

Análisis de identificabilidad estructural de un sistema de transferencia de calor

Fco. Javier Sanz Bermejo*, Édgar Ramírez Laboreo, Carlos Sagüés

*Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas (DIIS) e Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A),
Universidad de Zaragoza, Zaragoza 50018, España*

To cite this article: Sanz-Bermejo, J., Ramirez-Laboreo, E., Sagues, C. 2023. Structural identifiability analysis of a heat transfer system. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 20, 412-420.
<https://doi.org/10.4995/riai.2023.19170>

Resumen

El exceso de consumo energético es actualmente un gran problema para la sociedad y parte de la solución a este problema pasa por mejorar la eficiencia de los sistemas de uso extensivo, particularmente los sistemas térmicos. Una forma de abordarlo es mediante la construcción de modelos orientados a la mejora energética. Estos modelos dependen de parámetros, a priori desconocidos, que se deben estimar. En este sentido, la identificabilidad es una propiedad esencial que se debe analizar en cualquier proceso de estimación paramétrica. En este trabajo, presentamos un modelo de parámetros concentrados de un sistema térmico. Después, analizamos su identificabilidad empleando el teorema del isomorfismo local. Finalmente discutimos dos escenarios en función de las variables medidas. En el primero disponemos de medidas del estado completo y demostramos que el modelo es identificable, mientras que en el segundo disponemos de medidas parciales y el modelo resulta ser no identificable. Finalmente, planteamos un análisis adicional en el que determinamos el conjunto mínimo de variables a medir para que el modelo sea identificable.

Palabras clave: Identificabilidad estructural, modelado térmico de caja gris, modelo de parámetros concentrados, identificación recursiva.

Structural identifiability analysis of a heat transfer system

Abstract

Excessive energy consumption is currently a big deal for society. Part of the solution to this problem is to improve the efficiency of extensive use systems, particularly thermal systems. One way to address this is through the building of energy improvement oriented models. These models depend on a priori unknown parameters that must be estimated. In this sense, identifiability is an essential property to be analyzed in any parametric estimation process. In this paper, we present a lumped-parameter model of a thermal system. Then, we analyze its identifiability using the local isomorphism theorem. Finally, we discuss two scenarios depending on the measured variables. In the first one we have measurements of the complete state and we show that the model is identifiable, while in the second one we have partial measurements and the model turns out to be non-identifiable. Finally, we propose an additional analysis in which we determine the minimum set of variables to be measured for the model to be identifiable.

Keywords: Structural identifiability, grey-box thermal modeling, lumped-parameter modeling, recursive identification

1. Introducción

La reducción del consumo de energía se ha convertido en uno de los principales problemas a resolver por el ser humano. La mayor parte de la energía consumida en el ámbito doméstico está ligada a procesos térmicos, tales como los sistemas de

calefacción, la producción de agua caliente sanitaria o los electrodomésticos. Además de adoptar buenos hábitos de consumo, una de las claves para reducir el consumo de energía consiste en mejorar la eficiencia de estos sistemas. En este sentido, la construcción de modelos dinámicos orientados a la mejora energética es probablemente una de las herramientas más úti-

*Autor para correspondencia: fjsanz@unizar.es

les a la hora de mejorar la eficiencia de cualquier sistema. La construcción de modelos orientados a la mejora energética es, sin embargo, un proceso crítico que depende de una serie de factores, tales como su grado de detalle o la información empleada en el proceso de construcción. Por un lado, el modelo desarrollado debe de ser lo suficientemente detallado como para capturar la dinámica de todas las variables de interés. Por otro lado, también ha de ser lo suficientemente sencillo como para poder realizar simulaciones poco costosas computacionalmente que permitan su uso en algoritmos de estimación, control u optimización.

Una posibilidad es construir modelos únicamente basados en datos experimentales. Este enfoque de modelado se conoce como *black-box*, y busca obtener una relación matemática entre las entradas y salidas del sistema sin tener en cuenta la física del problema. Este método podría conducir a comportamientos incompatibles con los principios físicos del sistema. En Royer et al. (2014), se emplean estructuras de caja negra para modelar la dinámica de la temperatura de edificios a diferentes escalas. Otro ejemplo de modelo de caja negra se puede ver en Unklesbay et al. (1997), donde se emplea una estructura ARMAX para modelar la temperatura del aire de un horno de convección. Estos modelos son capaces de predecir con precisión únicamente la dinámica de las variables que hayan sido registradas durante las pruebas experimentales. Por lo tanto, no pueden emplearse para obtener información sobre otras variables de interés, incluidas aquellas que no pueden medirse directamente.

En el extremo opuesto se encuentra el enfoque de modelado conocido como *white-box*. Esta técnica de modelado requiere un completo conocimiento de los principios físicos que gobiernan el sistema, así como de los valores de todas las propiedades y parámetros del mismo. No obstante, los modelos obtenidos a partir de este método presentan dificultades para reflejar características específicas de cada sistema. En la literatura pueden encontrarse ejemplos de esta forma de modelización, la mayoría basados en el método de los elementos finitos (MEF). En Cabeza-Gil et al. (2020), por ejemplo, se desarrolla un modelo basado en el MEF para analizar la distribución térmica de una sartén durante un proceso de cocción por inducción. Otro ejemplo es Mirade et al. (2004), donde se construye otro modelo de la misma tipología para un horno eléctrico, en este caso con el objetivo de predecir la temperatura del aire en un proceso industrial. Aunque en ambos casos se obtienen resultados muy precisos, los elevados requisitos computacionales hacen que estos modelos no sean adecuados para los procesos de optimización desde el punto de vista de la eficiencia energética.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la solución ideal que permitiría modelar con suficiente detalle la dinámica de las principales variables de interés sin requerir un coste computacional muy elevado es probablemente un modelado híbrido entre los dos presentados previamente. Es decir, modelos basados en principios físicos cuyos parámetros se caractericen a partir de observaciones del sistema a modelar. Este es el enfoque de modelado conocido como *grey-box*. Algunos ejemplos de aplicación pueden verse en Lucchi et al. (2019) y Lucchi and Lorenzini (2019), en donde se propone un modelo para predecir el comportamiento térmico transitorio de un horno eléctrico. En estos trabajos, se adopta un modelo de parámetros concentrados basado en la analogía térmica-eléctrica con el objetivo

de construir un modelo de bajo orden orientado al control. El modelo se valida experimentalmente con resultados contrastados. Otro ejemplo de esta técnica de modelado se puede encontrar en Ramallo-González et al. (2013), donde se presenta una nueva metodología analítica para obtener modelos reducidos para la modelización térmica de edificios. Los resultados experimentales muestran que esta técnica presenta una precisión comparable a la de modelos más detallados con un coste computacional mucho menor. Uno de los aspectos característicos del modelado de caja gris es que requiere de procedimientos de identificación para estimar el conjunto de parámetros, que es parcial o totalmente desconocido. Existen dos escenarios en los que resulta esencial llevar a cabo un análisis preliminar de identificabilidad, primero cuando se requiera predecir la dinámica de variables no medidas en ensayos de caracterización. Segundo, cuando se requiera conocer el valor de algún parámetro en particular, por la relevancia física que presenta en un sistema determinado. La falta de identificabilidad da lugar a problemas tales como la obtención de parámetros sin sentido físico o la falta de convergencia de los algoritmos de optimización utilizados en la estimación paramétrica. Cuando un modelo resulta ser no identificable, el análisis de identificabilidad también proporciona información útil para resolver la ambigüedad estructural. Por ejemplo, indica qué variables de estado es necesario medir o qué parámetros se pueden suponer conocidos para que el sistema pase a ser identificable.

A pesar de la importancia de la identificabilidad, el análisis de esta propiedad se ha ignorado en un gran número de trabajos sobre modelos dinámicos, a excepción del ámbito biológico, donde se ha analizado ampliamente. Por citar un ejemplo, en Aguirre-Zapata et al. (2023) se emplea el software GenSSI, basado en el método de generación de series, para analizar la identificabilidad estructural de un modelo de un insecto. En la literatura pueden encontrarse pocos ejemplos que hayan tenido en cuenta el estudio de identificabilidad en sistemas térmicos. En Vilas et al. (2018) se aborda el estudio de la identificabilidad estructural aplicando el método de igualar la salida para un proceso térmico de alimentos envasados. Este enfoque se basa en el álgebra de Lie y consiste en comprobar si la igualdad de dos trayectorias de la salida, partiendo de la misma condición inicial, implica la igualdad entre los conjuntos paramétricos. Otro ejemplo se puede ver en Ramírez-Laboreo et al. (2014), donde se adopta un enfoque algebraico basado en el algoritmo de Ritt (Ljung and Glad, 1994), para un modelo de caja gris de un horno eléctrico. No obstante, tal y como el autor explica, a pesar de que se trata de un enfoque sistemático no puede aplicarse a cualquier estructura paramétrica, y su implementación da lugar a expresiones algebraicas inmanejables dificultando su comprensión.

El objetivo de este trabajo consiste en analizar el papel que desempeña la propiedad de identificabilidad en la construcción de modelos dinámicos de caja gris. Debido a la importancia que presentan los modelos dinámicos en la mejora de la eficiencia energética, se centran los esfuerzos en un sistema de transferencia de calor. Sin embargo, las ideas propuestas son aplicables a cualquier otro modelo dinámico construido a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias. En primer lugar, se presenta un modelo dinámico de caja gris basado en una estructura de parámetros concentrados que se usa de ejemplo a lo largo de to-

do el trabajo. La identificabilidad se estudia usando el teorema del isomorfismo local. Esta técnica permite evaluar de forma sencilla la identificabilidad para sistemas con entrada afín y un número de parámetros elevado. Esto se debe a que no da lugar a expresiones algebraicas inmanejables, a diferencia de los otros métodos para analizar la identificabilidad. Se presentan dos casos de estudio diferentes dependiendo de la disponibilidad que se tenga de las medidas de las variables de estado. En el primer caso, en el que se dispone de medidas del estado completo, se demuestra que el modelo es estructuralmente identificable. Por lo tanto, el cumplimiento de esta propiedad permite asegurar que es posible estimar los parámetros utilizando únicamente datos experimentales. En el segundo caso, únicamente se dispone de medidas de una variable de estado, y corresponde a una situación no identificable. Este hecho permite ilustrar algunos problemas que se pueden dar si esta propiedad no es analizada. Por último se presenta un análisis adicional en el que se determina el conjunto mínimo de variables de estado a medir para que el modelo propuesto sea identificable sin necesidad de tomar más medidas de las necesarias o suponer conocidos el valor de algunos parámetros.

2. Modelo dinámico

El modelo de caja gris presentado se basa en la analogía existente entre los sistemas térmicos y eléctricos. El uso de esta analogía proporciona una información más intuitiva sobre las variables energéticas del sistema que otras estructuras no son capaces de proporcionar, como por ejemplo, los flujos de calor o la energía almacenada. En este trabajo, a modo de ejemplo, se desarrolla un modelo para un sistema de transferencia de calor (Figura 1) compuesto por tres elementos principales, cada uno de ellos modelado como condensadores térmicos C_1 , C_2 y C_3 . La potencia calorífica es generada directamente en el condensador C_1 .

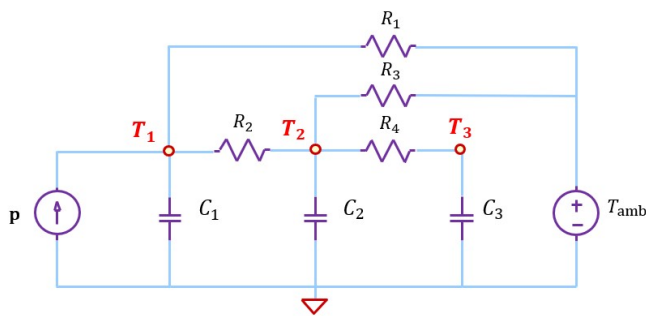


Figura 1: Representación esquemática de la estructura de parámetros concentrados.

El modelo propuesto adopta un enfoque de parámetros concentrados. Este enfoque modela cada elemento del sistema como un condensador térmico interconectado con otros a través de resistencias térmicas. Además, cada elemento puede verse afectado por temperaturas, en este caso la temperatura ambiente, T_{amb} , o flujos de calor externos. Cabe destacar que la temperatura ambiente presenta una dinámica tan lenta en comparación con el resto de las dinámicas del sistema que se puede considerar constante. Aplicando un balance de energía a cada nodo, se

obtiene el conjunto de ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema térmico,

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \frac{(T_2 - T_1)}{R_2} + \frac{(T_{amb} - T_1)}{R_1} + p, \quad (1)$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_2} + \frac{(T_3 - T_2)}{R_4} + \frac{(T_{amb} - T_2)}{R_3}, \quad (2)$$

$$C_3 \frac{dT_3}{dt} = \frac{(T_2 - T_3)}{R_4}, \quad (3)$$

donde T_1 , T_2 y T_3 son, respectivamente, las temperaturas de los elementos 1, 2 y 3. Como se ha indicado, la potencia calorífica p entra al sistema directamente a través del primer componente, modelado por un condensador C_1 . Por lo tanto, se puede interpretar como el elemento que transforma otro tipo de energía (química, eléctrica, etc.) en calor. Este componente presenta conexiones térmicas directas con el ambiente y con el segundo componente, que se modelan respectivamente mediante las resistencias R_1 y R_2 . El segundo componente, modelado por el condensador C_2 , se conecta térmicamente con el ambiente y con el tercer componente, el cual es modelado por el condensador C_3 . Estas conexiones son modeladas, respectivamente, por las resistencias R_3 y R_4 .

En general, los modelos obtenidos con este enfoque permiten estimar con precisión las principales variables de interés del sistema objeto de estudio, a pesar de simplificar las ecuaciones que rigen el comportamiento físico del mismo. Esta propuesta de modelado permite realizar un mayor número de simulaciones en un menor tiempo, al incorporar simplificaciones de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema. Además, si el modelo general obtenido de aplicar este enfoque resulta ser identificable, puede emplearse para extraer información adicional, como por ejemplo, la energía almacenada o las pérdidas al ambiente.

Las variables de estado seleccionadas para el modelo son las temperaturas de los tres elementos,

$$x = (T_1 \quad T_2 \quad T_3)^T, \quad (4)$$

como entrada del sistema se considera la potencia calorífica,

$$u = p, \quad (5)$$

la temperatura ambiente, T_{amb} , se considera una perturbación de valor conocido,

$$q = T_{amb}, \quad (6)$$

el vector de parámetros θ , está compuesto por las resistencias y capacidades térmicas, de la forma

$$\theta = (R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3)^T, \quad (7)$$

y, por tanto, la representación del espacio de estados del sistema en forma matricial es

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_q q \quad (8)$$

donde A , B y B_q son, respectivamente, las matrices dinámica, de entradas y de perturbaciones, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{C_1 R_2} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_2} & \frac{-1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) & \frac{1}{C_2 R_4} \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_4} & \frac{-1}{C_3 R_4} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_q = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_2 R_3} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Es importante destacar que el modelo dinámico obtenido, a pesar de ser lineal con respecto a las variables de estado y a la entrada, no es lineal con respecto a los parámetros. De hecho, el propósito de elegir este sistema es demostrar que modelos aparentemente simples pueden presentar en realidad una estructura paramétrica con varias no linealidades. Probablemente, las no linealidades que a menudo presentan las estructuras paramétricas sean una de las razones por las que la propiedad de identificabilidad sea obviada con frecuencia en la literatura.

3. Análisis de identificabilidad

En este apartado, en primer lugar, se define la identificabilidad estructural y se nombran los principales métodos que existen en la literatura para evaluar esta propiedad. Posteriormente, se explica detalladamente en qué se basa el enfoque adoptado en este trabajo para analizar la identificabilidad, así como las ventajas que presenta frente al resto de enfoques. Finalmente, se aplica el método seleccionado para las diferentes casuísticas de medidas que se pueden dar en la práctica.

3.1. Preámbulo teórico

La identificabilidad estructural es una propiedad teórica que depende exclusivamente de la parametrización del modelo, asumiendo medidas libres de ruido y errores, y es esencial para la construcción de cualquier modelo a partir de procesos de identificación. Existe una diferencia entre la identificabilidad estructural local (IEL) y la identificabilidad estructural global (IEG). Se dice que una parametrización propuesta es IEL si el conjunto paramétrico puede inferirse de forma única en una vecindad de su valor nominal. Sin embargo, puede existir un número contable de soluciones indistinguibles en el espacio de parámetros. Por otro lado, una parametrización se dice que es IEG si el conjunto paramétrico tiene una solución única en todo el espacio de parámetros. En este trabajo se aborda la identificabilidad estructural desde el punto de vista global. Por simplicidad, de aquí en adelante nos referiremos a dicha propiedad únicamente como identificabilidad estructural.

Consideremos el modelo, previamente presentado, como un modelo dinámico de entrada afín,

$$\Sigma_\theta : \begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) + g(x, \theta) u \\ y = h(x, \theta) \\ x(t_0) = x_0(\theta), \end{cases} \quad (11)$$

donde $x = x(t) \in H \subseteq \mathbb{R}^n$ es el estado, $u = u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ es la entrada, $y = y(t) \in \Psi \subseteq \mathbb{R}^p$ es la salida y $\theta \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^\ell$ es el vector de parámetros. La dinámica del sistema Σ_θ y el estado inicial $x_0(\theta)$ definen un mapa de entrada-salida de la forma

$$IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))} : \{u(t)\} \mapsto \{y(t)\}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (12)$$

tal que para cada entrada admisible, $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, el sistema devuelve una salida $y(t)$ definida en el mismo intervalo temporal, cumpliendo con la condición inicial dada. El sistema (11) se dice que es estructuralmente identificable si existe una relación de uno a uno entre el conjunto de posibles valores del vector de parámetros y el conjunto de posibles mapas de entrada-salida. Es decir, si se cumple que

$$IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))} = IO_{(\Sigma_{\tilde{\theta}}, x_0(\tilde{\theta}))} \iff \theta = \tilde{\theta}. \quad (13)$$

En otras palabras, el sistema es estructuralmente identificable si no es posible encontrar dos conjuntos paramétricos distintos que den lugar al mismo mapa de entrada-salida. Si esto se cumple, los parámetros que definen el mapa de entrada-salida pueden ser estimados teóricamente a partir de medidas de $u(t)$ e $y(t)$.

Los métodos clásicos propuestos en la literatura para evaluar la identificabilidad estructural siguen cuatro líneas principales: método directo (Denis-Vidal and Joly-Blanchard, 2000), método de igualar la salida (Walter and Pronzato, 1997), método de álgebra diferencial (Ljung and Glad, 1994) y el método del teorema del isomorfismo local (Vajda and Rabitz, 1989).

El método directo consiste en aplicar la definición de identificabilidad, es decir, el modelo es identificable si dos conjuntos paramétricos distintos dan lugar a dos medidas distintas. El principal inconveniente que presenta este enfoque es que solo permite demostrar la no identificabilidad del modelo, debido a que la condición de que solo sea posible obtener la misma salida si el conjunto paramétrico es el mismo, es una condición necesaria pero no suficiente. El método de igualar la salida consiste en comprobar si la igualdad de dos trayectorias de la salida, partiendo de la misma condición, implica la igualdad de los conjuntos paramétricos. Este tipo de enfoque se caracteriza por ser sencillo de aplicar pero da lugar a expresiones inmanejables incluso para sistemas relativamente sencillos. El método de álgebra diferencial consiste en comprobar si una estructura paramétrica de un modelo se puede reorganizar en un conjunto de ecuaciones diferenciales equivalentes que tengan una determinada estructura algebraica, es decir, el orden y el grado con respecto a los parámetros. Es un enfoque sistemático pero su implementación encuentra dificultades para sistemas en los que no se pueda medir el estado completo. Por último, el método del teorema del isomorfismo local se basa en ideas de geometría diferencial aplicadas a la teoría de sistemas. Este método consiste en analizar las relaciones que se deben dar para que dos conjuntos paramétricos independientes den lugar al mismo mapa de entrada-salida. El sistema será identificable si ambos conjuntos paramétricos son idénticos. En Anstett-Collin et al. (2020) se puede consultar una extensa comparativa entre los principales enfoques vistos anteriormente para analizar la identificabilidad estructural.

Además de los métodos clásicos para analizar la identificabilidad descritos anteriormente, existe una alternativa práctica proporcionada por diversas metodologías y herramientas informáticas que no requieren de conocimientos sobre identificabilidad por parte del usuario. A menudo, analizar la identificabilidad estructural de un modelo requiere de cálculos simbólicos complejos que conllevan un elevado coste computacional. En los últimos años se han desarrollado varias herramientas para acometer esta tarea. En Rey Barreiro and Villaverde (2023) se proporciona una visión general de todas las herramientas disponibles actualmente. En este trabajo, queremos destacar de entre todas las herramientas, a DAISY (Bellu et al., 2007), GenSSI (Chiş et al., 2011) y SIAN (Hong et al., 2019). No obstante, en este trabajo se decide emplear un método clásico para analizar la identificabilidad estructural, en concreto se emplea el método del teorema del isomorfismo local. En base a nuestra experiencia, este enfoque permite evaluar de forma sencilla la identificabilidad de sistemas con entrada afín y un elevado número de parámetros. A diferencia del resto de enfoques mencionados, el enfoque del teorema del isomorfismo local da lugar a expresiones algebraicas manejables y su implementación no presenta dificultades aunque el modelo propuesto tenga un elevado número de parámetros y variables desconocidas, o no se disponga de medidas del estado completo. A continuación, se explica en detalle el método del teorema del isomorfismo local.

Este método fue propuesto por S. Vadja y H. Rabitz y la idea general consiste en partir de dos conjuntos de parámetros independientes θ y $\tilde{\theta}$, y estudiar qué relaciones deben darse entre estos conjuntos para que den lugar al mismo mapa de entrada-salida, suponiendo la misma estructura algebraica paramétrica (11). Si se llega a la conclusión de que ambos conjuntos deben ser idénticos, se habrá demostrado la implicación (13). De lo contrario, se habrá demostrado lo opuesto y, por tanto, el sistema no será identificable.

La representación $(\Sigma_\theta, x_0(\theta))$ del mapa $IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))}$ es mínima si no existe otro modelo con menos estados que dé lugar a una representación del mismo mapa, es decir que el sistema sea observable y controlable. Asumiendo que $(\Sigma_\theta, x_0(\theta))$ y $(\Sigma_{\tilde{\theta}}, x_0(\tilde{\theta}))$ son representaciones mínimas, el teorema del isomorfismo local establece que son representaciones del mismo mapa si y solo si son isomórficas, esto es,

$$IO_{(\Sigma_\theta, x_0(\theta))} = IO_{(\Sigma_{\tilde{\theta}}, x_0(\tilde{\theta}))} \iff \exists \varphi : x = \varphi(\tilde{x}), \quad (14)$$

donde φ es un difeomorfismo, es decir, una aplicación biunívoca y diferenciable entre los espacios de estados de las dos representaciones y \tilde{x} es el espacio de estados resultante de aplicar el difeomorfismo. Es decir, ambas son representaciones del mismo mapa si y solo si existe un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $V \in H$ tal que

$$f(\varphi(\tilde{x}), \theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}} f(\tilde{x}, \tilde{\theta}), \quad (15)$$

$$g(\varphi(\tilde{x}), \theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}} g(\tilde{x}, \tilde{\theta}), \quad (16)$$

$$h(\varphi(\tilde{x}), \theta) = h(\tilde{x}, \tilde{\theta}), \quad (17)$$

$$x_0(\theta) = \varphi(x_0(\tilde{\theta})), \quad (18)$$

$$\text{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}} = n, \quad (19)$$

para todo $\tilde{x} \in V$. En definitiva, si es posible encontrar un difeomorfismo entre los espacios de estado de las dos representaciones, entonces el teorema establece que ambas representaciones corresponden al mismo mapa de entrada-salida. Si, además, la existencia del difeomorfismo está condicionada por una relación de igualdad entre los conjuntos paramétricos, entonces el sistema es estructuralmente identificable.

A continuación se aplica en detalle el método presentado arriba para dos casos de estudio diferentes, en función de la disponibilidad que se tenga de las medidas de las variables de estado. En el primer caso se dispone de medidas del estado completo mientras que en el segundo caso únicamente se dispone de medidas de una variable de estado. Adicionalmente, se lleva a cabo un análisis en el que se determina la combinación mínima de variables a medir para que el sistema sea identificable.

3.2. Análisis del caso I - Medición completa del estado

En este caso se supone que todas las variables se pueden medir, es decir, $y = (T_1 \ T_2 \ T_3)^T$. Antes de aplicar el método del teorema del isomorfismo local, se comprueba que el sistema es una representación mínima, (es decir, observable y controlable). La resolución del difeomorfismo cumpliendo con las condiciones (15)-(19) da lugar a un sistema de ecuaciones para los parámetros, del tipo $\alpha_i(\theta) = \alpha_i(\tilde{\theta})$, $i = 1, \dots, 7$, donde $\tilde{\theta} = (\tilde{R}_1 \ \tilde{R}_2 \ \tilde{R}_3 \ \tilde{R}_4 \ \tilde{C}_1 \ \tilde{C}_2 \ \tilde{C}_3)$ y el conjunto de funciones $\{\alpha_i\}$ viene dado por

$$\alpha_1(\theta) = C_1 \quad (20)$$

$$\alpha_2(\theta) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (21)$$

$$\alpha_3(\theta) = C_1 R_2 \quad (22)$$

$$\alpha_4(\theta) = C_2 R_2 \quad (23)$$

$$\alpha_5(\theta) = C_2 R_4 \quad (24)$$

$$\alpha_6(\theta) = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (25)$$

$$\alpha_7(\theta) = C_3 R_4. \quad (26)$$

En este caso, se dispone del mismo número de incógnitas que de ecuaciones y presenta solución única, $\theta_i(\alpha_i)$, de la forma

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1 \left(\alpha_2 - \frac{1}{\alpha_3} \right)} \quad (27)$$

$$R_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad (28)$$

$$R_3 = \frac{\alpha_3 \alpha_5}{\alpha_1 (\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_4 - \alpha_5)} \quad (29)$$

$$R_4 = \frac{\alpha_3 \alpha_5}{\alpha_1 \alpha_4} \quad (30)$$

$$C_1 = \alpha_1 \quad (31)$$

$$C_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} \quad (32)$$

$$C_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_4 \alpha_7}{\alpha_3 \alpha_5}. \quad (33)$$

Entonces, si se mide el estado completo el sistema de ecuaciones presenta solución única, esto implica que $\theta = \tilde{\theta}$ y por lo tanto el modelo es estructuralmente identificable.

3.3. Análisis del caso II - Medición parcial del estado

En la práctica no siempre es posible medir el estado completo. Como ejemplo, se asume que únicamente se dispone de medidas de la temperatura $y = T_1$. Cabe destacar que la temperatura ambiente se considera como una constante, es decir, su dinámica no experimenta cambios. Por lo tanto, no aporta prácticamente información para la estimación paramétrica y por consiguiente no se tiene en cuenta en este análisis. En primer lugar, se verifica que la representación es mínima, es decir, el sistema es observable y controlable midiendo la temperatura T_1 . Posteriormente, se aplica el método del isomorfismo local al modelo presentado en la Sección 2, con el fin de encontrar un difeomorfismo que cumpla las condiciones establecidas arriba (15)-(19). La resolución de este difeomorfismo da lugar a un conjunto de ecuaciones para los parámetros, del tipo $\beta_i(\theta) = \beta_i(\tilde{\theta})$, $i = 1, \dots, 6$, donde el conjunto de funciones $\{\beta_i\}$ viene dado por

$$\beta_1(\theta) = C_1 \quad (34)$$

$$\beta_2(\theta) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (35)$$

$$\beta_3(\theta) = C_1 C_2 R_2^2 \quad (36)$$

$$\beta_4(\theta) = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (37)$$

$$\beta_5(\theta) = C_2 R_4 \quad (38)$$

$$\beta_6(\theta) = C_3 R_4. \quad (39)$$

En este caso, como hay un menor número de ecuaciones que de incógnitas no existe solución única y por consiguiente, no implica que $\theta = \tilde{\theta}$. Es decir, el modelo no es estructuralmente identificable midiendo únicamente T_1 . A pesar de este hecho, el análisis de identificabilidad proporciona información útil para convertir al modelo en identificable. De hecho, si se supone conocido el valor de cualquier parámetro, C_2 , C_3 , R_1 , R_2 , R_3 , o R_4 , el modelo pasa a ser identificable.

3.4. Análisis adicional: Configuración experimental mínima

En este caso de estudio se pretende determinar el menor número de variables a medir para que la estructura paramétrica propuesta sea identificable. La identificabilidad se pretende alcanzar de manera directa, es decir, sin medir más variables que las estrictamente necesarias o sin suponer conocido el valor de ciertos parámetros. Como el modelo propuesto se compone de tres variables de estado, las posibles combinaciones de estas entre sí, dan lugar a las siguientes siete configuraciones experimentales, denominadas CE, recogidas en la Tabla 1.

Tabla 1: Configuraciones experimentales en función de la casuística de variables medidas

Configuración experimental	Medición del estado	Temperaturas medidas
A (caso I)	Total	T_1, T_2 y T_3
B	Parcial	T_1 y T_2
C	Parcial	T_1 y T_3
D	Parcial	T_2 y T_3
E (caso II)	Parcial	T_1
F	Parcial	T_2
G	Parcial	T_3

En primer lugar, las configuraciones experimentales formadas por una única variable de estado (E, F y G) se han analizado pero solo se ha presentado la configuración experimental E, correspondiente al caso II. Esto es debido a que ninguna configuración experimental formada por la medida de una única variable es suficiente para que el modelo sea identificable. Además, la configuración experimental compuesta por todas las variables de estado (A) ya ha sido analizada (3.2), y se ha demostrado que el modelo es identificable. No obstante, se pretende determinar la menor combinación de variables a medir, por lo tanto, en este caso de estudio se analizan las configuraciones experimentales formadas por dos variables de estado (B, C y D). Para toda configuración experimental analizada posteriormente, en primer lugar se verifica que la representación sea mínima, es decir, que el sistema sea observable y controlable midiendo las variables que se indican. Posteriormente, se aplica el método del teorema del isomorfismo local al modelo presentado en la Sección 2. La resolución del difeomorfismo que cumple con las condiciones establecidas en (15)-(19) da lugar a un conjunto de relaciones que se detallan a continuación para cada configuración experimental en particular.

3.4.1. Configuración experimental B

La configuración experimental formada por las medidas de las temperaturas T_1 y T_2 da lugar a un conjunto de ecuaciones para los parámetros, del tipo $\gamma_i(\theta) = \gamma_i(\tilde{\theta})$, $i = 1, \dots, 7$, donde el conjunto de funciones $\{\gamma_i\}$ viene dado por

$$\gamma_1(\theta) = C_1 \quad (40)$$

$$\gamma_2(\theta) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (41)$$

$$\gamma_3(\theta) = C_1 R_2 \quad (42)$$

$$\gamma_4(\theta) = C_2 R_2 \quad (43)$$

$$\gamma_5(\theta) = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (44)$$

$$\gamma_6(\theta) = C_2 C_3 R_4^2 \quad (45)$$

$$\gamma_7(\theta) = C_3 R_4. \quad (46)$$

En este caso, el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas, y tiene solución única, $\theta_i(\gamma_i)$, de la forma,

$$R_1 = \frac{1}{\gamma_1 \left(\gamma_2 - \frac{1}{\gamma_3} \right)} \quad (47)$$

$$R_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \quad (48)$$

$$R_3 = \frac{\gamma_3 \gamma_6}{\gamma_1 (\gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 - \gamma_6 - \gamma_4 \gamma_7)} \quad (49)$$

$$R_4 = \frac{\gamma_3 \gamma_6}{\gamma_1 \gamma_4 \gamma_7} \quad (50)$$

$$C_1 = \gamma_1 \quad (51)$$

$$C_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_4}{\gamma_3} \quad (52)$$

$$C_3 = \frac{\gamma_1 \gamma_4 \gamma_7^2}{\gamma_3 \gamma_6}. \quad (53)$$

Por lo tanto, como el sistema de ecuaciones tiene solución única, implica que $\theta = \tilde{\theta}$, es decir, el modelo es estructuralmente identificable para la configuración experimental formada por medidas de las temperaturas T_1 y T_2 .

3.4.2. Configuración experimental C

La configuración experimental formada por las medidas de las temperaturas T_1 y T_3 da lugar a un conjunto de ecuaciones para los parámetros del estilo $\delta_i(\theta) = \delta_i(\tilde{\theta})$, $i = 1, \dots, 7$, donde el conjunto de funciones $\{\delta_i\}$ viene dado por

$$\delta_1(\theta) = C_1 \quad (54)$$

$$\delta_2(\theta) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (55)$$

$$\delta_3(\theta) = C_1 R_2 \quad (56)$$

$$\delta_4(\theta) = C_2 R_2 \quad (57)$$

$$\delta_5(\theta) = C_2 R_4 \quad (58)$$

$$\delta_6(\theta) = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (59)$$

$$\delta_7(\theta) = C_3 R_4. \quad (60)$$

En este caso, el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y presenta solución única. Además, se obtiene el mismo sistema de ecuaciones (20)-(26), y, por consiguiente, las mismas soluciones (27)-(33), que en el caso de medir el estado completo (A). Debido a que existe solución única implica que $\theta = \tilde{\theta}$, por lo tanto, el modelo es estructuralmente identificable para la configuración experimental formada por medidas de las temperaturas T_1 y T_3 . Cabe destacar que, a diferencia de la configuración experimental A, se requiere medir una variable de estado menos para obtener los mismos resultados. Esto supone tener que emplear un menor número de sensores y por consiguiente reducir el coste experimental.

3.4.3. Configuración experimental D

La configuración experimental formada por las medidas de las temperaturas T_2 y T_3 da lugar a un conjunto de ecuaciones para los parámetros del tipo $\epsilon_i(\theta) = \epsilon_i(\tilde{\theta})$, $i = 1, \dots, 5$, donde el conjunto de funciones $\{\epsilon_i\}$ viene dado por

$$\epsilon_1(\theta) = C_3 R_4 \quad (61)$$

$$\epsilon_2(\theta) = C_1 C_2 R_2 \quad (62)$$

$$\epsilon_3(\theta) = \frac{1}{C_1 C_2 R_4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{C_2 C_3 R_4^2} \quad (63)$$

$$\epsilon_4(\theta) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (64)$$

$$\epsilon_5(\theta) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left[\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] + \frac{1}{C_1 C_2 R_2^2}. \quad (65)$$

En este caso, como no hay una relación de uno a uno entre el número de ecuaciones y de incógnitas, no existe una solución única y por lo tanto, no se puede asegurar que $\theta = \tilde{\theta}$. Por consiguiente el modelo no es estructuralmente identificable para la configuración experimental formada por medidas de las temperaturas T_2 y T_3 . En vista de lo anterior se extrae la conclusión de

que es imprescindible medir la temperatura T_1 . De hecho, medir únicamente la temperatura T_1 proporciona una mayor información que medir de forma conjunta el resto de temperaturas, T_2 y T_3 . Esto se debe principalmente a que la entrada afecta directamente a la derivada de la temperatura T_1 . Por lo tanto, la menor configuración experimental que asegura la identificabilidad del modelo propuesto está formada por medidas de la temperatura T_1 y de cualquiera de las otras dos, T_2 o T_3 , es decir, lo que se corresponde con las configuraciones experimentales B y C.

4. Resultados prácticos y discusión

En este apartado se presentan una serie de resultados prácticos que ilustran las ventajas o inconvenientes de cada caso analizado previamente en la Sección 3.

4.1. Caso I - Medición completa del estado

En el caso de que se disponga de medidas del estado completo, $y = (T_1 \ T_2 \ T_3)^T$, el análisis de identificabilidad visto en la Sección 3.2, ha demostrado que el modelo propuesto es identificable. Para ilustrar la utilidad de esta propiedad, se presenta un proceso de identificación para determinar el valor de los parámetros desconocidos del modelo visto en la Sección 2 a partir de datos experimentales. Los datos experimentales se han procesado mediante un filtro de media móvil con el objetivo de eliminar el ruido que afecta a las mediciones.

El proceso de estimación paramétrica requiere establecer un criterio que exprese la precisión del ajuste del modelo obtenido respecto a los datos experimentales. En este trabajo se emplea una suma ponderada de los errores cuadráticos medios de las tres temperaturas (T_1 , T_2 y T_3). Es decir, el proceso de identificación paramétrica consiste en encontrar la solución del problema de optimización planteado a continuación:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Omega} \int_{t_0}^{t_f} (y(t) - y_m(t))^2 dt \quad (66)$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = f(x, \theta) + g(x, \theta) u_m \quad (67)$$

$$y(t) = h(x(t), \theta) \quad (68)$$

$$x(t_0) = x_m(t_0) \quad (69)$$

donde $u_m(t)$ e $y_m(t)$ son la entrada y salida experimentales, respectivamente, y $x_m(t_0)$ es el estado inicial medido.

Excepto en algunos casos específicos, no existen métodos analíticos para identificar modelos basados en procesos físicos debido a la estructura intrínseca que presentan. Por esta razón, se emplean métodos no lineales para determinar el valor óptimo de los parámetros. En este trabajo, se emplea la función *fmincon* del software matemático MATLAB para resolver el problema de optimización formulado arriba. En concreto se emplea el algoritmo de la región de confianza debido a que es aplicable a la mayoría de las funciones de error y presenta una convergencia más rápida y fiable dado que tiene en cuenta el gradiente de la función de coste. Los principales resultados numéricos se incluyen en la Tabla 2, donde se muestran los errores de cada temperatura así como la correspondiente tasa de ajuste para los parámetros óptimos θ^* con respecto a las medidas experimentales. El ajuste de las temperaturas, para el conjunto de parámetros óptimo θ^* , se muestra en las Figuras 2, 3, y 4.

Tabla 2: Errores de la identificación paramétrica

Temperatura	RMSE (°C)	T_m^a (°C)	$\frac{RMSE}{T_m}$
T_1	2.15	105.96	2.03 %
T_2	2.06	88.5	2.33 %
T_3	1.89	88.65	2.13 %

^a
 T_m : Temperatura media (°C)

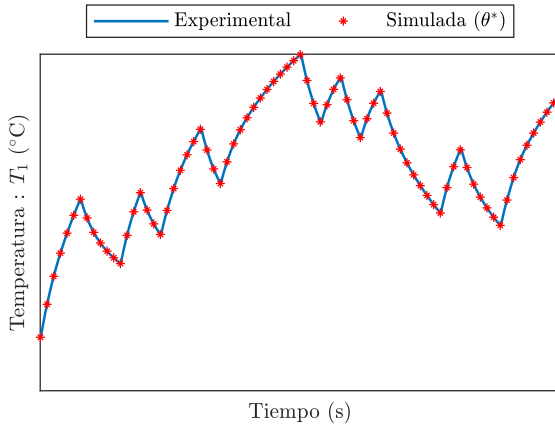


Figura 2: Evolución temporal de la temperatura T_1 experimental y simulada para el conjunto óptimo de parámetros θ^* .

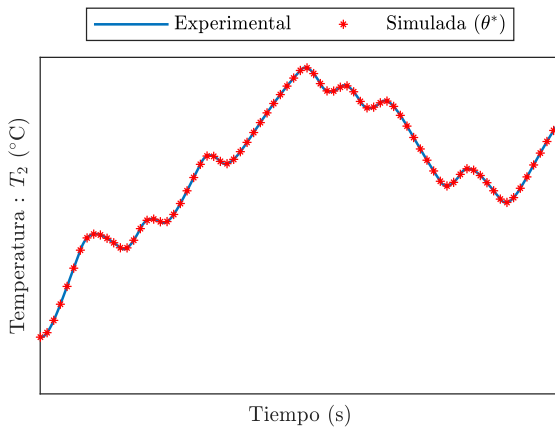


Figura 3: Evolución temporal de la temperatura T_2 experimental y simulada para el conjunto óptimo de parámetros θ^* .

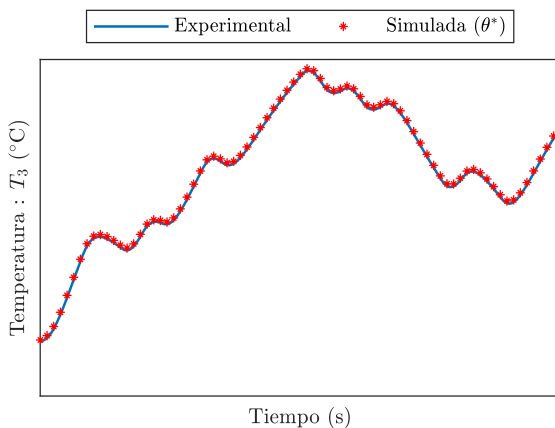


Figura 4: Evolución temporal de la temperatura T_3 experimental y simulada para el conjunto óptimo de parámetros θ^* .

A la vista de los resultados, se puede extraer una serie de conclusiones. En primer lugar, el modelo permite obtener resultados coherentes ya que se basa en los mismos principios físicos que gobiernan el sistema real. En segundo lugar, el proceso de identificación paramétrica arroja unos buenos resultados. Finalmente, en relación a los resultados obtenidos del análisis de identificabilidad estructural, se puede concluir que existe un único conjunto paramétrico óptimo θ^* que dé lugar al mismo mapa de entrada-salida.

4.2. Caso II - Medición parcial del estado

En este caso de estudio se plantea un ejemplo ilustrativo de lo que puede ocurrir cuando no se cumple la propiedad de indentificabilidad, como es el caso de medir únicamente una temperatura, en particular, $y = T_1$ tal y como se ha comentado en la Sección 3.3. Con este fin, se manipulan las ecuaciones (34)-(39) para encontrar dos conjuntos paramétricos distintos que den lugar al mismo mapa de entrada-salida de la temperatura medida, es decir, T_1 . Estos conjuntos paramétricos distintos se denominan θ_A y θ_B .

La dinámica del modelo introducido en la Sección 2 se simula para los dos conjuntos paramétricos distintos, θ_A y θ_B . Los resultados de simulación son representados en las Figuras 5, 6, y 7. En base a estos resultados, se puede concluir que existen al menos dos conjuntos paramétricos distintos que dan lugar al mismo mapa de entrada-salida de la temperatura medida, esto es, se verifica que el modelo no es identificable midiendo únicamente T_1 . Por lo tanto, no hay garantías de que los parámetros estimados tengan un significado físico.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un estudio de identificabilidad estructural de un sistema térmico que puede ser de interés en estudios de eficiencia energética. Este sistema ha sido analizado para dos casos diferentes. En el primer caso, se ha demostrado que el sistema es identificable siempre y cuando se dispongan medidas de todas las temperaturas. Este hecho asegura la existencia de un único conjunto paramétrico para cada posible dinámica del sistema. Con los resultados obtenidos del proceso de identificación, se puede asegurar que el conjunto de parámetros estimados corresponde con el conjunto del sistema real. La precisión del ajuste refleja el excelente rendimiento conseguido por el modelo de caja gris. Este tipo de modelo, lineal y de bajo orden, permite reproducir en detalle la dinámica de todas las temperaturas sin necesidad de grandes requerimientos computacionales. En el segundo caso, se demuestra que el modelo no es identificable midiendo solo la temperatura T_1 . Un ajuste paramétrico puede conducir a un modelo que refleje correctamente la dinámica de la temperatura medida, pero no hay garantías de que los parámetros estimados tengan sentido físico. Además, el modelo con los resultados obtenidos de este ajuste paramétrico no puede emplearse para predecir el resto de temperaturas no medidas.

Finalmente, se ha presentado un análisis adicional con el propósito de determinar la mínima combinación de variables a medir para que el modelo sea identificable. Se llega a la conclusión de que la configuración experimental mínima estará formada por T_1 y cualquiera de las otras dos temperaturas. Esta configuración experimental permite utilizar menos sensores y

reducir el gasto experimental. Los resultados obtenidos en este trabajo se pueden generalizar para cualquier modelo dinámico con entrada afín, bien sea lineal o no lineal con respecto a los parámetros. En general, se concluye que la identificabilidad es un requerimiento esencial que se debe evaluar antes de iniciar cualquier proceso de identificación paramétrica para la construcción de un modelo dinámico.

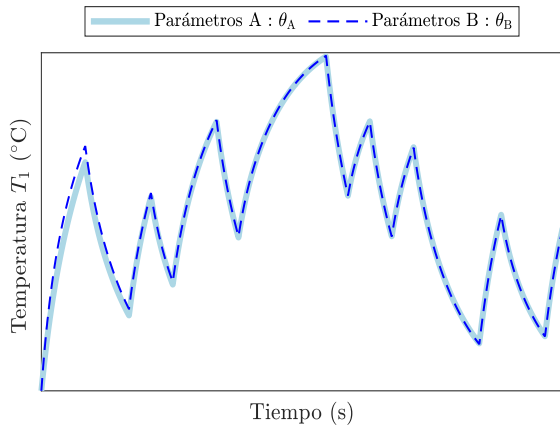


Figura 5: Evolución temporal de la temperatura simulada T_1 para los conjuntos paramétricos θ_A y θ_B

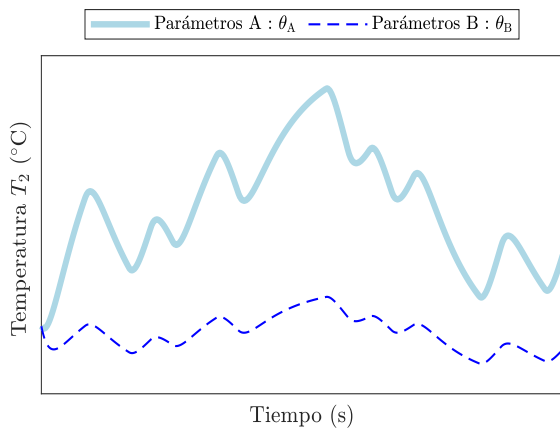


Figura 6: Evolución temporal de la temperatura simulada T_2 para los conjuntos paramétricos θ_A y θ_B

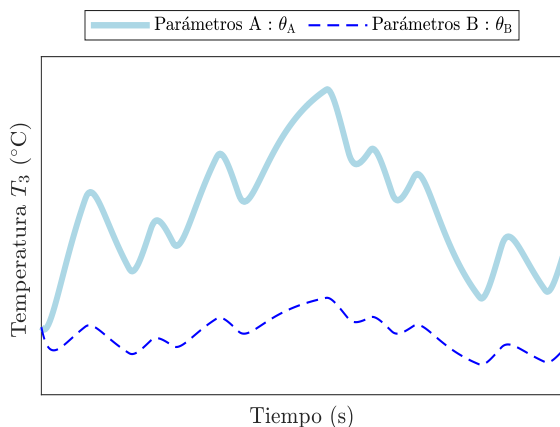


Figura 7: Evolución temporal de la temperatura simulada T_3 para los conjuntos paramétricos θ_A y θ_B

Agradecimientos

Esta publicación es parte de los proyectos de I+D+i CPP2021-008938, PID2021-124137OB-I00 y TED2021-130224B-I00, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, por FEDER Una manera de hacer Europa y por la Unión Europea NextGenerationEU/PRTR. La investigación también ha sido parcialmente financiada por el Gobierno de Aragón, mediante subvenciones para la contratación de personal investigador predoctoral en formación 2022-2026 (contrato de Fco. Javier Sanz Bermejo) y subvenciones destinadas a fomentar la actividad investigadora de los grupos de investigación (grupo “Robótica, Visión por Computador e Inteligencia Artificial”, T45_23R).

Referencias

- Aguirre-Zapata, E., Garcia-Tirado, J., Morales, H., di Sciascio, F., Amicarelli, A. N., 2023. Metodología para el modelado y la estimación de parámetros del proceso de crecimiento de lobesia botrana. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 20 (1), 68–79.
- Anstett-Collin, F., Denis-Vidal, L., Millérioux, G., 2020. A priori identifiability: An overview on definitions and approaches. *Annual Reviews in Control*.
- Bellu, G., Saccomani, M. P., Audoly, S., D’Angiò, L., 2007. Daisy: A new software tool to test global identifiability of biological and physiological systems. *Computer methods and programs in biomedicine* 88 (1), 52–61.
- Cabeza-Gil, I., Calvo, B., Grasa, J., Franco, C., Llorente, S., Martínez, M., 2020. Thermal analysis of a cooking pan with a power control induction system. *Applied Thermal Engineering* 180, 115789.
- Chiş, O., Banga, J. R., Balsa-Canto, E., 2011. Genssi: a software toolbox for structural identifiability analysis of biological models. *Bioinformatics* 27 (18), 2610–2611.
- Denis-Vidal, L., Joly-Blanchard, G., 2000. An easy to check criterion for (un) identifiability of uncontrolled systems and its applications. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45 (4), 768–771.
- Hong, H., Ovchinnikov, A., Pogudin, G., Yap, C., 2019. Sian: software for structural identifiability analysis of ode models. *Bioinformatics* 35 (16), 2873–2874.
- Ljung, L., Glad, T., 1994. On global identifiability for arbitrary model parametrizations. *Automatica* 30 (2), 265–276.
- Lucchi, M., Lorenzini, M., 2019. Control-oriented low-order models for the transient analysis of a domestic electric oven in natural convective mode. *Applied Thermal Engineering* 147, 438–449.
- Lucchi, M., Suzzi, N., Lorenzini, M., 2019. Dynamic model for convective heating of a wet brick during energy characterisation of domestic electric ovens. *Applied Thermal Engineering* 161, 114117.
- Mirade, P.-S., Daudin, J.-D., Ducept, F., Trystram, G., Clément, J., 2004. Characterization and cfd modelling of air temperature and velocity profiles in an industrial biscuit baking tunnel oven. *Food research international* 37 (10), 1031–1039.
- Ramallo-González, A. P., Eames, M. E., Coley, D. A., 2013. Lumped parameter models for building thermal modelling: An analytic approach to simplifying complex multi-layered constructions. *Energy and Buildings* 60, 174–184.
- Ramírez-Laboreo, E., Sagiés, C., Llorente, S., 2014. Thermal modeling, analysis and control using an electrical analogy. In: *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*. IEEE, pp. 505–510.
- Rey Barreiro, X., Villaverde, A. F., 2023. Benchmarking tools for a priori identifiability analysis. *Bioinformatics* 39 (2), btad065.
- Royer, S., Thil, S., Talbert, T., Polít, M., 2014. A procedure for modeling buildings and their thermal zones using co-simulation and system identification. *Energy and buildings* 78, 231–237.
- Unklesbay, K., Boza-Chacon, A., Unklesbay, N., 1997. Air temperature transfer function of a convection oven. *Food Control* 8 (1), 39–43.
- Vajda, S., Rabitz, H., 1989. State isomorphism approach to global identifiability of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 34 (2), 220–223.
- Vilas, C., Arias-Méndez, A., García, M. R., Alonso, A. A., Balsa-Canto, E., 2018. Toward predictive food process models: a protocol for parameter estimation. *Critical reviews in food science and nutrition* 58 (3), 436–449.
- Walter, E., Pronzato, L., 1997. *Identification of parametric models: from experimental data*. Springer Verlag.