

Control para seguimiento de trayectorias cartesianas en robots manipuladores

Raúl Rascón^{a,*}, Adrián Flores-Mendoza^a, Javier Moreno-Valenzuela^b, Carlos Aguilar-Avelar^a

^aFacultad de Ingeniería Mexicali, Universidad Autónoma de Baja California, Blvd. Benito Juárez sin número, Mexicali, C.P. 21280, Baja California, México.

^bInstituto Politécnico Nacional CITEDI, México, Av. Instituto Politécnico Nacional número 1310, Tijuana, C.P. 22435, Baja California, México.

To cite this article: Rascón, R., Flores-Mendoza, A., Moreno-Valenzuela, J., Aguilar-Avelar, C. 2024. Cartesian trajectory tracking in manipulator robots. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 21, 252-261. <https://doi.org/10.4995/riai.2024.20399>

Resumen

En este artículo se aborda el control cartesiano para seguimiento de trayectorias de robots manipuladores. Las trayectorias deseadas se proponen en espacio cartesiano. Mediante la cinemática inversa se obtienen las trayectorias deseadas en espacio articular. A partir de esta relación se obtienen las velocidades y aceleraciones articulares deseadas en donde se hace uso también de la cinemática diferencial. El modelo dinámico se obtiene mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. El objetivo de seguimiento de trayectorias se logra utilizando solamente mediciones de posición como retroalimentación, por lo que se omite el uso de filtros y observadores de velocidad. Se prueba estabilidad asintótica semiglobal en el sentido de Lyapunov para el caso de trayectorias articulares y estabilidad asintótica local para trayectorias en espacio cartesiano. Se ilustran los resultados mediante simulaciones numéricas en un robot de dos grados de libertad y la validación experimental en un robot SCARA.

Palabras clave: Manipulación robótica, planificación y seguimiento de trayectorias, control robusto, sistemas de control no lineal, observadores y predictores.

Cartesian trajectory tracking in manipulator robots

Abstract

This article addresses Cartesian control for trajectory tracking of robot manipulators. The desired trajectories are proposed in Cartesian space. Through inverse kinematics, the desired trajectories in the joint space are obtained. From this relationship, the desired joint velocities and accelerations are obtained, where differential kinematics is also used. The dynamic model is obtained using the Euler-Lagrange equations of motion. The objective of trajectory tracking of robot manipulators is achieved using only position measurements as feedback, thus omitting the use of filters and velocity observers. Semiglobal asymptotic stability is proved in the Lyapunov sense for the case of joint space trajectories and local asymptotic stability for trajectories in Cartesian space. The results are illustrated through numerical simulations in a two-degree-of-freedom robot and the experimental validation in a SCARA robot.

Keywords: Robotic manipulation, trajectory tracking, robust control, nonlinear control systems, observers and predictors.

1. Introducción

Un problema en el área de robots manipuladores es el diseño de algoritmos de control para seguimiento de trayectorias. Algunos trabajos previos sobre control para seguimiento de trayectorias en robots manipuladores son Andreev and Peregudova (2019), Lazaroiu et al. (2015), Qi et al. (2015) y Huang et al. (2015).

Comúnmente en el diseño de controladores para seguimiento de trayectorias en robots manipuladores, la velocidad articular debe estar disponible para retroalimentación, lo cual puede ser una desventaja si no se cuenta con sensores de velocidad. Esta situación se puede resolver utilizando un observador de velocidad, o un diferenciador. Cuando se utiliza un observa-

*Autor para correspondencia: raul.rascon@uabc.edu.mx

dor para reconstruir la velocidad, pueden surgir algunos problemas como la utilización de muchos recursos computacionales, problemas para sintonizar las ganancias, una señal de respuesta transitoria no adecuada, además de que en algunos casos la implementación del observador puede ser difícil. Por otra parte, los observadores pueden formar lazos de control en el software que se implemente, por lo que el sistema en lazo cerrado se puede volver inestable bajo ciertas condiciones, ver Tian et al. (2019).

Existe literatura sobre el control para seguimiento de trayectorias en robots manipuladores, ver Loria (1996), Yarza et al. (2013), Romero et al. (2015), Loria (2016). Por ejemplo, un controlador para resolver el problema de seguimiento sin mediciones de velocidad en un sistema de un grado de libertad, el cual fue modelado utilizando el método de Euler-Lagrange, se presenta en Yan et al. (2020). También en Qi et al. (2015), se aborda el problema de control para seguimiento de salida en sistemas tipo Euler-Lagrange a través de una ley de control dinámica. Como se observa en Rascón and Moreno (2020), el control de seguimiento utilizando medición de salida fue abordado y resuelto para una clase de sistemas de Euler-Lagrange con un grado relativo arbitrariamente alto. En Nunes and Hsu (2010), un control PD más precompensación se utilizó para resolver el problema de seguimiento de salida en sistemas tipo Euler-Lagrange, el cual solamente requería que el sistema tuviera fricción viscosa sin importar que tan grande o pequeño fuera el coeficiente de fricción, tal como propuso Branicky (1998).

Ha habido algunas aplicaciones de controladores para seguimiento de trayectorias en robots manipuladores, por ejemplo en Muñoz et al. (2006) se abordó la planificación de movimientos en asistentes robóticos para el manejo de la cámara laparoscópica en cirugía mínimamente invasiva. El problema resuelto se centró en el control cartesiano de robots dotados con muñecas pasivas.

Anteriormente se han estudiado diversas técnicas para resolver el problema de seguimiento de trayectorias en robots manipuladores, como el moldeo de energía más inyección de amortiguamiento, véase Sandoval et al. (2022); control PD con compensación de gravedad utilizando un diferenciador para la velocidad en Sánchez-Sánchez et al. (2019); control por modos deslizantes en Zhang et al. (2023); Xian et al. (2022); redes neuronales en Jin et al. (2022). Así como diversas mezclas de técnicas de control, como el control adaptativo con lógica difusa en Xu and He (2023) y el control por modos deslizantes con redes neuronales en Zhao et al. (2022), entre otras.

En este trabajo, la motivación parte de diseñar un control para seguimiento de trayectoria que sea simple de implementar (solamente cuenta con una ganancia sintonizable), que sólo necesite mediciones de posición y que no requiera del diseño de filtros, derivadores u observadores. La acción proporcional del controlador más términos de precompensación ofrecen convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado. La contribución de este trabajo es el diseño del algoritmo para seguimiento de trayectorias en el plano cartesiano, junto con la prueba de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se revisa la formulación del modelo dinámico y se presenta un ejemplo para el caso de un robot de dos articula-

ciones rotacionales. En la sección 3 se presenta el diseño propuesto de controlador, así como la dinámica del sistema en lazo cerrado. La sección 4 presenta la prueba de estabilidad de Lyapunov del sistema en lazo cerrado resultante. En la sección 5 se describe la generación de trayectorias en espacio cartesiano y su transformación a espacio articular. La sección 6 ilustra el desempeño del controlador propuesto a través de simulaciones numéricas en un robot manipulador de dos grados de libertad. La sección 7 presenta experimentos llevados a cabo en un robot SCARA donde solamente se utilizan dos de sus eslabones rotacionales. Finalmente en la sección 8 se presentan conclusiones.

2. Planteamiento del problema

El problema se centra en el diseño de un controlador para seguimiento de trayectorias en robots manipuladores en cadena cinemática abierta, los cuales son completamente actuados. Se cuenta con sensores de posición para cada articulación, careciéndose de sensores de velocidad, los cuales no son considerados para diseñar el controlador propuesto. El modelo dinámico se obtiene utilizando la metodología de Euler-Lagrange (véase Morabito et al. (2004); Ortega et al. (1998); Loria and Panteley (2007)) y se puede representar utilizando la forma compacta de la siguiente manera:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_v\dot{q} = \tau, \quad (1)$$

donde $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones articulares generalizadas, respectivamente, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales, $F_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de coeficientes de fricción viscosa y, finalmente, $\tau \in \mathbb{R}^n$ corresponde al vector de pares de entrada. El número n es un entero estrictamente positivo que corresponde al número de articulaciones del sistema en cuestión.

La representación en espacio de estados del sistema de (1) es

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{q}, \\ \dot{\dot{q}} &= M^{-1}(q)[-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) - F_v\dot{q} + \tau], \\ y &= q, \end{aligned} \quad (2)$$

donde la única variable con acceso a medición es $q \in \mathbb{R}^n$ que contiene a las posiciones articulares y/o traslacionales.

3. Diseño del controlador

Considerando τ como la entrada de control, se propone el controlador

$$\tau = G(q) + M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + F_v\dot{q}_d - K_p z_1, \quad (3)$$

donde $q_d = [q_{d1}, \dots, q_{dn}]^T \in \mathbb{R}^n$ es un vector de trayectorias deseadas, que es diferenciable por lo menos dos veces. Se considera en el controlador (3) que las matrices del modelo del robot manipulador $G(q)$, $M(q)$, $C(q, \dot{q}_d)$ y F_v son completamente conocidas, por lo que el sistema en lazo cerrado podría ser sensible a la incertidumbre en estos parámetros. Los errores de posición y velocidad son dados de la siguiente forma: $z_1 = q - q_d$

y $z_2 = \dot{q} - \dot{q}_d$. El elemento $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal de ganancias positivas. El sistema en lazo cerrado se obtiene reemplazando τ de (3) en (2), así como considerando la propiedad $-C(q, \dot{q}_d)\dot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q}_d = 0$ (véase Kelly et al. (2006)). Por lo tanto, se tiene que la dinámica de los errores en lazo cerrado dada por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -M^{-1}(z_1 + q_d)[K_p z_1 + [C(z_1 + q_d, z_2 + \dot{q}_d) \\ &\quad + C(z_1 + q_d, \dot{q}_d)]z_2 + F_v z_2]. \end{aligned} \quad (4)$$

El único punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (4) esta dado por :

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = (0, 0). \quad (5)$$

4. Análisis de estabilidad

Teorema 4.1. *Considérese el sistema (2) bajo la ley de control (3), donde son conocidas las matrices del modelo del robot manipulador $G(q)$, $M(q)$, $C(q, \dot{q}_d)$ y F_v . Entonces las trayectorias de los errores z_1 y z_2 en el sistema en lazo cerrado (4) convergen al punto de equilibrio (5) asintóticamente de manera semiglobal, mientras que se cumplan las condiciones respecto a la matriz de ganancias K_p impuestas por $V(t, z_1, z_2)$ y $\dot{V}(t, z_1, z_2)$.*

Demostración. Para propósitos de estabilidad se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t, z_1, z_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p & \gamma M(z_1 + q_d) \\ \gamma M(z_1 + q_d) & M(z_1 + q_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde $\gamma > 0$ es una constante. Para mostrar que la función candidata de Lyapunov (6) es una función definida positiva y radialmente desacotada, obsérvese que cumple con la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\gamma \lambda_{\max}\{M(z_1 + q_d)\} \\ -\gamma \lambda_{\max}\{M(z_1 + q_d)\} & \lambda_{\min}\{M(z_1 + q_d)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Siempre y cuando los elementos de la matriz K_p sean tales que se satisfaga

- $\lambda_{\min}\{K_p\} > 0$,
- $\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{\gamma^2 \lambda_{\max}\{M(z_1 + q_d)\}}{\lambda_{\min}\{M(z_1 + q_d)\}}$,

la función del lado derecho (7) es definida positiva y radialmente desacotada. Haciendo un acotamiento similar de los términos se puede demostrar que $V(t, z_1, z_2)$ esta acotada superiormente por

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_p\} & \gamma \lambda_{\max}\{M(z_1 + q_d)\} \\ \gamma \lambda_{\max}\{M(z_1 + q_d)\} & \lambda_{\max}\{M(z_1 + q_d)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \end{bmatrix}, \quad (8)$$

la función del lado derecho de (8) es positiva definida si

- $\lambda_{\max}\{K_p\} > \gamma^2 \lambda_{\max}\{M(z_1 + q_d)\}$

se satisface, lo que significa que $V(t, z_1, z_2)$ es una función menguante.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (6) a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (4) esta dada por

$$\dot{V}(t, z_1, z_2) = - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

donde

- $R_{11} = K_p$,
- $R_{12} = -\frac{\gamma}{4} \dot{M}(z_1 + q_d) + \frac{\gamma}{2} C(z_1 + q_d, \dot{q}_d) + \frac{\gamma}{2} F_v$,
- $R_{21} = -\frac{\gamma}{4} \dot{M}(z_1 + q_d) + \frac{\gamma}{2} C(z_1 + q_d, \dot{q}_d) + \frac{\gamma}{2} F_v$,
- $R_{22} = F_v + C(z_1 + q_d, \dot{q}_d) - \gamma M(z_1 + q_d)$.

Se busca acotar superiormente a $\dot{V}(t, z_1, z_2)$ por una función definida negativa en términos de los estados z_1 y z_2 . El primer término $-z_1^T R_{11} z_1$ puede acotarse de la siguiente manera

$$-z_1^T K_p z_1 \leq -\lambda_{\min}\{K_p\} \|z_1\|^2, \quad (10)$$

en lo referente a los términos cruzados R_{12} y R_{21} podemos utilizar la propiedades de la matriz centrífuga y de Coriolis, ver referencia Kelly et al. (2006) o el apéndice B para detalles, reduciéndose la expresión a

$$R_{12} = R_{21} = -\frac{\gamma}{2} C(z_1 + q_d, z_2) + \frac{\gamma}{2} F_v, \quad (11)$$

quedándonos acotados los términos cruzados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -z_1^T R_{12} z_2 &\leq \left(\frac{\gamma}{2} k_{c1} \|z_2\| + \frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}\{F_v\} \right) \|z_1\| \|z_2\|, \\ -z_2^T R_{21} z_1 &\leq \left(\frac{\gamma}{2} k_{c1} \|z_2\| + \frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}\{F_v\} \right) \|z_1\| \|z_2\|. \end{aligned} \quad (12)$$

El término restante satisface

$$-z_2^T R_{22} z_2 \leq (-\lambda_{\min}\{F_v\} - k_{c1} \|\dot{q}_d\| + \gamma k'_M) \|z_2\|^2, \quad (13)$$

las constantes k_{c1} y k'_M están definidas en el apéndice B. Las cotas (10), (12) y (13) conducen a que la derivada temporal $\dot{V}(t, z_1, z_2)$ en (9) cumpla con

$$\dot{V}(t, z_1, z_2) \leq - \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & Q_{12} \\ Q_{21} & \lambda_{\min}\{F_v\} + k_{c1} \|\dot{q}_d\| - \gamma k'_M \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \end{bmatrix}, \quad (14)$$

donde

- $Q_{12} = -\frac{\gamma}{2} k_{c1} \|z_2\| - \frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}\{F_v\}$,
- $Q_{21} = -\frac{\gamma}{2} k_{c1} \|z_2\| - \frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}\{F_v\}$.

Con el fin de que la matriz Q dada en (14) sea definida positiva, es necesario y suficiente que el determinante de Q sea positivo, ya que la condición $\lambda_{\min}\{K_p\} > 0$ ya se había establecido previamente como necesaria para que la función candidata de Lyapunov $V(t, z_1, z_2)$ en (6) sea definida positiva. Nótese en (14) que la combinación $\lambda_{\min}\{K_p\}(\lambda_{\min}\{F_v\} + k_{c1} \|\dot{q}_d\|) > 0$ debe ser lo suficientemente grande para lograr que $Q > 0$, en una primera aproximación, en caso de que no se cumpla esta desigualdad debido a que los parámetros del robot manipulador y

$\|\dot{q}_d\|$ son relativamente pequeños, es suficiente con aumentar el valor de $\lambda_{\min}\{K_p\}$ para lograr que $Q > 0$, para cada conjunto compacto $B_r = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} = \left\| \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\| \leq r \right\}$, donde $r > 0$ es arbitrariamente grande.

Dado que la función de Lyapunov $V(t, z_1, z_2)$ en (6) es definida positiva en forma global, menguante y radialmente des-acotada, mientras que para cualquier $r > 0$ se cumplan las condiciones establecidas en esta prueba, así como la función $\dot{V}(t, z_1, z_2)$ expresada en (9) es definida negativa para cualquier conjunto B_r siempre que se cumplan las condiciones dadas, entonces, $V(t, z_1, z_2)$ es una función de Lyapunov. Por lo que podemos concluir estabilidad asintótica semiglobal del origen del sistema en lazo cerrado (4). \square

4.1. Sintonización de ganancia K_p del controlador

Acorde con las condiciones necesarias para concluir estabilidad asintótica semiglobal del origen del sistema en lazo cerrado (4) planteadas en el Teorema 4.1, podemos obtener un λ_{\min} para la matriz de ganancias K_p , el cual debe satisfacer que

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \max \left\{ \frac{\frac{\gamma^2}{4}(k_{c1}\|z_2\| + \lambda_{\max}\{F_v\})^2}{\lambda_{\min}\{F_v\} + k_{c1}\|\dot{q}_d\| - \gamma k'_M}, \frac{\gamma^2 \lambda_{\max}^2\{M(\cdot)\}}{\lambda_{\min}\{M(\cdot)\}} \right\}, \quad (15)$$

sujeto a

$$0 < \gamma < \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}\{F_v\} + k_{c1}\|\dot{q}_d\|}{k'_M}, \sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{M(\cdot)\}}{\lambda_{\max}^2\{M(\cdot)\}}} \right\}, \quad (16)$$

haciendo $r = \|z_2\|$, siempre puede seleccionarse una $\lambda_{\min}\{K_p\}$ suficientemente grande.

5. Generación de trayectorias para un robot manipulador de dos grados de libertad

Usualmente el espacio de trabajo de los robots manipuladores suele ser en espacio cartesiano o espacio articular, los cuales nos brindan diferentes enfoques espaciales de la posición del robot. Para el caso de espacio articular, se refiere a las coordenadas expresadas en grados o radianes de cada una de las articulaciones del robot, mientras que en espacio cartesiano se refiere a la posición en coordenadas cartesianas del efector final. Para el problema de seguimiento, la trayectoria en cualquiera de los dos espacios de trabajo debe cambiar con respecto al tiempo, tal que las posiciones deseadas en espacio articular serán $q_d \in \mathbb{R}^n$, mientras que en espacio cartesiano están dadas por $\chi = [x_d, y_d]^T \in \mathbb{R}^2$. La cinemática directa consiste en expresar la posición del efector final del robot manipulador con base a las coordenadas articulares. La cinemática inversa nos permitirá obtener las coordenadas articulares del robot manipulador en función de la posición del efector final. La cinemática directa para un robot manipulador de dos grados de libertad se obtiene por un procedimiento geométrico como el que se muestra en la Figura 1.

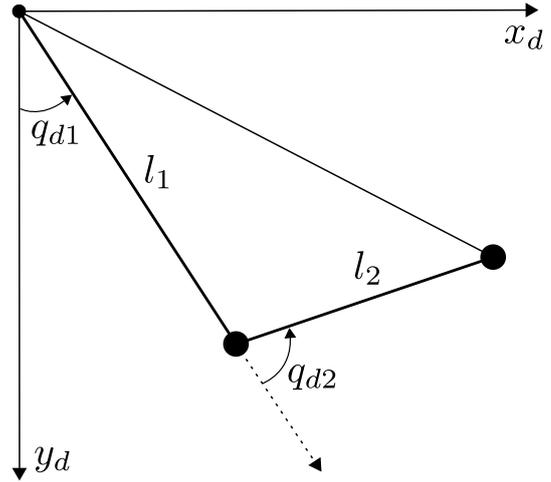


Figura 1: Método geométrico para obtener la cinemática directa e inversa de un robot manipulador de dos grados de libertad posicionado en el cuadrante cuatro.

Por lo tanto, la cinemática directa de un robot manipulador de dos grados de libertad en el cuarto cuadrante es

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \text{sen}(q_{d1}) + l_2 \text{sen}(q_{d1} + q_{d2}) \\ -l_1 \text{cos}(q_{d1}) - l_2 \text{cos}(q_{d1} + q_{d2}) \end{bmatrix} = f_R(q), \quad (17)$$

donde l_1 y l_2 son las longitudes del primer y segundo eslabón, respectivamente. La cinemática inversa de la ecuación (17) está dada por

$$\begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y_d}{x_d}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \text{sen}(q_{d2})}{l_1 + l_2 \text{cos}(q_{d2})}\right) \\ \arccos\left(\frac{x_d^2 + y_d^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

La cinemática diferencial se obtiene derivando la cinemática directa (17), tal que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \text{cos}(q_{d1}) + l_2 \text{cos}(q_{d1} + q_{d2}) & l_2 \text{cos}(q_{d1} + q_{d2}) \\ -l_1 \text{sen}(q_{d1}) - l_2 \text{sen}(q_{d1} + q_{d2}) & -l_2 \text{sen}(q_{d1} + q_{d2}) \end{bmatrix}}_{J(q_d)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

de donde se puede obtener el jacobiano del robot o jacobiano analítico $J(q_d)$, el cual se define como $J(q_d) = \frac{\partial f_R(q_d)}{\partial q_d} \in \mathbb{R}^{2 \times n}$. Dicho jacobiano permite obtener la velocidad articular

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{bmatrix} = J^{-1}(q_d) \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde $J^{-1}(q_d) \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ es la matriz inversa del jacobiano del robot, la cual existe si es una matriz cuadrada (en este caso $n=2$) y su determinante es diferente de cero. La aceleración articular está dada por

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} \\ \ddot{q}_{d2} \end{bmatrix} = -J^{-1}(q_d) \left[\frac{d}{dt} J(q_d) \right] J^{-1}(q_d) \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} + J^{-1}(q_d) \begin{bmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{y}_d \end{bmatrix}. \quad (21)$$

La expresión (18) es necesaria para transformar una trayectoria deseada del espacio cartesiano $[x_d, y_d]^T$ a una trayectoria deseada en el espacio articular q_d . De manera similar, son necesarias las expresiones (20) y (21) para obtener la primera derivada \dot{q}_d y segunda derivada \ddot{q}_d de las trayectorias deseadas en espacio

articular. Nótese que las variables q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d son requeridas en la implementación del controlador (3). Ejemplos de este tipo de transformaciones de coordenadas cartesianas a articulares las podemos encontrar en Moreno-Valenzuela et al. (2013); Cortés (2020).

6. Simulación numérica

Para ilustrar el desempeño del controlador (3) se le pone a prueba en una simulación numérica en Matlab. La planta seleccionada es un robot manipulador de dos grados de libertad, cuyos parámetros fueron tomados de un robot manipulador tipo SCARA, los cuales son dados en la Tabla 1. En el apéndice A se muestran las matrices del modelo dinámico del robot manipulador tipo SCARA, las cuales forman parte del controlador (3); nótese que el controlador (3) no utiliza el término gravitacional $G(q)$ debido a la configuración del robot manipulador utilizado.

Tabla 1: Parámetros del robot SCARA

| Descripción | Notación | Valor | Unidades |
|------------------------------------|----------|-------|---------------------|
| Primer articulación | | | |
| Masa | m_1 | 4 | kg |
| Dist. al centro de masa | l_{c1} | 0.22 | m |
| Largo | l_1 | 0.48 | m |
| Inercia relativa al centro de masa | I_1 | 0.5 | kg · m ² |
| Fricción viscosa | f_{v1} | 11 | N · m · s/rad |
| Segunda articulación | | | |
| Masa | m_2 | 3.5 | kg |
| Dist. al centro de masa | l_{c2} | 0.17 | m |
| Largo | l_2 | 0.34 | m |
| Inercia relativa al centro de masa | I_2 | 0.5 | kg · m ² |
| Fricción viscosa | f_{v2} | 8 | N · m · s/rad |

La trayectoria deseada o de referencia en el plano cartesiano está dada por una figura tipo corazón, cuyos parámetros están dados en la Tabla 2, donde las trayectorias de las coordenadas cartesianas deseadas para hacer una figura tipo corazón son

$$\begin{aligned} x_d &= \alpha (16 \sin(t)^3) + x_c, [m] \\ y_d &= \alpha (13 \cos(t) - 5 \cos(2t) - 2 \cos(3t) - \cos(4t)) + y_c. [m] \end{aligned} \quad (22)$$

Tabla 2: Parámetros de la trayectoria cartesiana deseada: simulación

| Descripción | Notación | Valor | Unidades |
|---------------------------|----------|-------|----------|
| Origen en x | x_c | 0.3 | m |
| Origen en y | y_c | -0.3 | m |
| Escalamiento de la figura | α | 0.01 | — |

Obteniendo la primera y segunda derivada de (22) con respecto al tiempo \dot{x}_d y \dot{y}_d , \ddot{x}_d y \ddot{y}_d , respectivamente, aplicando la cinemática inversa (18) y el jacobiano (19), y resolviendo la cinemática diferencial (20)-(21), es posible obtener las trayectorias deseadas en el espacio articular q_d , así como sus derivadas \dot{q}_d y \ddot{q}_d , las cuales se implementan en el controlador propuesto (3).

Respecto al controlador (3), la única ganancia que tenemos está dada por la matriz diagonal $K_p = \text{diag}\{2500, 1000\}$. Las condiciones iniciales para la simulación son $q(0) = [0 \text{ rad}, \pi/4 \text{ rad}]^T$ y $\dot{q}(0) = [0 \text{ rad/s}, 0 \text{ rad/s}]^T$.

A modo de ilustración se utilizan dos controladores encontrados en la literatura para comparar el desempeño del controlador que proponemos en (3). El siguiente algoritmo llamado controlador cartesiano de Pascal es propuesto en Sánchez-Sánchez (2010), este controlador considera que se cuenta con acceso a la medición de las velocidades,

$$\tau = -K_p \tanh(z_1) \sqrt{1 + \tanh(z_1)^2} - K_v \tanh(z_2) \sqrt{1 + \tanh(z_2)^2}, \quad (23)$$

los resultados de este controlador aparecen en las gráficas con color magenta. Las ganancias utilizadas fueron las siguientes $K_p = \text{diag}\{3500, 2000\}$ y $K_v = \text{diag}\{0,02K_{p1}, 0,02K_{p2}\}$, las mismas condiciones iniciales se utilizaron en todas las simulaciones numéricas. Otro controlador utilizado es el llamado control arco tangente cartesiano propuesto en Cortés (2020), el cual cuenta con la siguiente estructura,

$$\tau = -K_p \arctan(z_1) - K_v \arctan(z_2), \quad (24)$$

los resultados obtenidos con este controlador aparecen en las gráficas en color verde. Las ganancias que fueron utilizadas son $K_p = \text{diag}\{3500, 2000\}$ y $K_v = \text{diag}\{0,02K_{p1}, 0,02K_{p2}\}$.

A continuación se presentan los resultados obtenidos a través de simulaciones numéricas de los sistemas en lazo cerrado. En la Figura 2 podemos observar el seguimiento de la trayectoria articular para poder formar la figura de corazón en el espacio cartesiano X-Y. En la Figura 3 vemos los errores de seguimiento para el primer y segundo eslabón del robot manipulador, donde al utilizar el controlador propuesto a pesar de no contarse con medición ni estimación de velocidad como retroalimentación, se logra un error de seguimiento relativamente pequeño. La Figura 4 nos muestra las señales de control aplicadas en cada articulación del robot manipulador. Por otra parte, la Figura 5 muestra la trayectoria cartesiana que sigue el efector final (en color azul para el controlador propuesto) y la trayectoria cartesiana deseada (en color rojo). Por otra parte, la Figura 6 nos muestra el brazo del robot manipulador (en color verde) en un espacio tridimensional, donde se observa la trayectoria de referencia (en color rojo) y la trayectoria que recorre el efector final del robot (en color azul al utilizar el controlador propuesto). Podemos observar a partir de estas simulaciones que al utilizar el controlador propuesto en el robot manipulador, la etapa transitoria del error de seguimiento $z_1(t)$ dura más tiempo que al utilizar los otros controladores, esto podría deberse a que el controlador propuesto no utiliza una ganancia derivativa, ni mediciones o estimaciones de velocidad como retroalimentación. También podemos notar de la Figura 3 que al utilizar el controlador propuesto los errores de seguimiento en estado estacionario para el primer y segundo eslabón del robot manipulador son más pequeños que al implementar los otros controladores.

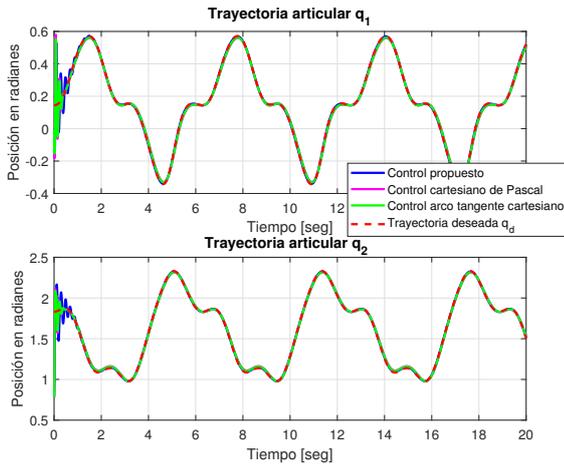


Figura 2: Seguimiento de la trayectoria deseada en coordenadas articulares para el primer y segundo eslabón del robot manipulador (simulación).

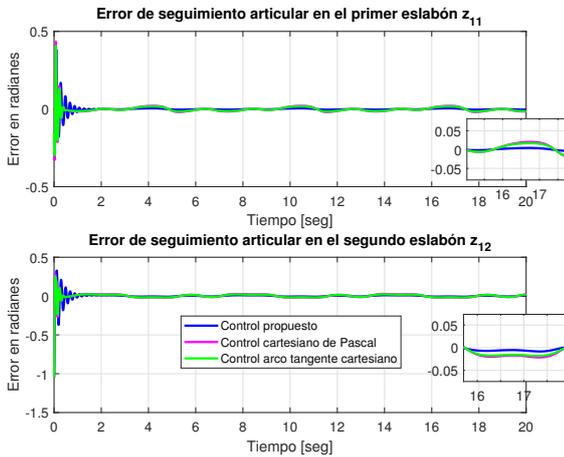


Figura 3: Errores de seguimiento de trayectoria del primer eslabón $z_{11}(t) = q_1(t) - q_{d1}(t)$ y segundo eslabón $z_{12}(t) = q_2(t) - q_{d2}(t)$ (simulación).

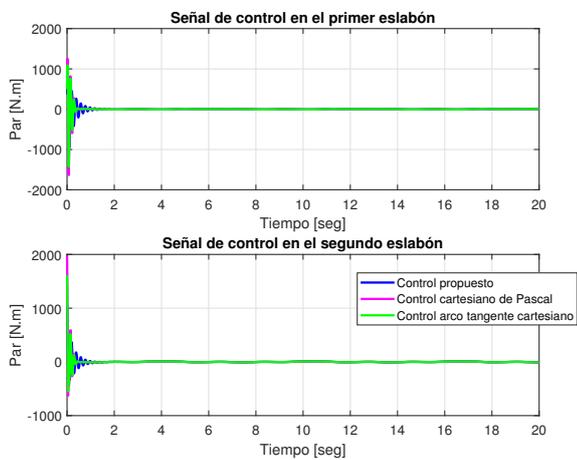


Figura 4: Señales de control aplicadas en cada eslabón (simulación).

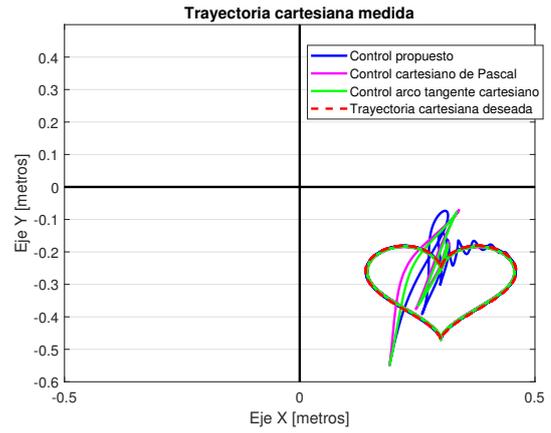


Figura 5: Trayectoria cartesiana medida y trayectoria cartesiana deseada en dos dimensiones X y Y (simulación).

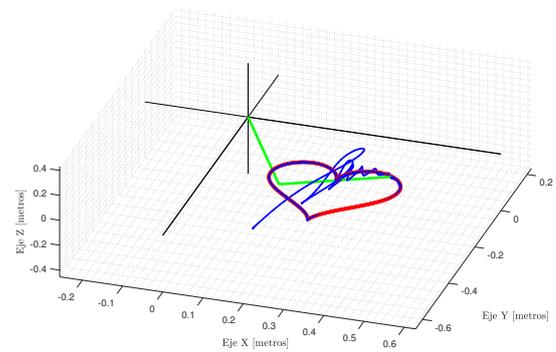


Figura 6: Trayectoria cartesiana medida utilizando el controlador propuesto (azul) y trayectoria cartesiana deseada (rojo) en tres dimensiones X, Y y Z. El robot manipulador aparece en color verde (simulación).

En el área de control y robótica no hay un criterio estándar para medir el desempeño de un algoritmo de control. Sin embargo un criterio aceptado es la obtención del índice de desempeño determinado por la norma L_2 definida como:

$$L_2(z_1) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|z_1(t)\|^2 dt} \quad (25)$$

donde T representa el tiempo de simulación. El mejor índice de desempeño corresponde a la norma $L_2(z_1)$ más pequeña. Un índice de desempeño alto representa un desempeño pobre del controlador. En la Figura 7 podemos observar las normas $L_2(z_1)$ obtenidas al utilizar el controlador propuesto y los otros controladores. Nótese que al utilizarse el controlador propuesto se obtiene una norma L_2 más pequeña que la obtenida al utilizarse los otros controladores. Esto se debe a que los errores de posición z_1 son más pequeños al utilizar el controlador propuesto, véase la Figura 3.

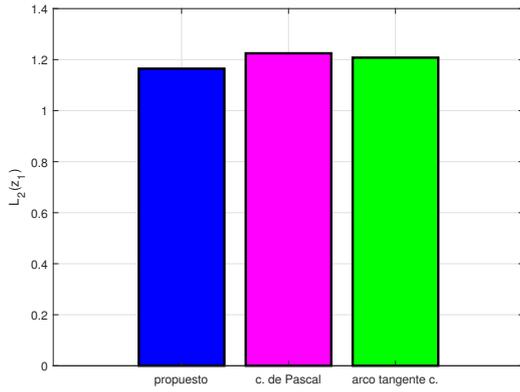


Figura 7: Índice de desempeño $L_2(z_1)$.

Otro índice de rendimiento que se puede utilizar, es la energía de la señal sobre un intervalo de tiempo de longitud T , definida como $\int_0^T |\tau_i(t)|dt$, con $i = 1, 2$, en este caso, obtenemos la señal de energía para cada eslabón del robot manipulador por separado. En las Figuras 8-9 se puede ver la energía aplicada en el primer y segundo eslabón del robot manipulador, respectivamente.

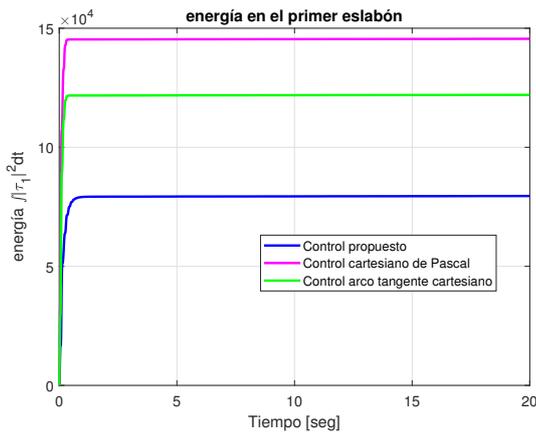


Figura 8: Señal de energía en el primer eslabón del robot manipulador $\int |\tau_1|^2 dt$.

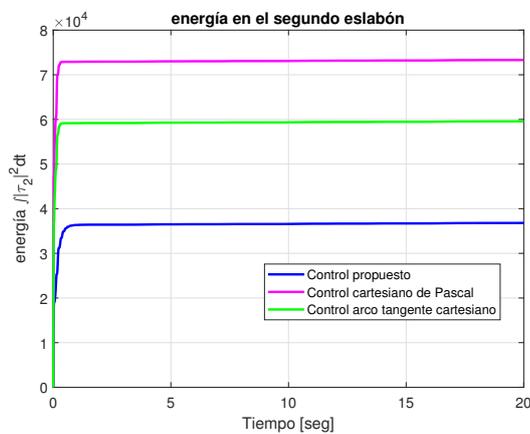


Figura 9: Señal de energía en el segundo eslabón del robot manipulador $\int |\tau_2|^2 dt$.

Aunque la premisa para el diseño del controlador propuesto no tiene como prioridad obtener mejores índices de desempeño que al utilizar los otros dos controladores, estos resultados favorables para el controlador propuesto se obtienen de manera indirecta, al omitir una ganancia derivativa en el diseño de control.

7. Experimentos

En esta sección se ilustra la efectividad del controlador propuesto (3), aplicándolo en un robot manipulador tipo SCARA (véase la Figura 10) localizado en el Laboratorio de Mecatrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. Respecto al hardware utilizamos un robot manipulador SONY SRX-4CH, así como una tarjeta de adquisición de datos dSPACE1103, la cual nos permite llevar a cabo experimentos en tiempo real. Por otra parte el software utilizado para programar el controlador es Simulink de MatLab®. Los parámetros del robot manipulador son mostrados en la Tabla 1.



Figura 10: Robot tipo SCARA como plataforma experimental.

La trayectoria deseada en el plano cartesiano está dada por la figura tipo corazón descrita por las ecuaciones en (22), cuyos parámetros son mostrados en la Tabla 3.

Tabla 3: Parámetros de la trayectoria cartesiana deseada: experimento

| Descripción | Notación | Valor | Unidades |
|---------------------------|----------|-------|----------|
| Origen en x | x_c | 0.2 | m |
| Origen en y | y_c | -0.4 | m |
| Escalamiento de la figura | α | 0.008 | — |

La obtención de las derivadas de la trayectoria $\dot{x}_d, \dot{y}_d, \ddot{x}_d$ y \ddot{y}_d , se realiza de la misma forma que la mencionada en la sección de simulación numérica. La ganancia del controlador K_p está dada por la matriz diagonal $K_p = \text{diag}\{100, 100\}$.

Las condiciones iniciales para el experimento son $q(0) = [-0,14 \text{ rad}, 1,15 \text{ rad}]^T$ y $\dot{q}(0) = [0 \text{ rad/s}, 0 \text{ rad/s}]^T$.

Los resultados obtenidos a través de experimentos realizados en el robot SCARA son mostrados a continuación. En la Figura 11 podemos observar el seguimiento de la trayectoria articular para poder formar la figura de corazón en el espacio cartesiano X-Y. En la Figura 12 vemos los errores de seguimiento para el primer y segundo eslabón en el robot SCARA. La Figura 13 nos muestra las señales de control aplicadas en cada articulación del robot SCARA. Por otra parte la Figura 14 muestra la trayectoria cartesiana que sigue el efector final (en color azul) y la trayectoria cartesiana deseada (en color rojo).

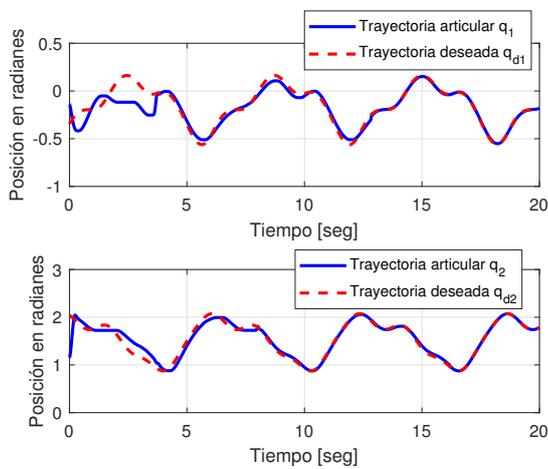


Figura 11: Seguimiento de la trayectoria deseada en coordenadas articulares para el primer y segundo eslabón del robot manipulador (experimento).

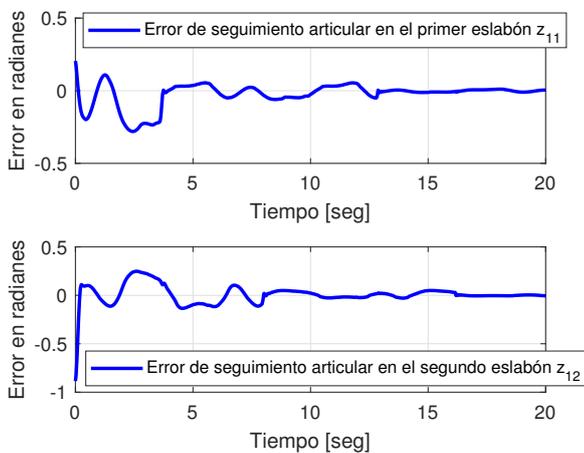


Figura 12: errores de seguimiento de trayectoria del primer eslabón $z_{11}(t) = q_1(t) - q_{d1}(t)$ y segundo eslabón $z_{12}(t) = q_2(t) - q_{d2}(t)$ (experimento).

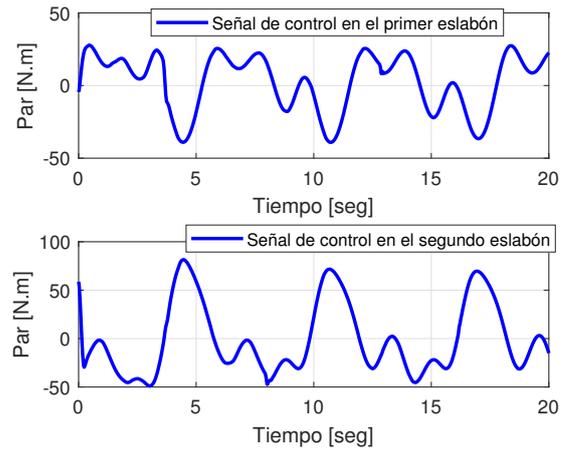


Figura 13: Señales de control aplicadas en cada eslabón (experimento).

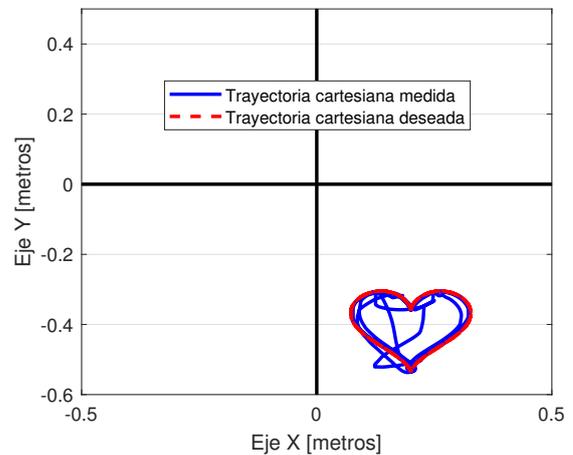


Figura 14: Trayectoria cartesiana medida y trayectoria cartesiana deseada en dos dimensiones X y Y (experimento).

8. Conclusiones

Se propuso un controlador que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias en el espacio cartesiano del robot, donde se utilizó una acción proporcional más términos de prealimentación basados en el modelo determinístico del sistema, los cuales se obtuvieron utilizando la metodología de Euler-Lagrange. La principal ventaja del controlador propuesto para seguimiento de trayectoria cartesiana o articular, es que solo necesita mediciones de posición en cada articulación para lograr que el error de seguimiento $z_1(t)$ tienda a cero asintóticamente. Cabe señalar que para lograr convergencia asintótica del error $z_1(t)$ hacia el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado, se deben de cumplir ciertas condiciones impuestas por la prueba de estabilidad. En el controlador propuesto, la implementación de observadores, filtros o diferenciadores es innecesaria. Se demostró estabilidad asintótica semiglobal para el caso de seguimiento de trayectorias en espacio articular y se argumenta estabilidad asintótica local para cuando las trayectorias deseadas se formulan en espacio cartesiano.

Referencias

- Andreev, A., Peregodova, O., 2019. Trajectory tracking control for robot manipulators using only position measurements. *International Journal Control* 135, 7–9. DOI: 10.1080/00207179.2017.1397755
- Branicky, M. S., 1998. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43, 475–482. DOI: 10.1109/9.664150
- Cortés, F. R., 2020. Robótica: control de robots manipuladores. Marcombo.
- Huang, C., Li, F., Jin, Z., 2015. Maximum power point tracking strategy for large-scale wind generation systems considering wind turbine dynamics. *IEEE Power Energy Society General Meeting*. DOI: 10.1109/PESGM.2015.7286039
- Jin, J., Zhao, L., Chen, L., Chen, W., 2022. A robust zeroing neural network and its applications to dynamic complex matrix equation solving and robotic manipulator trajectory tracking. *Frontiers in Neurobotics* 16, 1065256.
- Kelly, R., Santibañez, V., Loria, A., 2006. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer Science & Business Media, Leipzig, Germany.
- Lazaroiu, G., Longo, M., Roscia, M., Pagano, M., 2015. Comparative analysis of fixed and sun tracking low power pv systems considering energy consumption. *Energy Conversion and Management* 92, 143–148. DOI: 10.1016/j.enconman.2014.12.046
- Loria, A., 1996. Global tracking control of one degree of freedom euler-lagrange systems without velocity measurements. *IFAC Proceedings Volumes*, 5. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)58015-5
- Loria, A., 2016. Observers are unnecessary for output-feedback control of lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 61, 905–920. DOI: 10.1109/TAC.2015.2446831
- Loría, A., Panteley, E., 2007. A separation principle for a class of euler-lagrange systems. In: *New Directions in nonlinear observer design*. Springer, pp. 229–247.
- Lynch, K. M., Park, F. C., 2017. *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*, 1st Edition. Cambridge University Press, USA.
- Morabito, F., Teel, A. R., Zaccarian, L., 2004. Nonlinear antiwindup applied to euler-lagrange systems. *IEEE Transactions on robotics and automation* 20 (3), 526–537.
- Moreno-Valenzuela, J., Campa, R., Santibañez, V., 2013. Model-based control of a class of voltage-driven robot manipulators with non-passive dynamics. *Computers & Electrical Engineering* 39 (7), 2086–2099.
- Muñoz, V., Morales, I. G., del Pulgar, C. P., de Gabriel, J. G., Lozano, J. F., Cezezo, A. G., Vara, C., Toscano, R., 2006. Control cartesiano de un asistente robótico para cirugía laparoscópica. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 3 (4), 63–74.
- Nunes, E., Hsu, L., 2010. Global tracking for robot manipulators using a simple causal pd controller plus feedforward. *Robotica* 28, 23–34. DOI: 10.1017/S0263574709005529
- Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J., Sira-Ramírez, H., Ortega, R., Loría, A., Nicklasson, P. J., Sira-Ramírez, H., 1998. *Euler-Lagrange systems*. Springer.
- Qi, Z., H., L., P., S., 2015. Decentralized adaptive fuzzy tracking control for robot finger dynamics. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 23, 501–510. DOI: 10.1109/TFUZZ.2014.2315661
- Rascón, R., Moreno, J., 2020. Output feedback controller for trajectory tracking of robot manipulators without velocity measurements nor observers. *IET Control Theory and Applications* 14, 1819–1827. DOI: 10.1049/iet-cta.2020.0037
- Romero, J., Ortega, R., Sarras, I., 2015. A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 60, 818–823. DOI: 10.1109/TAC.2014.2330701
- Sánchez-Sánchez, Pablo y Reyes-Cortés, F., 2010. Cartesian control for robot manipulators. *robot manipulators trends and development*, 165–212.
- Sánchez-Sánchez, P., Gutiérrez-Giles, A., Pliego-Jiménez, J., Arteaga-Pérez, M., 2019. Seguimiento de trayectorias con incertidumbre del modelo usando un diferenciador robusto. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 16 (4), 423–434.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibañez, V., 2022. Sobre el control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento de sistemas mecánicos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial* 19 (4), 407–418.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G., 2008. *Robotics: Modelling, Planning and Control*, 1st Edition. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Tian, Z., Zhong, Q.-C., Ren, B., Yuan, J., 2019. Ude-based robust control for

systems with mismatched uncertainties via feedback compensation. *International Journal of Control* 0, 1–11.

DOI: 10.1080/00207179.2019.1669826

Xian, J., Shen, L., Chen, J., Feng, W., 2022. Continuous sliding mode control of robotic manipulators based on time-varying disturbance estimation and compensation. *IEEE Access* 10, 43473–43480.

Xu, S., He, B., 2023. Robust adaptive fuzzy fault tolerant control of robot manipulators with unknown parameters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.

Yan, Y., Yang, J., Sun, Z., Li, S., Yu, H., 2020. Non-linear-disturbance-observer-enhanced mpc for motion control systems with multiple disturbances. *IET Control Theory and Applications* 14, 63–72.

DOI: 10.1049/iet-cta.2018.5821

Yarza, A., Santibañez, V., Moreno, J., 2013. An adaptive output feedback motion tracking controller for robot manipulators: Uniform global asymptotic stability and experimentation. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 23, 599–611. DOI: 10.2478/amcs-2013-0045

Zhang, Y., Kong, L., Zhang, S., Yu, X., Liu, Y., 2023. Improved sliding mode control for a robotic manipulator with input deadzone and deferred constraint. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*.

Zhao, X., Liu, Z., Jiang, B., Gao, C., 2022. Switched controller design for robotic manipulator via neural network-based sliding mode approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 70 (2), 561–565.

Apéndice A. Modelo dinámico de un robot manipulador de dos grados de libertad sin términos de gravedad

Los términos correspondientes al modelo dinámico de un robot manipulador presentados en este apéndice son utilizados en el controlador (3), el cual se implementa en la sección de simulación numérica y en la sección de experimentos. La forma compacta del modelo dinámico de un robot manipulador sin términos de gravedad tiene la siguiente estructura:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} = \tau, \quad (\text{A.1})$$

considerando que el robot manipulador es de dos grados de libertad, la matriz de inercia tiene la forma

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2, \\ m_{12} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ m_{21} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, \\ m_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

por otra parte, la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis está dada por,

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

tal que sus elementos son

$$\begin{aligned} c_{11} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, \\ c_{12} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \\ c_{21} &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, \\ c_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

hay que tener en mente que en el controlador (3) no se utilizan las mediciones de las velocidades \dot{q} , en su lugar se utilizan las velocidades articulares deseadas \dot{q}_d , por lo que la matriz de

fuerzas centrífugas y de coriolis quedará como $C(q, \dot{q}_d)$. Finalmente, los elementos de la matriz de fricción viscosa son

$$F_v = \begin{bmatrix} f_{v1} & 0 \\ 0 & f_{v2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

donde $f_{v1}, f_{v2} \in \mathbf{R}^+$. En la literatura hay amplia información acerca del modelado dinámico de robots manipuladores, véase por ejemplo Kelly et al. (2006); Siciliano et al. (2008); Lynch and Park (2017). Los valores y las descripciones de los parámetros $m_1, m_2, l_1, l_2, l_{c1}, l_{c2}, I_1, I_2, f_{v1}$ y f_{v2} se muestran en la Tabla 1.

Apéndice B. Propiedades

Presentamos cuatro propiedades básicas del modelo dinámico para robots manipuladores de n grados de libertad utilizadas en la demostración del Teorema 4.1.

Propiedad de la matriz de inercia $M(q)$

En el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ tal que

$$\|M(q)z_2\| \leq k'_M \|z_2\| \quad \forall q, z_2 \in \mathbf{R}^n, \quad (\text{B.1})$$

donde $k'_M = \lambda_{Max}\{M(q)\}$. Para el ejemplo del robot SCARA utilizado en la sección de simulación numérica y en la parte experimental tomamos $M(q)$ de (A.2) y los datos de la Tabla 1 para determinar k'_M cuyo $\lambda_{Max} = 2,4376$.

Propiedades de la matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$

Para todo vector $q, \dot{q}, z_2 \in \mathbf{R}^n$ se tiene que

$$C(q, \dot{q} - z_2) = C(q, \dot{q}) - C(q, z_2) \quad (\text{B.2})$$

La matriz $C(q, \dot{q})$ está relacionada con la matriz de inercia $M(q)$ a través de la propiedad de antisimetría dada por

$$z_1^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] z_2 = 0 \quad \forall q, \dot{q}, z_1, z_2 \in \mathbf{R}^n. \quad (\text{B.3})$$

Esta propiedad solamente aplica para robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, tal que existe una constante $k_{c1} > 0$ donde

$$\begin{aligned} \|z_1^T C(q, z_2) z_2\| &\leq k_{c1} \|z_1\| \|z_2\|^2 \quad \forall q, z_1, z_2 \in \mathbf{R}^n \\ \|z_2^T C(q, \dot{q}_d) z_2\| &\leq k_{c1} \|\dot{q}_d\| \|z_2\|^2 \quad \forall q, \dot{q}_d, z_2 \in \mathbf{R}^n, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

véase Kelly et al. (2006) para llegar a la siguiente expresión $k_{c1} = n^2 [\max_{i,j,k,q} |C_{k,i,j}(q)|]$, donde n es el número de articulaciones del robot manipulador. Para el caso del robot SCARA utilizado en la sección de simulación numérica y en la de experimentos tenemos que $k_{c1} = 4m_2 l_1 l_{c2} = 0,8568$.