemáticas cerradas,

$$\tau = \sum J_i^T (M_i A_i + ad_{V_i}^* M_i V_i - F_i) \quad (42)$$

Donde  $\tau$  es vector de las fuerzas activas a lo largo de las juntas activas, y es la incógnita a evaluar. Su tamaño matricial es de  $n_{act} \times 1$ .  $J_i$  es el jacobiano de cada cuerpo y tiene tamaño  $6 \times n_{act}$ .  $F_i$  es la suma de las fuerzas externas que actúan sobre cada cuerpo más la fuerza debido a la gravedad,

$$F_i = F_{ext} - F_g \quad (43)$$

El último paso para obtener la dinámica inversa de un robot paralelo consiste en evaluar la matriz  $J_i$  para cada cuerpo involucrado en la expresión (42). Para ello hay que recordar que el cuerpo  $i$  pertenece a un lazo cinemático abierto, por lo que su velocidad es,

$$V_i = \sum_{k=1}^i Ad_{T_{i,k}} S_k \dot{\theta}_k$$

Sin embargo, como el análisis es para una cadena cinemática cerrada, algunas de las velocidades del lazo en estudio serán velocidades activas y el resto serán velocidades pasivas. Debe encontrarse la relación entre las magnitudes de las velocidades pasivas y las velocidades activas. La respuesta es la expresión (32) del análisis de velocidades. En ella se puede decir que cada junta pasiva se calcula por la multiplicación de una fila de la matriz  $(\Phi_\theta)^\#$  por todas las variables activas,

$$\dot{\theta}_{pas,i} = \rho_i \dot{\theta}_{act} \quad (44a)$$

$$\rho_i = (\Phi_\theta)^\#(i, :) \quad (44b)$$

Donde  $\rho_i$  es la fila  $i$ -ésima de la matriz  $(\Phi_\theta)^\#$ .

El algoritmo para obtener de forma numérica la matriz  $J_i$  de cada uno de los eslabones se puede resumir de la siguiente manera,

- Empezar inicializando el jacobiano  $J_i$  con una matriz de ceros de tamaño 6 filas por  $n_{act}$  columnas.
- Iterar para todas las juntas que pertenecen a la cadena cinemática donde está localizado el cuerpo  $i$ , hasta el mismo cuerpo  $i$ .
- Si el vector  $S_j$  de la junta está relacionado a una velocidad de junta  $\dot{\theta}_j$  que es velocidad activa, sumar el siguiente valor a la columna  $j$  de la matriz  $J_i$ ,

$$J_i(:, j) = J_i(:, j) + Ad_{T_{i,j}} S_j \quad (45)$$

- Si el vector  $S_j$  de la junta está relacionado a una velocidad de junta  $\dot{\theta}_j$  que es junta pasiva, sumar a todo el jacobiano  $J_i$  el siguiente producto,

$$J_i = J_i + Ad_{T_{i,j}} S_j \rho_j \quad (46)$$

## 6. Comparación con otros métodos de modelamiento

Los métodos propuestos en la literatura para analizar cadenas cinemáticas cerradas se pueden agrupar en dos tipos. Métodos algebraicos como los empleados por Taghirad (2013), Briot and Khalil (2015), Gallardo et al. (2003), y métodos numéricos donde sobresalen las propuestas de Haug (1989) y Featherstone (2008). Los métodos algebraicos tienen el inconveniente de generar ecuaciones altamente no lineales que son muy difíciles de

lidiar; lo cual se convierte en una desventaja cuando se quiere expresar las velocidades de los cuerpos en función de las juntas activas, tal como lo requiere el principio del trabajo virtual. Por otro lado, como se había mencionado antes, los métodos numéricos publicados hasta la fecha, hacen una separación entre el análisis de posición y el análisis de velocidad, lo cual conlleva a la introducción de ciertos factores adicionales cuando se plantea la ecuación diferencial a integrar numéricamente. Estos factores son las matrices  $G$  basadas en cuaterniones para el método de Haug, y las matrices  $X_{err}$  para el método de Featherstone.

## 7. Ejemplos Numéricos

En esta sección se explicará de forma práctica la manera de estudiar una cadena cinemática cerrada empleando las ecuaciones previamente discutidas. El primer ejemplo es el mecanismo de cinco barras. Se escogió este primer ejemplo por cuanto el mecanismo cinco barras es el primer mecanismo planar que se puede considerar como un robot paralelo. El código fuente de los ejemplos se pueden descargar desde la página de *github* referenciada en Yime (2023).

### 7.1. Mecanismo de cinco barras

La Figura 3 ilustra un mecanismo de cinco barras, el cual es una sola cadena cinemática cerrada. Para emplear la metodología de álgebra de Lie, toca seleccionar una junta y partir la cadena cerrada en dos cadenas cinemáticas seriales. La junta seleccionada es la junta rotacional ilustrada en la Figura 3, esto forma dos cadenas cinemáticas abiertas iguales de tipo cinemático  $RR$ , con una junta actuada y una junta pasiva. Adicionalmente, se han agregado dos sistemas de referencia  $m$ , y  $n$ , que, si bien están separados para facilitar la legibilidad de la Figura, los dos son coincidentes en posición con la junta a romper.

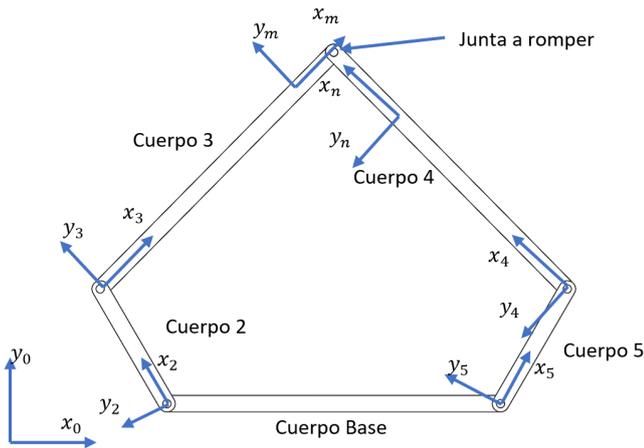


Figura 3: Mecanismo de Cinco Barras

#### 7.1.1. Análisis de Posición

La variable de posición que se utilizará para analizar este sistema son los ángulos de todas las juntas rotacionales, según la nomenclatura de la Figura 3, esta variable es,

$$\theta = [\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T$$

Donde las variables actuadas son:  $\theta_{act} = [\theta_2, \theta_5]^T$ , y las variables pasivas son:  $\theta_{pas} = [\theta_3, \theta_4]^T$ . A partir de estas definiciones se procede a analizar cada una de las dos cadenas cinemáticas abiertas que se crearon.

#### Primera cadena cinemática

Esta cadena queda del lado izquierdo de la imagen 3, y posee los eslabones 2 y 3, y tendrá las siguientes matrices de transformación homogéneas,

Entre el cuerpo base, que es la tierra del mecanismo, y sistema del cuerpo 2,

$$T_{0,2} = \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el sistema del cuerpo 2 y el del cuerpo 3,

$$T_{2,3} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el sistema del cuerpo 3 y el punto  $m$ , extremo del eslabón 3, y lugar donde se rompió la junta rotacional que fue reemplazada por restricciones geométricas,

$$T_{3,m} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_3) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Segunda cadena cinemática

Esta cadena cinemática está formada por los cuerpos 5 y 4. Las matrices de transformación homogéneas necesarias para el análisis de posición son, Entre el sistema 0, y sistema 5,

$$T_{0,5} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_5) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el cuerpo 5 y el sistema del cuerpo 4,

$$T_{5,4} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_5) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_4) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el sistema del cuerpo 4 y el punto  $n$ ,

$$T_{4,n} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_4) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 7.1.2. Vector de restricciones

Al romper la junta rotacional, se tiene que se debería reemplazar por cinco restricciones, pero en este caso como el sistema tiene dos grados de libertad y posee cuatro variables para describir el movimiento de las juntas, solo se necesitan dos restricciones de movimiento, y las demás son redundantes. Las restricciones son de tipo movimiento lineal a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  del cuerpo 4, denotado como el cuerpo  $n$ , donde el cuerpo 3 se considera el cuerpo  $m$ ,

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{x,x}, r_n - r_m) \\ \Phi_{lin}(u_{y,y}, r_n - r_m) \\ u_{x,x}^T R_{0,n}^T (r_{0,n} - r_{0,m}) \\ u_{y,y}^T R_{0,n}^T (r_{0,n} - r_{0,m}) \end{bmatrix}$$

Donde los vectores  $u_{x,x}$  y  $u_{y,y}$  son constantes y tienen por valor,  $u_{x,x} = [1, 0, 0]^T$ , y  $u_{y,y} = [0, 1, 0]^T$ .

### 7.1.3. Jacobiano del Sistema

El jacobiano para este problema tendrá cuatro columnas, uno por cada eje de rotación de las juntas, sean pasivas o activas. Todas las juntas son rotacionales, por lo tanto, solo se tiene un vector constante desde el punto de vista del sistema de cada cuerpo,

$$S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_i = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$$

El jacobiano queda expresado por,

$$\Phi_{\theta}(:, 1 : 2) = \begin{bmatrix} -C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,m}} Ad_{T_{m,2}} S_2 & -C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,m}} Ad_{T_{m,3}} S_3 \\ -C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,m}} Ad_{T_{m,2}} S_2 & -C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,m}} Ad_{T_{m,3}} S_3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{\theta}(:, 3 : 4) = \begin{bmatrix} C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,4}} S_4 & C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,5}} S_5 \\ C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,4}} S_4 & C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,5}} S_5 \end{bmatrix}$$

El mecanismo de cinco barras posee dos grados de libertad que son las juntas 2 y 5. Estos dos ángulos sirven para formar el jacobiano activo, es decir, las columnas 1 y 4 del jacobiano. Las otras columnas, 3 y 4, formarán el jacobiano de las juntas pasivas,

$$\Phi_{act} = \begin{bmatrix} \Phi_{\theta}(:, 1) & \Phi_{\theta}(:, 4) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{pas} = \begin{bmatrix} \Phi_{\theta}(:, 2) & \Phi_{\theta}(:, 3) \end{bmatrix}$$

### 7.1.4. Vector $\gamma$

El vector  $\gamma$  está expresado por la ecuación (35). Para el caso del cinco barras, los términos de Coriolis de ambas cadenas cinemáticas, son,

$$A_{c,m} = Ad_{T_{m,2}} ad_{S_2} Ad_{T_{2,3}} S_3$$

Y, para la cadena de la derecha,

$$A_{c,n} = Ad_{T_{n,5}} ad_{S_5} Ad_{T_{5,4}} S_4$$

También, se puede realizar la operación expresando todos los vectores en el sistema del extremo de cada cadena cinemática,

$$S_{m,2} = Ad_{T_{m,2}} S_2$$

$$S_{m,3} = Ad_{T_{m,3}} S_3$$

$$A_{c,m} = ad_{S_{m,2}} S_{m,3}$$

En este caso para la cadena cinemática del lado izquierdo, y,

$$S_{n,5} = Ad_{T_{n,5}} S_5$$

$$S_{n,4} = Ad_{T_{n,4}} S_4$$

$$A_{c,n} = ad_{S_{n,5}} S_{n,4}$$

Para la cadena cinemática del lado derecho. Con estas definiciones, el vector  $\gamma$  queda definido por,

$$\gamma(1, 1) = -C_{x,x}^{*T} (A_{c,n} - Ad_{T_{n,m}} A_{c,m} + ad_{V_n} Ad_{T_{n,m}} V_m)$$

$$\gamma(2, 1) = -C_{y,y}^{*T} (A_{c,n} - Ad_{T_{n,m}} A_{c,m} + ad_{V_n} Ad_{T_{n,m}} V_m)$$

### 7.1.5. Matrices $J_i$

Las matrices  $J_i$  se utilizan para relacionar la velocidad de cada eslabón en términos de las velocidades de las juntas activas, para ello se requiere el cálculo de la matriz  $\rho$ , la cual viene dada por la ecuación, (44),

$$\rho = \Phi_{pas}^{-1} \Phi_{act}$$

Para el caso del cinco barras, esta matriz tiene tamaño de  $2 \times 2$ . Son 2 filas por cuanto hay dos juntas pasivas, y 2 columnas por igual número de juntas activas. Como existen dos juntas activas, los jacobianos de los cuerpos tendrán una dimensión de  $6 \times 2$ ; 6 por cuanto son las filas necesarias para expresar la velocidad del cuerpo, y 2 columnas por el número de juntas activas. Para cada eslabón sus respectivos jacobianos se calculan empleando el algoritmo de la sección 5.

Eslabón 2,

$$J_2(:, 1) = S_2$$

Eslabón 3,

$$J_3(:, 1) = Ad_{T_{3,2}} S_2$$

$$J_3 = J_3 + S_3 \rho(1, :)$$

Eslabon 5

$$J_5(:, 2) = S_5$$

Eslabón 4,

$$J_4(:, 2) = Ad_{T_{4,5}} S_5$$

$$J_4 = J_4 + S_4 \rho(2, :)$$

### 7.1.6. Matrices $M_i$

Las matrices  $M_i$  se necesitan para calcular la dinámica, la ecuación (38) se emplea para trasladar la inercia desde el centro de masa hasta el sistema de referencia del cuerpo. Considerando los eslabones como prismas rectangulares, la inercia centroidal de los mismos estará determinada por,

$$I_c = \text{diag}([I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}])$$

$$I_{xx} = 0$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} m_i L_i^2$$

$$I_{zz} = I_{yy}$$

Donde  $m_i$  es la masa del eslabón, y  $L_i$  es la longitud del mismo. Para emplear estos valores en la ecuación (38), se asume que la distancia entre el centro de masa y el sistema de referencia del eslabón es la mitad de la longitud del mismo; además que el sistema de referencia de los ejes principales de inercia coincide con el sistema de referencia del cuerpo. Es decir,

$$R_{i,c} = I_{3 \times 3}$$

$$r_{i,c} = [L_i/2, 0, 0]^T$$

### 7.1.7. Resultados Numéricos

La simulación que se realizó en el mecanismo de cinco barras consistió de partir de la posición inicial con valores,  $\theta_2 = 120$ ,  $\theta_3 = -74,46$ ,  $\theta_4 = 74,46$ , y  $\theta_5 = 60$ . El movimiento a simular fue basado en un movimiento sinusoidal en las juntas

actuadas. La función usada para cada junta expresada en grados es,

$$\theta_2 = 120 + 30 \sin(t)$$

$$\theta_5 = 60 - 30 \sin(t)$$

Donde hay que aclarar que para la simulación numérica se emplean radianes en vez de grados.

El tiempo de simulación fue de un segundo, con un paso numérico de 1 milisegundo. Respecto a la geometría del mecanismo cinco barras, se tomaron las longitudes de los eslabones, con  $L_1 = 100mm$ ,  $L_2 = 40mm$ ,  $L_3 = 100mm$ ,  $L_4 = 100mm$ , y  $L_5 = 40mm$ . Los datos de masas de los eslabones, necesarios para calcular el par de entrada de los motores, se tomaron con valores de  $m_2 = m_5 = 8,29g$ ;  $m_3 = m_4 = 20,14g$ .

Los resultados de las simulaciones se muestran en las Figuras 4, 5, 6, y 7.

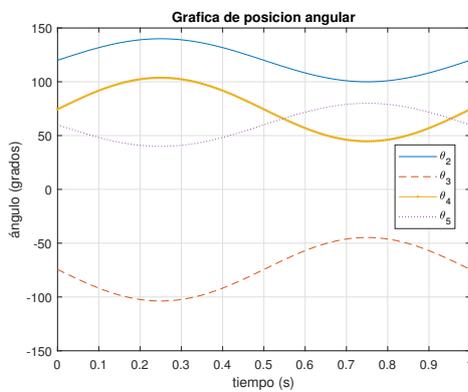


Figura 4: Gráficas de posición del mecanismo de cinco barras.

La Figura 4 muestra un comportamiento sinusoidal en los ángulos de los actuadores, debido al movimiento sinusoidal de las juntas actuadas. Analizando la forma de las figuras, se puede apreciar que las juntas 2 y 4 tienen un movimiento sincronizado, al igual que las juntas 3 y 5. Esto es debido a que el desplazamiento en las juntas actuadas es de la misma magnitud, 30 grados.

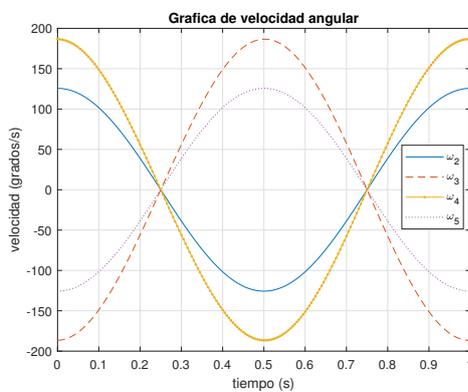


Figura 5: Gráficas de velocidad del mecanismo de cinco barras.

En la Figura 5, se puede apreciar que el movimiento sinusoidal en velocidad produce gráficas simétricas respecto al eje

$x$ , y los valores picos de velocidad angular se encuentran en las juntas actuadas  $\omega_2$  y  $\omega_5$ .

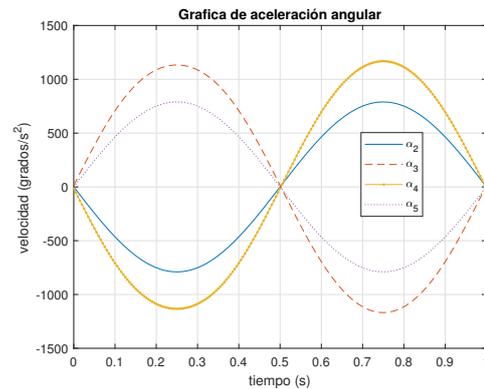


Figura 6: Gráficas de aceleración del mecanismo de cinco barras.

El análisis de aceleración se muestra en la Figura 6, en ella se aprecia que las aceleraciones de los cuerpos 2 y 5 son iguales pero de sentido opuesto; de igual forma sucede con los cuerpos 3 y 4. La razón es el tipo de movimiento empleado en las juntas actuadas del mecanismo.

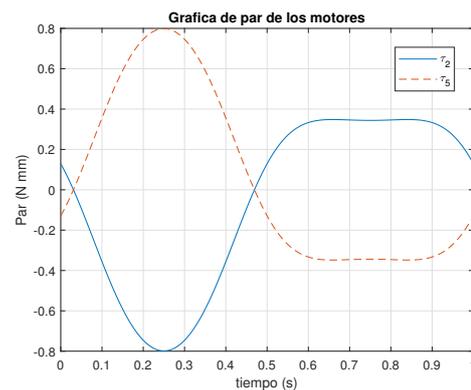


Figura 7: Gráficas de par de los motores del mecanismo de cinco barras.

Respecto a la Figura 7, se aprecia que los resultados de los pares son simétricos respecto al eje  $x$ . La explicación es que al moverse de forma sincronizada las juntas 2 y 5, donde ambas tienen un igual desplazamiento angular, se genera un movimiento lineal en el efector final del mecanismo de cinco barras. Este movimiento lineal, genera pares idénticos en los dos motores por cuanto la geometría del mecanismo es simétrica respecto al eje  $y$  del mecanismo, y el movimiento es precisamente a lo largo de ese eje  $y$ .

### 7.2. Mecanismo de cuatro barras espacial

La Figura 8 ilustra un mecanismo de cuatro barras con movimiento espacial. El eslabón de entrada es el que se encuentra numerado con 2. El movimiento de entrada al mecanismo se logra a través de una junta rotacional, la cual une el eslabón 2 con la base del mecanismo. Al extremo del eslabón 2 se encuentra una junta esférica. La junta esférica une el eslabón 2 con el eslabón 3. Esta junta esférica es la que se va a reemplazar por restricciones de movimiento lineal. El eslabón 3 se une con el

eslabón 4 por medio de una junta universal. En la junta se han dibujado dos sistemas de referencia, uno para cada grado de libertad de la junta. El sistema 3 unido al cuerpo 3, y el sistema 3,  $u$  unido al cuerpo 4. La distinción entre los dos sistemas se da por cuanto la rotación en el sistema 3,  $u$  se hace alrededor del eje  $z$ , y en el sistema 3 se realiza la rotación alrededor del eje  $y$ . Esto para seguir la definición de la junta universal que se encuentra en la Tabla 2. Por último, se tiene es eslabón 4 que se une a la base del mecanismo por medio de una junta rotacional.

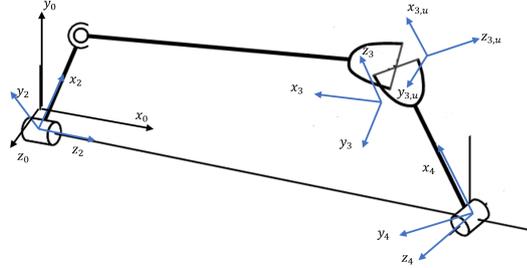


Figura 8: Mecanismo de Cuatro Barras Espacial

### 7.2.1. Análisis de Posición

Al romper el mecanismo en la junta esférica, se crean dos lazos cinemáticos abiertos. La cadena de la izquierda contiene únicamente al cuerpo 2, y la cadena de la derecha contiene a los cuerpos 4 y 3. La junta esférica se reemplaza por 3 restricciones de movimiento lineal.

Para este ejemplo la variable de posición son los ángulos de todas las juntas rotacionales, según la nomenclatura de la Figura 3, esta variable es,

$$\theta = [\theta_2, \theta_4, \theta_{3,u}, \theta_3]^T$$

Donde la variable actuada es  $\theta_{act} = \theta_2$ , y las variables pasivas son:  $\theta_{pas} = [\theta_4, \theta_{3,u}, \theta_3]^T$ . A partir de estas definiciones se procede a analizar cada una de las dos cadenas cinemáticas abiertas que se crearon.

#### Primera cadena cinemática

Esta cadena solo posee el eslabón 2, y su respectiva junta rotacional, las matrices para este sistema son,

Entre el sistema 0, y sistema 2,

$$T_{0,2} = \begin{bmatrix} Rot_y(\pi/2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el sistema 2 y el punto  $m$ , ubicado en el mismo cuerpo,

$$T_{2,m} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Segunda cadena cinemática

Esta cadena cinemática abierta posee los cuerpos 4 y 3. Las matrices de transformación homogéneas para este caso son, Entre el sistema 0, y el sistema 4,

$$T_{0,4} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_4) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el sistema 4 y el sistema 3,

$$T_{0,4} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_4) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_x(\pi/2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_{3,u}) Rot_y(\theta_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el sistema 3 y el punto  $n$ , ubicados en el mismo cuerpo,

$$T_{3,n} = \begin{bmatrix} I & r_x(L_3) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 7.2.2. Vector de restricciones

Como se había mencionado, para el análisis se necesita romper la junta esférica y reemplazarla por 3 restricciones de movimiento lineal. El vector de restricciones para este caso queda descrito como,

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{x,x}, r_n - r_m) \\ \Phi_{lin}(u_{y,y}, r_n - r_m) \\ \Phi_{lin}(u_{z,z}, r_n - r_m) \end{bmatrix}$$

Como las tres restricciones aplican sobre los mismos dos cuerpos,  $m$  y  $n$ , se pueden reemplazar por una sola ecuación,

$$\Phi(\theta) = R_{0,n}^T (r_{0,n} - r_{0,m})$$

### 7.2.3. Jacobiano del Sistema

El jacobiano para este ejercicio está conformado por cuatro columnas, una para cada eje de las juntas, sean pasivas o activas. Para las juntas rotacionales, se tienen que el vector de la junta es,

$$S_2 = S_4 = S_i = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$$

Para el caso de la junta universal, se tiene que existen dos ejes de rotación, ver Tabla 2,

$$S_3 = [S_{3,u}, S_3]$$

$$S_{3,u}^T = [-s\theta_3, 0, c\theta_3, 0, 0, 0]$$

$$S_3^T = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$$

Donde para este ejemplo, los ángulos de las rotaciones son  $\theta_{3,u}$ , para la primera rotación alrededor del eje  $z_{3,u}$ , y  $\theta_3$  para la segunda rotación alrededor del eje  $y_3$ .

Con esta información, se arma el jacobiano del sistema,

$$\Phi_{\theta}(:, 1:2) = \begin{bmatrix} -C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,m}} Ad_{T_{m,2}} S_2 & C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,4}} S_4 \\ -C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,m}} Ad_{T_{m,2}} S_2 & C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,4}} S_4 \\ -C_{z,z}^{*T} Ad_{T_{n,m}} Ad_{T_{m,2}} S_2 & C_{z,z}^{*T} Ad_{T_{n,4}} S_4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{\theta}(:, 3:4) = \begin{bmatrix} C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,3}} S_{3,u} & C_{x,x}^{*T} Ad_{T_{n,3}} S_3 \\ C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,3}} S_{3,u} & C_{y,y}^{*T} Ad_{T_{n,3}} S_3 \\ C_{z,z}^{*T} Ad_{T_{n,3}} S_{3,u} & C_{z,z}^{*T} Ad_{T_{n,3}} S_3 \end{bmatrix}$$

La junta 2 es la entrada del mecanismo, por lo tanto, es la única junta activa. Las juntas 4 y 3 son las juntas pasivas. Los respectivos jacobianos son,

$$\Phi_{act} = [\Phi_{\theta}(:, 1)]$$

$$\Phi_{pas} = [ \Phi_{\theta}(:, 2) \quad \Phi_{\theta}(:, 3) \quad \Phi_{\theta}(:, 4) ]$$

Con las definiciones de los jacobianos de las juntas activas y pasivas se pueden realizar el algoritmo de posición Newton-Raphson, y la corrección de velocidades. Para el análisis de aceleración, toca definir el vector  $\gamma$ .

7.2.4. Vector  $\gamma$

Para calcular el vector  $\gamma$ , ecuación (35), toca evaluar los términos Coriolis de ambos extremos. En el caso de la cadena cinemática izquierda, solo tiene un cuerpo, por lo que no tiene componente Coriolis,

$$A_{c,m} = 0$$

Para la cadena cinemática de la derecha, hay que tener en cuenta que la junta universal tiene valor en  $\dot{S}$ , y además hay tres ejes de rotación, el término Coriolis es,

$$\begin{aligned} A_{c,n} = & Ad_{T_{n,3}} \dot{S}_{3,u} \dot{\theta}_{3,u} \\ & + Ad_{T_{n,4}} ad_{S_4} Ad_{4,3} S_{3,u} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_{3,u} \\ & + Ad_{T_{n,4}} ad_{S_4} Ad_{4,3} S_3 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_3 \\ & + Ad_{T_{n,3}} ad_{S_{3,u}} S_3 \dot{\theta}_{3,u} \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

donde  $\dot{S}_{3,u} = [-c\theta_3 \dot{\theta}_3, 0, -s\theta_3 \dot{\theta}_3, 0, 0, 0]^T$ . Con estas definiciones, el vector  $\gamma$  queda formado por,

$$\begin{aligned} \gamma(1, 1) &= -C_{x,x}^{*T} (A_{c,n} + ad_{V_n} Ad_{T_{n,m}} V_m) \\ \gamma(2, 1) &= -C_{y,y}^{*T} (A_{c,n} + ad_{V_n} Ad_{T_{n,m}} V_m) \\ \gamma(3, 1) &= -C_{z,z}^{*T} (A_{c,n} + ad_{V_n} Ad_{T_{n,m}} V_m) \end{aligned}$$

7.2.5. Matrices  $J_i$

El mecanismo de cuatro barras espacial tiene 4 cuerpos, quitándole el eslabón fijo, quedan 3 eslabones en movimiento; por lo tanto, toca evaluar el jacobiano de dichos eslabones. Las ecuaciones que se colocan a continuación parten del supuesto de que las matrices jacobianas se inicializan en cero, con un tamaño de 6 filas por 1 columna, ya que el sistema tiene solo una junta actuada. Adicionalmente, para este problema,  $\rho$  se transforma en un vector de 3 elementos, es decir, un escalar para cada junta pasiva. La definición de  $\rho$ , es

$$\rho = \Phi_{pas}^{-1} \Phi_{act}$$

Los jacobianos de los eslabones son, Eslabón 2,

$$J_2(:, 1) = S_2$$

Eslabón 4,

$$J_4 = S_4 \rho(1, :)$$

Eslabon 3

$$J_3 = Ad_{T_{3,4}} S_4 \rho(1, :) + S_{3,u} \rho(2, :) + S_3 \rho(3, :)$$

7.2.6. Matrices  $M_i$

Estas matrices se forman para cada cuerpo basado en el sistema de referencia que está unido al mismo. Los 3 eslabones a los que hay que armar matrices  $M_i$  son, el eslabón 2, el eslabón 4, y el eslabón 3. Si se asumen como eslabones esbeltos, su inercia centroidal tendrá la forma de,

$$I_c = diag([I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}])$$

Si para simplificar el cálculo, se asumen que los ejes principales de inercia tienen la misma orientación del sistema del cuerpo, las inercias centroidales son de la forma,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 0 \\ I_{yy} &= \frac{1}{12} m_i L_i^2 \\ I_{zz} &= I_{yy} \end{aligned}$$

Donde  $m_i$  es la masa del eslabón, y  $L_i$  es la longitud del mismo. Con esta información, la matriz de masa de los eslabones se calcula con la expresión,

$$M_i = \begin{bmatrix} R_{i,c} I_c R_{i,c}^T - m_i \hat{r}_{i,c} \hat{r}_{i,c} & m r_{i,c} \hat{r}_{i,c} \\ -m \hat{r}_{i,c} & m I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Donde  $R_{i,c} = I$  por cuanto se seleccionó la misma orientación del sistema del cuerpo, y  $r_{i,c} = r_x(L_i/2)$  por cuanto se asume que el cuerpo es homogéneo y su centro de masa se ubica en la mitad de la longitud del mismo.

7.2.7. Resultados Numéricos

La simulación realizada para el mecanismo de cuatro barras espacial consiste en analizar el comportamiento de un motor de velocidad angular constante ubicado en la junta activa, eslabón 2. La velocidad angular escogida fue de  $\dot{\theta}_2 = 1RPM$ . El tiempo de duración de la simulación, para la velocidad seleccionada, fue de 60s, por cuanto es el tiempo que demora la junta 2 en hacer una revolución completa. El paso de la simulación, o el cambio del tiempo entre iteraciones N-R se tomó igual a 0,01s.

Respecto a la geometría del mecanismo, se tomaron las longitudes de los eslabones, con  $L_1 = 150mm$ , es decir la distancia entre los sistemas 2 y 4; la longitud del eslabón de entrada en  $L_2 = 50mm$ , para el eslabón 3 que une la junta esférica con la universal se tomó una longitud de  $L_3 = 120mm$ , y para el eslabón de salida una longitud  $L_4 = 120mm$ .

El punto de partida de la simulación fue cuando el eslabón 2 se encuentra en posición vertical. En esta posición los ángulos del mecanismo son,  $\theta_2 = 90$ ,  $\theta_4 = 112,77$ ,  $\theta_{3,z} = 0$ , y  $\theta_{3,y} = 97,58$ .

Respecto a la parte cinética, las masas de los cuerpos requerida para la matriz de masas de para cada eslabón se tomaron valores de  $m_2 = 0,1Kg$ ;  $m_4 = 0,4kg$ , y  $m_3 = 0,4Kg$ .

Los resultados de las simulaciones se muestran en las Figuras 9, 10, 11, y 12. La figura 10 muestra los valores que toman las juntas pasivas para una vuelta del mecanismo. Se aprecia que el primer eje de la junta universal es el que experimenta una mayor variación en los ángulos.

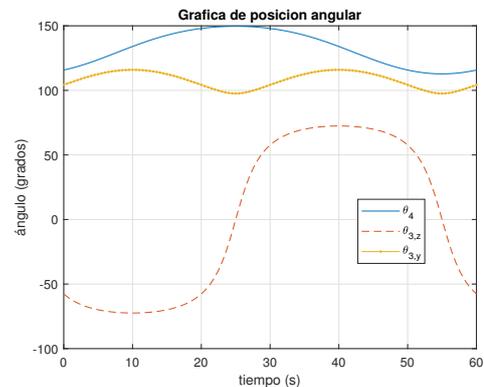


Figura 9: Resultados Simulación de Posición del Cuatro Barras Espacial

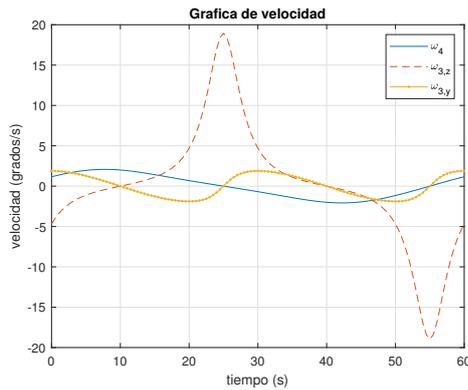


Figura 10: Resultados Simulación de Velocidad del Cuatro Barras Espacial

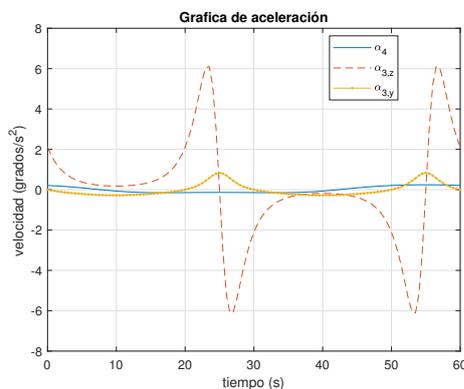


Figura 11: Resultados Simulación de Aceleración del Cuatro Barras Espacial

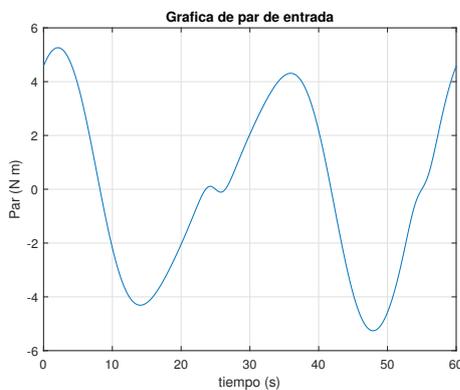


Figura 12: Resultados Simulación de Par del Cuatro Barras Espacial

La Figura 11 ilustra los resultados obtenidos para el análisis de velocidades angulares para las tres velocidades angulares pasivas. Se vuelve a apreciar que la velocidad angular  $\theta_{3,u}$  correspondiente al primer eje de rotación de la junta universal, es el que experimenta mayores valores.

La Figura 11 el resultado del análisis de aceleración angular de las juntas pasivas. Al igual que los resultados previos, la mayor variación se observa en la junta universal.

Por último, se tienen los resultados del par necesario para mover el mecanismo a velocidad angular constante, ver Figura 12. El resultado obtenido no tiene en cuenta los efectos de la

gravedad sobre el mecanismo. Sin embargo, se puede modificar el código de la simulación para incluir los valores en  $F_g$ . La gráfica muestra que se requiere un par cercano a los 6 Nm para mover el sistema a velocidad angular constante en la entrada, junta 2.

### 7.3. Robot 3-RRR Planar

La Figura 13 ilustra un robot planar de tres grados de libertad denominado robot 3-RRR, por cuanto tiene 3 patas conformadas por 3 juntas rotacionales, donde la primera de ellas es la junta actuada. Este robot tiene 3 grados de libertad en el plano, que son, 2 de traslación del efector final, y 1 de rotación. El mecanismo consta de 7 cuerpos, a cada cuerpo se le ha asignado un sistema de referencia, como se puede apreciar en la figura. Para el análisis se tiene que transformar la cadena cinemática cerrada en abierta, para ello se han escogido dos de las dos juntas señaladas en la figura para ser reemplazadas por restricciones. El el sistema multicuerpo queda con tres ramas cinemáticas abiertas y dos juntas que constituyen las restricciones.

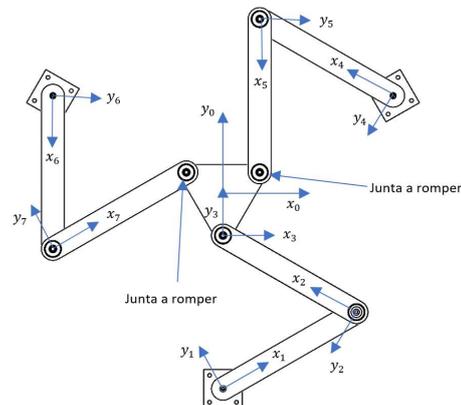


Figura 13: Robot planar 3-RRR con los sistemas de referencias de los cuerpos.

La variable de posición de este robot, siguiendo la nomenclatura de la Figura 13, es la siguiente,

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7]^T$$

Donde las variables actuadas son  $\theta_{act} = [\theta_1, \theta_4, \theta_6]^T$ , y las variables pasivas son:  $\theta_{pas} = [\theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_7]^T$ .

#### 7.3.1. Análisis de posición

En la Figura 13 solo se dibujaron los sistemas de referencia de cada cuerpo para no complicar el dibujo, pero para efectos de análisis hay que tener en cuenta que en las juntas que se rompen se deben colocar sistemas de referencia para poder construir las restricciones de movimiento. Teniendo en cuenta este detalle, se procede a construir las matrices de transformación homogéneas que describen la cadena cinemática.

#### Primera cadena cinemática

Esta primera cadena cinemática está formada por los cuerpos 1, 2 y 3, siendo 3 el efector final del robot. Como se van a romper las otras juntas del efector final, este cuerpo va a tener dos

puntos de interés para las restricciones. Por simplicidad en la formulación se van a tomar el efector final como el cuerpo  $n$  de todas las restricciones a crear. Las matrices de transformación homogéneas para esta cadena cinemática son, Entre el cuerpo 0, y la junta 1 del mismo cuerpo,

$$T_{0,1} = \begin{bmatrix} I & r_y(-r_{base}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el cuerpo 1, y la junta 2 del mismo cuerpo,

$$T_{1,2} = \begin{bmatrix} I & r_x(L) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre la junta 2 y la junta del cuerpo 3,

$$T_{2,3} = \begin{bmatrix} I & r_x(L) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre 3 y el punto  $n_1$ ,

$$T_{3,n_1} = \begin{bmatrix} Rot_z(-\pi/6) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & r_y(l_{ee}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre 3 y el punto  $n_2$ ,

$$T_{3,n_2} = \begin{bmatrix} Rot_z(\pi/6) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & r_y(l_{ee}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Segunda cadena cinemática

Las matrices de transformación homogéneas son, Entre el cuerpo 0, y el cuerpo 4,

$$T_{0,4} = \begin{bmatrix} Rot_z(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & r_y(-r_{base}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_4) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el cuerpo 4, y el cuerpo 5,

$$T_{4,5} = \begin{bmatrix} I & r_x(L) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_5) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el cuerpo 5 y el punto  $m_1$ ,

$$T_{5,m_1} = \begin{bmatrix} I & r_x(L) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Tercera cadena cinemática

Las matrices de transformación homogéneas son, Entre el cuerpo 0, y el cuerpo 6,

$$T_{0,6} = \begin{bmatrix} Rot_z(-2\pi/3) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & r_y(-r_{base}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_6) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el cuerpo 6, y el cuerpo 7,

$$T_{6,7} = \begin{bmatrix} I & r_x(L) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rot_z(\theta_7) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entre el cuerpo 7 y el punto  $m_2$ ,

$$T_{7,m_2} = \begin{bmatrix} I & r_x(L) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 7.3.2. Vector de restricciones

Las juntas que se rompieron se van a reemplazar por 4 restricciones de movimiento lineal. Es bueno recordar que para este tipo de restricción no es necesario que los sistemas de los cuerpos  $m$  y  $n$  coincidan en orientación, únicamente en posición. El vector de restricciones expresado de forma resumida es,

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} \Phi_{lin}(u_{x,x}, r_{n_1} - r_{m_1}) \\ \Phi_{lin}(u_{y,y}, r_{n_1} - r_{m_1}) \\ \Phi_{lin}(u_{x,x}, r_{n_2} - r_{m_2}) \\ \Phi_{lin}(u_{y,y}, r_{n_2} - r_{m_2}) \end{bmatrix}$$

Donde el significado de cada uno de ellos es,

$$\Phi_{lin}(u_{n,n}, r_{n_i} - r_{m_i}) = (R_{0,n_i} u_{n,n})^T (r_{0,n_i} - r_{0,m_i})$$

Donde los componentes  $R_{0,n_i}$  y  $r_{0,n_i}$  se obtiene de la matriz de transformación homogénea  $T_{0,n_i}$ . De la misma manera  $r_{m_i}$  se obtienen de la matriz homogénea  $T_{0,m_i}$ . Los vectores  $u_{x,x} = [1; 0; 0]$ , y  $u_{y,y} = [0; 1; 0]$  son valores constantes.

El vector de restricciones tiene dimensión  $4 \times 1$ , eso significa que únicamente se permiten un máximo de cuatro variables pasivas. Estas variables pasivas son,  $\theta_2, \theta_3, \theta_5$ , y  $\theta_7$ . Las juntas activas son,  $\theta_1, \theta_4$ , y  $\theta_6$ .

### 7.3.3. Jacobiano del sistema

La matriz jacobiana de este sistema tiene tamaño  $4 \times 7$ , por cuanto son 4 restricciones de movimiento lineal, 4 juntas pasivas, 3 juntas activas para un total de 7 variables. El jacobiano completo tiene la forma,

$$\Phi_{\theta}(:, 1 : 3) = \begin{bmatrix} C_{x,x}^T Ad_{T_{n_1,1}} S_1 & C_{x,x}^T Ad_{T_{n_1,2}} S_2 & C_{x,x}^T Ad_{T_{n_1,3}} S_3 \\ C_{y,y}^T Ad_{T_{n_1,1}} S_1 & C_{y,y}^T Ad_{T_{n_1,2}} S_2 & C_{y,y}^T Ad_{T_{n_1,3}} S_3 \\ C_{x,x}^T Ad_{T_{n_2,1}} S_1 & C_{x,x}^T Ad_{T_{n_2,2}} S_2 & C_{x,x}^T Ad_{T_{n_2,3}} S_3 \\ C_{y,y}^T Ad_{T_{n_2,1}} S_1 & C_{y,y}^T Ad_{T_{n_2,2}} S_2 & C_{y,y}^T Ad_{T_{n_2,3}} S_3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{\theta}(:, 4 : 5) = \begin{bmatrix} -C_{x,x}^T Ad_{T_{n_1,m_1}} Ad_{T_{m_1,4}} S_4 & -C_{x,x}^T Ad_{T_{n_1,m_1}} Ad_{T_{m_1,5}} S_5 \\ -C_{y,y}^T Ad_{T_{n_1,m_1}} Ad_{T_{m_1,4}} S_4 & -C_{y,y}^T Ad_{T_{n_1,m_1}} Ad_{T_{m_1,5}} S_5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{\theta}(:, 6, 7) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -C_{x,x}^T Ad_{T_{n_2,m_2}} Ad_{T_{m_2,6}} S_6 & -C_{x,x}^T Ad_{T_{n_2,m_2}} Ad_{T_{m_2,7}} S_7 \\ -C_{y,y}^T Ad_{T_{n_2,m_2}} Ad_{T_{m_2,6}} S_6 & -C_{y,y}^T Ad_{T_{n_2,m_2}} Ad_{T_{m_2,7}} S_7 \end{bmatrix}$$

El jacobiano de las juntas activas está formado por las columnas 1, 4 y 6,

$$\Phi_{act} = \begin{bmatrix} \Phi_{\theta}(:, 1) & \Phi_{\theta}(:, 4) & \Phi_{\theta}(:, 6) \end{bmatrix}$$

y el jacobiano de las juntas pasivas son las columnas 2, 3, 5 y 7,

$$\Phi_{pas} = \begin{bmatrix} \Phi_{\theta}(:, 2) & \Phi_{\theta}(:, 3) & \Phi_{\theta}(:, 5) & \Phi_{\theta}(:, 7) \end{bmatrix}$$

Con las definiciones de los jacobianos de las juntas activas y pasivas se pueden realizar los análisis de posición y velocidad. Para el análisis de aceleración, se hace necesario calcular el vector  $\gamma$ .

### 7.3.4. Vector $\gamma$

El vector  $\gamma$  es un vector de tamaño  $4 \times 1$ , para evaluarlo toca primero evaluar los términos de Coriolis de las aceleraciones.

*Término Coriolis para las cadena  $n_1$  y  $n_2$*

Las cadenas cinemáticas  $n_1$  y  $n_2$  contienen las mismas juntas 1, 2 y 3, la diferencia es en el último cuerpo, el efector final, donde tienen dos puntos diferentes,  $n_1$  y  $n_2$ . Se puede evaluar el término común de Coriolis hasta la junta 3 y después multiplicar por el operador adjunto respectivo para calcular los dos términos. En ese sentido, se tiene el término común,

$$A_{c,3} = Ad_{T_{3,2}} ad_{S_2} Ad_{T_{2,1}} S_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + ad_{S_3} Ad_{T_{3,1}} S_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + ad_{S_3} Ad_{T_{3,2}} S_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3$$

Para la cadena  $n_1$  se evalúa,

$$A_{c,n_1} = Ad_{T_{n_1,3}} A_{c,3}$$

Para la cadena  $n_2$  se evalúa,

$$A_{c,n_2} = Ad_{T_{n_2,3}} A_{c,3}$$

*Término Coriolis para la cadena  $m_1$*

Esta cadena cinemática contiene las juntas 4 y 5,

$$A_{c,m_1} = Ad_{T_{m_1,5}} ad_{S_5} Ad_{T_{5,4}} S_4 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5$$

*Término Coriolis para la cadena  $m_2$*

Esta cadena cinemática contiene las juntas 6 y 7,

$$A_{c,m_2} = Ad_{T_{m_2,6}} ad_{S_6} Ad_{T_{6,7}} S_7 \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_7$$

*Vector  $\gamma$ .*

Una vez evaluado los términos de Coriolis, el vector  $\gamma$  se evalúa con la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= C_{x,x}^{*T} \left( Ad_{T_{n_1,m_1}} A_{c,m_1} - A_{c,n_1} - ad_{V_{n_1}} Ad_{T_{n_1,m_1}} V_{m_1} \right) \\ \gamma(2) &= C_{y,y}^{*T} \left( Ad_{T_{n_1,m_1}} A_{c,m_1} - A_{c,n_1} - ad_{V_{n_1}} Ad_{T_{n_1,m_1}} V_{m_1} \right) \\ \gamma(3) &= C_{x,x}^{*T} \left( Ad_{T_{n_2,m_2}} A_{c,m_2} - A_{c,n_2} - ad_{V_{n_2}} Ad_{T_{n_2,m_2}} V_{m_2} \right) \\ \gamma(4) &= C_{y,y}^{*T} \left( Ad_{T_{n_2,m_2}} A_{c,m_2} - A_{c,n_2} - ad_{V_{n_2}} Ad_{T_{n_2,m_2}} V_{m_2} \right) \end{aligned}$$

*Matrices  $J_i$ .*

El sistema tiene 7 cuerpos y 3 juntas activas, por lo tanto, habrá 7 matrices  $J_i$ , cada una de tamaño  $6 \times 3$ . Para los primeros eslabones, es decir, los cuerpos 1, 4, y 6, se tiene que en el cálculo de la velocidad de cada cuerpo solo interviene una de las 3 juntas activas  $\theta_1$ ,  $\theta_4$ , y  $\theta_6$ . Para estos cuerpos, el jacobiano  $J_i$  solo tiene una columna y la fórmula general del jacobiano del cuerpo es,

$$J_i(:, k) = S_{rot,z}$$

Donde la variable  $k$  representa la junta activa que interviene en el cálculo de la velocidad del cuerpo; por ejemplo, para el cuerpo 4, su jacobiano será,  $J_4(:, 2) = S_i$ . Adicionalmente, el vector  $S_{rot,z}$  es constante para el sistema y tiene la forma,

$$S_{rot,z} = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$$

Para los cuerpos 2, 5, y 7, el jacobiano  $J_i$  tendrá dos componentes. El primero es la columna relacionado con la junta activa de la cadena cinemática correspondiente; el segundo es el producto de  $S_{rot,z}$  con la fila  $k$  del producto  $\rho = -\Phi_{pas}^{-1} \Phi_{act}$ . las ecuaciones para estos tres casos son,

$$\begin{aligned} J_2(:, 1) &= Ad_{T_{2,1}} S_{rot,z} \\ J_2 &= J_2 + S_{rot,z} \rho(1, :) \\ J_5(:, 2) &= Ad_{T_{5,4}} S_{rot,z} \\ J_5 &= J_5 + S_{rot,z} \rho(3, :) \\ J_7(:, 3) &= Ad_{T_{7,6}} S_{rot,z} \\ J_7 &= J_7 + S_{rot,z} \rho(4, :) \end{aligned}$$

Por último, para el efector final, la matriz  $J_i$  se calcula con la expresión,

$$\begin{aligned} J_3(:, 1) &= Ad_{T_{3,1}} S_{rot,z} \\ J_3 &= J_3 + Ad_{3,2} S_{rot,z} \rho(1, :) \\ J_3 &= J_3 + S_{rot,z} \rho(2, :) \end{aligned}$$

### 7.3.5. Análisis Numérico

Las ecuaciones del análisis del robot 3 – RRR se programaron en *MATLAB* utilizando los siguientes valores numéricos para el robot,

*Datos geométricos*

Radio de la base ( $r_{base}$ ) = 255,0 mm

Radio del efector final ( $r_{ee}$ ) = 55,0 mm

Longitud de los eslabones ( $L$ ) = 200 mm

*Posición inicial*

La configuración inicial del robot es,

$\theta_{inicial} = [30; 120; -150; 30; 120; 30; 120]$  grados

*Velocidad angular y duración de la simulación*

La simulación se hizo a velocidad angular constante de 6 grados por segundo, con aceleración angular cero en las juntas actuadas. El tiempo de duración fue de 3 segundos para evitar choque entre los eslabones.

*Matrices  $M_i$ .*

Para obtener datos de la dinámica inversa, se consideraron matrices  $M_i$  constantes. La geometría del robot permite que las matrices sean iguales para todos los eslabones. En el caso del efector final, se tiene otra matriz de masas.

Los valores de la masa e inercia centroidal de los eslabones de las patas son,

Masa de los eslabones = 0,32841 Kg.

Inercia centroidal de los eslabones =

$diag([13812,98e - 9; 1201772,56e - 9; 1201772,56e - 9])$   $Kgmm^2$

El centroide del eslabón queda a una distancia  $r_{i,c}$  del sistema de referencia  $i$  del cuerpo. Este vector distancia es constante,

$r_{i,c} = [L/2; 0; 0]^T$

La matriz de rotación entre el sistema de referencia del centroide y el sistema de referencia del cuerpo,  $R_{i,c}$ , es la matriz

identidad, es decir ambos tienen la misma orientación. Para el caso del efector final los valores empleados son, Masa del efector final = 0,70994 Kg. Inercia del efector final =  $diag([633683,60e - 9; 633683,60e - 9; 1195134,64e - 9])$   $Kgmm^2$ . El centroide del efector final queda a una distancia  $r_{ef,c}$  del sistema de referencia del efecto final. Este vector distancia es constante,  $r_{ef,c} = [0; r_{ee}; 0]^T$ . La matriz de rotación entre el sistema de referencia del centroide y el sistema de referencia del efector final,  $R_{ef,c}$ , es la matriz identidad, es decir ambos tienen la misma orientación. Con los datos anteriores se forma la matriz de masas generalizada de cada componente de la cadena cinemática,

$$M_i = \begin{bmatrix} R_{i,c} I_c R_{i,c}^T - m_i \hat{r}_{i,c} \hat{r}_{i,c} & m_i \hat{r}_{i,c} \\ -m_i \hat{r}_{i,c} & m_i I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

7.3.6. Resultado de las Simulaciones

Una vez realizado la simulación numérica, se procede a graficar los resultados obtenidos. En la Figura 14 se muestran los resultados obtenidos para la orientación angular del eslabón 2. Debido a la simetría del problema, a la forma como se escogieron los ángulos de las juntas actuadas, y a los parámetros de la simulación; las gráficas de los ángulos de giro de los eslabones 5 y 7 exhiben el mismo comportamiento.

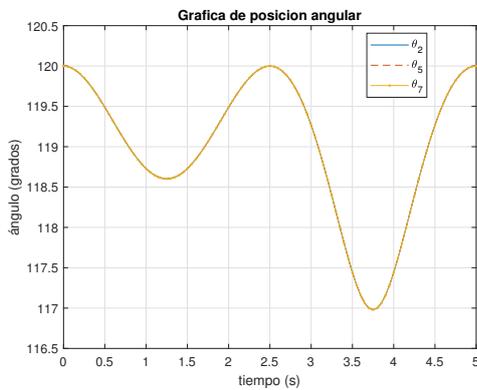


Figura 14: Posición del eslabón 2

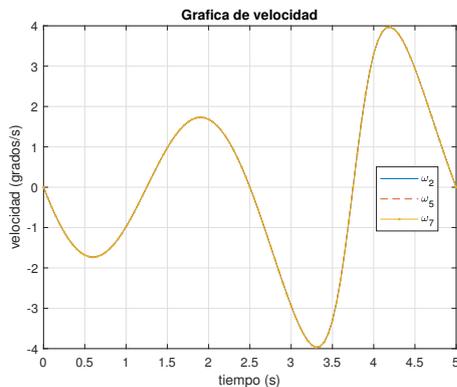


Figura 15: Velocidad del eslabón 2

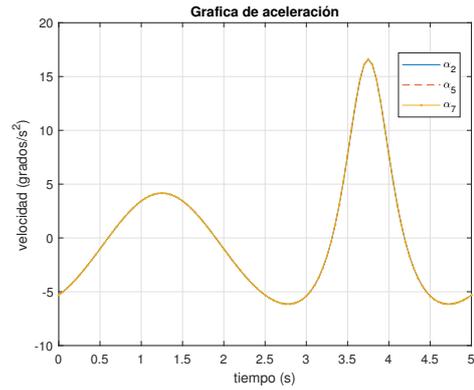


Figura 16: Aceleración del eslabón 2

La Figura 15 es el resultado del análisis de velocidades del robot para el eslabón 2. En el caso de las aceleraciones, se tiene la Figura 16 como el resultado del análisis del eslabón 2. Si bien los resultados dibujados son para el eslabón 2, se tiene que, por las características de la simulación, los eslabones 5 y 7 exhiben el mismo comportamiento numérico.

Por último, se tiene los resultados de los pares de los motores. Debido a las características de la simulación, los valores obtenidos son similares para los 3 motores. La Figura 17 muestra el par necesario que debe tener el motor para que el robot se mueva según los parámetros de la simulación.

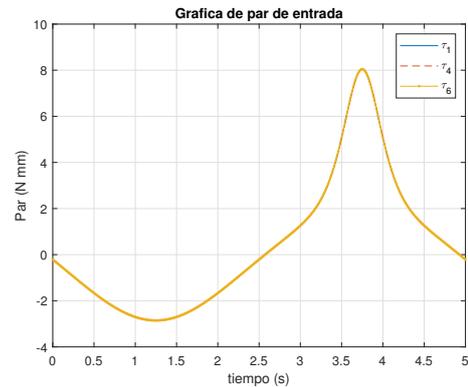


Figura 17: Par requerido del motor 1

8. Conclusiones

En este trabajo se ha explicado de forma rigurosa como realizar el análisis dinámico inverso de mecanismos con cadena cinemática cerrada, utilizando el método de las restricciones, ampliamente conocido en la mecánica multicuerpo, pero con dos cambios. El primero es la forma como se definen las restricciones. El segundo, es utilizando la notación proveniente del álgebra de Lie, para las velocidades y aceleraciones. Una ventaja de este enfoque es que las restricciones se pueden agrupar en dos grupos: restricciones de movimiento lineal y restricciones de movimiento angular. Esta diferenciación permite que el jacobiano, o derivada de las restricciones, se exprese como una única ecuación,  $\Phi_\theta = C^{*T} (V_n - Ad_{T_{nm}} V_m)$ . A partir de la simplicidad del término del jacobiano, se procede a determinar las ecuaciones y el procedimiento necesario para realizar los análisis de posición, velocidad y aceleración del sistema multicuerpo. Para

conseguir el análisis dinámico inverso, se empleó el principio del trabajo virtual, donde fue necesario construir los jacobianos de los eslabones,  $J_i$ , a partir de la información cinemática del mecanismo y la relación de velocidad entre las juntas activas y las juntas pasivas del mecanismo de cadena cinemática cerrada.

Para ilustrar como es el procedimiento necesario para analizar las cadenas cinemáticas cerradas, se realizaron tres ejemplos: un mecanismo de cinco barras, un mecanismo espacial de cuatro barras, y el robot paralelo 3 –  $RRR$ . Para cada ejemplo se ilustra los pasos subyacentes en los análisis de posición, velocidad y aceleración; así como el cálculo del jacobiano de los eslabones,  $J_i$ , necesario para obtener el par requerido por las juntas para mover el mecanismo. Es decir, se obtuvo el modelo dinámico inverso del sistema.

Por último, es importante resaltar que el método ilustrado en el presente artículo es un método numérico, el cual tiene ciertas ventajas respecto a los modelos simbólicos que ampliamente se discuten en la literatura científica. La principal ventaja es que se evita tener que lidiar con ecuaciones algebraicas altamente no lineales, donde el manejo, factorización, y simplificación pueden ser tareas que requieren un gran esfuerzo matemático.

## Referencias

- Briot, S., Khalil, W., 2015. Dynamics of Parallel Robots: From Rigid Bodies to Flexible Elements. Springer.
- Featherstone, R., 2008. Rigid Body Dynamics Algorithms. Springer.
- Gallardo, J., Rico, J. M., Frisoli, A., Checcacci, D., Bergamasco, M., 2003. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory. Mechanism and Machine Theory 38, 1113–1131.  
DOI: 10.1016/S0094-114X(03)00054-5
- Gallardo-Alvarado, J., 2016. Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory. Springer.
- Gallardo-Alvarado, J., Gallardo-Razo, J., 2022. Mechanisms: Kinematic Analysis and Applications in Robotics. Elsevier.
- Gogu, G., 2008. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 1: Methodology. Springer.
- Gogu, G., 2009. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom. Springer.
- Gogu, G., 2010. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 3: Topologies with Planar Motion of the Moving Platform. Springer.
- Gogu, G., 2012. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 4: Other Topologies with Two and Three Degrees of Freedom. Springer.
- Gogu, G., 2014. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 5: Basic Overconstrained Topologies with Schönflies Motions. Springer.
- Haug, E. J., 1989. Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Pearson College Div.
- Kim, J., Park, F., 2001. Direct kinematic analysis of 3-rs parallel mechanisms. Mechanism and Machine Theory 36 (10), 1121–1134.  
DOI: 10.1016/S0094-114X(01)00042-8
- Kong, X., Gosselin, C. M., 2007. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. Springer.
- Lynch, K. M., Park, F. C., 2017. Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control. Cambridge University Press.
- Merlet, J. P., 2004. Solving the forward kinematics of a gough-type parallel manipulator with interval analysis. The International Journal of Robotics Research 23 (3), 221–235.  
DOI: 10.1177/0278364904039806
- Merlet, J. P., 2005. Parallel Robots. Springer.
- Morell, A., Tarokh, M., Acosta, L., 2013. Solving the forward kinematics problem in parallel robots using support vector regression. Engineering Applications of Artificial Intelligence 26 (7), 1698–1706.  
DOI: /10.1016/j.engappai.2013.03.011
- Murray, R. M., Li, Z., Sastry, S. S., 1994. A mathematical Introduction to Robotic Manipulation. CRC Press.
- Nielsen, J., Roth, B., 1999. On the kinematic analysis of robotic mechanisms. The International Journal of Robotics Research 18 (12), 1147–1160.  
DOI: 10.1177/0278364992206771
- Nikravesh, P., 2018. Planar Multibody Dynamics: Formulation, Programming with MATLAB, and Applications. CRC Press.
- Park, F., Bobrow, J., Ploen, S., 1995. A lie group formulation of robot dynamics. The International Journal of Robotics Research 14 (6), 609–618.  
DOI: 10.1177/027836499501400606
- Park, F., Choi, J., Ploen, S., 1999. Symbolic formulation of closed chain dynamics in independent coordinates. Mechanism and Machine Theory 34 (5), 731–751.  
DOI: /10.1016/S0094-114X(98)00052-4
- Shabana, A. A., 2020. Dynamics of Multibody Systems. Cambridge University Press.
- Taghirad, H. D., 2013. Parallel Robots: Mechanics and Control. Springer.
- Tsai, L. W., 1999. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators. Wiley-Interscience.
- Yime, E., 2023. Codigos de los ejemplos del artículo tutorial sobre algebra de lie. [https://github.com/eyime/Tutorial\\_Lie\\_RIAI](https://github.com/eyime/Tutorial_Lie_RIAI).
- Zubizarreta, A., Larrea, M., Irigoyen, E., Cabanes, I., Portillo, E., 2018. Real time direct kinematic problem computation of the 3prs robot using neural networks. Neurocomputing 271, 104–114.  
DOI: 10.1016/j.neucom.2017.02.098